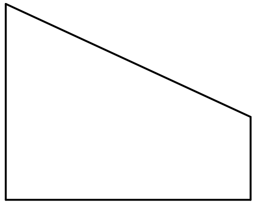
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике
ученика основних школа
04.02.2023.

III разред

1. Седам истих свезака кошта 749 динара, а шест истих оловака кошта 324 динара. Одреди укупну цену три овакве свеске и седам оваквих оловака.

2. На слици је четвороугао који има два права угла. Његове странице одређују 4 праве. Колико правих, оштрих и тупих углова граде те 4 уочене праве?



3. Борис је отишао у луна парк, где прва вожња кошта 150 динара, а свака следећа вожња је 5 динара јефтинија од претходне. Колико највише пута је Борис могао да се вози ако је понео са собом новчаницу од 1000 динара?

4. Када у празна поља

$$\square\square \cdot \square + \square\square$$

упишеш цифре 2, 3, 4, 5 и 6 добијаш израз у ком производ двоцифреног и једноцифреног броја сабираш са двоцифреним бројем. Упиши дате цифре у поља тако да је вредност израза:
а) највећа могућа;
б) најмања могућа.

5. Две кифле, две переце и ђеврек укупно коштају 174 динара. Две переце, кифла и ђеврек укупно коштају 126 динара. Две кифле, переца и ђеврек укупно коштају 146 динара. Колико кошта кифла, колико переца, а колико ђеврек?

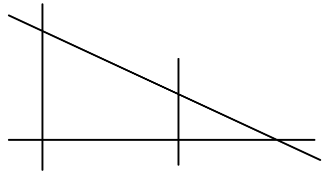
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

III РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Једна свеска кошта 749 : 7 = 107 динара [**6 бодова**]. Једна оловка кошта 324 : 6 = 54 динара [**6 бодова**]. Укупна цена три овакве свеске и седам оваквих оловака је $3 \cdot 107 + 7 \cdot 54 = 321 + 378 = 699$ динара [**8 бодова**].

2. (**МЛ 56-2**) Уочене праве граде 8 правих углова [**6 бодова**], 6 оштрих углова [**7 бодова**] и 6 тупих углова [**7 бодова**].



3. *I начин*. Цене Борисових вожњи су биле: 150 динара, 145 динара, 140 динара, 135 динара, 130 динара, 125 динара, 120 динара, 115 динара, 110 динара, ... [**4 бода**]. Укупне цене вожњи дата су у табели.

Број вожњи	1	2	3	4	5	6	7	8
Цена (у динарима)	150	295	435	570	700	825	945	> 1000

[За сваку тачно израчунату вредност цене до 7. вожње **по 2 бода**.] Дакле, Борис је могао највише 7 пута да се вози [**2 бода**].

II начин. Без попуста Борис би највише могао да се вози 6 пута ($900 = 6 \cdot 150$) [**8 бодова**]. Са попустом би 6 вожњи коштало 75 динара мање (уштеда 5 + 10 + 15 + 20 + 25 = 75 динара), што је 825 динара [**8 бодова**]. Седма вожња би коштала 120 динара, што је укупно 945 динара, па за следећу вожњу која би коштала 115 динара не би имао довољно новца. Дакле, могао би највише 7 пута да се вози [**4 бода**].

4. (**МЛ 57-2**) а) Највећа вредност израза је у случају $53 \cdot 6 + 42 = 360$ [**10 бодова**].
б) Најмања вредност израза је у случају $35 \cdot 2 + 46 = 116$ [**10 бодова**].

5. Укупна цена две кифле, две переце и ђеврека и укупна цена две переце, кифле и ђеврека разликују се у цени једне кифле, па је цена кифле 174 динара – 126 динара = 48 динара [**6 бодова**].
Укупна цена две кифле, две переце и ђеврека и укупна цена две кифле, переце и ђеврека разликују се у цени једне переце, па је цена переце 174 динара – 146 динара = 28 динара [**6 бодова**].
Цена ђервека једнака је 174 динара – $2 \cdot 48$ динара – $2 \cdot 28$ динара = 22 динара [**8 бодова**].

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа
04.02.2023.

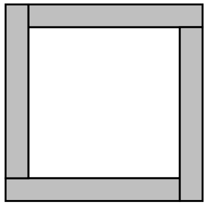
IV разред

1. Цена једног килограма јабука је 247 динара. Ленка је купила 2 kg јабука и 4 kg грожђа. Ако је потрошила укупно 2114 динара, колико кошта килограм грожђа?

2. Запиши све троцифрене бројеве са различитим цифрама, којима је цифра десетица два пута већа од цифре стотина, а цифра јединица већа од цифре стотина.

3. Марко је почео да решава задатке из математичке збирке у уторак и завршио у петак (исте седмице). Задатке је решавао тако да је сваког дана решио по два задатка више него претходног дана. Укупно је решио 128 задатака. Колико задатака је решио у четвртак?

4. Око огледала квадратног облика направљен је оквир састављен од четири једнака правоугаоника (као на цртежу). Обим једног правоугаоника је 220 cm, а обим целог оквира 800 cm. Израчунај површину оквира.
Напомена: Обим целог оквира представља збир унутрашњих и спољашњих страница оквира.



5. Компјутерски програм исписује на екрану, без запете, цифре низа природних бројева почевши од броја 1:

12345678910111213...

Програм је први пут стао када је први пут исписао три узастопне јединице (12345678910111) и тада је исписао укупно 14 цифара. Јован је поново пустио програм да исписује цифре низа природних бројева, од броја 1, и програм је стао када је први пут исписао пет узастопних четворки. Колико је цифара програм тада исписао?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

IV РАЗРЕД

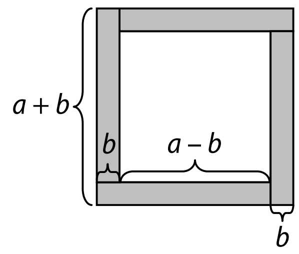
Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 57-2**) Цена 2 kg јабука је 2 · 247 = 494 динара [**4 бода**]. Онда је цена 4 kg грожђа 2114 − 494 = 1620 динара [**8 бодова**], па је цена 1 kg грожђа 1620 : 4 = 405 динара [**8 бодова**].

2. Тражени троцифрени бројеви су: 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 243, 245, 246, 247, 248, 249, 364, 365, 367, 368, 369, 485, 486, 487, 489. [Ако је ученик навео 1 или 2 решења **1 бод**. Ако је ученик навео 3 или 4 решења **2 бода**. За свако решење након 4 тачна решења по **1 бод**. За сваки број који није решење одузети **1 бод**. Укупан број бодова не може бити негативан.]

3. (**МЛ 55-4**) Марко је у среду урадио 2 задатка више него у уторак, у четвртак 4 више него у уторак, а у петак 6 више него у уторак [**5 бодова**]. Да је радио у среду, четвртак и петак, редом, 2, 4 и 6 задатака мање, сваки дан би урадио једнак број задатака, али би се онда и укупан број урађених задатака смањио за 2 + 4 + 6 = 12, тј. био би 128 − 12 = 116 [**5 бодова**]. У том случају би свакога дана радио по 116 : 4 = 29 задатака [**5 бодова**]. Како је у четвртак урадио 4 задатка више од овог броја, закључујемо да је у четвртак урадио 33 задатка [**5 бодова**].

4. (**МЛ 55-2**) Означимо странице једног правоугаоника од кога је направљен оквир огледала са a и b. Тада је $2 \cdot (a + b) = 220$ cm, па је $a + b = 110$ cm [**2 бода**]. Дужине спољашњих страница оквира су $a + b$, па је њихов збир $4 \cdot 110$ cm = 440 cm [**2 бода**]. Како је обим целог оквира 800 cm, то је збир унутрашњих страница оквира 800 cm − 440 cm = 360 cm [**2 бода**]. Дужине унутрашњих страница оквира су $a - b$, па је $4 \cdot (a - b) = 360$ cm, одакле је $a - b = 90$ cm [**4 бода**]. Како је $a + b = 110$ cm и $a - b = 90$ cm, методом дужи, или другом погодном методом, можемо закључити да је $2 \cdot b = 20$ cm, тј. $b = 10$ cm [**4 бода**], а онда и $a = 100$ cm [**2 бода**]. Оквир је састављен од 4 правоугаоника страница a и b, па је тражена површина $4 \cdot a \cdot b = 4000\ \text{cm}^2$ [**4 бода**].



5. Програм је стао када је исписао број 444, а затим прве две цифре броја 445 (...442443**444**44) [**8 бодова**]. До тог тренутка програм је исписао 9 једноцифрених бројева (1-9), деведесет двоцифрених бројева (10-99), 345 троцифрених бројева (100-444) и две цифре из броја 445. Дакле, програм је исписао 9 цифара за запис једноцифрених бројева и 90 · 2 = 180 цифара за запис двоцифрених бројева [**2 бода**]. За запис троцифрених бројева од 100 до 444 исписао је 345 · 3 = 1035 цифара [**6 бодова**] и још 2 цифре из броја 445 [**2 бода**]. Укупно је исписано 9 + 180 + 1035 + 2 = 1226 цифара [**2 бода**].

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике
ученика основних школа

04.02.2023.

V разред

1. Одреди све просте бројеве a такве да важи $2 < \frac{a}{16} < 3$.

2. Дана је требало да укуца у свој рачунар троцифрен број. При куцању је испред тог броја грешком укуцала цифру 6 и тако добила 31 пут већи број. Који троцифрени број је Дана требало да укуца?

3. Странице правоугаоника се разликују за 2 cm. Ако сваку страницу увећамо за 3 cm, тада се површина тог правоугаоника увећа за 105 cm^2. Израчунај обим и површину тог правоугаоника.

4. Израчунај збир првих 450 децимала у децималном запису разломка $\frac{11}{7}$.

5. Колико има петоцифрених бројева дељивих и са 25 и са 3 у чијем запису се користе тачно 2 различите цифре?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

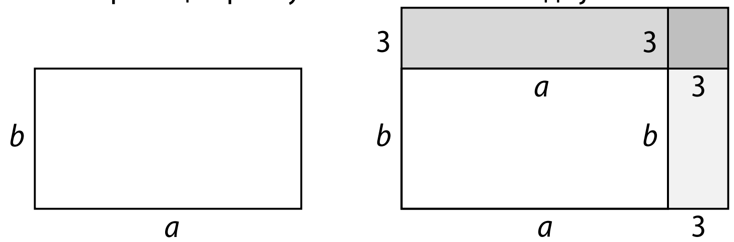
V РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Како је $\frac{32}{16} < \frac{a}{16} < \frac{48}{16}$, то је a прост број за који важи $32 < a < 48$ [**8 бодова**]. Тражени прости бројеви у овом интервалу су 37, 41, 43 и 47 [сваки тачно одређен прост број **по 3 бода**].

2. (**МЛ 57-1**) Претпоставимо да је Дана требало да укуца троцифрени број $\overline{abc}$. Ако је укуцала цифру 6 испред броја, она је онда укуцала број $\overline{6abc}$. Како је $\overline{6abc} = 6000 + \overline{abc}$, то је $6000 + \overline{abc} = 31 \cdot \overline{abc}$ [**10 бодова**]. На основу особина рачунске операције множења је $31 \cdot \overline{abc} = \overline{abc} + 30 \cdot \overline{abc}$. Дакле, $6000 + \overline{abc} = \overline{abc} + 30 \cdot \overline{abc}$. Одавде закључујемо да је $30 \cdot \overline{abc} = 6000$, па је $\overline{abc} = 200$ [**10 бодова**].

3. Означимо странице правоугаоника са a и b. Тада је $a - b = 2$.



Након увећања страница површина се увећа за

$$3\text{ cm} \cdot a + 3\text{ cm} \cdot b + 3\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 105\text{ cm}^2$$ [**6 бодова**].

Сређивањем овог израза добијамо да је $a + b = 32$ cm [**4 бода**]. Применом методе дужи, или другом погодном методом, можемо закључити да је $a = 17$ cm [**3 бода**] и $b = 15$ cm [**3 бода**], па је обим полазног правоугаоника $O = 64$ cm [**2 бода**] и $P = 255\text{ cm}^2$ [**2 бода**].

4. Како је $11 : 7 = 1,\overline{571428}$ [**10 бодова**], то $\frac{11}{7}$ има бесконачно периодичан децимални запис са 6 цифара у периоди. Како је $450 : 6 = 75$ и $5 + 7 + 1 + 4 + 2 + 8 = 27$, следи да је збир првих 450 децимала једнак $75 \cdot 27 = 2025$ [**10 бодова**].

5. (**МЛ 55-2**) Због дељивости са 25 тражени бројеви се завршавају са 00, 25, 50 или 75 [**2 бода**]. Ако се број завршава са 00, онда се он записује у облику $\overline{aaa00}$, $\overline{aa000}$, $\overline{a0a00}$ или $\overline{a0000}$ где је a цифра различита од нуле. Због дељивости са 3, у првом случају $a \in \{1, 2, ..., 9\}$, па постоји 9 таквих бројева [**2 бода**], док је у другом, трећем и четвртом случају $a \in \{3, 6, 9\}$, па у овим случајевима постоје по 3 тражена броја [за сваки случај по **2 бода**]. Дакле, постоји 18 тражених бројева који се завршавају са 00.

Ако се број завршава са 25, тада он у свом запису има једну, две, три или четири цифре 5, а остале цифре су 2. Ни у једном од ових случајева збир цифара није дељив са 3, па нема тражених бројева који се завршавају са 25 [**2 бода**].

Ако се број завршава са 50, онда он у свом запису има две, три или четири цифре 5, а остале цифре су 0. Како је збир три цифре 5 дељив са 3, тражени бројеви у овом случају су 55050 и 50550 [**4 бода**].

Ако се број завршава са 75, тада он у свом запису има једну, две, три или четири цифре 5, а остале цифре су 7. Са 3 су дељиви бројеви са једном или са четири цифре 5 у свом запису, па су то бројеви 77775 и 55575 [**4 бода**].

Дакле, постоје 22 петоцифрена броја дељива са 25 и 3 који у свом запису имају тачно две различите цифре.

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике
ученика основних школа
04.02.2023.

VI разред

1. Дати су разломци $\frac{43}{337}$ и $\frac{6}{47}$. Који број треба одузети и од бројиоца и од имениоца мањег разломка да би добијени разломак био једнак већем од њих?

2. Три врсте жетона: бели, црни и црвени, су поређани у један низ. Прво су бели жетони поређани у један низ, затим је између свака два бела жетона стављен по један црни жетон. На крају је између свака два жетона у низу стављен по један црвени жетон. Колико је било белих жетона ако је укупно постављено у низ 397 жетона?

3. За оштроугли троугао ABC важи да је разлика унутрашњих углова код темена A и C једнака $50°$ и да се нормале из темена A и C секу у тачки H тако да је $\measuredangle AHC = 110°$. Израчунај мере унутрашњих углова тог троугла.

4. Дат је број 123456789. Колико најмање цифара треба прецртати да би преостали број био дељив са 36?

5. У правоуглом троуглу ABC ($\measuredangle ACB = 90°$) симетрале оштрих углова секу наспрамне катете у тачкама A_1 и B_1. Тачка M је подножје нормале из тачке A_1 на хипотенузу, а тачка N подножје нормале из тачке B_1 на хипотенузу. Одреди меру угла MCN.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VI РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

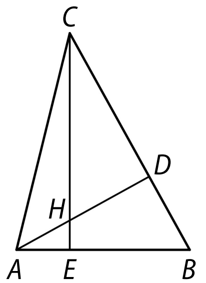
1. (**МЛ 56-4**) Бројилац разлике $\frac{43}{337}-\frac{6}{47}$ једнак је 43 · 47 – 6 · 337 = –1, па је $\frac{43}{337}-\frac{6}{47}<0$, тј. $\frac{43}{337}<\frac{6}{47}$ [**7 бодова**]. Ако и од имениоца и од бројиоца разломка одузмемо исти број, добијамо $\frac{43-x}{337-x}=\frac{6}{47}$ [**3 бода**]. Решавањем ове једначине добијамо да је и од бројиоца и од имениоца потребно одузети број $x=-\frac{1}{41}$ [**10 бодова**].

2. Црвених жетона је стављено за 1 мање од укупно белих и црних жетона. Црвених жетона има (397 – 1) : 2 = 198 [**8 бодова**]. Дакле белих и црних је укупно 397 – 198 = 199 [**4 бода**]. Црних жетона има за 1 мање од белих. Црних жетона има (199 – 1) : 2 = 99 [**4 бода**], а белих жетона има 199 – 99 = 100 [**4 бода**].

3. (**МЛ 55-1**) Означимо унутрашње углове код темена A, B и C са α, β и γ. Тада је $\alpha-\gamma=50°$. Како су AD и CE висине троугла, то су троуглови ADC и AEC правоугли и важи $\measuredangle ACE=90°-\alpha$ [**2 бода**] и $\measuredangle DAC=90°-\gamma$ [**2 бода**]. Сада је

$$\measuredangle AHC=180°-\measuredangle ACE-\measuredangle DAC=\alpha+\gamma=110° \text{ [7 бодова]}.$$

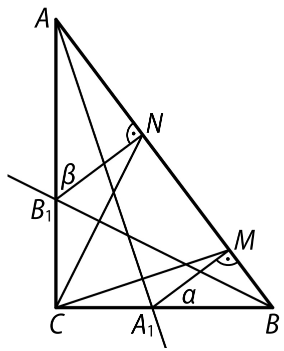
Из $\alpha-\gamma=50°$ и $\alpha+\gamma=110°$ добијамо да је $\alpha=80°$, $\gamma=30°$ и $\beta=70°$ [сваки тачно израчунати угао по **3 бода**].



4. Да би број био дељив са 36, мора да буде дељив и са 4 и са 9 [**2 бода**]. Да би број био дељив са 4, двоцифрени завршетак мора да му буде дељив са 4, па цифру 9 морамо прецртати [**4 бода**]. Након тога остаје број 12345678 који је дељив са 9 (збир цифара му је 36), али није са 4. Ако прецртамо било коју од преосталих цифара, број неће бити дељив са 9, па је потребно прецртати не једну већ бар још две цифре [**4 бода**]. Да би двоцифрени завршетак био дељив са 4 прецртаћемо цифру 7, чиме добијамо двоцифрени завршетак 68, који је дељив са 4 [**4 бода**]. Да би добијени број 1234568 био дељив и са 9 потребно је прецртати и цифру 2 (збир цифара броја је 27) [**4 бода**]. Дакле, потребно је прецртати најмање 3 цифре да би преостали број (134568) био дељив са 36 [**2 бода**].

5. Нека је $\measuredangle BAC=\alpha$ и $\measuredangle ABC=\beta$. Троуглови MBA_1 и NB_1A су правоугли, а како је $\alpha+\beta=90°$, то је $\measuredangle BA_1M=\alpha$ [**2 бода**] и $\measuredangle AB_1N=\beta$ [**2 бода**]. Троуглови ACA_1 и AMA_1 су подударни (УСУ), па је $A_1C=A_1M$ [**3 бода**]. Слично, из подударности троуглова BB_1C и BB_1N (УСУ) следи $B_1C=B_1N$ [**3 бода**]. Троуглови MCA_1 и NCB_1 су једнакокраки, а како су $\measuredangle BA_1M$ и $\measuredangle AB_1N$, редом, спољашњи углови ових троуглова, добијамо да је $\measuredangle A_1CM=\frac{\alpha}{2}$ [**3 бода**] и $\measuredangle B_1CN=\frac{\beta}{2}$ [**3 бода**]. Сада имамо да је

$$\measuredangle MCN=90°-(\measuredangle A_1CM+\measuredangle B_1CN)=90°-\frac{\alpha+\beta}{2}=45° \text{ [4 бода]}.$$



ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа
04.02.2023.

VII разред

1. Одреди сложен природан број *s* и прост број *p*, такве да је

$$\frac{32^5 \cdot 16^4 \cdot 8^3}{64^2} = s^p.$$

Одреди сва решења.

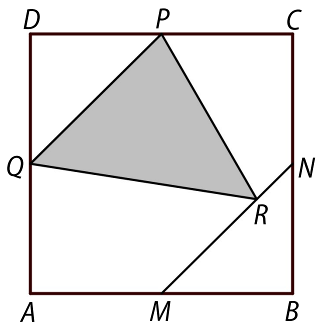
2. Ромб *ABCD* има страницу 6 cm и угао од 60° код темена *A*. Из темена *B* конструисане су висине ромба *BE* и *BF*. Израчунај обим и површину троугла *BEF*.

3. Одреди прост број *p* и различите целе бројеве *a* и *b* такве да је

$$p + |a \cdot b| = 10.$$

Колико решења постоји (сматрамо да је решење исто ако бројеви *a* и *b* замене вредности)?

4. Израчунај површину троугла *PQR* на слици ако је страница квадрата *ABCD* једнака 12 cm. Тачке *M*, *N*, *P* и *Q* су средишта страница квадрата, а тачка R произвољна тачка дужи *MN*.



5. Ната је редом записивала бројеве 1, -3, 5, -7, 9, -11, ... (наизменично мења знак бројева који по апсолутној вредности формирају низ непарних природних бројева). Колико бројева Ната може записати тако да збир свих записаних бројева буде делилац броја 2023?

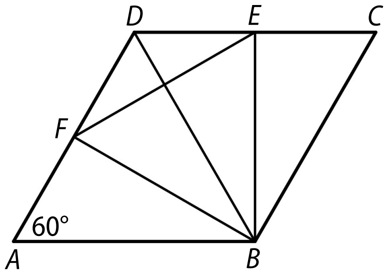
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 55-5**) $\dfrac{32^5 \cdot 16^4 \cdot 8^3}{64^2} = \dfrac{2^{25} \cdot 2^{16} \cdot 2^9}{2^{12}} = 2^{38}$ [**8 бодова**]. Како је 38 = 2 · 19, имамо и два решења: $s = 2^2$, $p = 19$ [**6 бодова**] и $s = 2^{19}$, $p = 2$ [**6 бодова**].

2. (**МЛ 57-1**) Троуглови ABD и CBD су једнакостранични троуглови. Висине ромба BE и BF су висине ових једнакостраничних троуглова, па је $BE = BF = 3\sqrt{3}$ cm [**4 бода**]. Како су BE и BF висине једнакостраничних троуглова, то је $\measuredangle FBD = \measuredangle EBD = 30°$, то је $\measuredangle FBE = 60°$ [**4 бода**]. Троугао FBE је једнакокраки са углом при врху од 60°, па је троугао FBE једнакостраничан [**2 бода**]. Због тога је $O = 3 \cdot BE = 9\sqrt{3}$ cm [**5 бодова**], а површина $P = \dfrac{BE^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{27\sqrt{3}}{4}$ cm^2 [**5 бодова**].



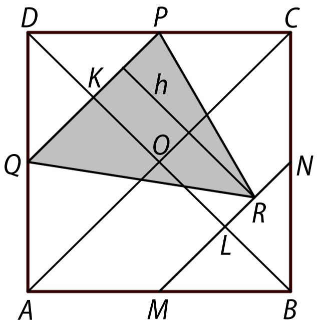
3. Прост број p може имати вредност 2, 3, 5 и 7. У зависности од вредности за p имамо следећа решења:

p	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	5	5	5	5	7	7	7	7
a	1	–1	1	–1	2	–2	2	–2	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1
b	8	8	–8	–8	4	4	–4	–4	7	7	–7	–7	5	5	–5	–5	3	3	–3	–3

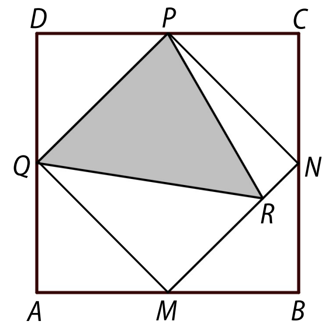
[Свако тачно решење по **1 бод**. За свако нетачно решење одузети **1 бод**. Укупан број бодова не може бити негативан.]

Напомена. Признавати и бодовати одговарајућим бројем бодова и ако ученик опише одговарајућу групу решења без навођења сваког конкретног пара бројева.

4. *I начин*: Нека је O тачка пресека дијагонала квадрата, а K и L тачке пресека дијагонале BD и дужи PQ и MN, редом. PQ и MN су средње линије троуглова ACD и ACB, па је $PQ \parallel AC$ и $PQ = \dfrac{1}{2}AC = 6\sqrt{2}$ cm [**4 бода**]. Како средње линије деле висине тих троуглова на два једнака дела, то је $DK = KO$ и $BL = LO$, па је $KL = \dfrac{1}{2}BD = 6\sqrt{2}$ cm [**8 бодова**]. Како је $KL \perp PQ$, то је висина троугла PQR једнака KL, па је $h = 6\sqrt{2}$ cm [**4 бодова**]. Тражена површина је $\dfrac{PQ \cdot h}{2} = 36$ cm^2 [**4 бода**].



II начин: Четвороугао $PQMN$ је квадрат [**4 бода**] јер су једнакокрако-правоугли троуглови AMQ, BNM, CPN и DQP подударни (СУС) па је је $MN = NP = PQ = QM$ [**4 бода**], а како су сви оштри углови ових троуглова по 45°, то су и сви унутрашњи углови четвороугла $MNPQ$ прави [**4 бода**]. Питагорином теоремом добијамо да је страница квадрата $MNPQ$ једнака $6\sqrt{2}$ cm [**4 бода**]. Висина троугла PQR која одговара страници PQ је једнака страници квадрата $MNPQ$, па је тражена површина 36 cm^2 [**4 бода**].



5. Број 2023 се може раставити на производ простих чинилаца 2023 = 7 · 17 · 17, па су делиоци броја 2023: 1, 7, 17, 119, 289, 2023 [**6 бодова**]. У датом низу видимо да је збир другог и трећег члана 2, четвртог и петог члана 2, ... тј. збир сваког парног члана низа и његовог следбеника једнак је 2, па је збир непарног броја чланова низа (сабирамо од првог члана низа) једнак броју чланова низа [**8 бодова**]. Можемо закључити да Ната може записати бројеве на 6 начина, тако да их буде 1, 7, 17, 119, 289 или 2023 у низу [**6 бодова**].

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике
ученика основних школа
04.02.2023.

VIII разред

1. На свакој страници квадрата дато је 5 тачака. Ниједна од ових тачака није теме квадрата. Колико има троуглова са теменима у овим тачкама?

2. Нека је дат правилан осмоугао *ABCDEFGH*. Симетрала угла *ABC* и дуж *AD* секу се у тачки *S*. Одредити меру угла *ASB*.

3. На коцку чија је ивица дужине 10 cm постављена је правилна четворострана призма тако да су темена њене основе средишта ивица једне стране коцке. Израчунај запремину тог тела ако је висина призме једнака ивици коцке.

4. Свака од три сестре: Јаца, Цица и Мица купила је себи материјал за шивење хаљине. Јаца је купила за трећину више од Цице, а Мица за 1,6 метара мање од Јаце. Ако би Јаца дала четвртину свог материјала Мици, а Цица трећину свог материјала опет Мици, онда би Мица имала материјала колико укупно Јаца и Цица. Колико метара материјала за шивење хаљине је купила свака од сестара?

5. Дата је једначина $8x + 3y = 2022$. Нека су (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) сви парови природних бројева који задовољавају дату једначину. Израчунати збир $x_1 + x_2 + ... + x_n$.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

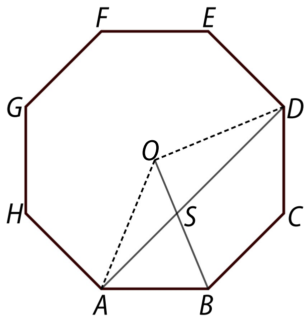
VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

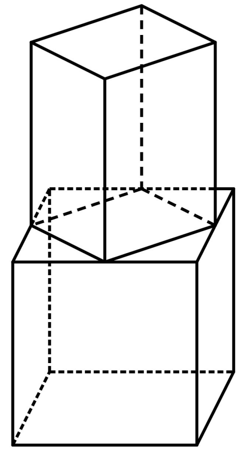
1. (**МЛ 57-1**) *I начин*: Три тачке троугла могу да припадају различитим страницама квадрата или да две припадају истој страници.
Ако су две тачке на истој страници, тада 5 тачака на њој одређују 10 дужи. Свака од ових 10 дужи са преосталих 15 тачака одређује укупно 150 троуглова [**3 бода**]. Како 5 тачака које припадају истој правој можемо одабрати на 4 начина, то у овом случају имамо укупно $4 \cdot 150 = 600$ троуглова [**6 бодова**].
Ако све три тачке троугла припадају различитим страницама онда сваку тачку на једној страници можемо одредити на 5 начина и оне одређују укупно $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ троуглова [**3 бода**]. Како од 4 странице троугла три странице можемо одабрати на 4 начина, то у овом случају имамо укупно $4 \cdot 125 = 500$ троуглова [**6 бодова**].
Дакле, ове тачке одређују укупно $600 + 500 = 1100$ троуглова [**2 бода**].

II начин: Од 20 датих тачака, 3 можемо изабрати на $\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{6} = 1140$ начина [**8 бодова**]. Три тачке које припадају истој правој не одређују троугао. Од 5 тачака са исте странице, 3 се могу одабрати на $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$ начина [**4 бодова**]. Како имамо 4 овакве странице, укупан број тражених троуглова је $1140 - 4 \cdot 10 = 1100$ [**8 бодова**].

2. Нека је тачка О центар описане кружнице датог осмоугла. Угао AOB је централни угао, па је $\measuredangle AOB = 45°$ [**4 бода**]. Троугао АОВ је једнакокраки, па је $\measuredangle ABO = \measuredangle BAO = 67° 30'$ [**4 бода**]. Како је $AO = OD$, троугао AOD је једнакокраки. $\measuredangle AOD = 135°$ (унија три централна угла), па је $\measuredangle OAD = 22° 30'$ [**4 бода**]. $\measuredangle BAS = \measuredangle BAO - \measuredangle OAD = 45°$ [**4 бода**]. Углови BAS и ABS су унутрашњи углови троугла ABS, па је $\measuredangle ASB = 180° - \measuredangle BAS - \measuredangle ABS = 67° 30'$ [**4 бода**].



3. (**МЛ 56-2**) Запремина коцке која чини тело је $V_1 = 10^3\ cm^3 = 1000\ cm^3$ [**2 бода**]. Основа призме је квадрат. Страница тог квадрата једнака је половини дијагонале стране коцке (страница квадрата је средња линија троугла кога чине две ивице и дијагонала једне стране коцке). Како је дијагонала стране коцке $10\sqrt{2}$ cm, то је дужина основне ивице призме $5\sqrt{2}$ cm [**10 бодова**]. Запремина призме је $V_2 = (5\sqrt{2}\ cm)^2 \cdot 10\ cm = 500\ cm^3$ [**5 бодова**]. Запремина тела је $V = V_1 + V_2 = 1500\ cm^3$ [**3 бода**].



4. Претпоставимо да је Цица купила x метара материјала. Јаца је онда купила $\frac{4}{3}x$ метара [**2 бода**], а Мица $\frac{4}{3}x - 1{,}6$ метара [**2 бода**]. Ако би Јаца и Цица дале део свог материјала Мици, онда би Јаца имала $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}x = x$ метара материјала [**2 бода**], Цица $\frac{2}{3}x$ метара [**2 бода**], а Мица $\frac{4}{3}x - 1{,}6 + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}x = 2x - 1{,}6$ метара [**3 бода**]. Тада је $2x - 1{,}6 = x + \frac{2}{3}x$ [**2 бода**]. Решавањем ове једнчине добијамо да је $x = 4{,}8$ [**4 бода**], па закључујемо да је Цица купила 4,8 метара [**1 бод**], Јаца 6,4 метара [**1 бод**], а Мица 4,8 метара материјала [**1 бод**].

5. Како $3|3y$ и $3|2022$, следи да $3|8x$ [**2 бода**]. Имајући у виду да је НЗД(3,8) = 1, следи да $3|x$, тј. $x = 3k$, $k \in N$ [**2 бода**]. Како је $8x + 3y = 2022$, то је $24k + 3y = 2022$, па је $8k + y = 674$, тј. $y = 674 - 8k$, $y \in N$ [**4 бода**]. Из услова $674 - 8k > 0$ добијамо да је $1 \le k \le 84$ [**6 бодова**], па постоји 84 пара природних бројева (x_k, y_k) који задовољавају тражену једначину, при чему је $x_k = 3k$, $k = 1, 2, ..., 84$, па је $x_1 + x_2 + ... + x_{84} = 3 \cdot (1 + 2 + ... + 84) = 10710$ [**6 бодова**].