39th Balkan Mathematical Olympiad

Језик: **Српски**

Петак, 6. мај 2022.

Задатак 1.

Нека је O средиште описане кружнице ω око оштроуглог троугла ABC, $CA \neq CB$. Означимо са X пресечну тачку тангенти t_A и t_B конструисаних на ω у тачкама A и B, редом. Нека је Y подножје нормале из тачке O на дуж CX. Права која садржи тачку C, која је паралелна правој AB, сече тангенту t_A у тачки Z. Доказати да права YZ садржи средиште дужи AC.

Задатак 2.

Нека су a, b и n природни бројеви и нека је $a > b$. Претпоставимо да важи:

(i) a^{2021} дели n,

(ii) b^{2021} дели n,

(iii) 2022 дели $a - b$.

Доказати да постоји подскуп T скупа свих позитивних делилаца броја n, такав да је збир свих елемената из скупа T дељив са 2022, али не и са 2022^2.

Задатак 3.

Наћи све функције $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ такве да важи

$$f\left(y\left(f\left(x\right)\right)^3 + x\right) = x^3 f(y) + f(x),$$

за свако $x > 0$ и свако $y > 0$.

Задатак 4.

Дата је табла димензија $n \times n$ која се састоји од n^2 јединичних поља, где је $n \geqslant 3$ дати непаран природан број. У првом кораку Ана свако поље табле боји црвеном или плавом бојом. Познато је да жаба може да скочи са једног поља табле на друго ако и само ако та поља имају исту боју и имају барем једно заједничко теме. Марија посматра Анино бојење и поставља k жаба на поља табле, тако да до сваког од n^2 поља може стићи барем једна жаба у коначном броју (могуће нула) скокова. Одредити најмању могућу вредност броја k за коју је то увек могуће, без обзира на начин Аниног бојења.

Време за израду задатака: 4 сата и 30 минута

Сваки задатак вреди 10 поена