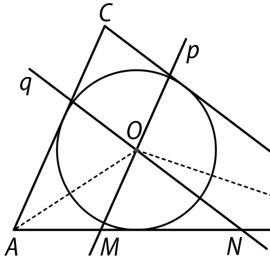
ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ

VI разред

1. Како је права AO симетрала угла BAC, то је $\measuredangle MAO = \measuredangle CAO = \measuredangle AOM$, па је троугао AOM једнакокрак, одакле је $AM = OM$. Слично се доказује да је троугао BON једнакокрак, па је $BN = ON$. Дакле, $AB = AM + MN + NB = OM + MN + NO$.



2. а) Постоје. Такве четворке су, на пример, (1, 3, 7, 9), (3, 7, 9, 31), итд.
б) Не постоје. Сваки број при дељењу са 3 даје остатак 0, 1 или 2. Ако међу пет бројева има три броја који при дељењу са 3 дају остатке 0, 1 и 2 онда је њихов збир дељив са 3, а ако нема онда по Дирихлеовом принципу међу њима има 3 броја која дају исти остатак при дељењу са 3, па је њихов збир дељив са 3.

3. Претпоставимо да n није дељиво са 9, већ да је његов остатак при дељењу са 9 једнак r ($0 < r < 9$). Остатак при дељењу броја броја $5n$ са 9 је различит од r.

остатак при дељењу броја n са 9	1	2	3	4	5	6	7	8
остатак при дељењу броја $5n$ са 9	5	1	6	2	7	3	8	4

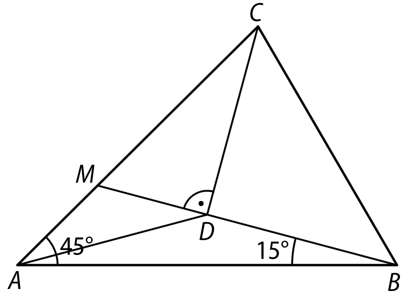
Како сваки природан број даје исти остатак при дељењу са 9 као и збир његових цифара, следи да збирови цифара броја n и броја $5n$ дају различите остатке при дељењу са 9, што је у супротности са условом задатка. Дакле, број n јесте дељив са 9.

4. Како је $A + B = D < 10$ и $C + D = D$, то је $C = 0$ (не може бити 9 јер не постоји пренос 1 са месне вредности јединица). Цифра D може имати вредности {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Тада A и B могу имати следеће вредности

D	$A + B$
3	1 + 2, 2 + 1
4	1 + 3, 3 + 1
5	1 + 4, 2 + 3, 3 + 2, 4 + 1
6	1 + 5, 2 + 4, 4 + 2, 5 + 1
7	1 + 6, 2 + 5, 3 + 4, 4 + 3, 5 + 2, 6 + 1
8	1 + 7, 2 + 6, 3 + 5, 5 + 3, 6 + 2, 7 + 1
9	1 + 8, 2 + 7, 3 + 6, 4 + 5, 5 + 4, 6 + 3, 7 + 2, 8 + 1

Дакле, постоје укупно 32 решења.

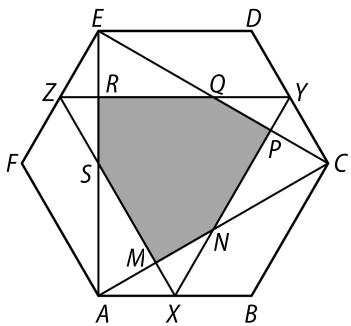
5. Нека је D подножје нормале из темена C на MB. Из $\triangle ABM$ закључујемо да је $\measuredangle AMB = 120°$, одакле је $\measuredangle CMD = 60°$, па у $\triangle MCD$ важи да је $DM = \frac{1}{2}MC = AM$. Како је $\triangle AMD$ једнакокрак, то је $\measuredangle MAD = \measuredangle MDA = 30°$, па је и $\triangle ADC$ једнакокрак, одакле је $AD = CD$. Како је $\measuredangle DAB = 45° - 30° = 15°$, следи да је и $\triangle ABD$ једнакокрак и $AD = BD$. Закључујемо да је $CD = BD$, тј. катете правоуглог троугла BDC су једнаке, па је $\measuredangle DCB = 45°$. Тражени угао је $\measuredangle ACB = \measuredangle MCD + \measuredangle DCB = 30° + 45° = 75°$.



VII разред

1. Како је $25 \cdot 3^{2021} = 75 \cdot 3^{2020} = 72 \cdot 3^{2020} + 3 \cdot 3^{2020}$, то је тражени остатак при дељењу броја $25 \cdot 3^{2021}$ бројем $4 \cdot 3^{2020}$ једнак $3 \cdot 3^{2020} = 3^{2021}$.

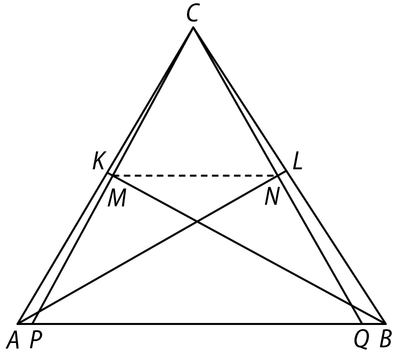
2. Нека је $MNPQRS$ тражени шестоугао. Дуж XY је средња линија трапеза $ABCD$, па је $XY \parallel AD \parallel BC$ и $XY = \frac{3}{2}$ cm. Дуж YQ је средња линија $\triangle ECD$, па је $YQ \parallel ED \parallel FC$ и $YQ = \frac{1}{2}$ cm. Како је $\measuredangle QYP = 60°$, то је $YP = \frac{1}{2}YQ = \frac{1}{4}$ cm. На исти начин добијамо да је $NX = ZS = \frac{1}{2}$ cm и $MX = ZR = \frac{1}{4}$ cm, па је тражени обим $O = 3PN + 3NM = 3\cdot\left(\frac{3}{2}\text{ cm} - \frac{1}{2}\text{ cm} - \frac{1}{4}\text{ cm}\right) + 3\cdot\frac{1}{4}\sqrt{3}\text{ cm} = \frac{9+3\sqrt{3}}{4}$ cm. Површина шестоугла $MNPQRS$ једнака је $P_{\Delta XYZ} - 3P_{\Delta QPY} = \frac{15}{32}\sqrt{3}\text{ cm}^2$.



3. Како је $n^3 - 2n^2 + 2n - 4 = (n^2 + 2)(n - 2)$, овај број је прост ако је $n - 2 = 1$ и $n^2 + 2$ прост број. За $n = 3$ је $n^2 + 2 = 11$, па је једино решење $n = 3$.

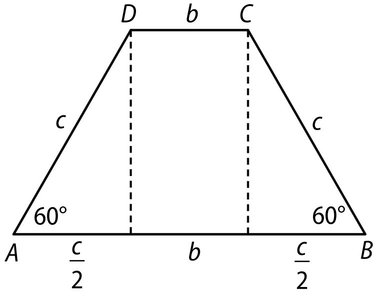
4. Нека су x и y ($x < y$) бројеви из скупа A. Тада је збир бројева из скупа B једнак $120 - x - y$. Једнакост $xy = 120 - x - y$ се може написати у облику $(x + 1)(y + 1) = 121$, одакле је $x + 1 = 1$ и $y + 1 = 121$ или $x + 1 = 11$ и $y + 1 = 11$. Како је у првом случају $y = 120 > 15$, а у другом случају $x = y = 10$, закључујемо да се бројеви не могу поделити на тражени начин.

5. Нека полуправе CM и CN секу AB у тачкама P и Q. Троуглови CPB и CQA су једнакокраки ($CB = PB$, $CQ = QA$), па је $PQ = BP + AQ - AB = BC + AC - AB = 112$ cm. Тачке M и N су средишта дужи CP, односно CQ, па је MN средња линија $\triangle PQC$ и $MN = 56$ cm.



VIII разред

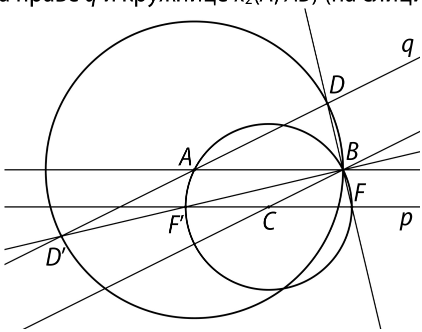
1. Трапез је једнакокрак са крацима $BC = AD = c$ и основицама $CD = b$ и $AB = a = b + c$. Из $3c + 2b = 200$ следи да је $b = \frac{200 - 3c}{2}$. Површина трапеза је $P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{2b+c}{2} \cdot \frac{c}{2}\sqrt{3} = (100 - c) \cdot \frac{c\sqrt{3}}{2} \le \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{100 - c + c}{2}\right)^2 = 1250\sqrt{3}$. Површина је максимална када је $100 - c = c$, тј. $c = 50$ cm и $b = 25$ cm, одакле је дужина дуже основнице једнака 75 cm.



2. Нека је A произвољно теме призме. Преостала темена призме су од темена A удаљена за дужине $1, 1, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 2, 2, \sqrt{5}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{7}, 2\sqrt{2}$. Дакле, свако теме призме је теме при врху тачно четири једнакокрака троугла и теме једног једнакостраничног троугла странице $\sqrt{3}$ cm. Број троуглова који имају бар две странице једнаке дужине (једнакокраки и једнакостранични троуглови) је $12 \cdot 4 + 4 = 52$, па је број разностраних троуглова $\frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1} - 52 = 168$.

3. Претпоставимо да је $a \le b \le c$. Ако би било $a \ge 3$, важило би $ab + bc + ca \le 3bc \le abc$, што је немогуће. Дакле, $a = 2$. Дата неједнакост постаје $2bc < 2b + bc + 2c$, тј. $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{2}$. Ако је сада $b \ge 5$, онда је $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \le \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$. Дакле, $b = 2$ или $b = 3$.
Ако је $b = 2$, онда је $4c < 4 + 2c + 2c$, па c може да буде произвољан прост број.
Ако је $b = 3$, онда је $6c < 6 + 5c$, па је $c = 3$ или $c = 5$.
Претходна решења су у случају када је $a \le b \le c$, а како редослед може бити произвољан тражене тројке су (p је произвољан прост број):
$(2, 2, p)$, $(2, p, 2)$, $(p, 2, 2)$, $(2, 3, 3)$, $(3, 2, 3)$, $(3, 3, 2)$, $(2, 3, 5)$, $(2, 5, 3)$, $(3, 2, 5)$, $(3, 5, 2)$, $(5, 2, 3)$, $(5, 3, 2)$.

4. Нека је F тачка пресека правих p и BD. Троуглови ABD и CFB су слични (странице су им паралелне па су и унутрашњи углови једнаки). Како је AB = AD, то је и CF = CB = r, па тачка F припада кружници k_1. Аналогно се доказује и ако је D друга тачка пресека праве q и кружнице $k_2(A, AB)$ (на слици означена са D’).



5. Важи да је $\overline{abbaabbaabba} = \overline{abba} \cdot 100010001$. Број 100010001 је дељив са 3, 7, 13 и 37, а није дељив са 3^2, 7^2, 13^2 и 37^2. Да би број $\overline{abbaabbaabba}$ био квадрат неког природног броја, онда $\overline{abba}$ мора бити дељиво са 3, 7, 13 и 37. Како је $3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 = 10101$, а број $\overline{abba}$ је четвороцифрен, следи да се не могу одредити цифре a и b такве да је број $\overline{abbaabbaabba}$ квадрат природног броја.