број: 110/2 година: 2022/23

Тангента

ЧАСОПИС ЗА МАТЕМАТИКУ И РАЧУНАРСТВО ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Београд 2022

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
„ТАНГЕНТА”- часопис за математику и рачунарство за ученике средњих школа.
Излази у четири броја током школске године.
Адреса: „Тангента”, Друштво математичара Србије,
Поштански фах 355, 11000 Београд
Телефон: (011)3036-818

Уплате на жиро рачун:
Друштво математичара Србије – број 340-13536-62.
На уплатници као сврху уплате назначити „За Тангенту”.

Штампа: **Донат Граф** д.о.о, Београд
На основу члана 23. став 2, тачка 9. Закона о порезу на додатну вредност („Регистар прописа”, број 11 – новембар 2004.) часопис се сматра серијском публикацијом од посебног интереса за науку и опорезије се по стопи од 8%. Корице freepik.

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

51
ТАНГЕНТА : часопис за математику и рачунарство за ученике средњих школа : часопис за математику и рачунарство Друштва математичара Србије / главни и одговорни уредник Војислав Петровић. - 1995/1996, бр. 1- . - Београд : Друштво математичара Србије, 1995- (Београд : Донат граф). - 24 cm

Тромесечно.
ISSN 0354-656X = Тангента
COBISS.SR-ID 103642375

ПРАВОУГАОНИЦИ И БРОЈ π

***Јенс Карстенсен, Фредериксберг* (*Данска*)**
***Алија Муминагић, Фредериксберг* (*Данска*)**

Као што је познато, ирационални бројеви су они који се не могу представити у облику $\frac{p}{q}$, где су p и q цели бројеви. Такав је, рецимо, $\sqrt{2}$.

Ако се било који ирационалан број представи у декадном систему, тада иза децималног зареза има бесконачно много цифара и међу њима нема никакве периодичности. На пример, $\sqrt{2} = 1{,}41421356237309504 \ldots$.

Иначе, периодичност у декадном запису рационалних бројева, управо је њихова карактеристика. То значи да се у децималном запису рационалног броја обавезно појављује група цифара која се периодично понавља. И обратно, ако се у децималном запису неког реалног броја појављује група цифара која се периодично понавља, тај број рационалан, тј. може се представити као количник два цела броја.

На пример, $\frac{1}{3} = 0{,}\underline{3}333 \ldots$ и $\frac{2}{7} = 0{,}\underline{285714}285714285714 \ldots$, односно $0{,}\underline{2}222 \ldots = \frac{2}{9}$ и $0{,}1\underline{12}1212 \ldots = \frac{37}{330}$. Подвучене су групе цифара иза децималног зареза које се периодично понављају.

Међу ирационалним бројевима разликују се *алгебарски* и *трансцедентни*. Алгебарски су они ирационални бројеви који су решење неке алгебарске једначине с целобројним коефицијентима. Тако су бројеви $\sqrt{2}$ и $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ алгебарски, јер је први решење једначине $x^2 - 2 = 0$, док је други решење једначине $x^4 - 2x^2 - 1 = 0$.

Трансцедентни бројеви нису решење ниједне алгебарске једначине с целобројним коефицијентима. Најпознатији трансцедентан број свакако је π (пи). Као што је познато, π потиче из геометрије и једнак је односу обима и пречника круга.

Да је π ирационалан број први је доказао Ламберт[1] 1768. године, а Линдеман[2] је 1882. доказао да је трансцедентан.

Стога, π, представљен у декадном систему, има бесконачно цифара иза децималног зареза, при чему се ниједна група цифара не појављује периодично.

Још је Архимед показао да је π ≈ 3,14. Данас, захваљујући моћним рачунарима, познато је преко 100 трилиона децимала, тј. $100 \cdot 10^{12}$ цифара иза децималног зареза.

---

[1] Јохан Хајнрих Ламберт (Johann Heinrich Lambert, 1728-1777) – швајцарско-немачки математичар.

[2] Фердинанд фон Линдеман (Ferdinand von Lindemann, 1852-1939) – немачки математичар.

НАГРАДНИ ЗАДАЦИ

Александар Миленковић, Ненад Стојановић

У рубрици „Наградни задаци” у сваком броју дајемо 20 задатака који су подељени у две групе. Задаци из прве групе су подељени по разредима и намењени су пре свега ученицима који се такмиче у Б категорији, док су задаци из друге групе намењени ученицима А категорије и нису подељени по разредима.

Позивамо све читаоце да шаљу предлоге задатака које сматрају посебно интересантним, као и сугестије које ће нам помоћи при састављању рубрике. Такође, позивамо све ученике да на адресу редакције шаљу откуцана или читко исписана решења постављених задатака; сваки задатак на засебном листу. Исто важи и за предлоге задатака. У наредним бројевима часописа публикују се комплетна решења раније постављених задатака, а на крају циклуса најуспешнији решавачи се награђују.

Предлоге и решења задатака слати на адресу:

„Тангента” – за рубрику „Наградни задаци”
Природно-математички факултет
Радоја Домановића 12
34000 Крагујевац

или **електронском поштом** (искључиво **pdf** формат) на адресу

tg_nagradnizadaci@yahoo.com

најкасније до 10.01.2023.

Прва група

Први разред

M1914. У једној средњој школи, 60% ученика воли да плеше, док остали не воле да плешу. Међу ученицима који воле да плешу, њих 80% признаје да воли да плеше, док остали тврде да не воле. Међу ученицима који не воле да плешу, њих 90% каже да не воли да плеше, док остали тврде да воле. Који део ученика који тврди да не воли да плеше у ствари воли да плеше?

M1915. Милица и Маја живе у вишеспратној згради у којој на сваком спрату има тачно десет станова. Станови од 1 до 10 су на првом спрату, станови од 11 до 20 на другом спрату итд. Милица живи на спрату чији

Hello, World!

Рачунарски вид и неуронске мреже

Младен Николић,
Математички факултет, Београд

1. Рачунарски вид

Рачунарски вид (енг. computer vision) једна је од више области примене рачунара у обради слика и видеа, а која се бави њиховим разумевањем. Можда је најпознатија област такве примене рачунарска графика. Рачунарска графика углавном се бави генерисањем слика и видеа помоћу рачунара, често пројектујући комплексне тродимензионалне описе сцена на неку раван. На тај начин је, рецимо, могуће приказати сцену из 3D видео игре на екрану рачунара. Кључни задатак рачунарског вида може се схватити управо као инверзан задатак поменутом задатку рачунарске графике. Ако је дата слика, потребно је на њој уочити елементе од интереса и односе међу тим елементима.

Идеално, рачунарски систем би на основу једне или више слика могао реконструисати облике и позиције објеката у тродимензионалном простору, препознати о каквим објектима се ради и какве су интеракције и односи у које они ступају и слично. Наду да је ово могуће даје нам чињеница да су људи прилично успешни у оваквим врстама анализе. Примера ради, људи разумеју своје окружење управо на основу пројекција тог окружења на мрежњаче очију. Као лаици, можемо претпоставити да мозак на неки начин врши реконструкцију тродимензионалног света на основу две дводимензионалне пројекције под различитим угловима. Људи су врло успешни у разумевању садржаја слика и просторних односа на њима, чак и када посматрају једну једину слику. У овом случају, није довољно претпоставити само способност математичке реконструкције тродимензионалног простора, већ битну улогу морају играти и искуство и интелигенција. Иако су оваква разматрања одавно сугерисала могућност реализације рачунарског вида, пут до практично употребљивих система био је дуг. Област се развија преко пола века, а и даље постоји пуно простора за напредак.

Прва очекивања од рачунарског вида била су велика. Сматрало се да се ради о лаком проблему који ће врло брзо бити решен [1]. Међутим, као и у многим другим случајевима, испоставило се да је проблем знатно тежи, те су очекивања и амбиције осетно пале. Седамдесетих година истраживачи су се бавили наизглед једноставним проблемима попут уочавања основних графичких елемената на сликама, као што су праве и кругови, често у несавршеном облика.

ПРЕДЛОЗИ ЗА ДРУГИ ПИСМЕНИ ЗАДАТАК

Мирјана Катић

ГИМНАЗИЈЕ, СРЕДЊЕ ШКОЛЕ

I РАЗРЕД

Увод у геометрију; подударност троугла

1. Ако су M, N, P средишта страница AB, BC и AC троугла ABC. Израчунати $2022\,\overrightarrow{MN} + 2022\overrightarrow{NP} + 2022\overrightarrow{PM}$.

2. Нека је AD висина троугла ABC у којем је $|AB| > |AC|$. Доказати да је $\measuredangle BAD > \measuredangle CAD$.

3. Доказати да за сваке две мимоилазне праве постоји раван која сече сваку од њих.

4. Нека је $ABCD$ паралелограм и нека су E и F тачке правих BC и AB, редом, такве да је $E - A - B$ и $AE \cong AB$ и $F - C - B$ и $CF \cong BC$. Доказати да је $DE \cong DF \cong AC$.

5. Над страницама AB и AC троугла ABC конструисани су са спољне стране једнакостранични троуглови ADB и ACE. Доказати да су дужи CD и BE подударне.

II РАЗРЕД

Квадратна једначина; квадратна функција; квадратна неједначина

1. Скицирати график функције: $f(x) = |x^2 + 2x - 8| - x - 12$.

2. Решити неједначину: $|x^2 - 2x - 3| < x + 1$.

3. Одредити све $k \in \mathbb{R}$ за које је функција

$$f(x) = (k-1)^2x^2 + (k-1)|x-1| + k + 1$$

позитивна за свако $x \in \mathbb{R}$.

4. Одредити све вредности реалног параметра m за које је неједначина $\frac{x^2 - mx - 2}{x^2 - 3x + 4} > -1$ задовољена за свако $x \in \mathbb{R}$.

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА

Српска математичка олимпијада и Изборна такмичења 2022.

Владимир Балтић, Миљан Кнежевић

Овогодишња, 16. по реду, Српска математичка олимпијада (СМО) одржана је 1. и 2. априла у Математичкој гимназији у Београду. На такмичењу је учествовало 36 ученика изабраних на основу резултата Државног такмичења, као и 3 гостујућа такмичара из Босне и Херцеговине.

Убедљиво најбољи је био Матија Вукелић са 35 поена (од 42 могућа), а разлика између 5. и 14. ученика је износила само 2 поена. У званичној конкуренцији, три ученика су освојила прву награду (Матеја Вукелић, Вукашин Пантелић и Игор Енги), шест другу награду (Василије Ивановић, Новак Стијепић, Александар Вишњић, Милан Гелић, Гвозден Лапчевић и Андрија Живадиновић), девет трећу награду (Јован Бенгин, Дарије Стојановић, Вукашин Ђиновић, Стеван Радивојевић, Алекса Ђорђевић, Јован Николић, Данило Ранђеловић, Емил Мишић и Александар Гаћански), док су похваљена још два ученика (Александар Губица и Лазар Брајовић).

Како су након СМО ученици који су заузели шесто, седмо, осмо и девето место имали једнак број поена (15 поена), организовано је 6. априла Додатно такмичење за избор екипе за БМО на Математичком факултету у Београду. На том додатном такмичењу победио је Гвозден Лапчевић са 29 поена (од 40 колико је био максимум на овом додатном такмичењу) и заузео последње 6. место у екипи за БМО. Иза њега су били Милан Гелић са 22 поена, Андрија Живадиновић са 12 поена и Александар Вишњић са 10 поена. На основу резултата СМО и Додатног такмичења за избор екипе за БМО одређене је екипа Србије за Балканску математичку олимпијаду. Екипу су (према пласману на СМО и додатном такмичењу за БМО) чинили:

СРБ 1 Матеја Вукелић, 3. разред Математичке гимназије у Београду,

СРБ 2 Вукашин Пантелић, 3. разред Математичке гимназије у Београду,

СРБ 3 Игор Енги, 4. разред Математичке гимназије у Београду,

СРБ 4 Василије Ивановић, 3. разред Математичке гимназије у Београду,

СРБ 5 Новак Стијепчић, 3. разред Математичке гимназије у Београду,

СРБ 6 Гвозден Лапчевић, 2. разред Математичке гимназије у Београду.

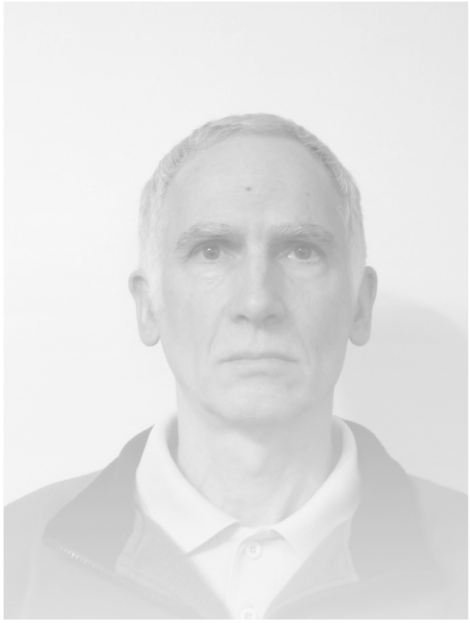
Најуспешнији ученици са СМО, њих 14, позвани су на Изборно такмичење за избор екипе Србије за Међународну математичку олимпијаду. Такмичење је одржано 18. и 19. маја на Математичком факултету у Бео-

НАШ ГОСТ

ИЗМЕЂУ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ

Овом приликом наш гост је уједно и један од домаћина Тангенте. То је професор Миодраг Живковић, уредник рубрике Рачунари. Још као ученик Математичке гиназије (МГ) испољио је изузетне склоности ка математици које су потврђене великим успесима на Међународним математичким олимпијадама (ММО). Потом су дошле исто тако успешне студије на Електротехничком факултету (ЕТФ) у Београду. Онда повратак математици-информатици кроз магистарску и убрзо затим докторску тезу, обе на Математичком факултету, чиме је наставио да се бави.

Разговор ћемо почети хронолошки, од математике.



С обзиром да сте похађали Математичку гимназију, интересовање за математику и љубав према њој сигурно су постојали и раније.

Мој деда, учитељ, заинтересовао ме је за шаховске проблеме. Поред тога, он је ручно израчунао најмање просте чиниоце природних бројева и то записао у велику свеску. На основу тога, могао је брзо да раставља бројеве на чиниоце.

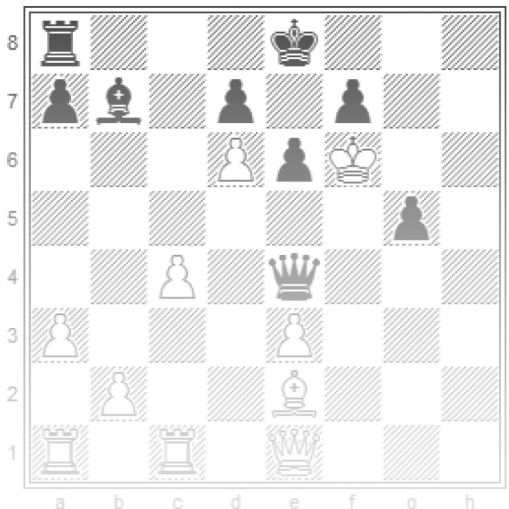
Још од основне школе, увек ме је занимало на колико начина нешто може да се уради, односно комбинаторика. Када сам добио мали нотес, у њега сам уписивао рецимо спискове свих комбинација и низове степенова бројева 1, 2, … , 10. Формирајући разлике узастопних чланова низа степенова, затим разлике разлика, итд., приметио сам да за квадрате разлике трећег реда постају нуле:

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots \rightarrow 3, 5, 7, 9, \ldots \rightarrow 2, 2, 2, \ldots. \rightarrow 0, 0, \ldots .$$

Слично, за кубове разлике четвртог реда су нуле, итд. Тек у средњој школи сам схватио зашто се то дешава.

У каквом су Вам сећању остали гимназијски дани, посебно у погледу математике?

НАГРАДНИ ШАХОВСКИ ЗАДАТАК
Тангента 109 - решење



Црни вуче и матира у 3 потеза

1. … Df5+ 2. Kg7 Dg6+ 3. Kh8 O-O-O мат.

НАГРАЂЕНИ

Јован Ковачевић, 2. разр. Шеста београдска гимназија, Београд.

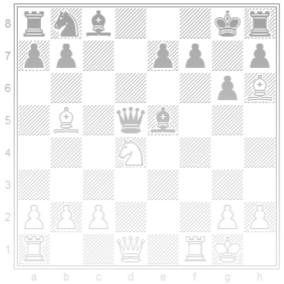
Коста Домоњић, 2. разр. Шеста београдска гимназија, Београд, Мишићевића 37, 11000 Београд (Вождовац).

ШАХОВСКА СТРАНА

КАЗАХСТАНСКИ ТАЉ

Кад се помену рискантна и надахнута игра, партије у којима на све стране сева од жртава, сви се сете генијалног Михаила Таља – „гусара из Риге“.

Међутим, мало ко зна за великог мага шаховских комбинација који је и самог Таља умео да победи у „таљевском стилу“ – казахстанског велемајстора Рашида Нецметдинова. Велики Ботвиник је тврдио да нико боље не види комбинације од Нецметдинова.



Црни је јако заостао у развоју, посебно лоше стоји краљ. То Рашид експресно кажњава. **1. Sf5!** с претњом 2. Se7 мат. **1. ... Dc5+**. Једино, јер на 1. ... De6 иде 2. Dd8 мат, а на 1. ... Lf5 2. Dd5. **2. Le3**. Темпо је важан. После 2. Kh1 Se6 црни још може да пружа отпор. **2. ... Dc7**. Изгледа као да се црни одбранио. Међутим, уследиће друге стране: **3. Sfe6+ Kg7 4. Tf1 мат**.

g6 2. Se7+ Kg7. Још горе је 2. ... Kh8 3. Td7! и 4. Df6 мат. **3. Td7 Ld7 4. Df6+ Kh6 5. Tf5! Da7+ 6. Kf1**. И сад на 6. ... Lf5 иде 7. Sf5 мат, а на неки други потез 7. Th5 мат.

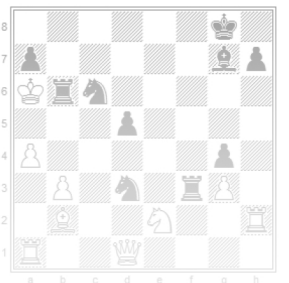
Ево како је Нецметдинов као бели „средио“ Таља на првенству СССР-а 1961. Да би задржао црног караља у центру, бели је жртвовао топа и доспео у следећу позицију.

1. Dd4!. Не занима га 1. Lb7 због 1. ... Kf8, с претњом Ld4, и нејасном позицијом. **1. ... Kf8 2. Te5 Dd8**. На 2. ... Td8 иде 3. Te8+ Kg7 4. Te7+ и пада црна дама. **3. Tf5+! gf5 4. Dh8+ Ke7 5. Dg7+ Ke6 6. gf5** и црни предаје због 6. ... Kd6 7. Sf7+.

Партија је проглашена за најлепшу на турниру. То је редак случај да такву награду не добије Таљ већ његов противник.

Комбинација из партије Полугајевски-Нецметдинов, шампионат СССР-а (1958) изузетан по лепоти. Иако је [illegible]

1. ... Tf4!!. Полугајевски је касније изјавио како је у том тренутку помислио да губи партију која ће обићи цео свет. Био је у праву. **2. Th2 Tf3+ 3. Kd4 Lg7!!**. Тихи потез у позицији с дамом мање. Фантастично. **4. a4 c5!**. Веровали или не, идеја је да се и топ са a8 укључи у напад. **5. dc6 bc6 6. Ld3**. Једина одбрана од 6. ... c5 мат. **6. ... Sed3+ 7. Kc4 d5+ 8. ed5 cd5+ 9. Kb5 Tb8+ 10. Ka5 Sc6+ 11. Ka6 Tb6 мат**! Може и 11. … Sdb4(c5) мат. Завршна позиција заслужује дијаграм.



Каква координација црних фигура!

НАГРАДНИ ЗАДАТАК

YU ISSN 0354-656X