Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред - А категорија

1. Поновимо да је на скупу $\mathbb{N}$ дата релација ϱ захтевом

$$x \,\varrho\, y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad (\exists k \in A)\ y = \frac{3k-1}{2} \cdot x.$$

(а) Нека је $A = \mathbb{N}$. Јасно је да релација ϱ није транзитивна, јер је $4 \,\varrho\, 10$, што се добија за $k = 2$ $(y = \frac{5}{2}x)$, као и $10 \,\varrho\, 25$, што је тачно, такође, за $k = 2$ $(y = \frac{5}{2}x)$. Међутим, $(4, 25) \notin \varrho$, јер би у противном $25 = \frac{3k-1}{2} \cdot 4$, тј. $k = \frac{9}{2} \notin \mathbb{N}$). Самим тим није ни релација еквиваленције, нити релација поретка.
(б) Нека је, сада, $A = \mathbb{T}$, где је $\mathbb{T}$ скуп непарних природних бројева. Јасно је да је релација ϱ рефлексивна, јер за свако $x \in \mathbb{N}$ важи $(x, x) \in \varrho$, што се добија за $k = 1 \in \mathbb{T}$. Како важи $(2, 8) \in \varrho$, тј. $2\varrho 8$ (добија се за $k = 3 \in \mathbb{T}$), те како $(8, 2) \notin \varrho$, то релација ϱ није симетрична, а самим тим ни релација еквиваленције. Међутим, тривијално се показује да је у овом случају релација ϱ антисиметрична и транзитивна. Заиста, ако би било $x \,\varrho\, y$ и $y \,\varrho\, x$, имали бисмо да постоје $k, \ell \in \mathbb{T}$ такви да је $x + 2y = 3k \cdot x$ и $y + 2x = 3\ell \cdot y$. Сабирањем ових једнакости добијамо да важи $3x + 3y = 3kx + 3\ell y$, одакле је $3k = 3\ell = 3$, тј. $k = \ell = 1$. Када то вратимо у једнакост $x + 2y = 3k \cdot x$, добијамо да је $x = y$, односно да је релација ϱ антисиметрична.

Да бисмо показали транзитивност релације ϱ, претпоставимо да је $x \,\varrho\, y$ и $y \,\varrho\, z$, за неке $x, y, z \in \mathbb{N}$. Тада, постоје $k, m \in \mathbb{T}$ такви да је $x + 2y = 3k \cdot x$ и $y + 2z = 3m \cdot y$. Када из прве једнакости изразимо y преко x, добијамо $y = \frac{3k-1}{2}x$, што кад уврстимо у другу једнакост даје $z = \frac{3k-1}{2} \cdot \frac{3m-1}{2} \cdot x = \frac{3\frac{(3km-k-m+1)}{2}-1}{2} \cdot x$. Како су $k, m \in \mathbb{T}$ непарни, имамо да је $k = 2a + 1$ и $m = 2b + 1$, па је и $\frac{(3km-k-m+1)}{2} = \frac{(3(2a+1)(2b+1)-(2a+1)-(2b+1)+1)}{2} = \frac{(12ab+4a+4b+2)}{2} = 2(3ab + a + b) + 1 \in \mathbb{T}$, јер је непаран. Тиме смо показали да из $x \,\varrho\, y$ и $y \,\varrho\, z$ следи $x\varrho z$, па је ова релација и транзитивна. Дакле, како важе особине рефлексивности, антисиметричности и транзитивности релације ϱ, закључујемо да је она једна релација поретка на скупу $\mathbb{N}$. Она није релација тоталног поретка, јер очигледно важи $(1, 3) \notin \varrho$, као и $(3, 1) \notin \varrho$ (може се показати да је ϱ релација парцијалног поретка на $\mathbb{N}$.)
(в) Нека је, сада, $A = \mathbb{Q}$. Како је $k = \dfrac{x + 2y}{3x} \in \mathbb{Q}$, закључујемо да је сваки елемент из $\mathbb{N}$ у релацији са сваким другим, па је та релација рефлексивна, симетрична и транзитивна, тј. једна релација еквиваленције на скупу $\mathbb{N}$. С обзиром да је сваки елемент из $\mathbb{N}$ у релацији са сваким другим, иста има само једну класу еквиваленције, цео скуп $\mathbb{N}$. Са друге стране, како није антисиметрична, јер из $(1, 2) \in \varrho$ и $(2, 1) \in \varrho$ не следи $1 = 2$, то она није релација поретка на скупу $\mathbb{N}$.

2. Нека је $AA_1 \cap BB_1 = M$, $BB_1 \cap CC_1 = N$ и $CC_1 \cap AA_1 = P$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$. Тада је $\angle PMN = \varphi - \angle B_1BC = \varphi - (\varphi - \gamma) = \gamma$. Слично, $\angle MNP = \alpha$ и $\angle NPM = \beta$. Нека је H ортоцентар троугла ABC. Како је $\angle HCC_1 = \angle HBB_1 = \angle HAA_1 = 90^\circ - \varphi$, следи да је сваки од четвороуглова $ABMH$, $BCNH$ и $ACHP$ тетиван (четвороугао је тетиван акко се страница из преостала два темена види под истим угловима). То значи да је $\angle HMA = \angle HBA = 90^\circ - \alpha$ и $\angle HPM = 180^\circ - \angle APH = \angle ACH = 90^\circ - \alpha$, одакле следи да је $HP = HM$, односно да се тачка H налази на симетрали странице MP. Слично бисмо показали да се тачка H налази на симетрали странице MN. Дакле, H је центар описаног круга троугла MNP.

3. Нека су елементи скупа S поређани у поретку $s_1 < s_2 < \cdots < s_n$. Доказаћемо индукцијом да s_1 дели најмањих k чланова из S, где је $1 \leqslant k \leqslant n$. Базни случај $k = 1$ је, наравно, тривијалан. Стога, можемо претпоставити да $s_1 \mid s_1, \cdots, s_{k-1}$, за неко $2 \leqslant k \leqslant n$. Посматрајмо вредност $s_k - s_1$, која је дељива са неким s_i. Међутим, како је $0 < s_k - s_1 < s_k$, то је $i < k$ (ако би важило $i \geqslant k$, онда $s_k - s_1 > s_i \geqslant s_k$, што је наравно контрадикција). Следи $s_i \mid s_k - s_1$ за неко $i < k$, а по индукцији је $s_1 \mid s_i$, одакле закључујемо да $s_1 \mid s_k - s_1$, односно $s_1 \mid s_k$, што нам завршава индуктивни корак.
За целе бројеве није тачно тврђење. На пример, узмимо $S = \{2, -3, 5\}$, јер $2 \mid 5 - (-3)$, $3 \mid 5 - 2$ и $5 \mid 2 - (-3)$, али НЗД$(2, -3, 5) = 1$, те би морало бити да је 1 или -1 у скупу, што није тачно.

4. (а) Приметимо да су на крају отворени ормарићи само са оним бројевима који имају непаран број делилаца, а то су тачни квадрати. Тачних квадрата не већих од 2023 има $\lfloor\sqrt{2023}\rfloor = 44$, па ће на крају бити 44 отворена ормарића.
(б) То су ормарићи са бројевима који имају тачно 3 делиоца, тј. ормарићи са бројевима облика p^2, где је p прост број. Заиста, како је $\sqrt{2023} < 45$, потребно је наћи све просте бројеве који су мањи од 45, тј. у Ератостеновом ситу треба прецртати све бројеве који су дељиви са 2, 3 или 5, након чега нам остаје 14 бројева (то су бројеви 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43), те је само 14 ормарића тачно два пута отворено и једном затворено (то су они са бројевима $2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2, 29^2, 31^2, 37^2, 41^2, 43^2$).

5. (а) Ако је $x = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ и $y = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$, онда је $x + y = 1 \in \mathbb{Q}$, $x^2 + y = x + y^2 = \frac{5}{4} \in \mathbb{Q}$, али x и y нису рационални.
(б) Ако је x рационалан, како је $x + y$ рационалан, следи да је и y рационалан. Иначе, важи $x \notin \{0, 1\}$, те је по условима рационалан и $\frac{(x^3+y)-(x^2+y)}{(x^2+y)-(x+y)} = \frac{x^2(x-1)}{x(x-1)} = x$, а како је $x + y$ рационалан, следи рационалност и y.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ
Други разред - А категорија

1. Једначина има смисла за $x \geqslant 0$. Ако квадрирамо обе стране једнакости

$$\sqrt{x+\sqrt{4x+\sqrt{4^2x+\sqrt{\cdots+\sqrt{4^{2023}x+3}}}}}=\sqrt{x}+1,$$

добијамо

$$\sqrt{4x+\sqrt{4^2x+\sqrt{\cdots+\sqrt{4^{2023}x+3}}}}=2\sqrt{x}+1.$$

Ако квадрирамо обе стране ове релације, добијамо да је

$$\sqrt{4^2x+\sqrt{4^3x+\cdots+\sqrt{4^{2023}x+3}}}=4\sqrt{x}+1.$$

Ако наставимо процедуру квадрирања, добијамо једначину

$$4^{2023}x+3=4^{2023}x+2\cdot 2^{2023}\cdot\sqrt{x}+1,$$

одакле је $x=\frac{1}{4^{2023}}$.

2. Нека је B_1 средиште дужи AC и нека права AO сече праву BC у тачки D. Означимо са E пресек симетрале унутрашњег угла у темену C и праве AB. Ако би угао β био прав, тада би важило $\sin\gamma\cos\gamma=0$, па би и угао γ био такав, што је немогуће. Следи, $\cos\beta\neq 0$, па је $BD/DC=\dfrac{c\cos\gamma}{b\cos\beta}=\dfrac{\sin\gamma\cos\gamma}{\sin\beta\cos\beta}$, као и $CB_1/B_1A=1$, $AE/EB=AC/BC$, одакле следи да је, када измножимо добијено, $\dfrac{BD}{DC}\dfrac{CB_1}{B_1A}\dfrac{AE}{EB}=1$, тј. поменуте праве, на основу Чевине теореме, се секу у једној тачки.

3. Како је $3^y=2^x+11\geq 12>9=3^2$, то је $y\geqslant 3$. За $y=3$ важи $2^x=16$, па је $x=4$ и пар $(4,3)$ је решење. За $y\geqslant 4$ имамо: $2^x=3^y-11\geqslant 81-11=70>64=2^6$. Следи, $x\geqslant 7$. Како је $2^x+11\equiv 0\pmod 9$ (6 је поредак броја 2 по модулу 9), те како је $2^x\equiv 7\pmod 9$, следи $x\equiv 4\pmod 6$. Због Мале Фермаове теореме је $3^y=2^x+11\equiv 2^4+11\pmod 7$, тј. $3^y\equiv 27=3^3\pmod 7$. Међутим, како је 6 поредак броја 3 по модулу 7, то је $y\equiv 3\pmod 6$. Такође, $3^y\equiv 11\equiv 3^7\pmod{32}$, па како је поредак броја 3 по модулу 32 једнак 8, то је $y\equiv 7\pmod 8$, тј. $y\equiv 3\pmod 4$, тј. $3^y\equiv 2\pmod 5$, па је $2^x=3^y-11\equiv 1\pmod 5$. Коначно, из чињенице да је број 4 поредак броја 2 по модулу 5, то $4\mid x$, па 2^x даје могуће остатке 1 и 16 при дељењу са 17, а $3^y=2^x+11$ даје могуће остатке 10 и 12 при дељењу са 17. Следи, $y\equiv 3\pmod{16}$ или $y\equiv 5\pmod{16}$. Међутим, како већ знамо да је $y\equiv 7\pmod 8$, добијамо да једначина нема решења за $y\geqslant 4$. Дакле, једино решење је пар $(4,3)$.

4. За $k>1011$ има 0 начина да изаберемо тражени подскуп M, јер дате бројеве можемо разбити у 1011 дисјунктних скупова $A_1=\{2022,1\}$, $A_2=\{2021,2\}$, $A_3=\{2020,3\}$,..., $A_{1009}=\{1014,1009\}$, $A_{1010}=\{1013,1010\}$, $A_{1011}=\{1012,1011\}$, па по Дирихлеовом принципу постоје бар 2 која су из истог скупа A_i и њихов је збир једнак 2023.

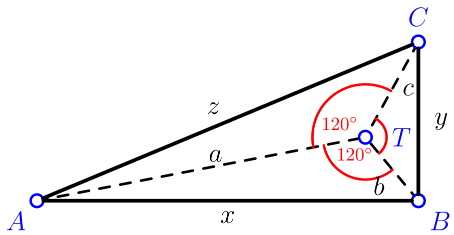
За $2\leqslant k\leqslant 1011$ поређају се у низ (x_n) бројеви:

$$2022,1,2021,2,2020,3,2019,4,...,1008,1014,1009,1013,1010,1012,1011$$

(ово је коначан низ који садржи првих 2022 природних бројева у горенаведеном редоследу).

Тада, не смеју да се одаберу два узастопна члана низа (x_n), јер је њихов збир или 2023 или 2022. Збир било која два несуседна члана није једнак ни 2023, нити 2022. Остаје да одредимо на колико начина можемо изабрати k чланова овог низа, тако да међу њима не постоје два који су суседни у низу. То се своди на избор индекса $j_1, j_2, \ldots, j_k$, за које важи $1 \leqslant j_1 < j_2 - 1 < j_3 - 2 < \ldots < j_k - (k-1) \leqslant 2022 - (k-1)$ (са оваквим условима смо добили да не постоје два узастопна индекса j_ℓ и $j_{\ell+1}$, што је еквивалентно да немамо два узастопна члана низа x_{j_ℓ} и $x_{j_{\ell+1}}$). Сада уведимо смену $s_m = j_m - (m-1)$, за $1 \leqslant m \leqslant k$, и проблем смо свели на избор бројева $s_1, s_2, \ldots, s_k$, за које важи $1 \leqslant s_1 < s_2 < s_3 < \ldots < s_k \leqslant 2022 - (k-1)$. Избор k различитих бројева $s_1, s_2, \ldots, s_k$ у потпуности одређује избор бројева $j_1, j_2, \ldots, j_k$, у коме се не налазе два суседна броја (и обрнуто). То можемо учинити на $\binom{2022-(k-1)}{k} = \binom{2023-k}{k}$ начина.

5. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Нека су углови $\sphericalangle ATB = \sphericalangle BTC = \sphericalangle CTA = 120^\circ$. Тада из косинусних теорема за троуглове $\triangle ATB$, $\triangle BTC$ и $\triangle CTA$ добијамо: $x^2 = a^2 - 2ab\cos 120^\circ + b^2 = a^2 + ab + b^2 = 144 = 12^2$, $y^2 = b^2 - 2bc\cos 120^\circ + c^2 = b^2 + bc + c^2 = 25 = 5^2$, $z^2 = c^2 - 2ca\cos 120^\circ + a^2 = c^2 + ca + a^2 = 169 = 13^2$, одакле добијамо да су странице $\triangle ABC$ једнаке $x = 12$, $y = 5$ и $x = 13$. Помоћу Хероновог обрасца (или ако приметимо да је овај троугао правоугли) добијамо да је површина овог троугла $P_{\triangle ABC} = 30$.
Са друге стране, добијамо да је ова површина
$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ABT} + P_{\triangle BCT} + P_{\triangle CAT} = \dfrac{ab\sin 120^\circ}{2} + \dfrac{bc\sin 120^\circ}{2} + \dfrac{ca\sin 120^\circ}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(ab+bc+ca)$.
Изједначавањем ових израза добијамо да је $ab + bc + ca = 40\sqrt{3}$.



(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Ако би неки од a, b, c био једнак 0 (нпр. $a = 0 \Rightarrow b = 12$ и $c = 13 \Rightarrow b^2 + bc + c^2 = 469$, а не 25; аналогно би се показало и ако је $b = 0$ или $c = 0$). Стога су $a, b, c \neq 0$.

Дакле, можемо узети да је $a = kb$ и $c = \ell b$ $(k, \ell \neq 0)$. Тада имамо да је:

$a^2 + ab + b^2 = k^2b^2 + kb^2 + b^2 = b^2(k^2 + k + 1) = 144,$

$b^2 + bc + c^2 = b^2 + \ell b^2 + \ell^2 b^2 = b^2(\ell^2 + \ell + 1) = 25,$

$c^2 + ca + a^2 = \ell^2 b^2 + k\ell b^2 + k^2 b^2 = b^2(\ell^2 + k\ell + k^2) = 169.$

Одавде је $b^2[(k^2+k+1)+(\ell^2+\ell+1)-(k^2+k\ell+\ell^2)] = 144+25-169 = 0$, тј. $b^2[2+k+\ell-k\ell] = 0$. Даље, како је $b \neq 0$, добијамо да је $2 + k + \ell - k\ell = 0$, одакле добијамо да је $2 + k = k\ell - \ell$, тј. $\ell = \dfrac{2+k}{k-1}$ (ако би било $k = 1$, онда би било $b = a$, што даје $a^2 = b^2 = 48$, што је немогуће, јер је $b^2 + bc + c^2 = 25$ и $b, c > 0$).

Из $b^2(k^2 + k + 1) = 144$ и $b^2(\ell^2 + \ell + 1) = 3b^2\dfrac{k^2+k+1}{(k-1)^2} = 25$ добијамо да је $\dfrac{25}{144} = \dfrac{3}{(k-1)^2}$, одакле је $k - 1 = \frac{12}{5}\sqrt{3}$.

Коначно имамо: $ab + bc + ca = kb^2 + \dfrac{2+k}{k-1}b^2 + k\dfrac{2+k}{k-1}b^2 = 2b^2\dfrac{k^2+k+1}{k-1} = \dfrac{2 \cdot 144}{\frac{12}{5}\sqrt{3}} = 40\sqrt{3}$.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Трећи разред - А категорија

1. Ако једначину $AB = A$ помножимо матрицом A, са десне стране, а једначину $BA = B$ помножимо матрицом A, са леве стране, добијају се једначине $ABA = A^2$ и $ABA = AB$. Како је $AB = A$ по услову задатка, то имамо да је $ABA = A^2 = A$, тј. показали смо да је матрица A идемпотентна. Аналогно се показује и $B^2 = B$.

2. Познато је да су тачке A, S и S_a колинеарне (све три леже на симетрали унутрашњег угла у темену A троугла ABC), па је због обрата Талесове теореме довољно доказати да је $\frac{S_aS}{S_aA} = \frac{SS'}{AD}$ (јер је по дефиницији $AD \perp BC$ и $SS' \perp BC$, па је $AD \parallel SS'$). Нека су a, b, c дужине страница, наспрам темена A, B, C, редом, и нека су s полуобим, h_a висина из темена A, r полупречник уписане кружнице и S површина полазног троугла. Тада је јасно да је $\frac{SS'}{AD} = \frac{2r}{h_a} = \frac{\frac{2S}{s}}{\frac{2S}{a}} = \frac{a}{s}$.

Нека су, даље, P и Q додири уписане и споља приписане кружнице са правом AB, редом. Тада је из Талесове теореме испуњено $\frac{S_aS}{S_aA} = \frac{QP}{QA} = \frac{a}{s}$, јер је $AP = \frac{b+c-a}{2}$ и $AQ = s$. Према томе, $\frac{S_aS}{S_aA} = \frac{a}{s} = \frac{SS'}{AD}$, па су S_a, S' и D, заиста, колинеарне.

3. Да! Штавише, доказаћемо да за сваки природан број r постоје природни бројеви $a_1, a_2, a_3, ..., a_r$, као и природан број n, који имају тражено својство. У том циљу, довољно је узети произвољне природне бројеве $a_1, a_2, ..., a_{r-1}$. Ставимо да је $a_r = a_1!a_2!...a_{r-1}! - 1$. Тада за $n = a_1!a_2!...a_{r-1}!$ очигледно важи

$$\begin{aligned} n! &= (a_1!a_2!...a_{r-1}!)! \\ &= (a_1!a_2!...a_{r-1}!)(a_1!a_2!...a_{r-1}! - 1)! \\ &= a_1!a_2!...a_{r-1}!a_r!. \end{aligned}$$

4. Видимо одмах да је $n \geqslant k-1$, јер $k-1$ мушкараца можемо упарити са n жена. У даљем, искористићемо Холову теорему за решавање задатка. Приметимо да за сваки прави подскуп скупа мушкараца важи да је он подскуп неког $(k-1)$-точланог подскупа скупа мушкараца, па је могуће упарити тај подскуп са неким подскупом скупа жена, па самим тим је и суседство тог скупа веће кардиналности од нашег скупа. Међутим, како услов Холове теореме није испуњен, закључујемо да мора да постоји неки подскуп скупа мушкараца који има суседство мање кардиналности, а како то није ниједан прави подскуп, то мора бити цео скуп свих мушкараца. Међутим, како је свака жена компатибилна са барем једним мушкарцем, знамо да је суседство кардиналности управо n, те је онда $k < n$. Сада је у потпуности јасно да мора бити $k = n + 1$.

5. Одговор: $f(x) = x$, као и $f(x) = 0$, за свако $x \in \mathbb{R}$.
Убацивањем $x = 0$ у полазну релацију налазимо да је $f(0) = 0$. Затим, убацивањем вредности $y = 0$, налазимо $xf(x) = f(x)^2$, тако да је $f(x) = x$ или $f(x) = 0$, за свако x. Међутим, ово није довољно да бисмо закључили да је увек иста ,,опција”. Претпоставимо да је $f(a) = 0$ и $f(b) = b$, за $a, b \neq 0$. Узмимо, сада, $x = b$ и $y = a - b$. Тада је $f(a-b)f(a) + bf(b) + f((a-b)b) = f(a)^2$, односно, $b^2 + f((a-b)b) = 0$. Тада је, очито, $f((a-b)b) = -b^2 \neq 0$, па је $(a-b)b = b^2$. Стога је $a = 2b$. Међутим, није могуће да ово важи за сваки овакав пар (a, b). На пример, можемо узети неко $c \neq 0$, које је уједно различито од a и b. За њега важи да је или $f(c) = 0$ или $f(c) = c$, а не важи ни $a = 2c$, нити $c = 2b$. Тривијално се проверава да су оба наведена решења валидна, те је тиме доказ завршен.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Четврти разред - А категорија

1. Нека је $a - b = q \in \mathbb{Q}$. Посматрајмо полином $Q(x) = P(x - q)$, $x \in \mathbb{R}$. Јасно је да је овако конструисани полином истог степена (барем један) као и полином P, да има рационалне коефицијенте, јер је такав полином P, али и исти водећи коефицијент као и полином P. Ако означимо са $R(x) = \text{НЗД}(P(x), Q(x))$ налазимо да и полином R, такође, има рационалне коефицијенте, јер исти добијамо коришћењем Еуклидовог алгоритма, примењеног на полиноме P и Q (коришћењем те процедуре налажења полинома R, сви његови коефицијенти остају унутар $\mathbb{Q}$). Такође, како је $Q(a) = P(a-q) = P(b) = 0 = P(a)$, то (гледано над $\mathbb{R}[x]$) важи да $x - a \mid R$, тј. степен полинома R је барем 1, а како $R \mid P$ и како је P иредуцибилан, то је степен полинома R, заправо, једнак степену полинома P, одакле налазимо да је $P(x) = r_1 R(x)$ и $Q(x) = r_2 R(x)$, за свако $x \in \mathbb{R}$ и неке рационалне бројеве r_1 и r_2. Међутим, из чињенице да су водећи коефицијенти полинома P и Q идентични, добијамо да је $r_1 = r_2$, тј. да важи $P(x) = Q(x)$, за свако $x \in \mathbb{R}$. Коначно, $0 = P(a) = Q(a) = P(a - q) = Q(a - q) = P(a - 2q) = Q(a - 2q) = \cdots = P(a - kq) = \cdots$, те ако би важило $q \neq 0$, тада би полином P имао бесконачно много нула, што није могуће. Дакле, $q = 0$, тј. $a = b$.

2. Конвексан четвороугао $ABCD$ је тангентан ако и само ако је $AB + CD = AD + BC$. Дужи EF и BD су паралелне ако и само ако важи $\frac{AE}{AF} = \frac{AD}{AB}$, па како је $AE = AF$, то мора бити $AD = AB$ и обрнуто. Аналогно, дужи GH и BD су паралелне ако и само ако је $BC = CD$. Стога, ако су све три дужи паралелне, добијано да важи $AB+CD = AD+BC$, тј. да је четвороугао $ABCD$ тангентан.

Претпоставимо да се праве одређене трима дужима EF, BD и HG секу у једној тачки, рецимо S. Применом Менелајеве теоремом добијамо $\frac{\overrightarrow{BS}}{\overrightarrow{SD}} = -\frac{\overrightarrow{FB}}{\overrightarrow{AF}} \cdot \frac{\overrightarrow{EA}}{\overrightarrow{DE}} = -\frac{BF}{AF} \cdot \frac{EA}{ED} = -\frac{BF}{ED}$, због усмерености одговарајућих дужи и $AF = AE$. Аналогно, $\frac{\overrightarrow{BS}}{\overrightarrow{SD}} = -\frac{BG}{HD}$. Следи, $\frac{BG}{HD} = \frac{BF}{ED}$, а добијено важи ако кругови уписани у троуглове ABD и BCD додирују праву BD у истој тачки, што је еквивалентно са $\frac{BA+BD-AD}{2} = \frac{BC+BD-DC}{2}$, тј. $BA - AD = BC - DC$, тј. $BA + DC = BC + AD$, па је четвороугао $ABCD$ тангентан.

Коначно, ако је четвороугао $ABCD$ тангентан, тада, ако је $AB = AC$ и $CB = CD$, то су (знамо из првог дела доказа) дужи BD, GH и EF паралелне. Ако $AB \neq AD$ и $CB \neq CD$, тада никоје две од правих BD, EF и GH нису паралелне. Стога, претпоставимо да се праве BD и EF секу у тачки X, а BD и GH у тачки Y. Применом Менелајеве теореме добијамо: $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XD}} = -\frac{\overrightarrow{FB}}{\overrightarrow{AF}} \cdot \frac{\overrightarrow{EA}}{\overrightarrow{DE}} = -\frac{BF}{AF} \cdot \frac{EA}{ED} = -\frac{BF}{ED}$, као и $\frac{\overrightarrow{BY}}{\overrightarrow{YD}} = -\frac{\overrightarrow{GB}}{\overrightarrow{AG}} \cdot \frac{\overrightarrow{HA}}{\overrightarrow{DH}} = -\frac{BG}{AG} \cdot \frac{HA}{HD} = -\frac{BG}{DH}$, те користећи раније једнакости, $BG = \frac{BA+BD-AD}{2} = \frac{BC+BD-CD}{2} = BF$, $DH = \frac{AD+BD-AB}{2} = \frac{CD+BD-CB}{2} = DE$, одакле следи $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XD}} = \frac{\overrightarrow{BY}}{\overrightarrow{YD}}$, што је еквивалентно са $X = Y$, па се све три праве секу у једној тачки.

3. За $m = n$ имамо $f(n) \mid n!$. Стога, $f(1) = 1 = 1!$ и за $n = m = 1$ имамо $f(n) + 1 \mid n! + 1$. Стога, $f(n) \mid n! - f(n)$, $f(n) + 1 \mid n! - f(n)$, те како су $f(n)$ и $f(n) + 1$ узајамно прости, имамо $f(n)(f(n) + 1) \mid n! - f(n)$. За $f(n) < n!$, $n > 1$, је $n! \geqslant f(n)(f(n) + 1) > f(n)^2$, па је $f(n) < \sqrt{n!}$. За $n = 2$, имамо $f(2) + 1 \mid 3$, а како је $f(2) + 1 > 1$ и 3 је прост, следи $f(2) + 1 = 3$, тј. $f(2) = 2 = 2!$. За $n = 3$, имамо $f(3) + 1 \mid 7$, а како је $f(3) + 1 > 1$ и 7 је прост, следи $f(3) + 1 = 7$ и $f(3) = 6 = 3!$. За $n = 4$, имамо $f(4) + 1 \mid 25$, па је $f(4) \in \{5 - 1, 25 - 1\} = \{4, 24\}$ и кад узмемо $m = 2$, имамо $f(4) + 2 \mid 26$, а за $f(4) = 4$ имамо да $6 \mid 26$, што је нетачно, па је $f(4) = 24 = 4!$. За $n = 5$, имамо $f(5) + 1 \mid 121$,

$f(5)+1 \in \{11, 121\}$, па је $f(5) \in \{10, 120\}$. Ако је $f(5) = 10$, за $n = 5$, $m = 2$, добијамо $12 \mid 122$, што је нетачно. Стога, $f(5) = 120 = 5!$. За $n = 6$ је $f(6) + 1 \mid 721$, па је $f(6) \in \{6, 102, 720\}$. За $f(6) = 6$ и $m = 2$ важи $8 \mid 722$, што није тачно. За $f(6) = 102$ и $m = 2$ важи $104 \mid 722$, што опет није тачно. Стога $f(6) = 720 = 6!$.

Доказујемо индукцијом да је $f(n) = n!$, за свако $n \geqslant 7$. Ако $f(n-1) = (n-1)!$, онда је $f(n)+(n-1)! \mid (n-1)!\,(n+1)$, па за неко природно k, имамо $kf(n)+k(n-1)! = (n-1)!\,(n+1)$, тј. $kf(n) = (n-1)!(n+1-k) > 0$, па је $n+1 > k$, тј. $k \leqslant n$. Такође, важи $f(n) = \frac{(n-1)!(n+1-k)}{k} \geqslant \frac{(n-1)!}{n}$. Ако $f(n) \neq n!$, како $f(n)+1 \mid n!+1$, знамо да је $f(n) \leqslant n!$, одакле следи да можемо претпоставити да је $f(n) < n!$, па $f(n) < \sqrt{n!}$. Стога, имамо $\frac{(n-1)!}{n} < \sqrt{n!}$, па је $\sqrt{(n-1)!} < \sqrt{n} \cdot n = \sqrt{n^3}$, односно $(n-1)! < n^3$. Међутим, ово није тачно за $n \geqslant 7$. Заиста, $(n-1)!$, за $n = 7$, је $6! = 720$, а $7^3 = 343$, контрадикција. За $n \geqslant 8$, $(n-1)! \geqslant ((n-1)\cdot 2)\cdot((n-2)\cdot 3)\cdot((n-3)\cdot 4) > n \cdot n \cdot n = n^3$. Дакле, за све $n \geqslant 1$ је $f(n) = n!$, као и за све $n < 5$ је $f(n) = n!$. Стога, $f(n) = n!$, за све природне n. Тривијално се проверава да поменута функција задовољава услове задатка.

4. (а) Одговор је $2^{2023}\binom{2023}{101}^{100}$. Заиста, за први скуп имамо 2^{2023} избора. Докажимо да за сваки следећи скуп имамо $\binom{2023}{101}$ начина, одакле следи наведено. Приметимо да важи $B \cap C = B \setminus (B \triangle C)$ и $C \setminus B = (B \triangle C) \setminus B$, што се лако проверава. Одатле следи да важи и $C = (B \setminus (B \triangle C)) \cup ((B \triangle C) \setminus B)$. Дакле, уколико фиксирамо неки скуп $S \subset \{1, 2, 3, ..., 2023\}$, такав да је $|S| = 101$, јединствено је одређен скуп C такав да $|B \triangle C| = S$. Такође, очито није могуће да два различита таква скупа S дају исти скуп C, па је број тражених скупова C једнак броју скупова S за које важи $|S| = 101$, а он је тачно $\binom{2023}{101}$.
(б) Одговор је 0, због парности. Заиста, приметимо да за свака два скупа B и C, $B, C \subset \{1, 2, 3, ..., 2023\}$, за које важи $|B \triangle C| = 101$, такође важи да је парност бројева $|B|$ и $|C|$ различита. То директно следи из идентитета $|A| + |B| = |A \triangle B| + 2\,|A \cap B|$, који се тривијално да проверити. Дакле, уколико бисмо имали низ скупова $A_1, A_2, ..., A_{101}$ који испуњава тражено, морало би бити да су $|A_1|, |A_3|, ..., |A_{101}|$ исте парности, али то није могуће, јер, због додатне особине, тј. чињенице да важи и $|A_1 \triangle A_{101}| = 101$, бројеви $|A_1|$ и $|A_{101}|$ морају бити различите парности.

5. Одговоре је не. Посматрајмо функцију $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ задату са $f(2) = 3$, $f(3) = 2$, $f(n) = n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{2, 3\}$. Лако се проверава да она испуњава услов из задатка, а није неопадајућа, јер $f(2) > f(3)$.

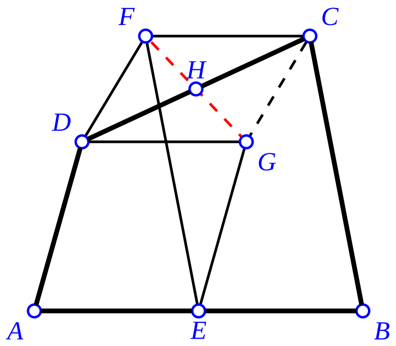
Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред - Б категорија

1. Како је $\dfrac{1}{31} > 0,03 > 0,004 = 0,972 - 0,968$, тј. $\dfrac{1}{31} + 0,968 > 0,972$, то за све рационалне бројеве облика $\dfrac{k}{l}$, $2 \leqslant l \leqslant 31$ и $1 \leqslant k \leqslant l-1$, а који су мањи од 1 су, такође, мањи и од $0,968$. Одавде налазимо да тражени број мора бити већи од 31. Како је $\dfrac{31}{32} = 0,96875$ у овом затвореном интервалу, добијамо да је тражени број 32.

2. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Из услова задатка имамо да је $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AD}$. Како је E средиште AB и H средиште CD имамо да је $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$ и $\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{DH} = \vec{0}$, па је $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH}$ и $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CH}$. Сабирањем ове 2 једнакости добијамо да је $2\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{EF}$, тј. $\overrightarrow{EH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$, па је тачка H средиште дужи FG.



(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Из услова задатка имамо да је $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow$ четвороугао $EFCB$ је паралелограм, па је и $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Слично, имамо да је $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow$ четвороугао $EGDA$ је паралелограм, па је и $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Стога је и $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{DG}$, па је и четвороугао $FCGD$ је паралелограм. Како се дијагонале паралелограма полове, добијамо да је тачка H и средиште дијагонале CD и дијагонале FG, чиме смо показали да су тачке F, G и H колинеарне.

3. Приметимо да је $1+2+3+4+5+6 = 21$ и $1+2+3+4+5+7 = 22$, а свака сума 6 различитих бројева је већа од 22, можемо закључити да су $1, 2, 3, 4, 5, 7$ сви делиоци од n. Онда је n дељив и са НЗС$\{1, 2, 3, 4, 5, 7\} = 420$.

4. Како је вредност $f(3) = 13$ већ дата, остаје да одредимо још вредности за $f(1), f(5), f(7), f(9), f(11)$ и $f(13)$ (то су све различити парни бројеви из $\mathbb{N}_{12}$), као и вредности за $f(2), f(4), f(6), f(8), f(10)$ и $f(12)$ (то су све различити непарни бројеви из $\mathbb{N}_{11}$). И једно и друго можемо одредити на $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ начина, па тражених функција има $(6!)^2 = 720^2 = 518\,400$.

5. У сваком минуту укупан број особа се промени за број који даје остатак 1 при дељењу са 3. Означимо са S_i број особа у просторији након i-тог минута. На почетку је $S_0 = 0$, а због описаног правила је $S_{i+1} \equiv S_i + 1 \pmod 3$. Зато је за свако $k \in \mathbb{N}$ испуњено $S_{3k} \equiv S_{3(k-1)} + 3 \equiv S_{3(k-1)} \equiv \cdots \equiv S_0 \equiv 0 \pmod 3$. Дакле, након 100 сати, тј. након 6000 минута, број особа у просторији мора бити дељив са 3. Међутим, како 3 не дели 2023, одговор на питање из задатка је одречан.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Други разред - Б категорија

1. Према условима задатка, дати израз, означимо га са I, можемо трансформисати на следећи начин:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{a+b+c+2\sqrt{c}\sqrt{a+b}} + \sqrt{a+b+c-2\sqrt{c}\sqrt{a+b}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{c}+\sqrt{a+b})^2} + \sqrt{(\sqrt{c}-\sqrt{a+b})^2} \\ &= \sqrt{c}+\sqrt{a+b}+\sqrt{c}-\sqrt{a+b} \\ &= 2\sqrt{c}. \end{aligned},$$

јер је $\sqrt{a+b} < \sqrt{c}$. Одавде је јасно да дати израз не зависи од a и b.

2. (а) Из $P = \frac{a\cdot 5}{2} = \frac{b\cdot 12}{2} = \frac{c\cdot 13}{2} \Rightarrow a = \frac{2P}{5}$, $b = \frac{2P}{12}$, $c = \frac{2P}{13}$. Како за ове странице не важи неједнакост троугла $a = \frac{2P}{5} = \frac{2P\cdot 25}{125} > b+c = \frac{2P}{12} + \frac{2P}{13} = \frac{2P\cdot 25}{156}$, такав троугао не постоји.
(б) Из $P = \frac{a\cdot 6}{2} = \frac{b\cdot 9}{2} = \frac{c\cdot 12}{2} \Rightarrow a = \frac{2P}{6}$, $b = \frac{2P}{9}$, $c = \frac{2P}{12}$. Како за ове странице важи неједнакост троугла, јер $a = \frac{2P}{6} = \frac{2P\cdot 6}{36} < b+c = \frac{2P}{9} + \frac{2P}{12} = \frac{2P\cdot 7}{36}$, такав троугао постоји (довољно је проверити само ову неједнакост, јер је a најдужа страница). Како важи $b^2+c^2 = \frac{4P^2}{81} + \frac{4P^2}{144} = \frac{4P^2\cdot 25}{1296} < \frac{4P^2\cdot 36}{1296} = \frac{4P^2}{36} = a^2 \Rightarrow \triangle$ је тупоугли.

3. Означимо са D дискриминанту полазне квадратне једначине. Тада важи $D \geqslant 0$ и с обзиром да су решења исте рационални бројеви, то је $0 \leqslant \sqrt{D} = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, за неке узајамно просте природне бројеве p и q, тј. за неке природне бројеве p и q за које је НЗД $(p,q) = 1$. Стога, мора бити $D = \dfrac{p^2}{q^2}$, тј. $q^2 D = p^2$, одакле важи да $q \mid p^2$, тј. $q \mid p$, јер је НЗД $(p,q) = 1$, што је могуће само у случају $q = 1$. Дакле, $D = p^2$, па је дискриминанта D квадрат природног броја.

Покажимо, у даљем, да при датим условима, дискриминанта полазне једначине мора дати остатак 5 по модулу 8. У том циљу, нека је $a = 2n-1$, $b = 2m-1$ и $c = 2k-1$, за неке целе бројеве m, n и k. Тада важи

$$D = (2m-1)^2 - 4(2n-1)(2k-1),$$

те како је $(2m-1)^2 = 4m^2 - 4m + 1 = 4m(m-1) + 1 \equiv 1 \pmod 8$, јер је број $m(m-1)$ паран, и $4(2n-1)(2k-1) \equiv 4 \pmod 8$, то је $D \equiv 5 \pmod 8$. Лако се показује да квадрати целих бројева при дељењу са 8 не могу давати остатак 5. Могу дати само остатке 0, 1 или 4, одакле закључујемо да дискиминанта дате квадратне једначине не може бити потпун квадрат, одакле следи да су решења квадратне једначине ирационални бројеви.

4. Ако бисмо од 3 објекта једнака по свим атрибутима, осим што је један тежи од осталих, тражили најтежи објекат, довољно је само једно мерење. То можемо извести тако што можемо ставити по један објекат на сваки од тасова. У слуцају неравнотеже, тражени објекат је онај на тасу који претеже, свакако. У супротном, тражени објекат је онај који није ни на једном од тасова.

Ако бисмо имали 9 куглица од којих је једна тежа од осталих, потребна су нам два мерења да пронадемо управо ту тежу. Заиста, 9 куглица можемо поделити у три групе од по три куглице и применити два пута претходно разматрану стратегију. У случају са 23 куглице, можемо направити три групе тако да у њима имамо редом 9, 9 и 5 куглица и онда на вагу ставити, рецимо, прве две групе. Ако наступи неравнотежа, задатак се своди на разматрани случај са 9 куглица. У супротном, додавањем 4 мерене куглице у трећу групу, задатак се опет своди на случај са укупно 9 куглица. Како нам је за случај са 9 куглица потребно тачно 2 мерења, довољан број мерења да пронађемо најтежу је 3.

5. Неједначина је дефинисана за $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1]$, јер мора бити $1-x \geqslant 0$ и $\sqrt{1-x} \neq 1$. Пребацивањем израза са десне стране на леву, након сређивања, добијамо

$$\frac{\sqrt{1-x} - 2\sqrt{3}\,x}{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)} \geqslant 0.$$

Очигледно је да знак израза у имениоцу зависи само од знака израза $\sqrt{1-x}-1$, јер је за савако $x \leqslant 1$ испуњено $\sqrt{1-x}+1 \geqslant 1$. Стога, размотримо два случаја.

1°: $\sqrt{1-x}-1>0$, тј. $1<\sqrt{1-x}$, тј. $1<1-x$, тј. $x<0$

У овом случају неједначина постаје $\sqrt{1-x} - 2\sqrt{3}\,x \geqslant 0$, односно $2\sqrt{3}\,x \leqslant \sqrt{1-x}$, што је тачно за све $x<0$.

2°: $\sqrt{1-x}-1<0$, тј. $\sqrt{1-x}<1$, тј. $1-x<1$, тј. $x \in (0,1]$, због области дефинисаности неједначине

У овом случају неједначина постаје $\sqrt{1-x} - 2\sqrt{3}\,x \leqslant 0$, односно $\sqrt{1-x} \leqslant 2\sqrt{3}\,x$, тј. $12x^2 + x - 1 \geqslant 0$. Анализом добијене квадратне функције тривијално налазимо да мора бити $x \in (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{4}, +\infty)$, те како је у овом случају $x \in (0,1]$, то је $x \in [\frac{1}{4}, 1]$.

Коначно, узимајући у обзир добијено у оба случаја, долазимо до закључка да је скуп решења полазне неједначине скуп $(-\infty, 0) \cup [\frac{1}{4}, 1]$.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Трећи разред - Б категорија

1. Услов да је први логаритам дефинисан је $x^2+3x>0$, односно, $x\in(-\infty,-3)\cup(0,+\infty)$.

Прву неједначину можемо написати у облику $x\cdot\big(\log_{0.5}(x^2+3x)+2\big)>0$. Производ два броја је позитиван уколико су оба броја позитивни или оба броја негативни, одакле добијамо два система са по две неједначине:

$$(x>0,\, \log_{0.5}(x^2+3x)+2>0) \quad \text{и} \quad (x<0,\, \log_{0.5}(x^2+3x)+2<0).$$

Једначина $\log_{0.5}(x^2+3x)+2>0 \ \Leftrightarrow \log_{0.5}(x^2+3x)>-2=\log_{0.5}4$, па кад се ослободимо логаритма (због $0.5<1$ мења се знак!), добијамо квадратну неједначину $x^2+3x-4<0$, која има решење $x\in(-4,1)$. Решење првог система, тј. система неједначина ($x>0$, $\log_{0.5}(x^2+3x)+2>0$), је $x\in(0,1)$.

Слично, $\log_{0.5}(x^2+3x)+2<0 \ \Leftrightarrow \log_{0.5}(x^2+3x)<-2=\log_{0.5}4$, па кад се ослободимо логаритма (због $0.5<1$ мења се знак!), добијамо квадратну неједначину $x^2+3x-4>0$, која има решење $x\in(-\infty,-4)\cup(1,+\infty)$. Решење другог система, тј. система неједначина ($x<0$, $\log_{0.5}(x^2+3x)+2<0$), је $x\in(-\infty,-4)$.

Коначно, спајањем решења ова два система добијамо да је решење прве логаритамске неједначине једнако $x\in(-\infty,-4)\cup(0,1)$.

Сређивањем израза у другој неједначини полазног система добијамо да је

$$\frac{2\log_2 3-3\log_8 45}{\log_4 75+\log_{0.25}3}=-1,$$

те се ова неједначина своди на $x+4>-1$ и она има решење $x>-5$.

Укупно решење добијамо као пресек ова два решења: $x\in(-5,-4)\cup(0,1)$.

2. Нека је ABC дати троугао. Означимо са a и b, редом, дужине страница BC и CA, а са β и γ унутрашње углове у теменима B и C тог троугла, редом. Претпоставимо, прво, да троугао ротира око своје a странице, тј. око странице BC. У случају да је тачно један од углова β или γ једнак 90°, у том процесу ћемо добити обртно тело (обичну праву купу), које има полупречник основе једнак $h_a=\frac{2P}{a}$ и висину једнаку a. Уколико су β и γ оштри углови, независно од величине угла у темену A, добићемо две купе, истих полупречника основа једнаких h_a (основе су наслоњене једна на другу), чији је збир висина једнак, управо, a. У случају да је неки од (тачно један) углова β или γ туп, приликом ротације ће се формирати тело идентично телу које настаје када из једне купе ,,извадимо" мању купу, истог полупречника основе, с тим што је разлика висина тих купа једнака a. У сваком од ова три случаја добијамо исту запремину обртног тела: $V_a=\frac{1}{3}\left(\frac{2P}{a}\right)^2\cdot a=\dfrac{4P^2\pi}{3a}$. Аналогно се добија и да је запремина обртног тела које добијамо када троугао ротира око своје странице b једнака $V_b=\dfrac{4P^2\pi}{3b}$. Одалте имамо да је тражени однос $V_a:V_b=\dfrac{4P^2\pi}{3a}:\dfrac{4P^2\pi}{3b}=\dfrac{1}{a}:\dfrac{1}{b}$, тј. $V_a:V_b=b:a$.

3. Из почетног услова имамо да је $n^n\equiv 2023 \pmod n$, одакле следи $n\mid 2023=7\cdot 17^2$. Такође, уколико је $n\geqslant 14$, тада би важило $0\equiv n^n\equiv 2023 \pmod{49}$, што није могуће. Из претходних запажања преостаје још испитати случај $n=7$, што и јесте решење полазног проблема. Заиста, да би важило $2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=7!\mid 7^7-2023$, треба показати да

$16 \mid 7^7 - 2023$, $9 \mid 7^7 - 2023$, као и да $5 \mid 7^7 - 2023$, јер, свакако, $7 \mid 7^7 - 2023$. Стога, треба упоредити остатке при дељењу бројева 7^7 и 2023 са 16, 9 и 5.

Имамо да број 48 даје остатак 0 при дељењу са 16, одакле следи да 7^2 даје остатак 1 при дељењу са 16. Дакле, 7^7 мора дати остатак 7 при дељењу са 16, а то је уједно и остатак при дељењу броја 2023 са 16, јер $16 \mid 2016$. Слично, остатак при дељењу броја 7^7 са 9 је 7, јер $9 \mid (7^3 - 1) = 342$, што је уједно и остатак при дељењу броја 2023 са 9 (знамо да $9 \mid 2016$). Коначно, 7^4 при дељењу са 5 даје остатак 1, одакле следи да 7^7 даје остатак 3 при дељењу са 5. Како је остатак при дељењу броја 2023 са 5 једнак 3, то $5 \mid 7^7 - 2023$.

4. На следећим сликама је у свако поље шаховске табле уписан број колико поља напада дама са тог поља (слика лево) и колико поља напада скакач са тог поља (слика 2. слева) – то је исто и са колико поља би скакач нападао даму уколико се налази на том пољу.

	a	b	c	d	e	f	g	h
8	21	21	21	21	21	21	21	21
7	21	23	23	23	23	23	23	21
6	21	23	25	25	25	25	23	21
5	21	23	25	27	27	25	23	21
4	21	23	25	27	27	25	23	21
3	21	23	25	25	25	25	23	21
2	21	23	23	23	23	23	23	21
1	21	21	21	21	21	21	21	21

	a	b	c	d	e	f	g	h
8	2	3	4	4	4	4	3	2
7	3	4	6	6	6	6	4	3
6	4	6	8	8	8	8	6	4
5	4	6	8	8	8	8	6	4
4	4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	8	8	8	8	6	4
2	3	4	6	6	6	6	4	3
1	2	3	4	4	4	4	3	2

	a	b	c	d	e	f	g	h
8	23	24	25	25	25	25	24	23
7	24	27	29	29	29	29	27	24
6	25	29	33	33	33	33	29	25
5	25	29	33	35	35	33	29	25
4	25	29	33	35	35	33	29	25
3	25	29	33	33	33	33	29	25
2	24	27	29	29	29	29	27	24
1	23	24	25	25	25	25	24	23

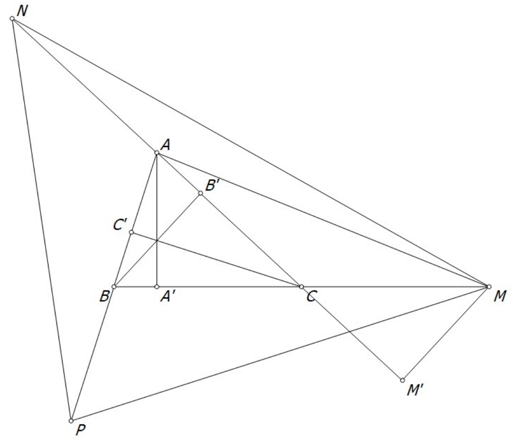
	a	b	c	d	e	f	g	h
8	40	39	38	38	38	38	39	40
7	39	36	34	34	34	34	36	39
6	38	34	30	30	30	30	34	38
5	38	34	30	28	28	30	34	38
4	38	34	30	28	28	30	34	38
3	38	34	30	30	30	30	34	38
2	39	36	34	34	34	34	36	39
1	40	39	38	38	38	38	39	40

Када саберемо ове бројеве добијамо слику 3. слева, а ту је у свако поље уписан број поља које напада дама са тог поља или би дама била нападнута ако би ту био скакач (приметимо да су ова поља дисјунктна, зато их само сабирамо). На последњој слици (скроз десно) је број поља на којима може бити скакач тако да нит њега напада дама нит он даму (то укупно 64 поља одузмемо 1 поље где се налази дама и d поља која напада дама са тог поља и s поља са којих скакач напада даму на том пољу, тј. $63 - (d + s)$, тј. од 63 одузмемо број са 3. слике лево).

Укупан број начина да се ставе бела дама и црни скакач на шаховску таблу 8×8 тако да ниједна од те 2 фигуре није нападнута је једнак збиру свих бројева са слике скроз десно, а то је једнако:

$4 \cdot 40 + 8 \cdot 39 + 16 \cdot 38 + 4 \cdot 36 + 16 \cdot 34 + 12 \cdot 30 + 4 \cdot 28 = 2\,240.$

5. Уколико је XYZ троугао у равни, са P_{XYZ} ћемо означити његову површину. Докажимо да је P_{MNP} једнако 2023 cm^2. Заиста, нека су A', B' и C' подножја висина из темена A, B и C троугла ABC, која одговарају страницама BC, CA и AB, редом, и нека је M', такође, подножје висине из темена M троугла CMN, које одговара страници NC. Означимо са a, b и c дужини страница BC, CA и AB, тим редом, троугла ABC. Како је $NC = 2b$, то је $P_{CMN} = b \cdot MM'$. Са друге стране, ако посматрамо троуглове BCB' и MCM', закључићемо, одмах, да су подударни (УСУ), јер је $BB' || MM'$. Следи, $BB' = MM'$, па је $P_{CMN} = b \cdot BB' = 2P_{ABC}$.



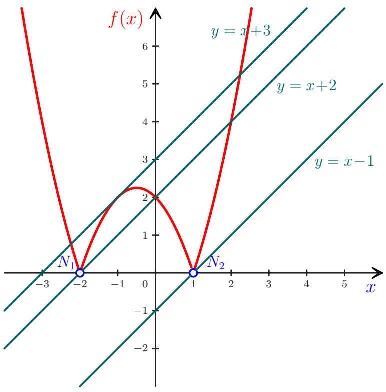
Аналогно се показује да је $P_{ANP} = c \cdot CC' = 2P_{ABC}$, као и $P_{BPM} = a \cdot AA' = 2P_{ABC}$. Дакле, $P_{MNP} = P_{ABC} + P_{CMN} + P_{ANP} + P_{BPM} = 7P_{ABC} = 2023\ cm^2$.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Четврти разред - Б категорија

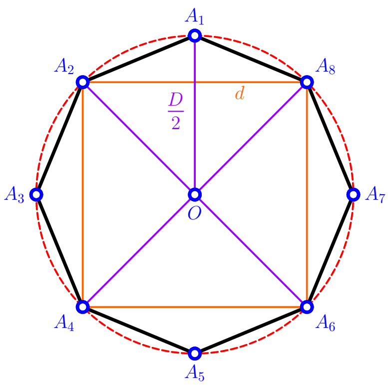
1. Квадратна функција $f(x) = x^2 + x - 2$ има нуле $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$, а теме параболе је тачка $T(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4})$.
Фунција $g(x) = -f(x) = -x^2 - x + 2$ има исте нуле, а теме параболе јој је $T'(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4})$.
Стога је $|x^2 + x - 2| = \begin{cases} x^2 + x - 2, & x \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty) \\ -x^2 - x + 2, & x \in (-2, 1). \end{cases}$
Одредимо за које вредности параметра m права $y = x + m$ пролази кроз неку од тачака $N_1(-2, 0)$ и $N_2(1, 0)$ или је тангента на параболу $y = -x^2 - x + 2$.
Када убацимо координате тачке $N_1(-2, 0)$ у једначину праве $y = x + m$ добијамо $m = 2$.
Када убацимо координате тачке $N_2(1, 0)$ у једначину праве $y = x + m$ добијамо $m = -1$.
Одредимо m тако да права $y = x + m$ и парабола $y = -x^2 - x + 2$ имају 1 заједничку тачку (тад је та права тангента параболе): $x + m = -x^2 - x + 2$, тј. добијамо квадратну једначину $x^2 + 2x + m - 2 = 0$ која има дискирминанту $D = 4 - 4(m - 2) = 12 - 4m$. Да би имали јединствено решење мора бити $D = 0$, па добијамо $m = 3$.
Ове 3 праве, $y = x + 2$, $y = x - 1$ и $y = x + 3$ су гранични случајеви за то колико пресечних тачака имају права $y = x + m$ и график функције $y = |x^2 + x - 2|$. То је све представљено на наредној слици.

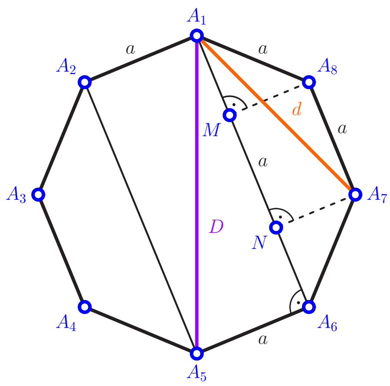


За $m < -1$ нема решења; за $m = -1$ има 1 решење, за $-1 < m < 2$ и $m > 3$ има 2 решења; за $m = 2$ и $m = 3$ има 3 решења; за $2 < m < 3$ има 4 решења.

Напомена. Може се гледати и колико пресечних тачака има график
$|x^2 + x - 2| - x = \begin{cases} x^2 - 2, & x \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty) \\ -x^2 - 2x + 2, & x \in (-2, 1). \end{cases}$ са правом $y = m$, где је $m \in \mathbb{R}$.

2. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Из квадрата $A_2A_4A_6A_8$, странице d и дијагонале D, добијамо везу $D = d\sqrt{2}$.
Површина делтоида $OA_2A_1A_8$ је $\dfrac{d \cdot \frac{D}{2}}{2} = \dfrac{d \cdot D}{4}$, док је површина целог осмоугла $4 \cdot \dfrac{d \cdot D}{4} = d \cdot D$, чиме смо показали да је површина правилног осмоугла једнака производу дужина његове најмање и највеће дијагонале.





(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Површина P осмоугла је збир површина 2 подударна трапеза $A_1A_8A_7A_6$ и $A_2A_3A_4A_5$ и правоугаоника $A_1A_2A_5A_6$. Нека је a страница правилног осмоугла. Тада је дијагонала A_1A_6 једнака $A_1A_6 = A_1M + MN + NA_6$. Висина трапеза $h = A_8M = \dfrac{a}{\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, а основице трапеза су $A_1A_6 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} + a + \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = a + a\sqrt{2} = a(1+\sqrt{2})$ и $A_8A_7 = a$, па је површина трапеза $P_{A_1A_8A_7A_6} = \dfrac{A_1A_6 + A_8A_7}{2} \cdot A_8M = \left(a + \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Површина правоугаоника $A_1A_2A_5A_6$ је $P_{A_1A_2A_5A_6} = A_1A_2 \cdot A_1A_6 = a \cdot \left(a + a\sqrt{2}\right)$, па је површина целог осмоугла $P = 2P_{A_1A_8A_7A_6} + P_{A_1A_2A_5A_6} = 2a^2(1+\sqrt{2})$.

Из правогулог троугла $\triangle A_1A_6A_5$ налазимо дијагоналу ${A_1A_5}^2 = {A_1A_6}^2 + {A_5A_6}^2 = a^2 + a^2(1+\sqrt{2})^2 = a^2(4+2\sqrt{2})$, тј. највећа дијагонала је $D = A_1A_5 = a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. Из правогулог троугла $\triangle A_1NA_7$ налазимо дијагоналу

$$ {A_1A_7}^2 = A_1N^2 + {NA_7}^2 = \left(a + \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2(2+\sqrt{2}), $$

тј. најмања дијагонала је $d = A_1A_7 = a\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Дакле, производ највеће и најмање дијагонале полазног осмоугла је

$$ D \cdot d = a\sqrt{4+2\sqrt{2}} \cdot a\sqrt{2+\sqrt{2}} = a^2\sqrt{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 = 2a^2(1+\sqrt{2}) = P, $$

што је и требало доказати.

3. Тривијално се проверава да $x = 10$ јесте решење полазне једначине. Очигледно, ако је $x \in \mathbb{Z}$ решење дате једначине, да мора важити $x \geqslant 0$, јер за $x < 0$ лева страна једначине је цео број, док је десна рационалан, који није цео.

Такође, лако проверавамо (једноставним убацивањем вредности) да цели бројеви $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ и 9 нису решења полазне једначине (лева страна је у свим тим случајевима строго већа од десне).

Нека је сада $x = n \geqslant 11$. Како је $n \in \mathbb{Z}$ и $n \geqslant 11$, то је n природан број не мањи од 11. Тривијалном применом принципа математичке индукције доказујемо да за свако $n \geqslant 11$ важи $6(n+1) < 2^n$. Заиста, за $n = 11$ тврђење се своди на $72 < 2^{11} = 2048$, што је тачно. Ако бисмо претпоставили да исто важи за неко $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 11$ (индуктивна хипотеза), тада ће важити $6(n+2) = 6n + 12 = 6(n+1) + 6 < 2^n + 6 < 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$, јер је за $n \geqslant 11$ испуњено $6 < 2048 \leqslant 2^n$. Дакле, за свако $n \geqslant 11$ важи $6(n+1) < 2^n$.

Коришћењем претходно показаног, тј. неједнакости $6(n+1) < 2^n$, $n \geqslant 11$, слично се показује да за свако $n \geqslant 11$ важи и $3n^2 + 3n + 1 < 2^n$. Заиста, за $n = 11$ неједнакост постаје $397 < 2^{11} = 2048$, која је тачна. Ако би неједнакост важила за неко природно $n \geqslant 11$, тј. ако би било $3n^2+3n+1<2^n$, тада би, на основу претходно доказане неједнакости, важило и $3(n+1)^2+3(n+1)+1=3n^2+3n+1+6n+6=3n^2+3n+1+6(n+1)<2^n+2^n=2\cdot 2^n=2^{n+1}$, одакле, на основу принципа математичке индукције, следи да је за свако природно $n\geqslant 11$ испуњено $3n^2+3n+1<2^n$.

Коначно, користићи, поново, примнцип математичке индукције, докажимо на крају да ће за свако $n\geqslant 11$ важити $n^3+24<2^n$. За $n=11$ је тврђење тривијално тачно, јер је $1355<2^{11}=2048$. Ако би за неко $n\geqslant 11$, $n\in\mathbb{N}$, важило $n^3+24<2^n$ (индуктивна хипотеза), тада ће, на основу индуктивне хипотезе и друге показане наједнакости, за следићи природан број, тј. за $n+1$, бити испуњено $(n+1)^3+24=n^3+3n^2+3n+25=n^3+24+(3n^2+3n+1)<2^n+2^n=2\cdot 2^n=2^{n+1}$. Дакле, $n^3+24<2^n$, за свако природно $n\geqslant 11$, одакле следи да полазна једначина нема решења у скупу природних бројева који нису мањи од 11.

Из свега показаног, једино решење једначине је $x=10$.

4. У авиону постоји $25*2=50$ група од по три седишта која ћемо звати тројкама. Приметимо да ако један путник из неке групе седи на седишту у некој тројци, онда бар још један путник из те групе мора седети у тој тројци. Према томе, у произвољној тројци могу седети путници из највише једне групе.

Посматрајмо једну групу од четворо. Њени путници седе у две тројке једној иза друге. Број начина да изаберемо предњу од те две тројке је 48 (јер не можемо бирати оне у последњем реду). Ако је та тројка баш у првом или претпоследњем реду, онда предњу тројку друге групе можемо одабрати на 46 начина, док иначе ту тројку можемо одабрати на 45 начина. Остале тројке бирамо како желимо међу слободнима. Притом у двема тројкама групе од четворо можемо на два начина изабрати четири седишта која заузима та група и слично за тројке група од двоје. Укупно, дакле, имамо $\big((4\cdot 46+44\cdot 45)\cdot 2^2\cdot(4!)^2\big)\cdot\big(\binom{46}{5}\cdot 5!\cdot(3!)^5\big)\cdot\big(\binom{41}{8}\cdot 8!\cdot 2^8\cdot(2!)^8\big)\cdot 111!=2164\cdot 2^{10}\cdot 2!^8\cdot 3!^5\cdot 4!^2\cdot 5!\cdot 8!\cdot 111!\cdot\binom{46}{5}\binom{41}{8}$ начина да распоредимо путнике у авион (јер након распоређивања група остаје 111 нераспоређених путника).

5. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине добијамо

$$\frac{x+n-1}{n}=\frac{x+\overbrace{1+1+\ldots+1}^{n-1}}{n}\geqslant\sqrt[n]{x}.$$

Множењем последње неједнакости са n добијамо тражену неједнакост.
(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Посматрајмо функцију $f(x)=nx^{\frac{1}{n}}-x+1$, $x>1$. Тада је $f'(x)=x^{\frac{1}{n}-1}-1$, за свако $x>1$. Како је за $x>1$ очигледно $f'(x)\leqslant 0$, за било које $n\in\mathbb{N}$, то је f опадајућа на $(1,+\infty)$, па важи $f(x)\leqslant f(1)=n$, за свако $x>1$.
(ТРЕЋЕ РЕШЕЊЕ) Нека је $n=1$. Тада је неједнакост тривијално испуњена, јер се своди на једнакост, тј. на $x\leqslant x$, што је тачно, за свако $x>1$. Нека је, даље, $n\geqslant 2$. Дата неједнакост је еквивалентна са $n(x^{\frac{1}{n}}-1)\leqslant x-1$, за свако $n\geqslant 2$ и $x>1$. Познато је да важи

$$y^n-1=(y-1)(y^{n-1}+\ldots+y+1),$$

за свако $n\in\mathbb{N}$ и $y\in\mathbb{R}$, одакле, за $y=x^{\frac{1}{n}}$, добијамо

$$x-1=(x^{\frac{1}{n}}-1)(x^{\frac{n-1}{n}}+\ldots+x^{\frac{1}{n}}+1).$$

Како је $x>1$, то је $x^{\frac{i}{n}}>1$, за свако $i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$, па је

$$x^{\frac{n-1}{n}}+\ldots+x^{\frac{1}{n}}+1>n,$$

одакле следи да је

$$x-1=(x^{\frac{1}{n}}-1)(x^{\frac{n-1}{n}}+\ldots+x^{\frac{1}{n}}+1)>n(x^{\frac{1}{n}}-1),$$

тј. $nx^{\frac{1}{n}} < x + n - 1$, за свако $n \geqslant 2$ и $x > 1$.