Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ
Први разред - А категорија

1. (а) На скупу $X = \{aca, konac, lopte, loto, prst\}$ релација

$$x\,\varrho_1\,y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{речи} \quad x \text{ и } y \quad \text{су исте дужине}$$

је релација еквиваленције, што се тривијално провери, али није релација поретка, јер очигледно није антисиметрична. Класе еквиваленције релације ϱ_1, на скупу X, су: $\{aca\}$, $\{loto, prst\}$ и $\{konac, lopte\}$.
(б) На истом скупу X, релација

$$x\,\varrho_2\,y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{речи} \quad x \text{ и } y \quad \text{се завршавају истим словом}$$

је уједно и релација еквиваленције и релација поретка, јер у скупу X не постоје две речи које се завршавају истим словом, те се релација ϱ_2 своди на једнакост. Класе еквиваленције су тада једночлани скупови $\{aca\}$, $\{konac\}$, $\{lopte\}$, $\{loto\}$ и $\{prst\}$.

2. Нека је $\mathrm{P}(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ канонско представљање датог полинома P, при чему су $a_k \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Ако је полином P константан полином, тј. ако је $\mathrm{P}(x) = a_0$, за свако $x \in \mathbb{R}$, тада је, на основу услова задатка, испуњено $a_0 = 1$, одакле је $\mathrm{P}(2023) = 1$. Иначе је, према биномној формули, за $0 \leq k \leq n$, испуњено

$$\Big(\mathrm{P}\big(2023\big) + 2023\Big)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mathrm{P}\big(2023\big)^{k-i} 2023^i = 2023^k + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \mathrm{P}\big(2023\big)^{k-i} 2023^i =$$

$$= 2023^k + \mathrm{P}\big(2023\big) \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \mathrm{P}\big(2023\big)^{k-i-1} 2023^i = 2023^k + \mathrm{P}\big(2023\big) \cdot A_k,$$

где је $A_k = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \mathrm{P}\big(2023\big)^{k-i-1} 2023^i$. Следи,

$$\mathrm{P}\Big(\mathrm{P}\big(2023\big) + 2023\Big) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Big(\mathrm{P}\big(2023\big) + 2023\Big)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \Big(2023^k + \mathrm{P}\big(2023\big) A_k\Big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k 2023^k + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}\big(2023\big) a_k A_k = \mathrm{P}\big(2023\big) + \mathrm{P}\big(2023\big) \sum_{k=0}^{n} a_k A_k = \mathrm{P}\big(2023\big)\Big(1 + \sum_{k=0}^{n} a_k A_k\Big),$$

одакле закључујемо да $P(2023)$ дели $P(P(2023) + 2023) = 1$, те су једине могућности за вредност $\mathrm{P}(2023)$ једнаке 1 или -1.

Очигледно је константан полином $\mathrm{P}(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, пример полинома за које је $\mathrm{P}(2023) = 1$. Уколико би постојао полином P са наведеним особинама, за који је $\mathrm{P}(2023) = -1$, тада би морало бити и $\mathrm{P}(\mathrm{P}(2023) + 2023) = \mathrm{P}(2022) = 1$. Следи, полином $\mathrm{P}(x) = (2022 - x) + (2023 - x) = 4045 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$, је пример полинома који, такође, задовољава услове задатка, за који је $\mathrm{P}(2023) = -1$. Дакле, све могуће вредности за $\mathrm{P}(2023)$ су 1 и -1.

3. Нека се тангенте у P и Q на XPQ секу у тачки Y. Нека је $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCA = \gamma$.

Приметимо да је $\sphericalangle XPA = 180^\circ - \sphericalangle XBA = 180^\circ - \alpha - \beta = \gamma$. Аналогно је $\sphericalangle XQA = \beta$. Из тетивности $ABXP$ је $\sphericalangle XAP = \sphericalangle XBP = \alpha$, а онда је и $\sphericalangle XAQ = \alpha$. Рачунамо онда и $PXQ = 360^\circ - \beta - \gamma - 2\alpha = 180^\circ - \alpha$. Одатле имамо да је $\sphericalangle YPQ = \sphericalangle YQP = \alpha$, онда је $PYQ = 180^\circ - 2\alpha$, па је $APYQ$ тетиван. Сада лако видимо крај јер је AY симетрала $\sphericalangle PAQ$ (јер је Y средиште лука), а и AX је (то смо већ доказали), па су A, X, Y колинеарни.

4. Како квадрати целих бројева дају остатке 0 или 1, по модулу 3, закључујемо да број $l^2 + 7l + 2$ ни за једно l није дељив са 3, па не може бити ни производ више од два узастопна природна броја. Нека је $l^2 + 7l + 2 = n(n+1) = n^2 + n$, за неко $n \in \mathbb{N}$. Тада је $4l^2 + 28l + 9 = (2n+1)^2$, одакле следи да је $4l^2 + 28l + 9$ квадрат непарног природног броја.

Приметимо да је $(2l+3)^2 = 4l^2 + 12l + 9 < 4l^2 + 28l + 9 < 4l^2 + 28l + 49 = (2l+7)^2$, за свако $n \in \mathbb{N}$, те је, на основу претходног, $4l^2 + 28l + 9 = (2l+5)^2 = 4l^2 + 20l + 25$, односно $8l = 16$, тј. $l = 2$. Заиста, $2^2 + 7 \cdot 2 + 2 = 20 = 4 \cdot 5$, одакле следи да једино број 2 испуњава услове задатка.

5. Приметимо да је хоризонталних дужи тачно $n(m+1)$, док је вертикалних $m(n+1)$. Како свака фигура коју користимо поплочава једну хоризонталну и једну вертикалну дуж, добијамо да је $n(m+1) = m(n+1)$, одакле је $mn + m = mn + n$, односно $m = n$.

Ако је $m = n$, није тешко наћи поплочавање. Наиме, главном дијагоналом можемо поделити полазну таблу, за коју је $m = n$, на два дела, а онда, горњу половину табле поплочајмо фигурама које покривају горњу и десну ивицу сваког јединчног квадрата, који се налазе изнад главне дијагонале табле (за оне квадрате који секу главниу дијагоналу урадимо исто), а затим, доњу половину табле фигурама које прекривају доњу и леву ивицу сваког од јединичних квадрата (за оне квадрате који секу главниу дијагоналу урадимо исто).

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ
Други разред - А категорија

1. Једначину $x = 506-(506-x^2)^2$ можемо записати као $f(f(x)) = x$, где је $f(x) = 506-x^2$. Нека је $\mathcal{R}_1$ скуп реалних решења једначине $f(x) = x$, а $\mathcal{R}_2$ скуп реалних решења полазне једначине. Очигледно је $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$. Са друге стране, једначина $f(x) = x$, тј. једначина $x^2+x-506 = 0$, има за решења реалне бројеве $x_1 = 22$ и $x_2 = -23$. Нађимо сада и остала решења полазне једначине. У том циљу, када једначину $f(f(x)) - x = 0$ поделимо са $(x-22)(x+23))$, $x \neq 22$, $x \neq -23$, добијамо квадратну једначину $x^2 - x - 505 = 0$, која има још 2 реална решења, тј. бројеве $x_3 = \dfrac{1+\sqrt{2021}}{2}$ и $x_4 = \dfrac{1-\sqrt{2021}}{2}$

2. Нека је $x \in \mathbb{R}$ произвољно. Запишимо полазну једнакост у облику $y^2 + (4x+2)y + (ax^2+2x) = 0$ и посматрајмо је као квадратну једначину по y. На основу услова задатка иста мора имати ненегативну дискриминанту, тј. мора да важи

$$(4x+2)^2 - 4(ax^2+2x) \geqslant 0, \quad \text{тј.} \quad x^2(4-a) + 2x + 1 \geqslant 0,$$

за свако $x \in \mathbb{R}$. За $a = 4$ претходна неједнакост се своди на $2x+1 \geqslant 0$, која не важи за свако $x \in \mathbb{R}$. За $a > 4$ неједнакост ће важити за свако $x \in \mathbb{R}$. Коначно, мора бити $4-a > 0$, тј. $a < 4$, као и да је дискриминанта квадратне функције са леве стране неједнакости $x^2(4-a)+2x+1 \geqslant 0$ непозитивна, односно, $4-4(4-a) \leqslant 0$, тј. $a \leqslant 3$. Дакле, за $a \leqslant 3$ су испуњени услови задатка.

3. Нека је тај број $\sum\limits_{i=0}^{2022} a_i 10^i$, где је $0 \leqslant a_i \leqslant 9$, за $0 \leqslant i \leqslant 2022$ и $a_{2022} \neq 0$. По услову задатка $7 \mid \sum\limits_{i=0}^{2021} a_i 10^i$ и $7 \mid \sum\limits_{i=0}^{2020} a_i 10^i + a_{2022}10^{2021}$, па $7 \mid (a_{2021} - a_{2022})10^{2021}$, односно, a_{2021} и a_{2022} дају исти остатак при дељењу са 7. Аналогно, за свако $k \in \{1, \dots, 2020\}$ важи $7 \mid \sum\limits_{i=0}^{2022-k-1} a_i 10^i + \sum\limits_{i=2022-k+1}^{2022} a_i 10^{i-1}$ и $7 \mid \sum\limits_{i=0}^{2022-k-2} a_i 10^i + \sum\limits_{i=2022-k}^{2022} a_i 10^{i-1}$, па $7 \mid (a_{2022-k-1} - a_{2022-k})10^{2022-k-1}$, тј. $a_{2022-k-1}$ и a_{2022-k} дају исти остатак при дељењу са 7. Дакле, све цифре дају исти остатак при дељењу са 7, те како $7 \mid a_{2022} \cdot \sum\limits_{i=0}^{2021} 10^i$ и како важи $7 \mid \sum\limits_{i=0}^{2021} 10^i$, следи да цифра a_{2022} може бити произвољна из скупа $\{1, 2, \dots, 9\}$. Ако је $a_{2022} \in \{1, 2, 7, 8, 9\}$, тада за остале цифре имамо по две могућности (рецимо, ако је $a_{2022} = 8$, тада остале цифре могу узети вредности из скупа $\{1, 8\}$), па је у овом случају укупан број природних бројева са описаним особинама једнак $5 \cdot 2^{2022}$. Са друге стране, ако је $a_{2022} \in \{3, 4, 5, 6\}$, тада све остале цифре морају бити једнаке a_{2022}, па таквих бројева у овом случају има тачно 4. Дакле, укупан број тражених бројева је $5 \cdot 2^{2022} + 4$.

4. Одговор је $X = 1101$. Најпре, приметимо да уколико за неки фиксиран парк Милица исти посети у a-том дану, а Добрица у b-том, тада тај парк у почетку мора имати барем $\max\{|a-b|, \min\{a, b\}\}$ дрвећа.

Претпоставимо да су Милица и Добрица успели да обиђу све паркове и да засаде сво дрвеће. Означимо паркове које Добрица, редом, обилази бројевима $1, 2, \dots, 2202$. Са p_i означимои дан у ком је Милица посетила парк i, $1 \leqslant i \leqslant 2202$. Јасно је да је тада $(p_1, p_2, \dots, p_{2202})$ пермутација скупа $\{1, 2, \dots, 2202\}$. Такође, из горе наведених запажања, јасно је да почетни број дрвећа мора бити барем

$$\max\Big\{\max\{|p_1-1|,\min\{p_1,1\}\},\dots,\max\{|p_{2202}-2202|,\min\{p_{2202},2202\}\}\Big\}.$$

Дакле, задатак се своди на тражење минималне вредности претходног израза по свим могућим пермутацијама $(p_1,p_2,\dots,p_{2202})$ скупа $\{1,2,\dots,2202\}$. Лако се проверава да се за пермутацију $(1102,1103,\dots,2202,1,2,\dots,1101)$ вредност претходног израза своди на 1101.

Докажимо да се за сваку другу пермутацију $(p_1,p_2,\dots,p_{2202})$ скупа $\{1,2,\dots,2202\}$ не може добити мања вредност поменутог израза. У том циљу, посматрајмо парове (i,p_i), $i=1,2,\dots,2202$. Када посматрамо обе координате свих тих парова добијамо да се међу тим бројевима појављују 2204 броја већа од 1100 (сваки од бројева $1101,1102,\dots,2202$ по два пута). Како парова има тачно 2202, то по Дирихлеовом принципу постоји пар код којег су обе координате веће од 1100. Нека је то k-ти пар, за неко $k>1100$. Тада је

$$\max\Big\{\max\{|p_1-1|,\min\{p_1,1\}\},\dots,\max\{|p_{2202}-2202|,\min\{p_{2202},2202\}\}\Big\}$$
$$\geqslant \max\{|p_k-k|,\min\{p_k,k\}\}\geqslant \min\{p_k,k\}>1100.$$

5. Нека је M друга тачка пресека праве AD и описане кружнице око троугла ABC. Из потенције тачке D у односу на ту кружницу важи $DM=\dfrac{DB\cdot DC}{DA}=2$.

Међутим, знамо да је $MB=MC=MI$, одакле је $\sphericalangle MCD=\sphericalangle MCB=\sphericalangle MAB=\sphericalangle MAC$, па је $\Delta MCD\sim\Delta MAC$ (сви одговарајући углови су међусобно једнаки). Даље је $\dfrac{MC}{MD}=\dfrac{MA}{MC}$, односно, $MC^2=MD\cdot MA=2\cdot(2+6)=16$, $MB=MC=MI=4$, одакле је $AI=AM-MI=AD+DM-MI=6+2-4=4$.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ
Трећи разред - А категорија

1. Када убацимо матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 3 & b \end{bmatrix}$ у матричну једнакост $A^2 - 5A = 2I$ добијамо $\begin{bmatrix} 1+3a & a+ab \\ 3+3b & 3a+b^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 5a \\ 15 & 5b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, тј. $\begin{bmatrix} -4+3a & -4a+ab \\ -12+3b & 3a+b^2-5b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Из ове матричне једнакости добијамо систем једначина, по a и b: $-4+3a = 2$, $-4a+ab = 0$, $-12+3b = 0$, $3a+b^2-5b = 2$, који има решење $a = 2$, $b = 4$ (које добијамо из прве и треће једначине. Коначно, тривијално се проверава да за $a = 2$ и $b = 4$ су задовољене и друга и четврта једначина система. Дакле, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

2. Нека је π нека пермутација првих n природних бројева. Кажемо да је инверзија пермутације пар (i, j), $1 \leq i < j \leq n$, такав да је $\pi(i) > \pi(j)$. Број свих инверзија пермутације означићемо са $\mathrm{inv}(\pi)$. Приметимо да замена суседних елемената у пермутацији одговара промени броја инверзија за ± 1, што значи да Урошев потез који се састоји од највише k замена може променити број инверзија за највише k. Такође, Вељков потез који помера елемент са позиције j на позицију i можемо посматрати као узастопну примену $|j-i|$ суседних замена елемената, што одговара промени броја инверзија за највише $n-1$. Још једно битно запажање је да је за дату пермутацију увек могуће наћи два суседна елемента чијом заменом смањујемо број инверзија (осим уколико је број инверзија већ 0, што је еквивалентно томе да је пермутација $1, 2, ..., n$, а тада је Урош већ победник). Ако је $k = n$, тада је довољно да Урош бира потезе који константно смањују број иневрзија, јер колико год Вељко повећао број инверзија у свом потезу, Урош ће након тога смањити број инверзија за више него што их је Вељко повећао, а како је број инверзија коначан, јасно је да ће Урош победити. Докажимо сада да $k = n-1$ није довољно. Приметимо да је Вељку потребно да одржава бар једно од следећа два стања (за оба стања важи $\mathrm{inv}(\pi) \geq n$, па Урош не може у једном свом потезу доћи до победе):

1. након Вељковог потеза је $\pi(n) = 1$, $\pi(n-1) \neq n$,
2. након Вељковог потеза је $\pi(1) = n$, $\pi(2) \neq 1$.

На почетку су испуњена оба стања. Први случај: нека је у неком тренутку испуњено стање 1. Уколико је након тога Урошев потез резултирао тиме да је $\pi(1) = 1$, тада Вељко може узети број 1 и поставити га опет на позицију n, чиме враћа позицију у стање 1. Уколико је након Урошевог потеза $\pi(1) \neq 1$ и $\pi^{-1}(1) < \pi^{-1}(n)$, тада Вељко може узети број n и поставити га на прву позицију, чиме остварује стање 2. Остаје још проверити могућност $\pi(1) \neq 1$ и $\pi^{-1}(1) > \pi^{-1}(n)$. Ако је $\pi(n) \neq 1$, тада број 1 постављамо на позицију n и добијамо стање 1. Иначе, n постављамо на позицију 1 и добијамо стање 2. Други случај, када је испуњено стање 2, се слично проверава. На основу претходног закључујемо да је решење $k = n$.

Напомена. Еквивалентно за случај $k = n-1$, довољно је било показати да уколико постоји инверзија у пермутацији и тренутно је Вељко на потезу, тада он може направити пермутацију са бар n инверзија. Алгоритам је сличан горе описаном.

3. За $p = 2$ тривијално се проверава да не постоје природни бројеви a и b такви да важи $a^2+b^2 = 6$. Нека је $p > 2$ непаран прост број. На основу мале Фермаове теореме је испуњено $0 \equiv (2p-1)! = a^p + b^p \equiv a + b \pmod{p}$, одакле следи $b \equiv -a \pmod{p}$. Приметимо да је $a^p + b^p = (a+b)(a^{p-1} - a^{p-2}b + \ldots - ab^{p-2} + b^{p-1})$, као и да је $a^{p-1} - a^{p-2}b + \ldots - ab^{p-2} + b^{p-1} \equiv \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i a^{p-1-i}(-a)^i \equiv \sum_{i=0}^{p-1} a^{p-1} \equiv pa^{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$, што нам даје да је $a^p + b^p$ дељиво са p^2. Међутим, јасно је да $p^2 \nmid (2p-1)!$, што значи да тражени природни бројеви a и b не постоје.

4. Нека су S и M средишта дужи EF и BC, редом. Приметимо да је сваку тачку U на дужи BC важи $|BU - CU| = 2MU$, као и да је распоред тачака $K - B - X - D - M - C$, на основу услова $AB < AC$. Дакле, важи $MX = 2MD$, одакле је $DX = DM$, па је ΔAXM једнакокрак и $\sphericalangle AXK = \sphericalangle AMC$.
Даље, четвороугао $BCEF$ је тетиван (тачке E и F су на кружници конструисаној над дужи BC као над пречником), одакле следи да су ΔABC и ΔAEF слични, јер имају међусобно једнаке одговарајуће углове. У тој сличности тачке M и S одговарају једна другој, па је $\sphericalangle AMC = \sphericalangle ASF = \sphericalangle ASK$. Дакле, $\sphericalangle ASK = \sphericalangle AXK$, одакле закључујемо да је четвороугао $ASXK$ тетиван, што је требало доказати.

5. (а) Како је $bc \leqslant \frac{(b+c)^2}{4} \Leftrightarrow (b-c)^2 \geqslant 0$, добијамо да је $a + ab + bc + ca = a(b+c+1) + bc \leqslant a(b+c+1) + \frac{(b+c)^2}{4} = a(4-a) + \frac{(3-a)^2}{4} = \frac{1}{4}(10a + 9 - 3a^2) = \frac{1}{4}(\frac{52}{3} - 3(a - \frac{5}{3})^2) \leqslant \frac{13}{3}$, при чему ће једнакост важити за $a = \frac{5}{3}$ и $b = c = \frac{2}{3}$.
(б) Из $a + b \leqslant a + b + c = 3$, јер је $c \geqslant 0$, добијамо да је $a + ab + bc = a + b(a+c) = a + b(3-b) \leqslant (3-b) + b(3-b) = (b+1)(3-b) = 4 - (b-1)^2 \leqslant 4$, при чему се једнакост може достићи за $a = 2, b = 1$ и $c = 0$.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Четврти разред - А категорија

1. Одговор: Постоји. Нека је $A_n = \{i \in \mathbb{N} \mid i > n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Јасно је да је $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, јер би сваки елемент који би евентуално припадао пресеку морао бити већи од било ког природног броја, што није могуће.

Са друге стране, пресек било које коначне подколекције формиране колекције скупова $\{A_n\}$ је непразан. Заиста, посматрајмо неку коначну подколекцију $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, $n_i \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$, колекције $\{A_n\}$. Тада, сваки природан број, који је већи од n_k, припада пресеку $\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_{n_i}$.

2. Нека су a, b, c и p дужине страница и полуобим троугла ABC. Јасно је да је $\triangle XBF \sim \triangle XCE$, јер је $\sphericalangle XBF = \sphericalangle XCE$ (као периферијски углови над тетивом AX круга описаног око троугла ABC), као и $\sphericalangle BFX = 180^\circ - \sphericalangle XFA = 180^\circ - \sphericalangle XEA = \sphericalangle CEX$ (углови $\sphericalangle XFA$ и $\sphericalangle XEA$ су једнаки као периферијски углови над тетивом AX круга описаног око троугла AFE).

Аналогно је, $\triangle YBG \sim \triangle YCH$, па је $\dfrac{BX}{BF} = \dfrac{CX}{CE}$, $\dfrac{YB}{BG} = \dfrac{YC}{CH}$. Стога, $\dfrac{BX}{CX} = \dfrac{BF}{CE}$, $\dfrac{YC}{YB} = \dfrac{CH}{BG}$. Међутим, како је $BG = CE = p - c$ и $CH = BF = p - b$, то је $\dfrac{BX}{CX} = \dfrac{CY}{BY}$. Како се тачке X и Y налазе на истој страни лука BC круга описаног око троугла ABC као и тачка A, и како је тачка X Микелова тачка за троуглове ABC и AEF, тј. кружнице описане око њих, те како је тачка Y Микелова тачка за троуглове ABC и AGH, тј. кружнице описане око њих, то је $BY = CX$, па је $BX = CY$.

3. Град G можемо представити као 3-регуларни граф $G = (V, E)$ (из сваког чвора полазе тачно 3 гране) на $|V| = n$ чворова обојених у некој од две боје и тако да сваки чвор има бар два црвена суседа. Како из сваког чвора полазе тачно 3 гране, а свака грана има тачно два крајња чвора, закључујемо $3n = 2|E|$, па n мора бити паран, односно $n = 2k$ за $k \geqslant 4$.

Ако са c и p означимо редом број црвених и плавих чворова, тада важи $2n \leqslant 3c$ јер сваки чвор има бар два црвена суседа, а сваки црвени чвор је црвени сусед за тачно три друга чвора. Према томе, $c \geqslant \frac{2}{3}n$ и $p = n - c \leqslant \frac{1}{3}n$, односно $p \leqslant \lfloor \frac{2}{3}k \rfloor$. Овим закључујемо да не може бити више од $\lfloor \frac{2}{3}k \rfloor$ плавих чворова, те остаје још да проверимо да је за свако $k \geqslant 4$ овај број плавих чворова и остварив при условима задатка.

Уколико је $k = 3l$, $l \geqslant 1$, тражимо $p = \lfloor \frac{2}{3}3l \rfloor = 2l$ и $c = 4l$. Нека су $v_1, v_2, \ldots, v_{4l}$ црвени, а $u_1, \ldots, u_{2l}$ плави чворови. Додајмо гране тако да добијемо два дисјунктна циклуса $v_1v_2 \ldots v_{2l}$ и $v_{2l+1}v_{2l+2} \ldots v_{4l}$ и за свако $1 \leq i \leq 2l$ додајмо гране v_iu_i и u_iv_{2l+i}. Тада су сви црвени чворови степена три, а плави степена два. Но, како је број плавих чворова паран, можемо још за свако $1 \leqslant i \leqslant l$ додати грану $u_{2i-1}u_{2i}$, чиме добијамо 3-регуларан граф који задовољава услове и $p = 2l = \frac{2}{3}k$.

Уколико је $k = 3l + 1$, $l \geqslant 2$, тражимо $p = 2l$ и $c = 4l + 2$. Уочимо поново циклусе $v_1v_2 \ldots v_{2l+1}$ и $v_{2l+2}v_{2l+3} \ldots v_{4l+2}$ и за свако $1 \leqslant i \leqslant 2l$ гране v_iu_i и u_iv_{2l+1+i}, те за свако $1 \leqslant i \leqslant l$ грану $u_{2i-1}u_{2i}$. Тада су сви чворови степена 3, сем v_{2l+1} и v_{4l+2}, па њиховим повезивањем добијамо 3-регуларан граф који задовољава услове.

Коначно, за $k = 3l + 2$, $l \geqslant 1$, тражимо $p = 2l + 1$ и $c = 4l + 3$. Још једном уочимо циклусе $v_1 v_2 \ldots v_{2l+1}$ и $v_{2l+2} v_{2l+3} \ldots v_{4l+3}$ и за свако $1 \leqslant i \leqslant 2l+1$ гране $v_i u_i$ и $u_i v_{2l+1+i}$, те за свако $1 \leq i \leq l$ грану $u_{2i-1} u_{2i}$. Тада су сви чворови степена 3, осим u_{2l+1} и v_{4l+3}, па њиховим повезивањем добијамо 3-регуларан граф који такође задовољава услове.

Према томе, у граду G може бити највише $p = \lfloor \frac{2}{3}k \rfloor = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ клубова са плавим светлима.

4. Приметимо да се за фиксиране вредности a и h_a вредност израза максимизује када је $b+c$ најмање. Посматрајмо праву p која садржи тачку A и паралелна је страници a, као и тачку C' која је осна рефлексија тачке C у односу на праву p. Дуж AC' је подударна дужи $AC = b$, па имамо да је $b+c = AC+BA = BA+AC' \geqslant BC' = \sqrt{a^2 + (2h_a)^2}$, а једнакост се достиже ако и само ако је $b = c$. Уз смену $x = \frac{h_a}{a}$ и на основу претходног, свели смо задатак на тражење највеће могуће вредности израза $\frac{1+x}{\sqrt{1+(2x)^2}}$. Из неједнакости квадратне и аритметичке средине добијамо

$$\sqrt{\frac{1+(2x)^2}{5}} = \sqrt{\frac{4(\frac{1}{2})^2 + (2x)^2}{5}} \geqslant \frac{4\frac{1}{2} + 2x}{5} = \frac{2}{5}(1+x).$$

Одавде имамо

$$\frac{a+h_a}{b+c} \leqslant \frac{1+x}{\sqrt{1+(2x)^2}} \leqslant \frac{\sqrt{5}}{2},$$

а обе једнакости се достижу ако и само ако је $b = c$ и $a = 4h_a$.

Напомена. Највећа могућа вредност израза $\frac{1+x}{\sqrt{1+(2x)^2}}$ се може наћи налажењем првог извода. Из услова $\left(\frac{1+x}{\sqrt{1+(2x)^2}}\right)' = \frac{1-4x}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$ добијамо потенцијални екстремум у тачки $x = \frac{1}{4}$.

5. Доказаћемо да су решења $k = 2$ и $k = 3$. За њих постоји бесконачно много одговарајућих n, јер је довољно узети бројеве 2^α и $3 \cdot 2^\alpha$, за $\alpha \in \mathbb{N}$. Докажимо да за нити једно друго k такво n не постоји. Претпоставимо супротно, тј. да постоје n и k из скупа $\mathbb{N}$ такви да је $\varphi(n) = \dfrac{n}{k}$, $k \neq 2$ и $k \neq 3$. Нека је $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_l^{\alpha_l}$ канонска факторизација броја n. Тада је

$$k = \frac{n}{\varphi(n)} = \frac{p_1 p_2 \ldots p_l}{(p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_l - 1)}.$$

Да би добијени разломак био цео, јасно је да међу простим бројевима p_1, p_2, итд, не може бити више од једног непарног. Дакле, $l \leqslant 2$. За $l = 1$ тривијално налазимо $p_1 = 2$, тј. $k = 2$. За $l = 2$ добијамо да је $p_1 = 2$, $p_2 - 1 \mid 2p_2$, па $p_2 - 1 \mid 2$. Дакле, $p_2 = 3$ и $k = 3$. Дакле, у оба случаја смо добили конрадикцију, јер $k \neq 2$ и $k \neq 3$.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред - Б категорија

1. (а) На скупу $X = \{aca, konac, lopte, loto, prst\}$ релација

$$x\, \varrho_1\, y \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad \text{речи} \quad x \text{ и } y \quad \text{су исте дужине}$$

је релација еквиваленције, што се тривијално провери, али није релација поретка, јер очигледно није антисиметрична. Класе еквиваленције релације ϱ_1, на скупу X, су: $\{aca\}$, $\{loto, prst\}$ и $\{konac, lopte\}$.
(б) На истом скупу X, релација

$$x\, \varrho_2\, y \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad \text{речи} \quad x \text{ и } y \quad \text{се завршавају истим словом}$$

је уједно и релација еквиваленције и релација поретка, јер у скупу X не постоје две речи које се завршавају истим словом, те се релација ϱ_2 своди на једнакост. Класе еквиваленције су тада једночлани скупови $\{aca\}$, $\{konac\}$, $\{lopte\}$, $\{loto\}$ и $\{prst\}$.

2. Растављањем датог разломка добијамо $\dfrac{n^2+2n+51}{n^2+4n+3} = 1 + 2\dfrac{24-n}{n^2+4n+3}$. Дакле, треба да одредимо све природне бројеве n тако да n^2+4n+3 дели $24-n$, као и да је број $1+2\dfrac{24-n}{n^2+4n+3}$ такође природан. Прво закључујемо да $\dfrac{24-n}{n^2+4n+3} = \dfrac{24-n}{(n+3)(n+1)} \geqslant 0$, па је $n \leqslant 24$. За $n = 24$ важе услови задатка. Провером се тривијално проверава да природни бројеви 1 и 2 не задовољавају услове. За $n \geqslant 3$ ће важити да је $n^2+4n+3 \geqslant 24$, док је $24-n \leqslant 21$, па не може важити да $n^2+4n+3 \mid 24-n$. Дакле, једино решење је $n = 24$, колики је тражени збир.

3. Нека је S средиште крака BC и s_{BC} симетрала истог. Троуглови DBS и DSC су

подударни, на основу става СУС ($BS = SC$, $\sphericalangle DSB = 90^\circ = \sphericalangle DSC$, $DS = DS$). Из ове подударности следи да је $DB = DC$ и $\sphericalangle DBS = \sphericalangle DCS$. Са друге стране, $\sphericalangle DBS = \sphericalangle ABC = \sphericalangle CAB$, зато што је ABC једнакокраки троугао. Како је $\sphericalangle ECB = 180^\circ - \sphericalangle DCS = 180^\circ - \sphericalangle DBS = 180^\circ - \sphericalangle CAB = \sphericalangle DAC$, добијамо, на основу става СУС, да су троуглови DAC и CBE подударни ($AD = CE$, $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ECB$, $AC = BC$). Из подударности ових троуглова следи да је $DC = BE$, а с обзиром да је је $DB = DC$, добија се да је $BE = DB$, одакле произилази да је троугао DBE једнакокраки.

4. Четворо путника, који ыхеле да седе у правцу кретања воя, моыхемо распоредити на $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ начина, док троје њих, који ћ седети са супротне стране купеа, можемо сместити на $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ начина. Преостала три путника можемо распоредити било где, тј. на $3! = 6$ начина. Дакле, укупан број размештаја је $120 \cdot 60 \cdot 6 = 43200$ начина.

Напомена. Задатак смо могли да урадимо и директно. Наиме, четири путника, који би седели у правцу кретања воза, треба да распоредимо на 5 могућих места. Укупан број таквих могућности је $4! \cdot \binom{5}{4} = 24 \cdot 5 = 120$. За сваку такву могућност, троје путника, на супротну страну, можемо сместити, аналогно, на $3! \cdot \binom{5}{3} = 6 \cdot 10 = 60$ начина. Дакле, укупан број могућности је $3! \cdot 120 \cdot 60 = 43200$, јер преостала три путника можемо сместити на $3! = 6$ начина.

5. Разликоваћмо четири случаја.

1° $x < 0$:

Једначина постаје $-\dfrac{1}{2x} + \dfrac{2x-1}{2x} + \dfrac{2x-2}{2x} = \dfrac{4}{3}$, тј. $\dfrac{4x-4}{2x} = \dfrac{4}{3}$, тј. $x = 3$, што није решење у овом случају.

2° $0 < x \leqslant \dfrac{1}{2}$:

Једначина постаје $\dfrac{1}{2x} - \dfrac{2x-1}{2x} - \dfrac{2x-2}{2x} = \dfrac{4}{3}$, тј. $\dfrac{-4x+4}{2x} = \dfrac{4}{3}$, тј. $x = \dfrac{3}{5}$, што, такође, није решење у овом случају.

3° $\dfrac{1}{2} < x \leqslant 1$:

Једначина постаје $\dfrac{1}{2x} + \dfrac{2x-1}{2x} - \dfrac{2x-2}{2x} = \dfrac{4}{3}$, тј. $\dfrac{2}{2x} = \dfrac{4}{3}$, тј. $x = \dfrac{3}{4}$, што јесте решење у овом случају.

4° $x > 1$:

Једначина постаје $\dfrac{1}{2x} + \dfrac{2x-1}{2x} + \dfrac{2x-2}{2x} = \dfrac{4}{3}$, тј. $\dfrac{4x-2}{2x} = \dfrac{4}{3}$, тј. $x = \dfrac{3}{2}$, што јесте решење у овом случају.

Дакле, једина решења су $x = \dfrac{3}{4}$ или $x = \dfrac{3}{2}$.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Други разред - Б категорија

1. (а) За $d=8$ треба да покажемо да је $\dfrac{2x^2-14x+27}{x^2-7x+13}-8\leqslant 0$ за све реалне бројеве x. То се своди на $\dfrac{-6x^2+42x-77}{x^2-7x+13}\leqslant 0$, тј. на $\dfrac{6x^2-42x+77}{x^2-7x+13}\geqslant 0$. За обе квадратне функције је $D<0$ (-84 и -3), а како су коефицијенти уз x^2 позитивни то важи и $6x^2-42x+77\geqslant 0$ и $x^2-7x+13\geqslant 0$, па смо показали да важи и $\dfrac{2x^2-14x+27}{x^2-7x+13}-8\leqslant 0$, тј. да је број $d=8$ "добар".

б) Слично као у претходном делу задатка, неједнакост $\dfrac{2x^2-14x+27}{x^2-7x+13}-d\leqslant 0$ се своди на

$$\frac{(d-2)x^2+(14-7d)x+(13d-27)}{x^2-7x+13}\geqslant 0.$$

За квадратну функцију $x^2-7x+13$ смо већ показали да је увек позитивна, а $(d-2)x^2+(14-7d)x+(13d-27)$ је увек ненегативна ако је њен коефицијент $A=d-2>0$, а дискриминанта $D=-3d^2+16f-20\leqslant 0$. Имамо да $A=d-2>0$ важи за $d>2$, док је $D=-3d^2+16f-20\leqslant 0$ за $d\in(-\infty,2)\cup(\frac{10}{3},+\infty)$, па то важи за $d\in(\frac{10}{3},+\infty)$.

Остаје још да се провери за $d=2$ шта се дешава јер тад немамо у бројиоцу квадратну функцију. Тад треба да важи $\dfrac{2x^2-14x+27}{x^2-7x+13}\leqslant 2$, што се своди на $\dfrac{-1}{x^2-7x+13}-8\geqslant 0$, што је увек негативно (а треба да буде позитино). Зато $d=2$ не укључујемо у решење.

2. За $a<0$ и $a>\frac{17}{2}$ нема решења, док за $a=\frac{17}{2}$ има једно решење. За $a=0$ и $4<a<\frac{17}{2}$ има два решења, али за $0<a<4$ налазимо да једначина има четири решења. КОначно, за $a=4$ има бесконачно много решења. На слици је дат график функције $f(x)=\big||x^2+7x+6|-(x^2+7x+10)\big|$.

3. Приметимо да је $\sphericalangle ALC=\sphericalangle ALB=135^\circ$, тако да је $\sphericalangle BLC=90^\circ$. Следи да је AL симетрала угла BLC. Нека је X пресек дијагонала квадрата K_a. Тада је четвороугао $BLCX$ тетиван и $BX=CX$, па је LX симетрала угла BLC. Дакле, A,L,X су колинеарне.

4. У ћошку мора да буде највећи број, тј. 8. Када изаберемо којих три броја су изнад њега, њих морамо да ставимо од већих ка мањим на горе, а преоста четири броја треба да стављамо слева у десно, исто од већих ка мањим. Дакле, избором која три броја су изнад постављеног у ћошку све је одређено, а то можемо да урадимо на $\binom{7}{3}=35$ начина.

5. (а) Такви бројеви не постоје. Заиста, како је $(a+b)+(b+c)+(c+a)=2(a+b+c)$ паран број, барем један од бројева $a+b,b+c$ и $c+a$ је паран, па је њихов производ такође паран број.
(б) Такви бројеви постоје. Ставимо да је, на пример, $(a+b)=(c+a)=2024^{1011}$ и $b+c=2024$. Тада је $b=c=1012$, али и $a=2024^{1011}-1012$.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Трећи разред - Б категорија

1. Како је $2023 = 5 \cdot 360 + 223 = 22 \cdot 90 + 43$ и $4046 = 11 \cdot 360 + 86$ имамо да је $a = \sin 2023^\circ = -\sin 43^\circ$, $b = \sin 4046^\circ = \sin 86^\circ$, $c = \cos 2023^\circ = -\cos 43^\circ$ и $d = \cos 4046^\circ = \cos 86^\circ$. Даље, како је за $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ функција синус растућа функција, а косинус опадајућа и како је $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$ имамо $0 < d = \cos 86^\circ < \cos 45^\circ = \sin 45^\circ < \sin 86^\circ = b$. Слично добијамо и да је $c = -\cos 43^\circ < -\cos 45^\circ = -\sin 45^\circ < -\sin 43^\circ = a < 0$.
Коначно, дати бројеви поређани по величини од мањих ка већим су: $c < a < 0 < d < b$.

2. Ако прву врсту помножимо са -2 и додамо другој врсти и помножимо са -3 и додамо трећој добијамо: $\begin{vmatrix} 2023 & x+3 & 1+x \\ 4046 & 3x+6 & 4+x \\ 6069 & x+7 & 5+6x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2023 & x+3 & 1+x \\ 0 & x & 2-x \\ 0 & -2x-2 & 2+3x \end{vmatrix} = 2023(x^2+4x+4) =$
$2023(x+2)^2 \leqslant 0$, што важи само за $x = -2$.

3. Према косинусној теореми, примењеној на ΔABC, налазимо да је

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos\angle ABC < AB^2 + BC^2 = 20$$

$$AC^2 > AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC = 4,$$

где прву неједнакост добијамо јер је $\angle ABC$ оштар, па је његов косинус позитиван. Према томе, $2 < AC < 2\sqrt{5}$, па је $AC = 3$ или $AC = 4$, због тога што је дужина AC природан број.

С друге стране, из услова тангентности $ABCD$ налазимо $AB + CD = BC + DA$, односно $CD - DA = BC - AB = 2$, па дужина дијагонале AC мора бити средњи од три узастопна природна броја. Ако је $AC = 3$, налазимо $CD = 4$ и $DA = 3$ што није могуће због различитости дужина страница четвороугла. Ако је, пак, $AC = 4$, налазимо $CD = 5$ и $DA = 3$, па у ΔCAD важи $CD^2 = 25 = 16 + 9 = AC^2 + AD^2$, те је према Питагориној теореми он правоугли, односно $\sphericalangle CAD = 90^\circ$.

4. Одговор: 7.
Приметимо да ако изабаремо бројеве $1, 3, \cdots, 13$, сви су непарни, тако да је разлика $a - b$ парна, те тада она никад не може да дели c јер је и он непаран.
Ако изаберемо 8 бројева, онда ће морати да постоје нека два, рецимо a и b, $a > b$, које смо изабрали и који су суседни, односно за које је $a - b = 1$, па за било које c које изаберемо ће важити $a - b | c$.

5. Свака особа ће рећи за особу испред себе да је лажов ако и само ако те две особе су из различите групе (лажови и истинољубци). Нумеришимо редове, од почетка до краја, са 1,2,...,2023. Једну групу чине људи на парним, а други на непарним местима. Због непарности броја 2023, те две групе имају различит број чланова и ако је на једном распореду на парним, на свим осталима је, такође, је на парним местима. Исто важи и за непарна места, за која имамо 1012! начина за распоред, док за парна места имамо 1011! начина. Стога, укупан број распореда је $1011! \cdot 1012!$.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Четврти разред - Б категорија

1. Како је $AB \| DC$, то је $\sphericalangle APD = \sphericalangle PDC$ и $\sphericalangle BPC = \sphericalangle PCD$. Такође, $\sphericalangle DAP = \sphericalangle DPC = \sphericalangle CBP$, па је $\triangle DPC \sim \triangle PAD \sim \triangle CBP$. Тада је $\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{PD}{DC} \Rightarrow PA = \dfrac{PD^2}{DC}$, као и $\dfrac{DC}{PC} = \dfrac{PC}{PB}$, те је $PB = \dfrac{PC^2}{DC}$.

Дељењем претходних једнакости тврђење тривијално следи.

2. Како је $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 < \frac{\pi}{2}$, највећа вредност a је $a = \sin(1)$, а из Косинусне теореме, примењене на троугао са страницама $7cm$, $8cm$ и $a = 13cm$, добијамо да је $\cos\alpha = \dfrac{13^2 - 7^2 - 8^2}{2 \cdot 7 \cdot 8} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{2\pi}{3}$, док из Синусне теореме, налазимои да је $b = \dfrac{a}{2R} = \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Како је $a = \sin 1 = \sin\dfrac{\pi}{\pi} < \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\dfrac{2\pi}{3} = b$, добијамо да је веће b.

3. Ако је $\log 2 = a \Rightarrow \log_2 10 = \frac{1}{a}$, тј. $\log_2 2 + \log_2 5 = \frac{1}{a} \Rightarrow \log_2 5 = \frac{1}{a} - 1 = \frac{1-a}{a} \Rightarrow \log_5 2 = \frac{a}{1-a}$.
Када $\log 3 = b$ поделимо са $\log 2 = a$ добијамо да је $\log_2 3 = \frac{b}{a}$, односно $\log_3 2 = \frac{a}{b}$.
$\log 3 = b \Rightarrow \log_3 10 = \frac{1}{b}$, тј. $\log_3 2 + \log_3 5 = \frac{1}{b} \Rightarrow \log_3 5 = \frac{1}{b} - \frac{a}{b} = \frac{1-a}{b} \Rightarrow \log_5 3 = \frac{b}{1-a}$.
Коначно, $\log_5 216 = \log_5(2^3 \cdot 3^3) = 3\log_5 2 + 3\log_5 3 = 3 \cdot \frac{a}{1-a} + 3 \cdot \frac{b}{1-a} = \frac{3a+3b}{1-a}$.

4. Одговор: 12.
Приметимо да ако изабаремо бројеве $1, 3, \cdots, 23$, сви су непарни, тако да је разлика $a - b$ парна, те тада она никад не може да дели c јер је и он непаран.
Ако изаберемо 13 бројева, онда ће морати да постоје нека два, рецимо a и b, $a > b$, које смо изабрали и који су суседни, односно за које је $a - b = 1$, па за било које c које изаберемо ће важити $a - b | c$.

5. Фиксирајмо белог краља. Претпоставимо, прво, да је он у једном у четири могућа ћошка табле. За сваку такву позицију, црног краља можемо поставити на осталих 60 поља. Дакле, уколико је бели краљ у неком од ћошкова, укупан број могућности је 240.

Претпоставимо да је сада бели краљ на ивици табле, али не и у ћошковима табле. Тада, црног краља можемо сместити на осталих 58 поља табле. Дакле, у овом случају, укупан број могућности је $24 \cdot 58 = 1392$.

Коначно, претпоставимо да бели краљ није у ћошковима табле, нити на ивичним пољима, већ негде у средини табле. За њега ћемо имати тачно 36 могућности, док, за сваку од њих, црног краља можемо сместити на осталих 55 слободних поља. Дакле, у овом случају је укупан број могућности 1980. Дакле, према условима задатка, укупно распореда је 3612.