број: 111/3 година: 2022/23

Тангента

ЧАСОПИС ЗА МАТЕМАТИКУ И РАЧУНАРСТВО ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Београд 2023

ПРИМЕНА НЕЈЕДНАКОСТИ ЧЕБИШЕВА

Шефкет Арсланагић, Даниела Зубовић
Сарајево, Босна и Херцеговина

Добро позната неједнакост руског математичара Чебишева (Пафнутий Львович Чебышёв, 1821- 1894) гласи:

Нека су низови (n-торке) $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ реалних бројева монотони у истом смислу, тј.

$$a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n \text{ и } b_1 \le b_2 \le \dots \le b_n$$

или

$$a_1 \ge a_2 \ge \dots \ge a_n \text{ и } b_1 \ge b_2 \ge \dots \ge b_n.$$

Тада вреди неједнакост

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \ge (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

односно

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \ge \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right). \qquad (1)$$

Ако су, пак, низови (n-торке) $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ реалних бројева монотони у супротном смислу, тј.

$$a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n \text{ и } b_1 \ge b_2 \ge \dots \ge b_n$$

или

$$a_1 \ge a_2 \ge \dots \ge a_n \text{ и } b_1 \le b_2 \le \dots \le b_n,$$

тада вреди неједнакост

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \le (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

односно

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \le \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right). \qquad (2)$$

Једнакости у (1) и (2) важе ако и само ако је $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ или $b_1 = b_2 = \dots = b_n$.

Два доказа неједнакости (1) могу се наћи у [1], док су докази неједнакости (2) потпуно аналогни.

НАГРАДНИ ЗАДАЦИ

Александар Миленковић, Ненад Стојановић

У рубрици „Наградни задаци” у сваком броју дајемо 20 задатака који су подељени у две групе. Задаци из прве групе су подељени по разредима и намењени су пре свега ученицима који се такмиче у Б категорији, док су задаци из друге групе намењени ученицима А категорије и нису подељени по разредима.

Позивамо све читаоце да шаљу предлоге задатака које сматрају посебно интересантним, као и сугестије које ће нам помоћи при састављању рубрике. Такође, позивамо све ученике да на адресу редакције шаљу откуцана или читко исписана решења постављених задатака; сваки задатак на засебном листу. Исто важи и за предлоге задатака. У наредним бројевима часописа публикују се комплетна решења раније постављених задатака, а на крају циклуса најуспешнији решавачи се награђују.

Предлоге и решења задатака слати на адресу:

„Тангента” – за рубрику „Наградни задаци”
Природно-математички факултет
Радоја Домановића 12
34000 Крагујевац

или **електронском поштом** (искључиво **pdf** формат) на адресу

tg_nagradnizadaci@yahoo.com

најкасније до 15.04.2023.

Прва група

Први разред

M1934. Одредити последњу цифру разлике $7^{2023} - 3^{2023}$.

M1935. Графици две линеарне функције, чији су коефицијенти правца 2 и $\frac{1}{2}$, секу се у тачки $(4,4)$. Израчунати површину фигуре која је одређена овим графицима и y-осом.

M1936. Најмањи заједнички садржалац бројева x и 18 једнак је 180, док је највећи заједнички делилац бројева x и 45 једнак 15. Одредити број x.

Hello, World!

Техника два показивача

Весна Маринковић,
Математички факултет, Београд

1. Увод

Алгоритам представља коначан низ корака којима се решава дати проблем. У општем случају за један исти проблем може постојати већи број начина на које га је могуће решити. Током година развијене су неке опште технике (стратегије) конструкције алгоритама којима се може доћи до решења проблема. Неке од опште познатих техника су бектрекинг, декомпозиција и динамичко програмирање. Овде ћемо се детаљније упознати са техником која се назива техника два показивача.

У решењима различитих проблема неретко је потребно користити двоструко угнежђену петљу; она подразумева постојање две бројачке променљиве: једне (означимо је са i) којом се контролише пролазак кроз спољашњу петљу и друге (означимо је са j) која контролише пролазак кроз унутрашњу петљу. Променљива i по правилу током итерације увећава своју вредност, док променљива j увећава своју вредност до неке границе, затим се враћа на неку доњу границу од које поново увећава своју вредност и овај поступак се понавља све док променљива i не достигне своју максималну вредност.

Пример 1. Једна од петљи која се често јавља у задацима има следећи облик:

```
for (int i = 0; i < n - 1; i++)
   for (int j = i + 1; j < n; j++)
       if (nekiUslov(i,j))
           break;
```

Нека је, на пример, потребно пронаћи број растућих сегмената (поднизова узастопних елемената) датог низа. Низ $\{2, 5, 1, 4, 7, 6\}$ садржи четири растућа сегмента: $\{2, 5\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 4, 7\}$ и $\{4, 7\}$. Овај проблем можемо решити на следећи начин.

Разматрамо све све могуће почетке сегмената које контролишемо бројачком променљивом i спољашње петље. За сваки фиксирани почетак сегмента разматрамо редом могуће крајеве сегмента, које контролишемо бројачком променљивом j, $j > i$, унутрашње петље. Све док је елемент на позицији j већи од елемента на позицији $j - 1$, у укупан број растућих сегмената урачунавамо и сегмент који почиње на позицији i, а завршава се на

ПРЕДЛОЗИ ЗА ТРЕЋИ ПИСМЕНИ ЗАДАТАК

Мирјана Катић

ГИМНАЗИЈЕ, СРЕДЊЕ ШКОЛЕ

I РАЗРЕД

Круг; четвороугао; конструкције; рационални алгебарски изрази

1. Конструисати троугао ABC ако су дати елементи β, h_a и h_c

2. У оштроуглом троуглу ABC тачке B' и C' су подножја висина из темена B и C, редом, а тачка A_1 је средиште странице BC. Доказати да су праве A_1B' и A_1C' тангенте круга описаног око троугла $AB'C'$.

3. Ако $a \in \mathbb{R}\backslash\{-2,-1,0,1,2,3\}$, чему је једнак израз

$$\frac{a^2+a-2}{a^3-3a^2}\cdot\left[\frac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\frac{3}{a^2-a}\right]:\left[1-\left(\frac{2}{a}\right)^2\right]?$$

4. У правоуглом троуглу наспрам угла од 30° је страница дужине 6 cm. Колика је дужина полупречника уписаног круга у тај троугао?

5. Ако је остатак дељења полинома x^8+3x^2+ax+b полиномом x^2-1 једнак x колико је a^3+b^3?

II РАЗРЕД

Системи квадратних једначина; ирационалне једначине и неједначине; експоненцијална и логаритамска функција

1. Наћи скуп свих реалних решења неједначине $3\cdot 81^x+2\cdot 16^x\le 5\cdot 36^x$.

2. (а) У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sqrt{9-5x}-\sqrt{3-x}=\frac{6}{\sqrt{3-x}}.$$

(б) Одредити скуп решења неједначине $\sqrt{4+7x-2x^2}<2x+1$.

3. Наћи збир квадрата свих решења једначине $81^x\cdot 3^{x^5-1}=\frac{1}{9}\cdot 243^{x^3+\frac{1}{5}}$.

НАШ ГОСТ

ШУМАДИЈСКИ ОРФЕЈ

Да ли сте можда чули за село Ђурђево, општина Рача (крагујевачка)? Вероватно – не. Онда, скоро сигурно, не знате ни која позната личност потиче оданде. Е, па, сад ћете чути.

Ђурђево је изнедрило једног доброг математичара и још бољег, штавише фантастичног, музичара који је широм света пронео славу наше фруле. То је Борислав Бора Дугић ненадмашни виртуоз и, по свему судећи, светски број један на фрули.

Како су у једној личности нашле суживот математика и музика и како су се надовезале се једна на другу, сазнаћете из нашег разговора.

Боро, после завршене гимназије у Крагујевцу, определили сте се за Вишу педагошку школу (ВПШ), одсек математика, у истом граду. Шта Вас је привукло математици, љубав одраније или случајност?

У Крагујевцу је тада било и виших и високих школа. Ја сам се определио за ВПШ и математику која ми је врло лепо ишла. Математику сматрам тешком, али науком над наукама која је неопходна у свим људским делатностима.

По завршетку ВПШ-а, оставио сам по страни даље учење и усавршавање и то добрих двадесет година. Разлог је био што своју велику љубав из детињства – фрулу никако нисам желео да оставим или запоставим.

Ипак, у већ поодмаклим годинама, вратио сам се учењу понајвише у жељи да завршим оно што сам раније започео и што сам себи зацртао. И тако сам се уписао на Факултет за културу, где сам завршио студије и одбранио мастер рад, наравно – о фрули!

Убрзо сте се потпуно окренули својој „првој љубави“ – фрули.

Фрула ме је пратила практично целог живота, од раног детињства, па све до дана данашњег. Био сам и остао велики заљубљеник у њу.

У самом почетку највећу подршку сам имао од мајке. Неизмерно сам јој захвалан што ме је толико подстицала и храбрила. И сама је била надарена за музику, певала је као славуј.

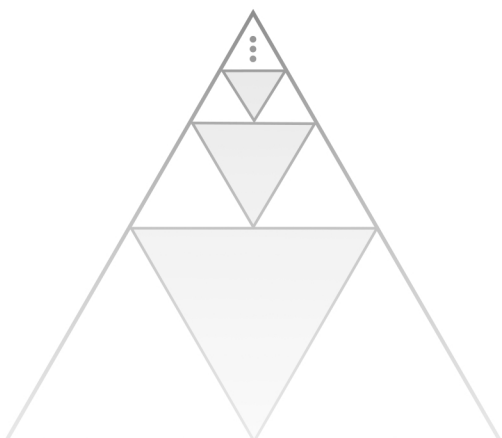
ДОКАЗ БЕЗ РЕЧИ

Ненад Стојановић

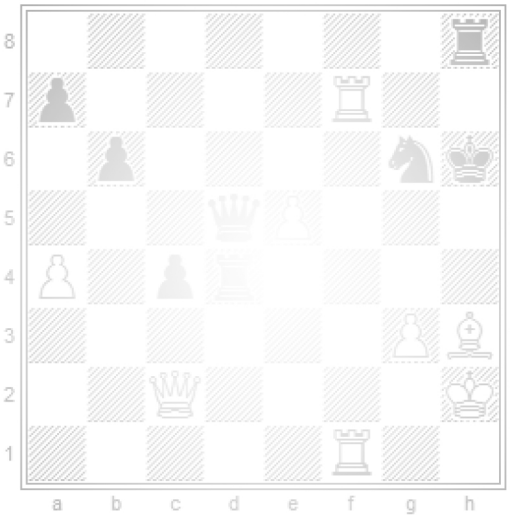
Доказ без речи, назив је за методу визуелног „доказивања“ математичких тврђења. Појавио се у прошлом веку и брзо стекао широку популарност. Представља спој уметности и математике. Бројне речи и ознаке замењује слика која својим садржајем све објашњава.

Геометријски ред

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \frac{1}{3}$$



НАГРАДНИ ШАХОВСКИ ЗАДАТАК
Тангента 110 - решење



Бели вуче и матира у 7 потеза

1. Dg6+ Kg6 2. T1f6+ Kg5(h5) 3. Tf5+ Kg6(h6) 4. T7f6+ Kh7 5. Th5+ Kg7(g8) 6. Tg5+ Kh7 7. Lf5 мат.

НАГРАЂЕНИ

Коста Домокош, 2. разр. Шеста београдска гимназија, Београд,

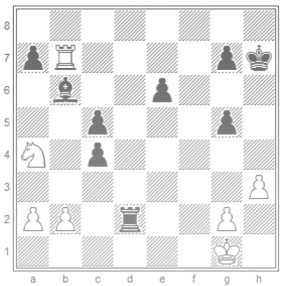
ШАХОВСКА СТРАНА

МОЋНИ ПЕШАЦИ

Као што је познато, пешак је најслабија фигура у шаху.

Међутим, пешаци могу да развију невиђену снагу која се углавном базира на могућности њиховог претварања (промоције) у јачу фигуру кад стигну до последњег реда.

Надалеко је чувен пример из партије Ортуета-Санц, 1933.

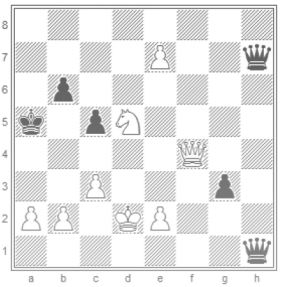


Црни је на потезу и одлучује да игра на слободног c4 пешака. **1. ... Tb2! 2. Sb2 c3**. Сад на 3. Sd3 иде 3. ... c4+ 4. Tb6 cd3 или 4. Sf2 c2 с лаким добитком. Међутим, и бели има своје адуте **3. Tb6!**. На 3. … ab6 или 3. ... c2 следи 4. Sd3 с добитком. Изгледа као да се црни „испуцао“. Али **3. ... c4!!** Одузима скакачу поље d3 и прети 4. … c2. Бели се поново сналази са **4. Tb4!** спречавајући и 4. ... c2 и 4. ... cb2. А црни узвраћа истом мером **4. ... a5!!**

и један од пешака c3 и c4 иде у даму: 5. Tc4 (a4) cb2, 5. Tb5 c2, 5. Sd3 cd3, 5. Sd1 c2, 5. Sa4 ab4 и 6. c2.

Невероватно је како су усамљени пешак a5 и удвојени пешаци c3 и c4 надвладали топа и скакача.

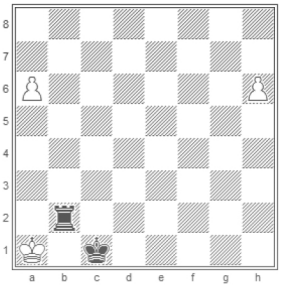
У следећем примеру, завршетку студије Дорогова, ништа не указује на будућу одлучујућу улогу пешака b2.



Белом, који је на потезу, не одговара 1. d8D због 1. ... Dd5+ 2. Ke3 Dc2 итд. Како је у овој позицији темпо „злата вредан“, игра **1. Da4!+ Ka4 2. d8D+ Ka5 3. Da8+ Kb5**. Шта даље? Ремију вечним шахом води 4. De8+ Ka5 (4. ... Kc4? 5. Se3 мат) 5. De8+, док 4. a4+ Kc4 и Kb3 губи.

Уместо тога, бели спроводи фантастичну идеју **4. Sc7+ Dc7** (4. ... Kc4? 5. Da4 мат) **5. Dg8+! Dd5+ 6. Kc2!!**

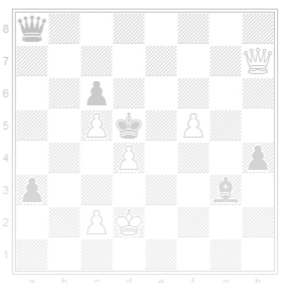
Да се човеку заврти у глави. Бели тек тако даје своју најјачу фигуру **6. ... Dg8**. Међутим, није тек тако. После **7. e4!!**, црни нема одбране од **8. b3 мат** иако је на потезу и уз то има две даме више. Додајмо да не помаже ни 6. ... D5f7 због исте параде 7. e4!!.



Једина шанса за спас црног је да топом стигне на 8. ред. Бели на потезу, труди се да то спречи. Зато **1. a7 Tb1+ 2. Ka2 Tb2+ 3. Ka3 Kb1**. На 3. ... Ta1 иде 4. h7. **4. h7 Ta2+ 5. Kb4 Tb2+ 6. Ka5 Ta2+ 7. Kb6 Tb2+ 8. Kc7 Tc2+ 9. Kd7**. Сад краљ „путује“ по 7. реду. **9. ... Td2+ 10. Ke7 Te2+ 11. Kf7 Tf2+ 12. Kg6 Tg2+ 13. Kh5 Ta2**. Последњи трик, 14. h8D?? Th2+ и црни добија! **14. Kh4 Ta4+ 15. Kh3 Ta3+ 16. Kh2 Ta2+ 17. Kh1** и пешак h7 излази у даму.

Снажан утисак оставља „пут око света“ белог краља од a1 до h1.

НАГРАДНИ ЗАДАТАК



Бели вуче и добија у 3 потеза

Решења слати на адресу: vojpet@gmail.com

Најуспешнији решавачи биће награђивани шаховском литературом издавачке куће „Шаховски информатор“.

Војислав Петровић

YU ISSN 0354-656X