**Министарство просвете Републике Србије**
**Друштво математичара Србије**

## ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

**4. март 2023.**

### Први разред - А категорија

1. Нека је $\varrho$ бинарна релација дефинисана на скупу $\mathbb{N}$ тако да за све $x, y \in \mathbb{N}$ важи

$$x \,\varrho\, y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad (\exists k \in A)\ x + 2y = 3k \cdot x.$$

У сваком од случајева:

(а) $A = \mathbb{N}$; (б) $A = \mathbb{T}$, где је $\mathbb{T}$ скуп непарних природних бројева; (в) $A = \mathbb{Q}$;

испитати да ли је релација $\varrho$ релација поретка на скупу $\mathbb{N}$ и, у случају да јесте, испитати да ли је релација тоталног поретка. Такође, у сваком од случајева испитати да ли је релација $\varrho$ релација еквиваленције на скупу $\mathbb{N}$ и, ако јесте, одредити одговарајуће класе еквиваленције?

2. На страницама оштроуглог троугла $ABC$ дате су тачке $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$ и $C_1 \in AB$ тако да је $\sphericalangle CC_1B = \sphericalangle AA_1C = \sphericalangle BB_1A = \varphi$, где је $\varphi$ оштар угао. Дужи $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ секу се у тачкама $M$, $N$ и $P$. Доказати да се ортоцентар троугла $ABC$ поклапа са центром описаног круга троугла $MNP$.

3. Нека је $S$ коначан подскуп скупа природних бројева такав да за свака два елемента $x$ и $y$ из скупа $S$ важи да постоји $z \in S$ тако да $z \mid x - y$. Доказати да постоји елемент из скупа $S$ који дели све остале елементе тог скупа. Да ли тврђење остаје на снази када је $S$ коначан подскуп скупа целих бројева?

4. У једној основној школи свако од укупно 2023 ученика има један ормарић на којима су написани, редом, сви бројеви од 1 до 2023. Претпоставимо да су на почетку сви ормарићи затворени. Ученици те школе су одлучили да се поиграју, те да свако од њих оде и отвори/затвори поменуте ормариће. Први ученик полази и отвара, редом, све ормариће. За њим креће и други ученик и иде и затвара сваки други, тј. ормарић са парним бројем, итд. Ученик $n$ иде до сваког $n$-тог ормарића и, ако је он отворен, затвори га, а, ако је затворен, онда га отвара. На крају, свих 2023 ученика приступило је процесу отварања/затварања ормарића.

(а) Након ове игре, колико је остало отворених ормарића?
(б) Колико је ормарића тачно два пута отворено и једном затворено?

5. Нека су $x, y \in \mathbb{R}$ такви да су $x + y$ и $x^2 + y$ рационални бројеви.

(а) Ако је и $x + y^2$ рационалан, морају ли $x$ и $y$ бити рационални?
(б) Ако је и $x^3 + y$ рационалан, морају ли $x$ и $y$ бити рационални?

**Време за рад 180 минута.**
**Сваки задатак вреди 20 поена.**
**Решења задатака детаљно образложити.**

**Министарство просвете Републике Србије**
**Друштво математичара Србије**

# ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

**4. март 2023.**

## Други разред - А категорија

1. Наћи сва реална решења једначине

$$\sqrt{x+\sqrt{4x+\sqrt{4^2x+\sqrt{\cdots+\sqrt{4^{2023}x+3}}}}}-\sqrt{x}=1.$$

2. Нека је тачка $O$ средиште описане кружнице око троугла $ABC$ у којем важи $\sin\alpha\cos\beta=\sin\gamma\cos\gamma$, где су $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$, редом, величине унутрашњих углова у теменима $A$, $B$ и $C$ тог троугла. Доказати да се права $AO$, права одређена тежишном дужи, која садржи тачку $B$ тог троугла, и симетрала унутрашњег угла у темену $C$ секу у једној тачки.

3. Наћи све парове природних бројева $(x, y)$ такве да важи $2^x+11=3^y$.

4. Дат је скуп $S=\{1,2,\ldots,2022\}$. На колико се начина може одабрати $k$-точлани подскуп $M$ скупа $S$ ($2\leqslant k\leqslant 2022$) такав да у скупу $M$ не постоје два елемента чији је збир једнак 2022, нити два чији је збир једнак 2023?

5. Нека за позитивне реалне бројеве $a$, $b$ и $c$ важе једнакости

$$a^2+ab+b^2=144,\ \ b^2+bc+c^2=25\ \text{ и }\ c^2+ca+a^2=169.$$

Одредити вредност израза $ab+bc+ca$.

**Време за рад 180 минута.**
**Сваки задатак вреди 20 поена.**
**Решења задатака детаљно образложити.**

**Министарство просвете Републике Србије**
**Друштво математичара Србије**

## ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

**4. март 2023.**

### Трећи разред - А категорија

1. Уколико је $AB = A$ и $BA = B$, доказати да су матрице $A$ и $B$ идемпотентне, тј. да је $A^2 = A$ и $B^2 = B$.

2. Дат је троугао $ABC$. Нека су $S$ и $S_a$, редом, средиште уписане кружнице и средиште споља приписане кружнице која одговара темену $A$ тог троугла. Ако је $D$ подножје висине из темена $A$ и $S'$ тачка симетрична тачки $S$ у односу на праву $BC$, доказати да су тачке $S_a$, $S'$ и $D$ колинеарне.

3. Да ли постоји бесконачно много природних бројева $r$ таквих да постоје природни бројеви $n, a_1, a_2, ..., a_r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ такви да важи

$$n! = a_1! \cdot a_2! \cdot a_3! \cdot \ldots \cdot a_r!\,?$$

4. Дато је $k$ мушкараца и $n$ жена међу којима постоје неки парови који су међусобно компатибилни, при чему је свака жена компатибилна са барем једним мушкарцем. Познато је да није могуће сваког мушкарца оженити са компатибилном женом, међутим, ако избацимо било ког мушкарца, ово постаје могуће за преостале. Доказати да је $k = n + 1$.

5. Одредити све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ за које важи

$$f(y)f(x + y) + xf(x) + f(xy) = f(x + y)^2,$$

за свако $x, y \in \mathbb{R}$.

**Време за рад 180 минута.**
**Сваки задатак вреди 20 поена.**
**Решења задатака детаљно образложити.**

**Министарство просвете Републике Србије**
**Друштво математичара Србије**

**ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ**

**4. март 2023.**

**Четврти разред - А категорија**

1. Дат је неконстантан иредуцибилан полином $P \in \mathbb{Q}[x]$. Нека су $a, b \in \mathbb{R}$ такви да је $P(a) = P(b) = 0$ и $a - b \in \mathbb{Q}$. Доказати да је $a = b$.

Напомена: За полином $P \in \mathbb{Q}[x]$ кажемо да је иредуцибилан ако се не може представити као производ два неконстантна полинома из $\mathbb{Q}[x]$.

2. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$. Нека су $E$ и $F$ тачке додира уписане кружнице троугла $ABD$ са страницама $AD$ и $AB$, редом, а $G$ и $H$ тачке додира уписане кружнице троугла $BCD$ са страницама $BC$ и $CD$, редом. Доказати да се праве $EF$, $GH$ и $BD$ секу у једној тачки или су све три паралелне ако и само ако је четвороугао $ABCD$ тангентан.

3. Одредити све функције $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такве да важи

$$f(m) + f(n) \mid m! + n!,$$

за све природне бројеве $m$ и $n$.

4. (а) Колико постоји низова подскупова $A_1, A_2, ..., A_{100}$ и $A_{101}$ скупа $\{1, 2, 3, ..., 2023\}$ тако да за свако $i \in \{1, 2, 3, ..., 100\}$ важи $|A_i \triangle A_{i+1}| = 101$?
(б) Колико има таквих низова подскупова за које додатно важи и $|A_{101} \triangle A_1| = 101$?

5. Дата је функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таква да за свака два различита природна броја $a, b \in \mathbb{N}$, таква да $a \mid b$, важи $f(a) < f(b)$. Да ли $f$ мора бити неопадајућа?

**Време за рад 180 минута.**
**Сваки задатак вреди 20 поена.**
**Решења задатака детаљно образложити.**

**Министарство просвете Републике Србије**
**Друштво математичара Србије**

**ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ**

**4. март 2023.**

**Први разред - Б категорија**

1. Група ученика учествовала је на кросу. Проценат броја ученика који су испунили норму је не мањи од $96,8\%$, а није ни већи од $97,2\%$. Који је најмањи могући број ученика који су учествовали на том кросу?

2. Тачка $E$ је средиште странице $AB$ четвороугла $ABCD$. Тачке $F$ и $G$ су такве да важи $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AD}$. Ако је тачка $H$ средиште $CD$, доказати да су тачке $F$, $G$ и $H$ колинеарне.

3. Дат је природан број $n$ који има 6 различитих природних делилаца чији је збир једнак 22. Доказати да је $n$ дељив са 420.

4. Нека је $\mathbb{N}_{13} = \{1, 2, 3 \ldots , 13\}$. Колико има бијекција $f \colon \mathbb{N}_{13} \to \mathbb{N}_{13}$ таквих да је $f(3) = 13$, при чему, за све $x \in \mathbb{N}_{13} \setminus \{3\}$, важи да су $x$ и $f(x)$ различите парности?

5. Једна просторија је на почетку празна. Сваког минута или једна особа уђе у њу или две особе из ње изађу. Може ли после тачно 100 сати у просторији бити тачно 2023 особе?

**Време за рад 180 минута.**
**Сваки задатак вреди 20 поена.**
**Решења задатака детаљно образложити.**

**Министарство просвете Републике Србије**
**Друштво математичара Србије**

**ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ**

**4. март 2023.**

## Други разред - Б категорија

1. Нека су $a$, $b$ и $c$ позитивни реални бројеви и нека је $a+b<c$. Доказати да вредност израза

$$\sqrt{a+b+c+2\sqrt{ac+bc}}+\sqrt{a+b+c-2\sqrt{ac+bc}}$$

не зависи од $a$ и $b$.

2. Уколико постоји, испитати да ли је троугао чије су висине:

(а) $5\,\mathrm{cm}, 12\,\mathrm{cm}, 13\,\mathrm{cm}$; (б) $6\,\mathrm{cm}, 9\,\mathrm{cm}, 12\,\mathrm{cm}$;

оштроугли, правоугли или тупоугли.

3. Ако су сви коефицијенти квадратне једначине $ax^2+bx+c=0$ непарни цели бројеви, доказати да тада решења те једначине не могу бити рационални бројеви.

4. Доказати да се у три мерења на ваги са теразијама, од укупно 23 куглице, које су једнаке по свим атрибутима, осим што је тачно једна тежа од осталих, може пронаћи та тежа куглица.

5. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\sqrt{48}+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}-1}\geqslant\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}+1}.$$

**Време за рад 180 минута.**
**Сваки задатак вреди 20 поена.**
**Решења задатака детаљно образложити.**

**Министарство просвете Републике Србије**
**Друштво математичара Србије**

## ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

**4. март 2023.**

### Трећи разред - Б категорија

1. Решити систем неједначина

$$x \cdot \log_{0,5}(x^2+3x) + \log_3 9^x > 0$$
$$x + 4 > \frac{2\log_2 3 - 3\log_8 45}{\log_4 75 + \log_{0,25} 3}.$$

2. Троугао ротира, редом, око својих страница чије су дужине $a$ и $b$. У функцији од $a$ и $b$ изразити однос запремина тако добијених тела.

3. Наћи све природне бројеве $n > 1$ за које важи $n! \mid n^n - 2023$.

4. На колико начина се могу ставити бела дама и црни скакач на празну шаховску таблу $8 \times 8$ тако да ниједна од те две фигуре не напада другу?

5. Површина троугла $ABC$ је $289\,cm^2$. Нека су $M$, $N$ и $P$ тачке на правама $BC$, $CA$ и $AB$, различите од тачака $B$, $C$ и $A$, редом, тог троугла такве да важи $CB = CM$, $AC = AN$ и $BA = BP$. Одредити површину троугла $MNP$.

**Време за рад 180 минута.**
**Сваки задатак вреди 20 поена.**
**Решења задатака детаљно образложити.**

**Министарство просвете Републике Србије**
**Друштво математичара Србије**

**ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ**

**4. март 2023.**

**Четврти разред - Б категорија**

1. У зависности од реалног параметра $m$ дискутовати колико реалних решења има једначина
$$|x^2 + x - 2| = x + m.$$

2. Доказати да је површина правилног осмоугла једнака производу дужина његове најмање и његове највеће дијагонале.

3. У скупу целих бројева решити једначину $x^3 + 24 = 2^x$.

4. Авио-компанија Ер-ДМС жели да 150 путника распореди на исто толико седишта у авиону, која су распоређена у 25 редова са по 6 седишта, 3 са сваке стране пролаза. При томе, неки путници путују у групама и Ер-ДМС жели да их распореди што ближе једне другима: две групе од четири путника, тако да двоје седе тачно испред друго двоје из групе; пет група од троје и осам група од двоје тако да седе на три, односно два, узастопна седишта у реду, непрекинута пролазом. На колико различитих начина Ер-ДМС може распоредити путнике у овај авион?

5. Нека је $n$ природан број. Доказати да за $x > 1$ важи неједнакост
$$nx^{\frac{1}{n}} \leqslant x + n - 1.$$

**Време за рад 180 минута.**
**Сваки задатак вреди 20 поена.**
**Решења задатака детаљно образложити.**