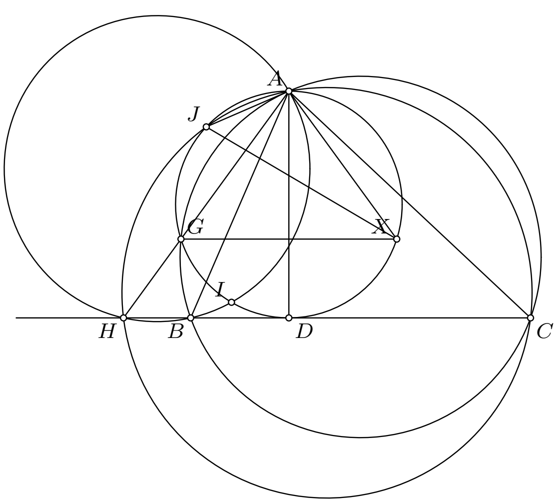
Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ
Први разред - А категорија

1. Означимо са a, b и c број појављања, редом, бројева -1, 1 и 2. Тада су a, b и c цели бројеви за које важи $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $-a+b+2c=111$ и $a+b+4c=999$, тј. $a=444-c \geqslant 0$, као и $b=555-3c \geqslant 0$, $c \geqslant 0$. Стога, треба максимизовати израз $-a+b+8c=111+6c$, уз ограничење $0 \leqslant c \leqslant \dfrac{555}{3}=185$. Међутим, сада је јасно је да се максимална вредност претходног израза добија за $c=185$ и она износи $111+6 \cdot 185=1221$. У том случају је $a=259$, $b=0$ и $c=185$, док су сви остали x_i једнаки нула.

2. Нека је X тачка симетрична тачки G у односу на праву AD. Претпоставимо да су тачке G и J са исте стране праве AD. Како је испуњено $\sphericalangle AJX = \sphericalangle AGX$, јер су у питању периферијски углови над тетивом AX кружнице ω, као и $\sphericalangle AHC = \sphericalangle AJC$, јер су у питању периферијски углови над тетивом AC кружнице описане око троугла AHC, то је, због паралелности правих GX и HC, испуњено $\sphericalangle AHC = \sphericalangle AGX$, па је $\sphericalangle AJX = \sphericalangle AJC$, одакле следи да су тачке C, X и J колинеарне.



Такође, $\sphericalangle BIA = 180^\circ - \sphericalangle BHA$, јер тачке A, H, B и I припадају кружници описаној око троугла AHB, па је $\sphericalangle BIA = 180^\circ - \sphericalangle XGA = 180^\circ - \sphericalangle XIA$, па су тачке B, I и X такође колинеарне. Међутим, тачка $X \in \omega$, па се BI и CJ секу на ω управо у тачки X.

3. Одговор је $n \in \{1, 2, 6\}$. Прво, приметимо да је неједнакост $f(n) > f(n-1)$, $n \geqslant 2$, еквивалентна са тиме да је n степен простог броја. Заиста, ако је $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, за неко $k > 1$ и $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, тада се сваки од бројева облика $p_i^{\alpha_i}$ већ појавио у досадашњем рачунају НЗС-а, одакле закључујемо да се $f(n)$ не може повећати. Са друге стране, ако је $n = p^{\alpha}$, за неки прост број p и $\alpha \in \mathbb{N}$, тадаа је $f(n) = pf(n-1) > f(n-1)$, јер је $p \geqslant 2$ и степен p^{α} се није појавио ни у једном броју мањем од n. Дакле, бројеви $n+1$, $n+2$ и $n+3$ су сви степени простих бројева.

Размотримо, прво, случај када је n непаран природан број. Тада су бројеви $n+1$ и $n+3$ степени простих бројева и парни, одакле следи да су оба степени двојке и то два степена двојке, која се разликују за 2. Очигледно је то једино могуће у случају да су у питању бројеви 2 и 4, тј. да је $n = 1$.

Нека је сада $n+2$ паран број. Тада је $n + 2 = 2^a$, за неко $a \in \mathbb{N}$. Тада је један од бројева $n+1$ и $n+3$ дељив са 3, па је самим тим и степен тројке. Ако је $n+1 = 3^b$, тада решавамо једначину $3^b + 1 = 2^a$, за неке природне бројеве a и b. Да би десна страна давала остатак 1 по модулу 3, мора бити a парно, па је $3^b = (2^{\frac{a}{2}} - 1)(2^{\frac{a}{2}} + 1)$, што значи да су бројеви $2^{\frac{a}{2}} - 1$ и $2^{\frac{a}{2}} + 1$ оба степени тројке који се разлику за 2, што једино може када су у питању бројеви 1 и 3, те је $a = 2$ и $b = 1$, тј. $n = 2$.

Најзад, нека је $n + 3 = 3^b$, за неко $b \in \mathbb{N}$. Тада важи $2^a + 1 = 3^b$, за неке позитивне целе бројеве a и b. Ако је $a = 1$, то би имплицирало да је $n = 0$, што не може. Дакле, важи $a > 1$ и лева страна, стога, даје остатак 1 по модулу 4. Да би и десна страна давала остатак 1 по модулу 4, мора b бити паран број, па је $2^a = (3^{\frac{b}{3}} - 1)(3^{\frac{b}{3}} + 1)$, тј. бројеви $3^{\frac{b}{2}} - 1$ и $3^{\frac{b}{2}} + 1$ су оба степени двојке који се разликују за 2. То могу бити само бројеви 2 и 4, па је $b = 2$ и $a = 3$. У том случају налазимо да је $n = 6$. Тривијално се проверава да ово заиста јесу решења задатка.

4. За $n = 1$ можемо поставити највише једног топа на таблу димензија 1×1 и тако постављени топ не ремети услове задатка. Дакле, за $n = 1$ одговор је 1.

За $n = 2$ можемо поставити највише 4 топа, јер сва 4 топа на табли испиуњавају услове задатка (услов да сваки напада највише 3 друга топа је испуњен). Дакле, за $n = 2$ одговор је 4.

За $n = 3$, не можемо поставити топове на свих 9 поља, наравно, али ако изоставимо централно поље, имаћемо укупно $8 = 4 \cdot 3 - 4$ топова који задовољавају услове задатка. Нека је, сада, $n \geqslant 4$. Поставимо топове на свако поље табле које припада првој или последњој врсти табле, односно, првој или последњој колони. Остала поља, на тренутак, оставимо празна. На тај начин смо сместили $n^2 - (n-2)^2 = 4n - 4$ топа и сваки од њих испуњава услове задатка. Дакле, можемо их поставити барем $4n - 4$.

Посматрајмо неки други распоред топова, којих има барем $4n-3$, и који задовољава услове задатка. Рећи ћемо да је x оса било која хоризонтала дуж поља у односу на таблу, а y оса ће нам бити било која вертикала. Назовимо топове крајњим по x оси, акко са једне стране x осе нема ниједног топа. Иначе ћемо их звати средишњим по x оси. Аналогно дефинишемо топове који су крајњи или средишњи по y оси. Топ не може бити средишњи по обе осе, јер тада напада 4 друга топа. Нека је, даље, a укупан број средишњих топова по x, b укупан број средишњих топова по y оси, а d укупан број крајњих топова по обе осе. Број крањих топова по y оси је, свакако, $a + d \leqslant 2n$, док је укупан број топова који су крајњи по x оси $b + d \leqslant 2n$. Стога је број топова $a + b + d = (a + d) + (b + d) - d \leqslant 4n - d$, а како их имамо барем $4n - 4$, то је $(a + d) + (b + d) - d \geqslant 4n - 4$. Зато, у случају највећег могућег броја топова, који није испод $4n - 4$, ће важити $4n - 4 \leqslant 4n - d$, тј. $d \leqslant 4$. Тривијално се показује да мора бити $d \geqslant 4$, јер топови који су крајњи у различитим врстама морају бити различити, као и они који су крајњи у различитим колонама. Дакле, највећи могући број топова које можемо поставити је $4n - 4$, за све $n \geqslant 2$, док је у питању број 1, за $n = 1$.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Други разред - А категорија

1. Као и обично, означимо услов који задовољава функција f са $P(a,b)$, $a,b \in \mathbb{Z}$. Из $P(1,-f(1))$ закључујемо да је $f(t)=1$, за $t=1+f(-f(1))$. Сада је, из $P(x,t)$ испуњено $f(x+1)=f(x)+c$, где је $c=t+1$ константа. Једноставном индукцијом, на обе стране (јер је $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$), закључујемо да је f линеарна функција (вредности функције у суседним целим бројевима се разликују за константу). То значи да је, за неке фиксне целе бројеве m и n, $f(x)=mx+n$, за свако $x\in\mathbb{Z}$. Стога, наш услов постаје $m(a+mb+n)+n=b+ma+n+1 \Leftrightarrow (m^2-1)b+(mn-1)=0$, за све целе бројеве b, одакле је $m^2=1$ и $mn=1$, тј. $m=n=1$ или $m=n=-1$, што одговара функцијама $f(x)=x+1$, $x\in\mathbb{Z}$, односно $f(x)=-x-1$, $x\in\mathbb{Z}$. Једноставном провером закључујемо да обе функције испуњавају услов задатка.

2. Нека су тачке A_1,B_1,C_1 и G, редом, средишта одговарајућих страница и тежиште троугла ABC. По обрнутој Талесовој теореми, због $\frac{AX}{XD}=\frac{AG}{GA_1}=2$, имамо $GX \parallel BC$, односно, $\sphericalangle GXH=90^\circ$. Дакле, тачка X лежи на кружници над пречником GH, што аналогно важи и за тачке Y и Z, одакле следи тврђење задатка.

3. Једноставном провером се види да бројеви 1 и 2 не испуњавају услов задатка. За $x\geqslant 3$ провером по модулу 8 закључујемо да мора x бити паран број, одакле, стављајући $x=2t$, $t\in\mathbb{N}$, имамо да је $4^t+200t+1$ потпун квадрат непарног броја већег од 2^t. Он не може бити квадрат броја 2^t+1, јер би било $2^{t+1}=200t$, односно $5\mid 2^{t+1}$, што је немогуће. Дакле, мора бити $4^t+200t+1\geqslant (2^t+3)^2=4^t+6\cdot 2^t+9$, па је $50t\geqslant 3\cdot 2^{t-1}+2$. Једноставном индукцијом се показује да последње не важи за $t\geqslant 9$, па је $t\leqslant 8$. Такође, анализирањем израза $4^t+200t+1$ по модулу 5 закључујемо да је t непарно. Коначно, једноставном провером, за $t\in\{1,3,5,7\}$, закључујемо да је једино решење $t=5$ (број 7 отпада, јер израз $4^7+200\cdot 7+1$ даје остатак 5 при дељењу са 7, док квадрати целих бројева при дељењу са 7 могу дати само остатке из скупа $\{0,1,2,4\}$). Такође, за $t=1$, односно $t=3$, тривијално проверавамо да израз $4^t+200t+1$ није квадрат природног броја. Међутим, за $t=5$, тј. $x=10$, важи $2^{10}+100\cdot 10+1=2025=45^2$, те је $x=10$ једини природан број који задовољава услов задатка.

4. Одговор: Сваки природан број n, осим бројева $n=5$ или $n=6$, има тражену особину. У том циљу, пређимо на језик графова.
Прво, ако је $n=4$, пошто међу тим чворовима има највише 4 гране, постоје неке две особе које се не познају. Ако је $n=5$, узмимо циклус C_5 дужине 5. Кад изаберемо било која 4 чвора, видимо да ћемо увек имати тачно 3 гране, тако да нам граф испуњава све услове. Такође, јасно се види да у том случају не постоје 3 чвора која чине независан скуп, тј. која чине скуп чворова у графу за која важи да никоја два чвора нису суседна. За $n=6$ нека су нам чворови $\{a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3\}$. Такође, нека су нам спојени чворови a_i и a_j, за свако $i\neq j$, као и b_i и b_j, за свако $i\neq j$, али и a_i и b_i, за свако i. Нека је $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ и $B=\{b_1,b_2,b_3\}$. Ако узмемо 3 чвора из A и један из B, или 3 из B и један из A, имаћемо тачно 4 гране. Ако узмемо по два чвора из A и B види се да ћемо увек имати 3 или 4 гране, па нам овај граф испуњава све услове. Међутим, како год узели 3 чвора биће бар два или из A или из B, па тај скуп чворова неће бити независан.
Нека је, сада, $n\geqslant 7$. Како је $n\geqslant 6=R(3,3)$, у овом графу постоји или празан троугао или пун троугао. Докажимо да не постоји пун троугао и у ту сврху претпоставимо супротно. Нека су $T=\{t_1,t_2,t_3\}$ у троуглу, односно нека су сви повезани. За сваки чвор a ван T, посматрањем скупа $T\cup\{a\}$, добијамо да је свако a повезано са највише

једним чвором из троугла T. Нека је B_1, $T \cap B_1 = \emptyset$, скуп свих чворова који су повезани само са t_1 или ни са једним, B_2, $T \cap B_2 = \emptyset$, скуп свих који су повезани са t_2 или ни са једним и B_3, $T \cap B_3 = \emptyset$, скуп свих који су повезани са t_3 или ни са једним. Како је $|B_1|+|B_2|+|B_3| \geqslant n-3 \geqslant 7-3=4$, следи да је барем један кардиналности барем 2. Нека је то B_1, без умањења општости. Ако су $a, b \in B_1$ и ако посматрамо скуп $\{t_2, t_3, a, b\}$, тада ћемо имати једно или два суседства, што је немогуће. Дакле, постоји $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ независан скуп величине 3. Нека је B највећи независан скуп у овом графу. Нека је C скуп чворова ван B. За свако $c \in C$ важи да постоји $b \in B$ тако да су b и c повезани. Онда за свако $b' \in B$ постоји $b'' \in B$ различито од b и b' (јер је $|B| \geqslant 3$) и гледајући тројку $\{c, b, b', b''\}$ закључујемо да ту мора да има тачно 3 гране, па су c и b' повезани. Ово значи да је сваки чвор из C повезан са сваким чвором из B. Нека су $c_1, c_2 \in C$ и $b_1, b_2 \in B$. Посматрајући скуп $\{c_1, c_2, b_1, b_2\}$ имаћемо 4 или 5 грана у зависности од тога да ли су чворови c_1 и c_2 повезани. Дакле, чворови c_1 и c_2 нису повезани. Стога, скуп чворова C је такође независан скуп. Дакле, $2|B| \geqslant |B| + |C| = n$, те је $|B| \geqslant \frac{n}{2}$, чиме је доказ завршен.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

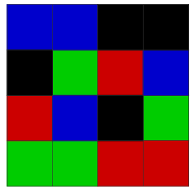
Трећи разред - А категорија

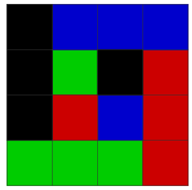
1. Једначина је дефинисана за $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и еквивалентна је са $2^n = 3 + (\frac{4n^2-10n+9}{5})^{\log_3 5}$. Како је $5^2 = 25 < 27 = 3^3$, следи $\log_3 5 < \frac{3}{2}$, а важи и $\frac{4n^2-10n+9}{5} < \frac{(2n-5)^2}{4}$, па је $(\frac{4n^2-10n+9}{5})^{\log_3 5} < \frac{(2n-5)^3}{8}$. Како је $2^9 - 3 = 509 > \frac{(2\cdot 9-5)^3}{8}$ и како из $2^n - 3 > \frac{(2n-5)^3}{8}$ следи $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot \left(3 + \frac{(2n-5)^3}{8}\right) > 3 + \frac{(2n-3)^3}{8}$, за $n \geqslant 7$, на основу индукције наведена једначина нема решења за $n \geqslant 9$, док провером вредности $n \in \{2, \ldots, 8\}$ следи да је решење наведене једначине $n \in \{2, 3, 7\}$.

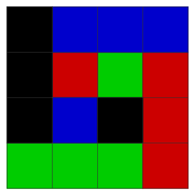
2. Приметимо прво да $x = y = 1$ није решење, па можемо да претпоставимо да је $x \neq 1$ или $y \neq 1$, као и да је онда $x^2 + y^2 - 2 > x + y$, јер $(x^2 - x) + (y^2 - y) \geq 3 + 0 > 2$. Одатле знамо, пошто су оба степени двојке, да важи $2x + 2y | x^2 + y^2 - 2$. Међутим, онда $2x + 2y \mid (x+y)^2 - 2 - 2xy$, односно $2x + 2y \mid 2xy + 2$ (како је $x + y$ паран, $2x + 2y \mid (x+y)^2$). Даље, знамо $2x + 2y \mid 2xy - 2x - 2y + 2$, тј. $x + y \mid (x-1)(y-1)$. Пошто је $x + y = 2^k$ степен двојке (већи од 2) и важи да је неки од x, y конгруентан са 1 по модулу 4, док је други конгруентан са 3 по модулу 4. Без умањења општости, претпоставимо да је $x \equiv 1 \pmod 4$. Знамо да је $k = v_2(x+y) \leqslant v_2((x-1)(y-1)) \leqslant 1 + v_2(x-1)$, односно $v_2(x-1) \geqslant k-1$, па $2^{k-1} \mid x - 1$. Међутим, како је $x < 2^k$, онда једине могућности за x су 1 и $2^{k-1} + 1$.
Ако је $x = 1$, онда су $y + 1$ и $y^2 - 1 = (y+1)(y-1)$ степени двојке, па су и $y + 1$ и $y - 1$, такође, степени двојке који се разликују за 2, одакле је $y = 3$.
Преостаје и други случај, тј. $x = 2^{k-1} + 1$ и $y = 2^{k-1} - 1$. Тада је $x^2 + y^2 - 2 = (2^{k-1}+1)^2 + (2^{k-1}-1)^2 - 2 = 2^{2k-1}$, што значи да је $x = 2^t + 1$ и $y = 2^t - 1$ заиста решење. Стога, решење је пар $(2^t+1, 2^t-1)$ (и обрнуто) за свако $t \in \mathbb{N}$ (претходно нађено решење $(1, 3)$ се такође уклапа у ову шему).

3. Нека се нормала на праву AL у тачки L и тангента у тачки A на описану кружницу секу у тачки X. Нека је Y средиште дужи AX и нека је Z средиште дужи AH. Потребно је доказати да је $XH \perp AM$, што је еквивалентно са тим да је права YZ нормална на AM. Како је $\sphericalangle ALX$ прав, а Y средиште дужи AX, то је $YX = YA = YL$, те како је YA тангента на описану кружницу, можемо закључити да је YL такође тангента на ту кружницу. Пошто је $\sphericalangle CAL = \sphericalangle BAM$, следи да је четвороугао $ABLC$ хармонијски, па се Y као пресек тангенти у тачкама A и L налази на продужетку дијиагонале BC, односно Y је пресек тангенте из A на описану кружницу ABC и праве BC.
Да бисмо довршили доказ, показаћемо да је Z ортоцентар троугла AYM. Јасно је да је $AZ \perp YM$. Такође, ако пресликамо H преко M у A', познато је да је AA' пречник описане кружнице троугла ABC, па је зато $AA' \perp AY$. Због средње линије је и $MZ || AA'$, односно $MZ \perp AY$. Стога је Z заиста ортоцентар троугла AYM и важи $XH || YZ \perp AM$, што смо и желели да докажемо.

4. Доказаћемо да број n мора бити дељив са 4 и да за $4 \mid n$ имамо поплочавање било којом фигуром. За сваку фигуру имамо да n мора бити парно, јер је број поља које заузима свака фигура паран, а самим тим и укупан број поља. За $4 \mid n$ очигледно је довољно конструисати пример за 4×4 таблу и то чинимо као на сликама. Даље, претпоставимо да $4 \mid n - 2$.







(а) Обојимо поља тако да су поља у парним колонама црна, а остала бела. Видимо да ће фигура заузимати непаран број црних поља, а укупан број црних поља је паран, па је и укупан број фигура паран. Ипак, како свака фигура заузима 4 поља, укупан број поља је дељив са 8, одакле следи да $4 \mid n$. Контрадикција!
(б) Почевши од горњег левог ћошка нумеришемо врсте од 0 до $n-1$. Урадимо исто и за колоне. У поље које се налази у k-тој колони и l-тој врсти упишемо број i^{k+l}, где је $i^2=-1$, тј. решење једначине $x^2+1=0$, које припада горњој полуравни $\{z=x+iy \in \mathbb{C} : y>0\}$. Лако се проверава да је сума бројева уписаних у поља која покрива фигура једнака нула, али и да је сума бројева на целој табли једнака

$$\left(\sum_{j=0}^{n-1} i^j\right)^2 = \left(\frac{i^n-1}{i-1}\right)^2 = 2i \neq 0,$$

што је контрадикција.
(в) Обојимо таблу у црно-бело, као шаховску. Свака фигура покрива непаран број црних поља. Како је број црних поља паран, укупан број фигура мора бити такође паран, тако да имамо контрадикцију као и у делу описаном у тачки (а).

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Четврти разред - А категорија

1. Нека је $\mathrm{Re}\, z = a > 0$, $\mathrm{Im}\, z = b$, $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Видимо да из услова дефинисаности имамо $b > 0$. Једначину можемо записати као:

$$b^a = e^{\frac{1}{2}((a^2+b^2)-2a)}$$

јер је $z + \overline{z} = 2a$, односно:

$$e^{a \ln b + a} = e^{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}$$

што даје:

$$a(\ln b + 1) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

Даље, имамо да је $\ln b + 1 \leqslant b$, за $b > 0$, где једнакост важи ако и само ако $b = 1$ (што, на пример, добијамо из класичне неједнакости: $e^x \geqslant 1 + x$, за $x \in \mathbb{R}$). Даље је, за $0 < b \leqslant e^{-1}$, испуњено $a(\ln b + 1)| \leqslant 0$, док је $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) > 0$, па једначина нема решења. За $b > e^{-1}$ важи $a(\ln b + 1) \leqslant ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, где је друга неједнакост, заправо, неједнакост између геометријске и аритметичке средине (a и b су позитивни, па је $|ab| = ab$). Према томе, једнакост у првој од две неједнакости важи ако и само ако $b = 1$, а у другој ако и само ако је $a = b$, тј. једнакост важи ако и само ако $a = b = 1$. Према томе, једина могућност за решење је $a = b = 1$, тј. $z = 1 + i$, што се провером и потврђује.

2. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Претпоставимо да је $AB = BC$. Тада је троугао ABC једнакокраки, одакле следи да тачке T и S припадају BF, па је тврђење тривијално испуњено. Нека је, даље, $AB > BC$. Означимо са M, N и P, редом, средишта страница AB, BC и CA. Нека је $\measuredangle DTM = \measuredangle CTE = x$. Из синусних теорема за $\triangle DTM$ и $\triangle ECT$ имамо (приметимо $\measuredangle TDM = \frac{\pi-\beta}{2}$ и $\measuredangle TEC = \frac{\pi+\beta}{2}$):

$$\frac{\sin x}{\sin \frac{\pi-\beta}{2}} = \frac{DM}{MT} \text{ и } \frac{\sin x}{\sin \frac{\pi+\beta}{2}} = \frac{EC}{CT},$$

па како је $\sin \frac{\pi-\beta}{2} = \sin \frac{\pi+\beta}{2} = \cos \frac{\beta}{2}$ и $CT = 2TM$, добијамо $CE = 2DM = 2BD - 2BM = 2BD - c$. Приметимо сада да је $AD = AF = x$, $BD = BE = y$, $CE = CF = z$ и

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & c \\ y & + & z & = & a \\ z & + & x & = & b \end{array}$$

Добијени систем се тривијално решава, одакле налазимо да је $x = s-a, y = s-b, z = s-c$. Сада, како је $CE = z$ и $BD = y$, из добијене једнакости $CE = 2BD - c$, имамо да је $s - c = 2s - b - c$, тј. $s = 2b$, па је $a + c = 3b$. Нека је $\mathcal{P}$ површина троугла $\triangle ABC$. Тада важи $\mathcal{P} = rs = 2br$. Даље, површина троугла TCA је $\mathcal{P}_{TCA} = \frac{1}{3}\mathcal{P} = \frac{2}{3}br$. Нека је сада h висина троугла TCA која одговара страници CA. Тада је $\mathcal{P}_{TCA} = \frac{1}{2}bh = \frac{2}{3}br$, одакле је $h = \frac{4}{3}r$. Даље важи и $\mathcal{P} = \frac{ac\sin\beta}{2} = 2br$, одакле је $r = \frac{ac\sin\beta}{4b}$, па је $h = \frac{ac\sin\beta}{3b}$. Из косинусне теореме за $\triangle ABP$ се добија $t_b = \frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{2}$, па је $TP = \frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{6}$. Коначно, нека је сада X тачка праве AC таква да важи $TX \perp AC$ и $TX = h$. Због $AB > BC$, важи распоред $A-P-X-C$. Троугао PTX је правоугли са хипотенузом PT, па је $PX^2=PT^2-TX^2$. Сада сређујемо:

$$\begin{aligned}
PT^2-TX^2 &= \frac{2a^2+2c^2-b^2}{36}-\frac{a^2c^2\sin^2\beta}{9b^2}\\
&= \frac{2a^2b^2+2c^2b^2-b^4-4a^2c^2\sin^2\beta}{36b^2}\\
&= \frac{2a^2(a^2+c^2-2ac\cos\beta)+2c^2(a^2+c^2-2ac\cos\beta)-(a^2+c^2-2ac\cos\beta)^2-4a^2c^2\sin^2\beta}{36b^2}\\
&= \frac{c^4-2a^2c^2+a^4}{36b^2}=\frac{(c^2-a^2)^2}{36b^2}=\frac{(c-a)^2\cdot(c+a)^2}{36b^2}\\
&= \frac{(c-a)^2\cdot 9b^2}{36b^2}=\frac{(c-a)^2}{4}.
\end{aligned}$$

Одавде је сада $PX=\frac{c-a}{2}$. Међтим, приметимо да је $PF=AF-AP=s-a-\frac{b}{2}=\frac{3b}{2}-a=\frac{c-a}{2}$ и важи распоред $A-P-F-C$, па је из свега наведеног $X\equiv F$, тј. $TF\perp CA$, али и права која је норална на CA у F пролази кроз S. Дакле, тачке T,S и F су колинеарне.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Доказаћемо да тачка $P=DS\cap EF$ припада тежишној дужи CM, $M\in AB$ (у општој ситуацији, без задате претпоставке о тежижту). Тада би очигледно следио тврђење, јер је, по услову, $T=CM\cap EF=P$, односно тачке T и P би биле једнаке.
Заиста, нека права кроз тачку P, паралелна са AB, сече странице AC и BC у тачкама X и Y, редом. Очигледно је $\sphericalangle SPY=\sphericalangle SEY=\sphericalangle SPX=\sphericalangle SFX=90^\circ$, па су четвороуглови $SEYP$ и $SPFX$ тетивни (кругови над пречницима SY и SX). Сада је $\sphericalangle SYP=\sphericalangle SEP=\sphericalangle SFP=\sphericalangle SXP$, при чему средња једнакост важи због $SE=SF$, док спољне важе на основу поменутих тетивности. Одавде је $SY=SX$, односно троугао SXY је једнакокраки и тачка P је средижте дужи XY (због $SP\perp XY$). Како је $XY\parallel AB$, из хомотетије, која слика троугао CXY на троугао CAB, закључујемо да су тачке C,P и M колинеарне, одакле следи тврђење.

3. Претпоставићемо да су играчи рационални, тј. да неће одиграти потез након којег ће, након извесног времена, са сигурношћу изгубити.
Ако је n једнак 1 или је прост, Ана не може одиграти потез, па Бојан побеђује. Ако је на табли у нечијем потезу број k и ако тај играч одабере делилац d, $d|k-d$, $1<d$, противник губи у следећем потезу акко је $k-d$ прост, а како d дели $k-d$, то је $k-d=d$, тј. $k=2d$, па је и d прост. Стога, ако је на табли непаран број и ако играч X може одигарти потез, противник Y ће имати паран број на табли који је дељив оним делиоцем који је одабрао играч у прошлом потезу. Дакле, он ће бирати исти тај делилац, одакле следи да ће на табли играч X имати опет непаран број. Међутим, како на табли мора бити паран број да би играч Y изгубио, играч X неће победити уколико је на табли записан непаран број. Дакле, ако је на табли непарно n, Бојан побеђује.
За n парно, које није степен броја 2, Ана обабира делилац од n који је непаран, а није 1. Бојан има непаран број на табли, те ће изгубити, на основу реченог изнад. Дакле, у овом случају Ана побеђује.
Ако је $n=4$, то Ана побеђује, јер, након бирања броја 2, Бојан неће моћи да одигра потез. Нека је, зато, на табли записан степен броја 2, тј. број 2^l, $l\geqslant 3$. Његов делилац ће бити, такође, степен броја 2. Ако играч одабере 2^x, за $1\leqslant x<l-1$, тада ће након његовог потеза на табли бити број $2^l-2^x=2^x(2^{l-x}-1)$, па како је број $2^{l-x}-1$ непаран и већи од 1, противник на табли добија паран број, али који није степен броја 2, те противник добија. Стога, за бројеве $n=2^{2m+1}$, $m\geqslant 1$, Ана одабира делилац 2^{2m}, па

Бојан губи не одабере ли делилац 2^{2m-1}. Међутим, уколико одабере делилац облика 2^{2m-1}, Ана ће у следећм кругу имати на табли број 2^{2m-1}, одакле следи, спуштајући се уназад, да за бројеве n претходног облика Бојан побеђује, јер ће након m потеза Бојан на табли имати записан број $4 = 2^2$, што Ани не омогућује да одигра следећи потез, јер Бојан мора бирати 2 (ако гледамо претходни потез, Ана је имала записан број 2^3, па је изабрала $2^2 = 4$). Аналогно, за $n = 2^{2m}$, $m \geqslant 2$, Ана побеђује. Заиста, за $m = 2$ је тврђење тачно, јер ће Ана у првом потезу бирати 2^3. Бојан у следећем 2^2, јер је на табли остао 2^3. Стога, непосредно пред Анин следећи потез, на табли је број $2^2 = 4$, па ће Ана морати да одабере број 2, те Бојан неће моћи да одигра потез. Претпоставимо, зато, да Ана побеђује када је на табли записан број $n = 2^{2m}$, за неко $m \in \mathbb{N}$ (индуктивна хипотеза). Тада, за бројеве облика 2^{2m+2}, Ана губи не одабере ли 2^{2m+1} за делилац, те након бирања тог делиоца, Бојан ће морати да бира делилац 2^{2m}, те ће Ани пре него што одигра потез, након Бојановог потеза, на табли бити записан број 2^{2m}, што нам омогућује да применимо индуктивну хипотезу, тј. да закључимо да ће Ана имати победничку стратегију. Дакле, на основу принципа математичке индукције, Ана побеђује за све $n = 2^{2m}$, $m \geqslant 2$.

4. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Нека је p прост број такав да $24|p-17$ и нека је $p = a^2 + b^2$ и $a = 2m$. Тада је b непарно, одакле следи да је $b^2 \equiv 1 \pmod 8$, па како $8 \mid a^2 + b^2 - 17$, то $8 \mid a^2$, тј. $8 \mid 4m^2$, па $2 \mid m$. Дакле, m је парно. Следи да постоји правоугли троугао са странама

$$\left(2ab, |a^2 - b^2|, p\right).$$

Такође, постоји правоугли троугао са странама

$$\left(4mb, |m^2 - (2b)^2|, m^2 + (2b)^2\right).$$

"Залепимо" ова два троугла по подударним страницама дужина $2ab = 4mb$, тако да добијемо трапез. Површина и дужине свих страница истог су цели бројеви, као и једна дијагонала и постоји барем један прост број међу странама, али, такође, и највише један, јер важи:

- $2 \mid m^2 - (2b)^2$
- $2 \mid m^2 + (2b)^2$
- $3 \mid a^2 - b^2$.

Међутим, како на основу Дирихлеове теореме о простим бројевима постоји бесконачно много таквих простих бројева p, доказ је завршен.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) По Дирихлеовој теореми, како су 13 и 3 узајамно прости, постоји бесконачно много простих бројева p таквих да је $p \equiv_{13} 3$. Нека је $p > 3$ прост број таквог облика и нека је $p^2 = 4a + 1$ и $b = 2a^2 + 2a$. Тада је $a \equiv_{13} 2$ и $b + 1 \equiv_{13} 0$ (те због $p > 3$ имамо $b + 1 > 13$), те је $b + 1$ сложен број. Троуглови са страницама p, $2a$ и $2a + 1$, односно $2a + 1, b$ и $b + 1$ су правоугли. Четвороугао $ABCD$, код кога је $AB = p$, $BC = 2a$, $CD = b$, $DA = b + 1$ и $AC = 2a + 1$ очигледно задовољава све услове задатка, чиме је доказ комплетиран.