Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

25. март 2023.

Први разред - А категорија

1. Нека су $x_1, x_2, \ldots x_{2023} \in \{-1, 0, 1, 2\}$ такви да важи

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2023} = 111 \quad \text{и} \quad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2023}^2 = 999.$$

Наћи највећу могућу вредност израза

$$x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_{2023}^3.$$

2. Дат је троугао ABC. Нека је тачка D подножје висине из темена A на праву BC тог троугла и нека је ω је кружница конструисана над дужи AD као пречником. Означимо са G другу пресечну тачку кружнице ω и описане кружнице око троугла ABC. Права AG сече праву BC у тачки H. Доказати да ако кружнице описане око троуглова ABH и ACH, редом, секу кружницу ω и у тачкама I и J, онда тачка пресека правих BI и CJ припада ω.

3. Означимо са $f(n)$ најмањи заједнички садржалац бројева $1, 2, \cdots, n$, где је n произвољан природан број. Наћи све природне бројеве n такве да је

$$f(n) < f(n+1) < f(n+2) < f(n+3).$$

4. Дат је природан број n. Колико највише топова можемо поставити на таблу димензија $n \times n$ тако да сваки топ напада највише 3 друга топа (напади између произвољна два топа одвијају се према шаховским правилима, тј. један топ напада другог ако се налазе у истој врсти/колони табле и ако се у тој врсти/колони између њих не налази нити један други топ)?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

25. март 2023.

Други разред - А категорија

1. Означимо са $\mathbb{Z}$ скуп свих целих бројева. Наћи све функције $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такве да за свака два цела броја a и b важи
$$f(a + f(b)) = b + f(a) + 1.$$

2. Нека су D, E и F подножја висина из темена A, B и C, редом, на праве одређене страницама троугла ABC. Означимо са H ортоцентар тог троугла. На дужима AD, BE и CF, редом, дате су тачке X, Y и Z такве да важи
$$\frac{AX}{XD} = \frac{BY}{YE} = \frac{CZ}{ZF} = 2.$$
Доказати да тачке H, X, Y и Z припадају једној кружници.

3. Наћи све природне бројеве x такве да је број $2^x + 100x + 1$ потпун квадрат.

4. У некој просторији се налази $n \geqslant 4$ људи. Познато је да важи следеће: у сваком скупу људи који садржи четири различите особе важи да је број парова људи који се познају међу тих четворо једнак 0, 3 или 4. За које n се из овог услова може закључити да постоји скуп величине барем $\frac{n}{2}$ тако да нико никог не зна?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

25. март 2023.

Трећи разред - А категорија

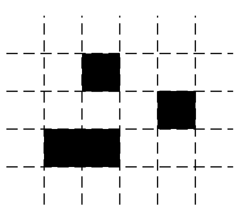
1. У скупу природних бројева решити једначину $\log_5(2^n - 3) = \log_3 \frac{4n^2-10n+9}{5}$.

2. Одредити све уређене парове (x, y) природних бројева такве да су бројеви $x + y$ и $x^2 + y^2 - 2$ степени двојке.

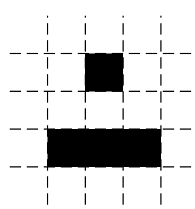
3. Нека је M средиште странице BC, а H ортоцентар оштроуглог троугла ABC, $AB \neq AC$. Нека је L тачка на краћем луку BC описане кружнице троугла ABC тако да је $\sphericalangle CAL = \sphericalangle BAM$. Доказати да се нормала у тачки L на праву AL, нормала у тачки H на праву AM и тангента у тачки A на описану кружницу троугла ABC секу у једној тачки.

4. За сваку од фигура приказаних на сликама (а), (б) и (в), посебно, наћи све природне бројеве n такве да се табла $n \times n$ може поплочати фигуром као на датој слици. Под поплочавањем табле приказаном фигуром подразумевамо да је свако поље полазне табле прекривено тачно једанпут. Дозвољено је користити коначно много осних рефлексија и ротација (за $90°$ степени у оба смера).

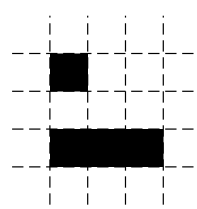
(а)



(б)



(в)



Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

25. март 2023.

Четврти разред - А категорија

1. Нека је $\mathbb{C}$ скуп комплексних бројева. У скупу $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ решити једначину

$$(\operatorname{Im} z)^{\operatorname{Re} z} = e^{\frac{1}{2}(|z|^2 - z - \overline{z})}.$$

2. Дат је троугао ABC. Означимо са D, E и F, редом, тачке у којима уписана кружница унутар тог троугла, са центром у тачки S, додирује његове странице AB, BC и CA. Ако тежиште T троугла ABC припада правој DE, доказати да су тачке T, S и F колинеарне.

3. На табли је записан природан број n. Ана и Бојан играју следећу игру, наизменично вукући потезе. Потез се састоји од брисања написаног броја и замењивања истог са разликом тог броја и неког његовог делиоца који није 1, нити сам тај број (играч сам бира делилац). Ако Ана игра прва, у зависности од броја n, одредити који играч има победничку стратегију (игру губи онај играч који не може одиграти потез).

4. За конвексан четвороугао $ABCD$ кажемо да је леп ако дужине свих његових страница, дужина барем једне дијагонале и површина тог четвороугла имају целобројне вредности. Доказати да постоји бесконачно много лепих неподударних четвороуглова којима је дужина тачно једне странице прост број.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења задатака детаљно образложити.