16. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

Београд, 31.5.2022.

Решења задатака

1. Означимо са K, A, G, H редом квадратну, аритметичку, геометријску и хармонијску средину бројева a, b. Познато је да важи неједнакост између ових израза $K \geqslant A \geqslant G \geqslant H$, док је тражена неједнакост заправо облика $K + H \geqslant A + G$ и самим тим не следи одмах из претходних неједнакости. Аритметичка и хармонијска средина се могу изразити преко квадратне и геометријске средине на следећи начин

$$A = \sqrt{\frac{K^2 + G^2}{2}}, \qquad H = \frac{2G^2}{\sqrt{2(K^2 + G^2)}}.$$

Према томе, да бисмо доказали $K - G \geqslant A - H$, морамо да покажемо да важи

$$K - G \geqslant \frac{K^2 - G^2}{\sqrt{2(K^2 + G^2)}}.$$

Ова неједнакост је, због $K \geqslant G$, еквивалентна са

$$\sqrt{2(K^2 + G^2)} \geqslant K + G,$$

што је очигледно тачно (неједнакост између квадратне и аритметичке средине бројева K и G), чиме је доказ завршен.

Једнакост важи ако и само ако је $K = G$, односно $a = b$.

2. Докажимо прво да увек важи $MN \perp CI$. Нека је пресек правих MN и CI тачка K. Директан рачун са периферијским угловима даје

$$\measuredangle CNK = \measuredangle CNM = \measuredangle CAM = 90^\circ - \frac{1}{2}\measuredangle AMC = 90^\circ - \frac{\beta}{2},$$

$$\measuredangle NCK = \measuredangle NCI = \measuredangle BCN - \measuredangle BCI = 90^\circ - \frac{1}{2}\measuredangle BNC - \frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{\beta}{2},$$

одакле је јасно да је троугао CNK правоугли. Услов колинеарности тачака M, I, N заправо значи да је $K \equiv I$, тј. $\measuredangle CIM = \measuredangle CIN = 90^\circ$. Како је и $MB_1 \perp AC$ и $NA_1 \perp BC$, добијамо да су четвороуглови CA_1IN и CB_1IM тетивни, са описаним кружницама чији су пречници редом дужи CN и CM. Сада имамо

$$\measuredangle CIA_1 = \measuredangle CNA_1 = \frac{\alpha}{2}, \qquad \measuredangle CIB_1 = \measuredangle CMB_1 = \frac{\beta}{2},$$

па тврђење задатка сада непосредно следи из познатих релација $\measuredangle AIC = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$, $\measuredangle BIC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$.

3. Из услова (1) имамо да је $n = p_1 p_2 \cdots p_s$, тј. производ $s \in \mathbb{N}$ различитих простих бројева (n није 1, што видимо из услова (2) или (3)). Тада је $d(n) = 2^s$, па

$$n \equiv S(n) \equiv 2^s - 2 \equiv 0, 2 \pmod 3.$$

Са друге стране, по услову (4), важи $n + 3 = m^2$ за неко $m \in \mathbb{N}$, па

$$n \equiv n + 3 = m^2 \equiv 0, 1 \pmod 3.$$

Одавде закључујемо да $3 \mid n$, па $3 \mid m$, стога $n \equiv 6 \pmod 9$. Одавде добијамо конгруенцију

$$2^s \equiv S(n) + 2 \equiv 8 \pmod 9,$$

из које следи $s \equiv 3 \pmod 6$.

Ако је n непаран, из услова (2) следи $n \equiv 3 \pmod 4$, па је $m^2 \equiv 2 \pmod 4$, што је немогуће. Дакле, $2 \mid n$. Сада процењујемо број s. По услову (5), имамо следећу неједнакост $n < 6 \cdot 10^{3(s-2)}$. Према томе,

$$S(n) \leqslant 5 + 9 \cdot 3(s-2) = 27s - 49,$$

што нам даје неједнакост

$$2^s \leqslant 27s - 47.$$

Индукцијом се проверава да за $s \geqslant 8$ важи супротна неједнакост $2^s > 27s - 47$, одакле $s \leqslant 7$, па како знамо $s \equiv 3 \pmod 6$, мора бити $s = 3$, те је $n = 6p$, за неки прост број $p < 1000$. Даље следи

$$d(n) = 8, \quad S(n) = 6.$$

Пошто је $n > 6$ паран број, закључујемо да последња цифра броја n мора бити 0, 2 или 4, а како је $n + 3 = m^2$, мора бити $n \equiv 2 \pmod{10}$. Тада $5 \mid m$ и како је m непаран, имамо

$$m^2 \equiv 25 \pmod{100}, \quad n \equiv 22 \pmod{100}.$$

Како је и $n < 6000$ и $S(n) = 6$, имамо могућности $n \in \{222, 1122, 2022\}$, и директном провером утврђујемо да $n = 1122$ отпада, а да су јединa решења $n = 222$ и $n = 2022$.

4. Поделимо свих 25 поља табле у подскупове A, B, C, D, E, F, као што је приказано на првој слици.

Нека је a, b, c, d, e, f укупан број потеза који су извршени на пољима одговарајућег подскупа. Јасно је да сваки потез на пољу из скупа:

- A утиче на тачно два поља из скупа B;
- B утиче на тачно једно поље из сваког од скупова A, C, D;
- C утиче на тачно два поља из сваког од скупова B, E;
- D утиче на тачно два поља из скупа B и једно поље из скупа E;
- E утиче на тачно два поља из скупа C и по једно поља из скупова D, F;
- F утиче на четири поља из скупа E.

A	B	D	B	A
B	C	E	C	B
D	E	F	E	D
B	C	E	C	B
A	B	D	B	A

3	4	3	3	4
4	1	1	1	4
3	1	5	2	2
3	1	2	1	3
4	4	2	3	5

Према томе, важе следеће једначине које описују укупан број промена вредности броја на пољима назначеног скупа:

$$A: a + b = 4n, \qquad C: c + b + 2e = 4n, \qquad E: e + 2c + d + 4f = 4n,$$
$$B: b + 2a + 2c + 2d = 8n, \qquad D: d + b + e = 4n, \qquad F: f + e = n.$$

Решавањем овог система, добијамо

$$a = \frac{16}{11}n, \quad b = \frac{28}{11}n, \quad c = \frac{4}{11}n, \quad d = \frac{10}{11}n, \quad e = \frac{6}{11}n, \quad f = \frac{5}{11}n.$$

Како је број n свакако природан, потребан услов је да је n дељив са 11, тј. облика $n = 11k$, $k \in \mathbb{N}$.

Овај услов је и довољан, што показује распоред броја потеза на сваком пољу приказан на другој слици, када је $k = 1$ (за произвољно $k > 1$, само се приказан број потеза помножи са k). Наравно, постоје и друге могућности да се постигне број $n = 11k$ у сваком пољу.