Математичко такмичење „Кенгур без граница” 2023.
11 – 12. разред

Задаци који вреде 3 поена

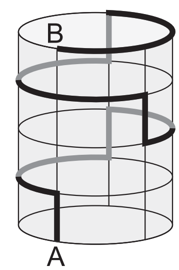
1. Вредност израза $\dfrac{7777^2}{5555 \cdot 2222}$ једнака је

А) 1 **Б)** $\dfrac{7}{10}$ **В)** $\dfrac{49}{10}$ **Г)** $\dfrac{77}{110}$ **Д)** 49

2. Милица је након бацања пет коцкица видела 19 тачкица на горњим странама тих коцкица. Колико је највише шестица могла да добије приликом тог бацања?

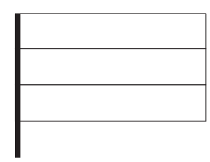
А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3 **Д)** 4

3. Мрав се креће по конзерви облика ваљка од тачке A до тачке B. Висина ваљка је $15\,\mathrm{cm}$, а обим основе је $30\,\mathrm{cm}$. Он се креће или вертикално навише или хоризонтално дуж кружних лукова по конзерви. Његов пут је приказан подебљаном линијом (црном за пут са предње стране и сивом са задње стране). Колика је дужина пута који је мрав прешао?



А) $45\ \mathrm{cm}$ **Б)** $55\ \mathrm{cm}$ **В)** $60\ \mathrm{cm}$ **Г)** $65\ \mathrm{cm}$ **Д)** $75\ \mathrm{cm}$

4. Ема има четири оловке различитих боја са којима жели да обоји троделну заставу правоугаоног облика, приказану на слици десно, тако да је сваки део обојен једном бојом, а никоја два суседна дела нису обојена истом бојом. На колико начина Ема може обојити заставу?



А) 24 **Б)** 27 **В)** 32 **Г)** 36 **Д)** 64

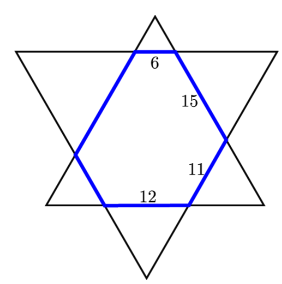
5. За природан број n кажемо да је двоструко-прост ако има тачно три различита делиоца и то 1, 2 и n. Колико различитих двоструко-простих бројева постоји?

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3 **Д)** 4

6. Колико има парова природних бројева x и y који представљају решења једначине $x + 2y = 2^{10}$?

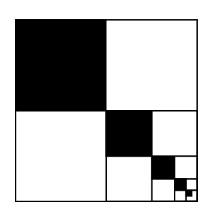
А) $2^9 - 1$ **Б)** 2^9 **В)** $2^9 + 1$ **Г)** $2^9 + 2$ **Д)** 0

7. Два једнакостранична троугла су спојена тако да њихов пресек представља шестоугао, са паралелним супротним страницама. Ако су познате дужине четири странице шестоугла са слике, колики је његов обим?



А) 64 **Б)** 66 **В)** 68 **Г)** 70 **Д)** 72

8. Квадрат површине 84 је подељен на четири квадрата. Горњи леви квадрат је обојен црном бојом. Потом се доњи десни квадрат дели на четири квадрата, где се горњи леви квадрат боји црном бојом. Дати поступак се понавља бесконачно много пута. Колика је укупна површина која је обојена црном бојом?



А) 24 **Б)** 28 **В)** 31 **Г)** 35 **Д)** 42

9. Бројеви од 1 до 9 се уписују у по једно од 9 поља на слици приказаној десно, тако да збир било која три броја из суседних поља буде дељив са 3. Ако су бројеви 7 и 9 већ уписани, на колико начина је могуће попунити преостала поља?

	7		9					

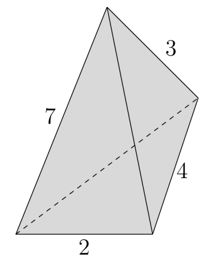
А) 9 **Б)** 12 **В)** 15 **Г)** 18 **Д)** 24

10. Цифра јединица у декадном запису броја $\left(5^5+1\right)\left(5^{10}+1\right)\left(5^{15}+1\right)$ је

А) 1 **Б)** 2 **В)** 4 **Г)** 5 **Д)** 6

Задаци који вреде 4 поена

11. Тространа пирамида има ивице чије су дужине природни бројеви. Четири мере тих дужина су дате на слици десно. Колики је збир дужина преосталих ивица пирамиде?



А) 9 **Б)** 10 **В)** 11 **Г)** 12 **Д)** 13

12. За позитиван цео број n, $n!$ је дефинисан као производ природних бројева од 1 до n. На пример, $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$. Ако број $6!\cdot 7!$ може да се представи у облику $N!$ где је N природан број, колики је збир цифара броја N?

А) 1 **Б)** 2 **В)** 4 **Г)** 8 **Д)** 9

13. Графици фунцкија $y = x^3 + 3x^2 + ax + 2a + 4$ садрже једну исту тачку у координатној равни, за сваки реалан број a. Тада је збир координата заједничке тачке једнак

А) 2 **Б)** 4 **В)** 7 **Г)** 8 **Д)** ништа од понуђеног

14. Дато је пет бројева a_1, a_2, a_3, a_4 и a_5 чији је збир S. За свако k, $1 \leqslant k \leqslant 5$, важи да је $a_k = k + S$. Колика је вредност збира S?

А) $\dfrac{15}{4}$ **Б)** $-\dfrac{15}{4}$ **В)** -15 **Г)** 15 **Д)** ништа од понуђеног

15. Колико парова целих бројева (m, n) задовољава неједнакост $|2m - 2023| + |2n - m| \leqslant 1$?

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3 **Д)** 4

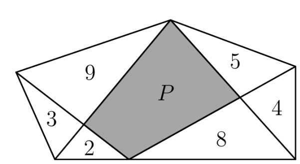
16. У једном реду у биоскопу седе 23 даброва и кенгура. Познато је да поред сваке животиње седи бар један кенгур. Који је највећи могући број даброва у том реду?

А) 7 **Б)** 8 **В)** 10 **Г)** 11 **Д)** 12

17. Одредити природан број n такав да је $n^n = 5^{5^6}$.

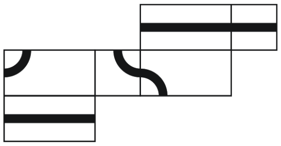
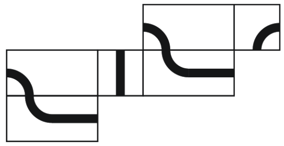
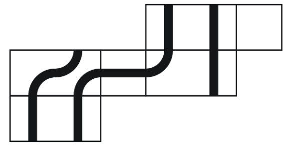
А) 5^{30} **Б)** 5^6 **В)** 5^5 **Г)** 30 **Д)** 11

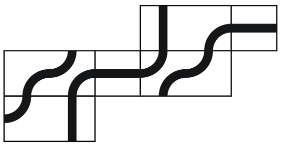
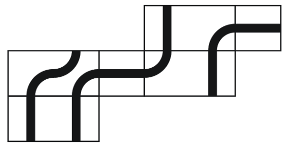
18. Петоугао је подељен на делове, као на слици десно. Бројеви унутар троуглова представљају површине тих делова петоугла. Површина осенченог четвороугла означеног са P једнака је



А) 15 **Б)** $\frac{31}{2}$ **В)** 16 **Г)** 17 **Д)** 18

19. Немања је нацртао затворени пут на квадру, након чега је квадар распаковао у одговарајућу мрежу. Која од понуђених мрежа може бити мрежа квадра по коме је Немања цртао?

А)  **Б)**  **В)** 

Г)  **Д)** 

20. Колико има природних бројева који су делиоци броја $2^{20}3^{23}$, али нису делиоци броја $2^{10}3^{20}$?

А) 13 **Б)** 30 **В)** 273 **Г)** 460 **Д)** ништа од понуђеног

Задаци који вреде 5 поена

21. Функције f и g дефинисане на скупу $\mathbb{R}$ задовољавају систем једначина $f(x)+2g(1-x)=x^2$ и $f(1-x)-g(x)=x^2$. Како гласи реална функција $f(x)$ у експлицитном облику?

А) $x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$ **Б)** $x^2+\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$ **В)** $-x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$
Г) x^2-4x+5 **Д)** не постоји таква функција

22. На такмичењу у планинарењу такмичи се 13 алпиниста у три дисциплине. Укупан резултат сваког такмичара је производ његових резултата у свакој од дисциплина. На пример, ако је такмичар освојио четврто, треће и шесто место у три дисциплине, његов укупан резултат је $4\cdot 3\cdot 6=72$. Дакле, што је укупан резултат већи, то је укупан пласман такмичара на табели нижи. Милица је заузела прво место у две категорије. Који је њен најнижи могући укупан пласман на табели?

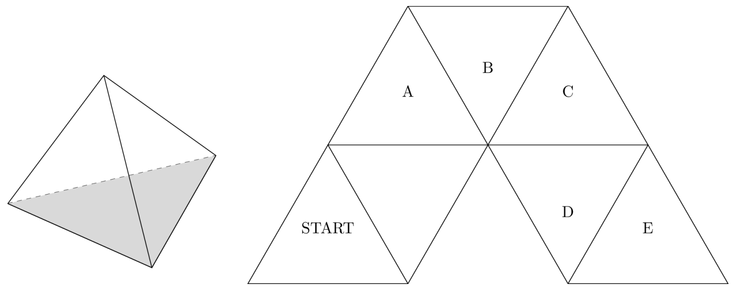
А) 2. место **Б)** 3. место **В)** 4. место **Г)** 5. место **Д)** 6. место

23. На слици је приказано спирално ређање узастопних бројева, почевши од 1. У ком од понуђених распореда ће се наћи бројеви 625, 626 и 627?

$$\begin{array}{ccccccccc}
\vdots & & 10 & \to & 11 & \to & 12 & \to & 13 \\
\uparrow & & \uparrow & & & & & & \downarrow \\
24 & & 9 & & 2 & \to & 3 & & 14 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\
23 & & 8 & & 1 & & 4 & & 15 \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
22 & & 7 & \leftarrow & 6 & \leftarrow & 5 & & 16 \\
\uparrow & & & & & & & & \downarrow \\
21 & \leftarrow & 20 & \leftarrow & 19 & \leftarrow & 18 & \leftarrow & 17
\end{array}$$

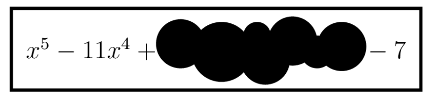
А) $\begin{array}{c} 627 \\ \uparrow \\ 626 \\ \uparrow \\ 625 \end{array}$ **Б)** $\begin{array}{cc} 626\to & 627 \\ \uparrow & \\ 625 & \end{array}$ **В)** $625\to\ 626\to\ 627$ **Г)** $\begin{array}{cc} 625\to & 626 \\ & \downarrow \\ & 625 \end{array}$ **Д)** $\begin{array}{c} 625 \\ \downarrow \\ 626 \\ \downarrow \\ 627 \end{array}$

24. Блок у облику тетраедра има једну обојену страну. Стефан поставља обојену страну блока на плочу на позицију троугла са ознаком START. Стефан затим премешта блок, од једног до другог троугла окрећући га око ивица. На којој позицији на плочи ће се поново наћи обојена страна блока?



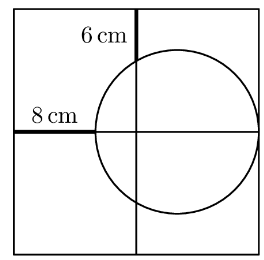
А) A **Б)** B **В)** C **Г)** D **Д)** E

25. Део полинома петог степена се не може видети због мрље од мастила. Познато је да су свих пет корена датог полинома цели бројеви. Који је највећи степен бинома $x-1$ који дели дати полином?



А) $(x-1)^1$ **Б)** $(x-1)^2$ **В)** $(x-1)^3$ **Г)** $(x-1)^4$ **Д)** $(x-1)^5$

26. Квадрат је подељен на четири мања квадрата као на слици десно. Круг додирује десну страницу квадрата у њеном средишту. Колика је дужина странице великог квадрата (узимајући у обзир да слика није нацртана у правој размери)?

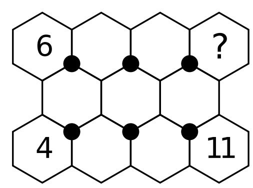


А) 18 cm **Б)** 20 cm **В)** 24 cm
Г) 28 cm **Д)** 30 cm

27. Који је највећи заједнички делилац природних бројева облика $n^3(n+1)^3(n+2)^3(n+3)^3(n+4)^3$, где је n природан број?

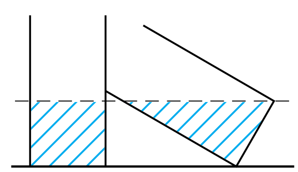
А) $2^9 3^3$ **Б)** $2^3 3^3 5^3$ **В)** $2^6 3^3 5^3$ **Г)** $2^8 3^2 5^3$ **Д)** $2^9 3^3 5^3$

28. Бројеви од 1 до 11 су поређани у шестоугаона поља, приказана на слици десно, тако да је збир свака три броја уписана у поља, која имају заједничко теме означено једном од шест црних тачака, исти. Три броја су већ постављена. Који број ће се наћи у пољу које је означено упитником?



А) 1 **Б)** 3 **В)** 5 **Г)** 7 **Д)** 9

29. Два идентична резервоара за воду облика ваљка садрже исту количину воде. Један резервоар стоји усправно, а други се наслања на њега тако да је ниво воде у оба резервоара исти, као на слици. Основе оба ваљка су кругови површине $3\pi\,\mathrm{m}^2$. Колику количину воде садржи сваки од резервоара?



А) $3\sqrt{3}\pi\,\mathrm{m}^3$ **Б)** $6\pi\,\mathrm{m}^3$
В) $9\pi\,\mathrm{m}^3$ **Г)** $\frac{3\pi}{4}\,\mathrm{m}^3$ **Д)** није могуће одредити

30. Производ шест узастопних природних бројева је дванаестоцифрени број облика $\overline{abbcddcddabb}$, где су a, b, c и d такође четири узастопна природна броја, у произвољном редоследу. Тада је вредност броја d

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4 **Д)** 5

Задаци: „Kangaroo Meeting 2022”, Червија, Италија
Организатор такмичења: Друштво математичара Србије
Превод: Јелена Стеванић, Немања Вучићевић, доц. др Александар Миленковић
Рецензент: проф. др Зоран Каделбург