

Математичко такмичење „Кенгур без граница” 2022.

11 – 12. разред

Загацки који вреде 3 поена

1. Дијаграм на слици десно приказује колико је Лука времена провео користећи 4 апликације на свом телефону прошле седмице. На дијаграму су приказане апликације од највећег до најмањег утрошеног времена. Ове седмице Лука је преполовио време које је провео користећи две апликације, док је на друге две апликације утрошио исто времена као и прошле седмице. Који од следећих дијаграма не може да представља време које је Лука провео ове седмице користећи посматране апликације?



- А) Б) В) Г) Д)

2. Колико има природних троцифрених бројева дељивих са 13?

- А) 68 Б) 69 В) 70 Г) 76 Д) 77

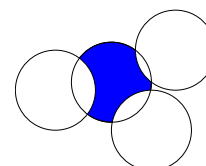
3. Миа је старија од Ане, а млађа од Иве. Теа је старија од Мије. Које две девојке могу да буду истих година?

- А) Ана и Теа Б) Теа и Ива В) Ива и Ана Г) Миа и Ива Д) Теа и Миа

4. Производ цифара десетоцифреног природног броја је 15. Колики је збир цифара тог броја?

- А) 8 Б) 12 В) 15 Г) 16 Д) 20

5. Четири круга, сваки полупречника 1, секу се као што је приказано на слици десно. Колики је обим обојене фигуре на слици?



- А) π Б) број између $\frac{3\pi}{2}$ и 2π В) $\frac{3\pi}{2}$ Г) 2π Д) π^2

6. Давид исписује, у растућем поретку, природне бројеве од 2 до 2022, који садрже само цифре 0 и 2. Који број се налази тачно у средини тог низа?

- А) 200 Б) 220 В) 222 Г) 2000 Д) 2002

7. Број реалних решења једначине $(x - 2)^2 + (x + 2)^2 = 0$ је

- А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3 Д) 4

8. Нека су a , b и c реални бројеви различити од нуле. Ако су бројеви $-2 \cdot a^4 \cdot b^3 \cdot c^2$ и $3 \cdot a^3 \cdot b^5 \cdot c^{-4}$ истог знака, које од следећих тврђења је сигурно тачно?

- А) $ab > 0$ Б) $b < 0$ В) $c > 0$ Г) $bc > 0$ Д) $a < 0$

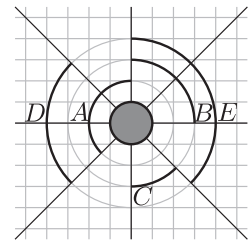
9. Мика је на правој означио тачке A , B , C и D као што је приказано на слици испод.



Ако је $AC = 12$ cm и $BD = 18$ cm, колико је растојање између средишта дужи AB и средишта дужи CD ?

- А) 15 cm Б) 12 cm В) 18 cm Г) 6 cm Д) 9 cm

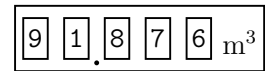
10. Четири праве се секу и формирају осам једнаких углова од по 45° , као што је приказано на слици десно. Који од означених црних кружних лукова има дужину једнаку обиму сивог круга са најмањим полупречником?



- А) А Б) В В) С Г) D Д) E

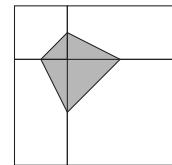
Задаци који вреде 4 поена

11. Јован је приметио да водомер у његовом купатилу приказује број са слике, чије су све цифре различите. Колико воде ће бити потрошено до наредног појављивања броја са свим различитим цифрама на водомеру?



- А) $0,006 \text{ m}^3$ Б) $0,034 \text{ m}^3$ В) $0,086 \text{ m}^3$ Г) $0,137 \text{ m}^3$ Д) $1,048 \text{ m}^3$

12. Велики квадрат подељен је на два различита квадрата и два подударна правоугаоника као што је приказано на слици десно. Темена сивог четвороугла су средишта страница два квадрата. Ако је површина сивог четвороугла 3, колика је површина белог дела великог квадрата?

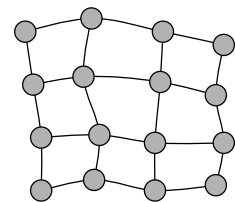


- А) 12 Б) 15 В) 18 Г) 21 Д) 24

13. Који је највећи заједнички делилац бројева $2^{2021} + 2^{2022}$ и $3^{2021} + 3^{2022}$?

- А) 2^{2021} Б) 1 В) 2 Г) 6 Д) 12

14. На мапи десно представљена је област са 16 градова повезаних путевима. Влада жели да сагради електране у неким од ових градова. Свака електрана може да обезбеди довољну количину електричне енергије за град у ком се налази и за градове који су повезани са тим градом тачно једним путем. Који је најмањи број електрана који је потребно изградити како би сваки град имао довољно електричне енергије?



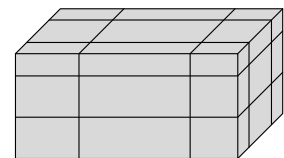
- А) 3 Б) 4 В) 5 Г) 6 Д) 7

15. Који пар приказаних делова се може спојити како би се добио предмет приказан на слици десно?



- А) Б) В) Г) Д)

16. Квадар површине S исечен је помоћу шест равни на 27 мањих делова, као што је приказано на слици десно. Свака раван је паралелна са две стране квадрата, али њено растојање од страна је произвољно. У зависности од S , колика је укупна површина свих 27 мањих делова?



- А) $2S$ Б) $\frac{5}{2}S$ В) $3S$ Г) $4S$ Д) ништа од претходног

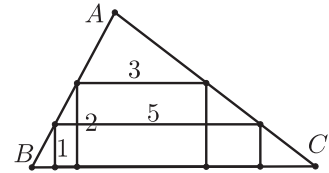
17. Аритметичка средина бројева a_1, a_2, a_3, a_4 и a_5 је 24. Аритметичка средина бројева a_1, a_2 и a_3 је 19, док аритметичка средина бројева a_3, a_4 и a_5 је 28. Колика је вредност броја a_3 ?

- А) 20 Б) 21 В) 22 Г) 23 Д) 24

18. Марта је један од 8 учесника на турниру. Она зна да ће победити све осим Уроша, који ће победити у свим мечевима. У првој рунди су такмичари подељени на случајан начин у 4 пара и сви победници мечева пролазе у другу рунду. У другој рунди се играју два меча и победници пролазе у финале. Која је вероватноћа да Марта неће играти у финалу?

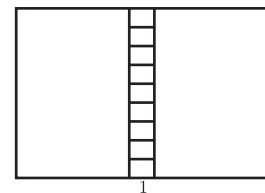
- А) 1 Б) $\frac{1}{2}$ В) $\frac{2}{7}$ Г) $\frac{3}{7}$ Д) $\frac{4}{7}$

19. Два правоугаоника димензија 1×5 и 2×3 су уписана у троугао ABC , као што је приказано на слици десно. Колика је висина троугла ABC која одговара страници BC ?



- А) 3 Б) $\frac{7}{2}$ В) $\frac{8}{3}$ Г) $\frac{16}{5}$ Д) ништа од претходног

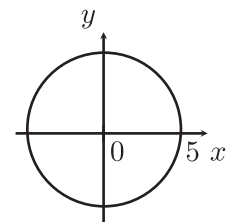
20. Велики правоугаоник на слици десно је подељен на 11 мањих правоугаоника који су слични великом правоугаонику. Два добијена већа правоугаоника су подударна, а подударни су међусобно и преосталих 9 мањих. Ако је дужина дуге стране најмањег правоугаоника једнака 1, колики је обим највећег правоугаоника?



- А) 20 Б) 24 В) 27 Г) 30 Д) 36

Задачи који вреде 5 поена

21. Дата је кружница са центром у координатном почетку, полу-пречника дужине 5 (слика десно). За колико тачака које припадају кружници важи да су обе координате те тачке целобројне?

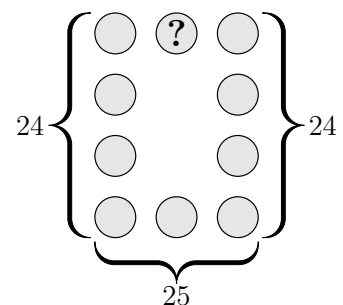


- А) 5 Б) 8 В) 12 Г) 16 Д) 20

22. Колико троцифрених природних бројева је једнако петострукој вредности производа цифара тог броја?

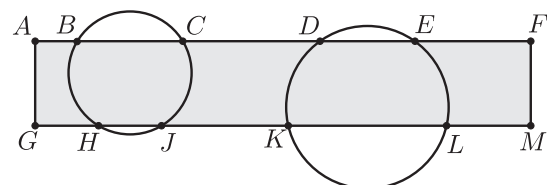
- А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 4 Д) 5

23. Првих 10 природних бројева је уписано у кругове на слици десно, тако да је сваки број уписан тачно једном. Збир бројева у обе колоне посебно једнак је 24, док је збир бројева у доњој врсти једнак 25. Који број је уписан у круг означен знаком питања?



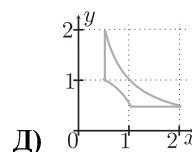
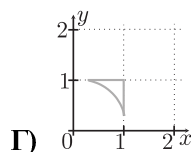
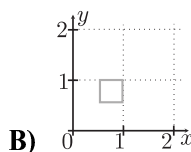
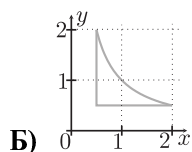
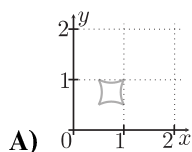
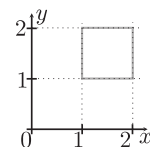
- А) 2 Б) 4 В) 5
Г) 6 Д) ништа од наведеног

24. Два круга су пресечена правоугаоником $AGMF$, као на слици десно. Ако је $AB = 8$, $CD = 26$, $EF = 22$, $GH = 12$ и $JK = 24$, колика је дужина дужи LM ?



- А) 14 Б) 15 В) 16 Г) 17 Д) 18

25. Свака тачка (x, y) која припада затвореној линији облика квадрата (слика десно) се слика у тачку $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$. Која затворена линија се добија тим пресликавањем?



26. Темена 20-оугла су нумерисана бројевима од 1 до 20 тако да је свако теме нумерисано различитим бројем и при томе је разлика бројева којима су обележена суседна темена једнака 1 или 2 (по апсолутној вредности). Странице 20-оугла код којих се бројеви, којима су означени њихови крајеви, разликују за 1, обојене су црвеном бојом. Колико страница 20-оугла је обојено црвеном бојом?

- А) 1 Б) 2 В) 5 Г) 10 Д) постоји више различитих решења

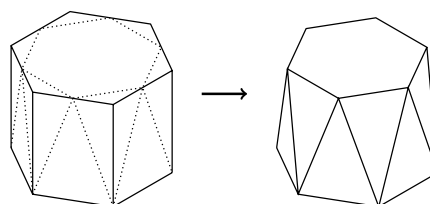
27. Нека је N природан број. Колико има природних бројева већих од $\sqrt{N^2 + N + 1}$, а мањих од $\sqrt{9N^2 + N + 1}$?

- А) $N + 1$ Б) $2N - 1$ В) $2N$ Г) $2N + 1$ Д) $3N$

28. Нека је (a_n) низ рационалних бројева такав да је први члан низа већи од 0, а мањи до 1, а за сваки природан број n важи да је $a_{2n} = a_2 \cdot a_n + 1$ и $a_{2n+1} = a_2 \cdot a_n - 2$. Ако је $a_7 = 2$, колика је вредност члана a_2 ?

- А) једнака је a_1 Б) 2 В) 3 Г) 4 Д) 5

29. Од правилне шестостране призме одсечени су њени делови, као на слици десно. Од горње основе, добијен је мањи, правилан шестоугао док омотач добијеног тела чине дванаест једнакокраких троуглова, тачније две шесторке међусобно подударних троуглова. Који део запремине почетне призме је одсечен?



- А) $\frac{1}{12}$ Б) $\frac{1}{6}$ В) $\frac{1}{4\sqrt{3}}$ Г) $\frac{1}{6\sqrt{2}}$ Д) $\frac{1}{6\sqrt{3}}$

30. Меч малог фудбала између Асела и Бесела одигран је на терену чије је гледалиште правоугаоног облика. Ако је познато да је у сваком реду (врсти) седло 11 навијача Асела, да је у свакој колони седло 14 навијача Бесела и да је остало 17 упражњених места током меча, колики је најмањи број могућих места за седење на том правоугаоном гледалишту?

- А) 500 Б) 660 В) 690 Г) 840 Д) 994

Задаци: „Kangaroo Meeting 2021”, Антверпен, Краљевина Белгија
 Организатор такмичења: Друштво математичара Србије
 Превод: Теодора Трифуновић, Марко Дабић,
 доц. др Александар Миленковић, доц. др Ненад Стојановић
 Рецензент: проф. др Зоран Каделбург