Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

12.03.2022.

Први разред – А категорија

1. Одредити све троцифрене бројеве $\overline{abc}$, где је $a, b, c \neq 0$, такве да важи $\overline{abc} = 3 \cdot a! + 2 \cdot b! + c!$. ($\overline{abc}$ је број коме су a, b, c, редом, цифре стотина, десетица и јединица у декадном систему.)

2. На табли је написан низ свих степена двојке $(1, 2, 4, \ldots)$ у растућем редоследу. Аца и Браца играју игру у којој наизменично повлаче потезе, а први на потезу је Аца. Играч који је на потезу замењује два узастопна броја са табле њиховим збиром. Браци је циљ да после неког потеза на табли постоје два броја већа од 1 који се разликују за 1.

(а) Доказати да Аца може повлачити потезе тако да спречи Брацин циљ.

(б) Уколико је Браци познато да ће му у неком тренутку бити дозвољено да одигра два узастопна потеза, доказати да онда може остварити свој циљ.

3. Одредити све природне бројеве n, за које постоје реални бројеви a, b, c тако да важи

$$\{a + b + c, ab + bc + ca, abc\} = \{n, n + 1, n + 2\}.$$

4. Одредити највећу могућу вредност броја n, таквог да постоји конвексан n-тоугао који се може разложити на дисјунктну унију троуглова који су или правоугли једнакокраки или правоугли са угловима $15°$ и $75°$. (Два троугла су дисјунктна ако немају заједничку унутрашњу тачку.)

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

12.03.2022.

Други разред – А категорија

1. Нека је M средиште странице BC троугла ABC. Нека је X средиште лука AB који не садржи теме M описаног круга $\triangle AMB$, а Y средиште лука AC који не садржи теме M описаног круга $\triangle AMC$. Доказати да је $XY \perp AM$.

2. У $\triangle ABC$ теменима A, B, C, редом, одговарају унутрашњи углови α, β, γ, а наспрам њих су странице дужина a, b, c. Одредити све $\triangle ABC$ за које важи

$$a^3 \cos\alpha + b^3 \cos\beta + c^3 \cos\gamma \leqslant abc.$$

За које $\triangle ABC$ се у претходној неједнакости достиже једнакост?

3. Одредити све $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такве да за свако $n \in \mathbb{N}$ и све $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, уколико је $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ потпун квадрат, онда је и $f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n)$ потпун квадрат.

4. У некој земљи постоји n градова и k авиопревозника, где је $n, k \in \mathbb{N}$. Између свака два града постоји двосмерна авиолинија, чији је власник тачно један авиопревозник. Сваки авиопревозник издаје неки број различитих часописа, тако да у сваком граду издаје тачно један, али може издавати исти часопис и у различитим градовима. Притом, уколико путник путује из града A у град B директном авиолинијом која је у власништву авиопревозника C, онда су часописи које издаје авиопревозник C у градовима A и B различити. Доказати да макар један авиопревозник мора издавати барем $\left\lceil \sqrt[k]{n} \right\rceil$ различитих часописа, као и да постоји подела авиолинија по авиопревозницима, тако да ниједан не мора издавати више од $\left\lceil \sqrt[k]{n} \right\rceil$ часописа. (За $x \in \mathbb{R}$ је $\lceil x \rceil$ најмањи цео број не мањи од броја x.)

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

12.03.2022.

Трећи разред – А категорија

1. Нека су $S(n)$ и $P(n)$, редом, збир и производ цифара природног броја n у декадном систему. Да ли постоји природан број n за који је

$$n \cdot P(n) \cdot S(n) = \underbrace{22\ldots2}_{2022}\,?$$

2. Од листа папира исечен је једнакостраничан троугао ABC странице 2. Уочене су тачке $X \in CB$, $Y \in CA$ и папир је пресавијен по дужи XY, а притом се теме C пресликало у тачку C' која припада дужи AB. Доказати да је $XY \geqslant 1$.

3. Нека је $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ функција, таква да је збир бројева додељених теменима произвољног правилног октаедра једнак 0. Доказати да функција f свакој тачки простора $\mathbb{R}^3$ додељује број 0.

4. Колико има $a \in \mathbb{C}$, таквих да тачке које одговарају бројевима $a, a^2, a^3, \ldots, a^{2021}$ (у неком редоследу) у комплексној равни чине темена правилног 2021-тоугла?

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

12.03.2022.

Четврти разред – А категорија

1. Доказати да се сви подскупови скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ могу поређати у низ, тако да за свака 2 узастопна члана тог низа важи да је један подскуп другог и да њихова разлика има тачно један елемент.

2. Које вредности може имати израз $a + b + c$, ако су a, b, c реални бројеви за које важи

$$a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3?$$

3. Нека су a и b непарни природни бројеви и нека је низ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ дефинисан са $f_1 = a$, $f_2 = b$, а за $n \geqslant 3$ је f_n највећи непаран делилац броја $f_{n-2} + f_{n-1}$.

(а) Доказати да постоји $k \in \mathbb{N}$, такав да су сви чланови низа почев од неког једнаки k.

(б) У зависности од a и b, одредити k.

4. У унутрашњости $\triangle ABC$ у коме је $\sphericalangle BAC = 60^\circ$ и $\sphericalangle ABC = 20^\circ$ уочена је тачка Q таква да је $\sphericalangle QCB = 3 \cdot \sphericalangle QBC$. Симетрале $\sphericalangle QBA$ и $\sphericalangle QCA$ секу се у тачки P, при чему је $\sphericalangle PAB = 20^\circ$. Доказати да су тачке A, P и Q колинеарне.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – А категорија

1. Како је $6! = 720$ и $7! > 999$, мора бити $a, b \leqslant 5$ и $c \leqslant 6$, а како је под тим условима $\overline{abc} \leqslant 556$, следи и $c \leqslant 5$.

(1) Ако је $a = 5$, следи $500+10b+c = 3\cdot 120+2b!+c!$, односно $2b!+c! = 140+10b+c \in [151, 195]$. Не може бити $b = 5$, пошто је онда $2b!+c! > 2\cdot 120 = 240 > 195$, као ни $b, c \leqslant 4$, пошто је онда $2b! + c! \leqslant 2 \cdot 24 + 24 = 72 < 151$. Следи $c = 5$, па је $2b! + 120 = 140 + 10b + 5$, тј. $2b! = 10b + 25$, што нема решења (лева страна последње једначине није дељива са 5, а десна јесте).

(2) Ако је $a = 4$, следи $400+10b+c = 3\cdot 24+2b!+c!$, односно $2b!+c! = 328+10b+c \in [339, 383]$. Не може бити $b \leqslant 4$, пошто је онда $2b! + c! < 2 \cdot 24 + 120 = 168 < 339$, као ни $c \leqslant 4$, пошто је онда $2b! + c! \leqslant 2 \cdot 120 + 24 = 264 < 339$. Следи $b = c = 5$, но како је у том случају $2b! + c! = 2 \cdot 5! + 5! = 360$ и $328 + 10b + c = 383$, ни у овом случају нема решења.

(3) Ако је $a = 3$, следи $300+10b+c = 3\cdot 6+2b!+c!$, односно $2b!+c! = 282+10b+c \in [293, 337]$. Не може бити $b \leqslant 4$, пошто је онда $2b! + c! < 2 \cdot 24 + 120 = 168 < 293$, нити $c \leqslant 4$, пошто је онда $2b!+c! \leqslant 2\cdot 120+24 = 264 < 293$, као ни $b = c = 5$, пошто је онда $2b!+c! = 360 > 337$, па ни у овом случају нема решења.

(4) Ако је $a = 2$, следи $200+10b+c = 3\cdot 2+2b!+c!$, односно $2b!+c! = 194+10b+c \in [205, 249]$. Не може бити $b \leqslant 4$, пошто је онда $2b! + c! < 2 \cdot 24 + 120 = 168 < 205$, а ако је $b = 5$, следи $2 \cdot 120 + c! = 194 + 50 + c$, тј. $c! = c + 4$, што је једначина која нема решења.

(5) Ако је $a = 1$, следи $100+10b+c = 3\cdot 1+2b!+c!$, односно $2b!+c! = 97+10b+c \in [108, 152]$. Не може бити $b = 5$, пошто је онда $2b!+c! > 2\cdot 120 = 240 > 153$, као ни $b, c \leqslant 4$, пошто је онда $2b! + c! \leqslant 3 \cdot 24 = 72 < 108$. Следи $c = 5$, па је $2b! + 18 = 10b$, односно $b! + 9 = 5b$, а решење те једначине је $b = 3$.

Дакле, постоји један број који задовољава наведене особине, број $\overline{abc} = 135$.

2. За свако $a \geqslant 2$ је $1 + \ldots + 2^{a-1} = 2^a - 1 < 2^a$, па се вршећи описане операције увек добија растући низ. Како се у сваком тренутку на табли налазе бројеви који су збир неких узастопних степена двојке, а разлика два узастопна броја тог облика је $2^a + 2^{a+1} + \ldots + 2^b - 2^c - 2^{c+1} - \ldots - 2^d = 2^{b+1} - 2^a - 2^{d+1} + 2^c = (2^b - 2^a) + (2^b - 2^{d+1}) + 2^c \geqslant 2^c \geqslant 1$ за неке $c \leqslant d \leqslant a \leqslant b$, ако је та разлика једнака 1, онда важи једнакост у претходном низу неједнакости, односно онда је $b = a = d + 1$ и $c = 0$, тј. већи сабирак је степен двојке (односно непромењен је у односу на почетну ситуацију), односно облика 2^a за $a \in \mathbb{N}$, а мањи једнак је збиру свих степена двојке од 1 до 2^a.

(а) Нека је a најмањи степен двојке који се у неком тренутку налази на табли и притом је $a \geqslant 2$. Нека је број сабирака мањих од тог сабирка *потенцијал* низа (потенцијал полазног низа је 2). По претходном, Брацин циљ је да потенцијал низа постане 1. Међутим, Аца у сваком свом потезу може повећати потенцијал, уколико изабере најмањи степен двојке који до тада није коришћен и сабере га са наредним чланом. Заиста, у том случају се пре најмањег степена двојке који се појављује у низу налазе сви сабирци који су се и до тада налазили, као и барем један нови, добијен претходно извршеном операцијом. Са друге стране, Браца у сваком потезу може смањити потенцијал за највише 1. Следи да описаном стратегијом Аца може спречити Брацу да оствари свој циљ.

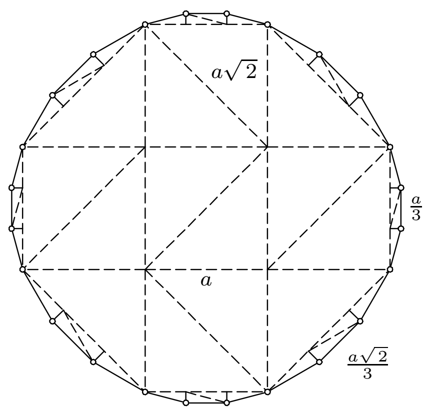
(б) Ако Браца у сваком потезу сабира прва два члана низа, потенцијал се смањује за 1. Уколико Аца не одигра потез описан у делу (а), онда се потенцијал неће повећати, а уколико одигра тај потез, повећаће се за 1. Стога, уколико се игра одвија на овај начин, након сваког Брациног потеза потенцијал је највише 2, па ако му се омогући да одигра два узастопна потеза, он може остварити свој циљ.

3. Нека n задовољава услове задатка и нека је $a + b + c = \alpha$, $ab + bc + ca = \beta$, $abc = \gamma$. Онда је $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{n, n + 1, n + 2\}$. Следи $0 \leqslant a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c) = \beta^2 - 2\alpha\gamma \leqslant (n + 2)^2 - 2n(n + 1) = -n^2 + 2n + 4 = -(n - 4)(n + 2) - 4$, што није задовољено за $n \geqslant 4$, па мора бити $n \in \{1, 2, 3\}$. Уколико је $\beta \neq n + 2$, онда је $\beta^2 - 2\alpha\gamma \leqslant (n + 1)^2 -$

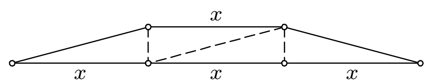
$2n(n+2) = -(n+1)^2 + 2 \leqslant -4 + 2 < 0$, што је немогуће, па мора бити $\beta = n+2$. Како је $0 \leqslant \frac{1}{2}\cdot\big((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\big) = (a+b+c)^2-3(ab+bc+ca) = \alpha^2-3\beta$, ако је $n=1$ следи $\beta=3$ и $9 = 3\beta \leqslant \alpha^2 < 2^2 = 4$, а ако је $n=2$ следи $\beta=4$ и $12 = 3\beta \leqslant \alpha^2 < 3^2 = 9$, па не може бити $n \in \{1,2\}$. Ако је $n=3$, следи $\beta = 5$ и $15 = 3\beta \leqslant \alpha^2$, а како је $\alpha \in \{3,4\}$, мора бити $\alpha = 4$, па је $\gamma = 3$. Међутим, онда је $a^2+b^2+c^2 = \alpha^2 - 2\beta = 6$, па на основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине следи $2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geqslant \sqrt[3]{a^2b^2c^2} = \sqrt[3]{\gamma^2} = \sqrt[3]{9} > 2$, па не може бити ни $n=3$.

Дакле, не постоји $n \in \mathbb{N}$ који задовољава наведене услове.

4. Како је величина сваког угла у троугловима који учествују у разлагању целобројни умножак од $15°$, следи да сваки угао добијеног n-тоугла мора бити облика $k\cdot 15°$ за неко $k \in \mathbb{N}$. Највећи такав конвексан угао је $165°$, па следи да је сваки спољашњи угао посматраног n-тоугла не мањи од $15°$. Стога n-тоугао који се може разложити на наведени начин може имати највише $\frac{360°}{15°} = 24$ станице.



Држ–22–1А4–1



Држ–22–1А4–2

Са друге стране, за $n = 24$ постоји n-тоугао који се може разложити на наведени начин. Један такав се може добити наредном конструкцијом. Квадрат странице a се може разложити на два једнакокрако–правоугла троугла, па се и фигура добијена од 5 квадрата странице a, полазног и 4 квадрата који имају по једну заједничку страницу са полазним квадратом и немају заједничких унутрашњих тачака са њим, може разложити на наведени начин, као и осмоугао добијен додавањем 4 једнакокрако–правоугла троугла чији су краци странице 4 претходно додатих квадрата које имају заједничко теме и немају других заједничких тачака са полазним квадратом (тај осмоугао има 4 странице дужине a, 4 странице дужине $a\sqrt{2}$, а унутрашњи углови су му једнаки $135°$).

Како се једнакокраки трапез, чији су углови на већој основици $15°$, а дужина краће основице једнака трећини дужине веће основице, може разложити на правоугле троуглове чији су оштри углови $15°$ и $75°$ (може се разложити, на пример, на 4 подударна правоугла троугла, оштрих углова једнаких $15°$ и $75°$ и дужег крака једнаког краћој основици), додавањем 8 таквих трапеза (4 веће основице дужине a и 4 веће основице дужине $a\sqrt{2}$), тако да су дуже основице тих трапеза странице конструисаног осмоугла и притом немају заједничких унутрашњих тачака са осмоуглом, се добија многоугао који задовољава наведене особине (његови унутрашњи углови су $165°$, па је конвексан).

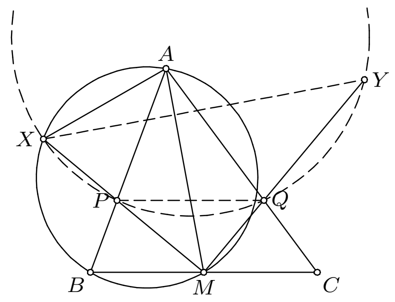
Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Други разред – А категорија

1. Нека се MX и AB секу у тачки P, а MY и AC секу у тачки Q. Како је X средиште лука AB (којем не припада M описаног круга $\triangle ABM$), права MP је симетрала $\sphericalangle BMA$, а аналогно је MQ симетрала $\sphericalangle AMC$, па је $\frac{AP}{PB} = \frac{MA}{BM}$ и $\frac{AM}{MC} = \frac{QA}{CQ}$, а како је $BM = MC$, следи $\frac{AP}{PB} = \frac{QA}{CQ}$, односно $PQ \parallel BC$. Како су MP и MQ симетрале $\sphericalangle BMA$ и $\sphericalangle AMC$, редом, и како је $\sphericalangle BMA + \sphericalangle AMC = 90^\circ$, следи $\sphericalangle PMQ = 90^\circ$.

Пошто је $\sphericalangle BMP = \sphericalangle BMX = \sphericalangle XMA$ и $\sphericalangle PBM = \sphericalangle ABM = \sphericalangle AXM$ (угао над тетивом AM у описаном кругу $\triangle ABM$), следи $\triangle BMP \sim \triangle XMA$, па је $\frac{BM}{MP} = \frac{XM}{MA}$, односно $MP \cdot MX = MA \cdot MB$. Аналогно је $MQ \cdot MY = MA \cdot MC$, па како је $MB = MC$, следи $MP \cdot MX = MQ \cdot MY$, односно четвороугао $PQYX$ је тетиван.



Држ–22–2А1

Из добијеног следи $\sphericalangle MXY = \sphericalangle MQP = \sphericalangle QMC$ (јер је $PQYX$ тетиван и $PQ \parallel BC$), као и $\sphericalangle QMC = 90^\circ - \sphericalangle BMP = 90^\circ - \sphericalangle XMA$ (пошто је $MP \perp MQ$ и $\triangle BMP \sim \triangle XMA$).

Дакле, важи $\sphericalangle MXY = 90^\circ - \sphericalangle XMA$, односно $XY \perp AM$.

2. Без умањења општости, нека је $a \leqslant b \leqslant c$. На основу косинусне теореме је $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos\beta = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, па је наведена неједнакост еквивалентна са $a^4b^2 + a^2b^4 + b^4c^2 + b^2c^4 + c^4a^2 + c^2a^4 - (a^6 + b^6 + c^6) \leqslant 2a^2b^2c^2$, односно са

$$(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) \leqslant 0.$$

Како је $b^2 + c^2 - a^2 > 0$ и $a^2 + c^2 - b^2 > 0$, неједнакост је еквивалентна са $a^2 + b^2 - c^2 \leqslant 0$, тј. са $\cos\gamma \leqslant 0$, па је испуњена ако и само ако је $\triangle ABC$ правоугли или тупоугли. Притом, једнакост се достиже ако и само ако је $\triangle ABC$ правоугли.

3. Ако су $m, n \in \mathbb{N}$ такви да је $f(m+n) - f(m) - f(n) = c \neq 0$, нека је $a > m + n + |c|$ природан број. Како је $\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{a^2-m-n} + m + n = a^2$ квадрат, на основу наведеног својства су $A = (a^2-m-n)f(1) + f(m) + f(n)$ и $(a^2-m-n)f(1) + f(m+n) = (a^2-m-n)f(1) + f(m) + f(n) + c$ квадрати чија је разлика c. Међутим, како је $A > (a^2 - m - n)f(1) \geqslant a^2 - m - n > a^2 > c^2$, разлика између A и било ког другог квадрата је барем $2|c| + 1 > |c|$, па је претходно немогуће.

Следи да за све $m, n \in \mathbb{N}$ важи $f(m+n) = f(m) + f(n)$, па је $f(n) = cn$ за свако $n \in \mathbb{N}$, где је $c = f(1)$, а како је 1 квадрат, следи и да је $c = k^2$ за неко $k \in \mathbb{N}$. Са друге стране, произвољна функција $f(n) = k^2 n$, за неко $k \in \mathbb{N}$, има наведено својство. Заиста, ако су $a_1, \ldots, a_n$ природни бројеви за које је $a_1 + \ldots + a_n = l^2$ за неко $l \in \mathbb{N}$, онда је и $f(a_1) + \ldots + f(a_n) = k^2(a_1 + \ldots + a_n) = (kl)^2$.

4. Нека i-ти авиопревозник штампа c_i часописа и нека је сваком граду додељена уређена k-торка $(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, где је $1 \leqslant t_i \leqslant c_i$, при чему i-ти превозник у том граду штампа свој t_i-ти часопис. Не постоје два града којима је додељена иста k-торка, пошто авиолинија која их спаја не би могла припадати ниједном превознику, тј. градовима су додељене различите k-торке. Како постоји $c_1 \cdot \ldots \cdot c_k$ различитих k-торки, мора бити $n \leqslant c_1 \ldots \cdot c_k \leqslant \big(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k} c_i\big)^k$, па је $M = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant k} c_i \geqslant \sqrt[k]{n}$, а како је M природан број, следи и $M \geqslant \lceil \sqrt[k]{n} \rceil$ (односно, превозник који штампа највише часописа, мора их штампати макар $\lceil \sqrt[k]{n} \rceil$).

Са друге стране ако сваки превозник штампа $\lceil \sqrt[k]{n} \rceil$ часописа, постоји бар $\left(\lceil \sqrt[k]{n} \rceil\right)^k \geqslant \left(\sqrt[k]{n}\right)^k = n$ различитих k-торки, па се различитим градовима могу доделити различите k-торке. Ако су градовима A и B додељене k-торке $(a_1, \ldots, a_k)$ и $(b_1, \ldots, b_k)$, како су различите, постоји i за које важи $a_i \neq b_i$, па уколико се линија између A и B додели i-том превознику, добија се подела линија која задовољава наведене услове.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Трећи разред – А категорија

1. Нека је $n \in \mathbb{N}$ број за који је $n \cdot S(n) \cdot P(n) = \underbrace{22\ldots2}_{2022} = a$. Како a није дељив ни са једним бројем из $\{4,5,9\}$ и како $P(n) \mid a$, цифре броја n морају бити из $\{1,2,3,6,7\}$ и при том n може имати највише једну парну цифру, као и највише једну цифру дељиву са 3. Ако $3 \mid n$, онда $3 \mid S(n)$, па би $9 \mid a$, што није тачно. Следи да $3 \nmid n$, као и да n има тачно једну цифру дељиву са 3.

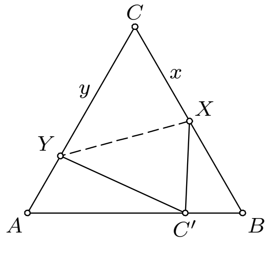
Ако n садржи парну цифру, по претходном то је једина парна цифра. Ако је то цифра 2, онда мора садржати и тачно једну цифру 3, а ако је то цифра 6, то је једина цифра броја n која је дељива са 2 и 3. Следи да је $P(n) = 6 \cdot 7^k$ за неко $k \in \mathbb{N}_0$. Како n и $S(n)$ дају исте остатке при дељењу са 9, следи $n \cdot 6 \cdot 7^k \cdot n \equiv a \equiv 2 \cdot 2022 \equiv 3 \pmod 9$, па је $2 \cdot 7^k \cdot n^2 \equiv 1 \pmod 3$, односно $n^2 \equiv 2 \pmod 3$, што је немогуће.

Ако n не садржи парну цифру, по претходном садржи тачно једну цифру 3 и $2 \mid S(n)$. Како је $(10, 49) = 1$, следи $10^{42} = 10^{\varphi(49)} \equiv 1 \pmod{49}$, па је $a = \frac{2}{9} \cdot (10^{2022} - 1) = \frac{2}{9} \cdot (10^{42 \cdot 48 + 6} - 1) \equiv \frac{2}{9} \cdot (10^6 - 1) \pmod{49}$, односно $a \equiv 222222 \equiv 7 \pmod{49}$, тј. $7 \mid a$, а $7^2 \nmid a$. Дакле, уколико n има k цифара, једна од њих је једнака 3, највише једна је једнака 7, док су преостале једнаке 1, па је или $P(n) = 3$, $S(n) = k + 2$ или $P(n) = 21$, $S(n) = k + 8$. Такође $2 \mid k$, а како је $10^{k-1} \leqslant n < 10^k$, следи $3(k+2)10^{k-1} \leqslant a < 21(k+8)10^k$. Из $a = \frac{2}{9} \cdot (10^{2022} - 1) \geqslant 3(k+2)10^{k-1} \geqslant 9 \cdot 10^{k-1}$, следи $81 \cdot 10^{k-1} < 2 \cdot 10^{2022}$, одакле је $k \leqslant 2021$, па је $a = \frac{2}{9} \cdot (10^{2022} - 1) < 21(k+8)10^k < 10^{k+5}$, те мора бити $k \geqslant 2017$. Из претходног следи $k \in \{2018, 2020\}$ и притом један од бројева $k + 2$ или $k + 8$ дели a. Међутим, како $2020 \nmid a$ и $2028 \nmid a$ (пошто $4 \nmid a$), не може бити $k = 2018$ и $S(n) = k + 2$ нити $k = 2020$ и $S(n) = k + 8$, а како $9 \nmid a$, не може бити $k = 2020$ и $S(n) = k + 2$ (пошто онда $9 \mid 3 \cdot 2022n = a$). Следи $k = 2018$, $S(n) = k + 8$ и $21 \cdot 2026n = a$, при чему је n број који има 2018 цифара, по једну цифру 3 и 7, а преостале 1. Међутим, онда $11 \nmid n$ (ако се цифре 3 и 7 налазе на позицијама исте парности у декадном запису броја, онда је остатак при дељењу са 11 тог броја или $7 - 1 + 3 - 1 = 8$ или $-(7 - 1 + 3 - 1) = -8 \equiv 3 \pmod{11}$, а ако се налазе на местима различите парности, онда је тај остатак или $7 - 3 = 4$ или $3 - 7 = -4 \equiv 7 \pmod{11}$), па $11 \nmid 21 \cdot 2026n = a$, што је немогуће, пошто $11 \mid a$.

Из претходних разматрања следи да не постоји $n \in \mathbb{N}$ са наведеним особинама.

2. Нека у $\triangle KLM$ важи $\sphericalangle KLM = 60^\circ$ и нека је $k = LM$, $l = MK$, $m = KL$. На основу косинусне теореме је $l^2 = k^2 + m^2 - 2km\cos 60^\circ = k^2 + m^2 - km = (\frac{k+m}{2})^2 + \frac{3(k-m)^2}{4} \geqslant (\frac{k+m}{2})^2$, па важи $l \geqslant \frac{k+m}{2}$. Притом се једнакост достиже ако и само ако је $k = m$, односно ако и само ако је $\triangle KLM$ једнакостранични.

Нека је $CX = x$ и $CY = y$. Онда је $C'X = x$, $BX = 2 - x$, $C'Y = y$ и $AY = 2 - y$, па применом претходно добијеног на $\triangle C'BX$ и $\triangle AC'Y$ (важи $\sphericalangle YAC' = \sphericalangle C'BX = 60^\circ$), следи $x \geqslant \frac{C'B + (2-x)}{2}$ и $y \geqslant \frac{AC' + (2-y)}{2}$, одакле је $x + y \geqslant \frac{C'B + (2-x)}{2} + \frac{AC' + (2-y)}{2} = 2 + \frac{AC' + C'B}{2} - \frac{x+y}{2} = 3 - \frac{x+y}{2}$, односно $x + y \geqslant 2$.



Држ–22–3А2

Поновном применом изведеног тврђења на $\triangle YXC$ (важи $\sphericalangle XCY = 60^\circ$), следи

$$XY \geqslant \frac{x+y}{2} \geqslant 1.$$

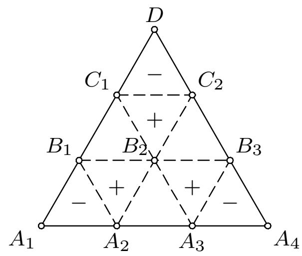
Једнакост се достиже ако и само ако су $\triangle C'BX$, $\triangle AC'Y$ и $\triangle YXC$ једнакостранични, односно ако је C' средиште дужи AB (онда је X средиште BC, а Y средиште CA).

3. Нека је K коцка у $\mathbb{R}^3$ и C њен центар. Нека је t збир вредности f у теменима те коцке, s збир вредности f у средиштима њених страна, i збир вредности f у средиштима њених ивица и $f(C) = c$. Како средишта страна коцке формирају правилан октаедар, следи $s = 0$. Над сваком страном коцке се могу конструисати две четворостране пирамиде чије су бочне стране једнакостранични троуглови, једна у спољашњој области коцке (нека је врх те пирамиде „спољашњи”) и једна која има заједничке унутрашње тачке са коцком (нека је врх те пирамиде „унутрашњи”). Темена једне стране и одговарајући унутрашњи и спољашњи врх чине правилан октаедар, па је збир вредности f у теменима овако добијених 6 октаедара једнак 0. Са друге стране, спољашњи врхови свих 6 страна чине правилан октаедар, као и унутрашњи врхови свих 6 страна, док је свако теме коцке истовремено теме тачно 3 од уочених октаедара, па је збир вредности f у теменима уочених 6 октаедара једнак $3t$, односно важи $t = 0$. Аналогно, над сваким квадратом чија су темена средишта ивица једне стране коцке се могу конструисати четворостране пирамиде чије су бочне стране једнакостранични троуглови. Притом, један врх сваке од тих пирамида је центар коцке, две пирамиде над истом страном коцке чине правилан октаедар, врхови свих 6 пирамида различити од C чине правилан октаедар, а свако средиште ивице коцке је истовремено врх тачно 2 од уочених октаедара, па је $6c + 2i = 0$, односно $3c + i = 0$.

Нека су $K_1, \dots, K_8$ коцке два пута мање ивице, добијене пресеком K са симетралним равнима ивица коцке K. Како добијени закључци важе за произвољну коцку у $\mathbb{R}^3$, вредности $t(K_i)$, која представља збир вредности f у теменима K_i, је 0 за свако $1 \leqslant i \leqslant 8$. Темена $K_1, \dots, K_8$ су или темена или средишта ивица или средишта страна или центар K. Како у $t(K_1) + \ldots + t(K_8)$ свако теме K учествије једном, свако средиште ивице 2 пута, свако средиште стране 4 пута, а центар K учествује 8 пута, следи $t + 2i + 4s + 8c = 0$. Пошто је $t = 0$, $s = 0$ и $3c + i = 0$, следи $2c = 0$, односно $c = 0$.

Коначно, како за свако $C \in \mathbb{R}^3$ постоји коцка чији је центар C, на основу претходно доказаног следи $f(C) = 0$, тј. f је идентички једнака 0.

Друго решење. У овом решењу вредност функције f неког многоугла представља збир вредности f у његовим теменима. Ако су $ABCDEF$ и $DEFGHI$ правилни октаедри ивице a (различити, са заједничком страном DEF), важи $f(A) + f(B) + f(C) = -\big(f(D) + F(E) + f(F)\big) = f(G) + f(H) + f(I)$, а $\triangle ABC$ и $\triangle GHI$ су једнакостранични троуглови странице a који се налазе у паралелним равнима које су на растојању ka (где је $k > 0$ и не зависи од a) и притом нормална пројекција $\triangle ABC$ на раван која садржи $\triangle GHI$ баш тај троугао. Следи, ако једнакостранични троугао странице a припада некој од равни из фамилије паралелних равни међу којима су две узастопне равни на растојању ka, вредност функције f свих троуглова који се добијају пројекцијом тог троугла на равни из уочене фамилије је једнака. Ако се у истој равни уочи једнакостранични троугао странице $\frac{a}{n}$, за $n \in \mathbb{N}$, преноси се добијено својство, пошто ће фамилија равни конструисана на описани начин бити састављена од равни од којих су две узастопне на растојању $\frac{ka}{n}$, а тој фамилији припадају и равни које су на растојању ka. Нека је $\triangle A_1A_4D$ једнакостранични, странице a, A_2, A_3 тачке странице A_1A_4 тако да је $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$, B_3, C_2 тачке странице A_4D тако да је $A_4B_3 = B_3C_2 = C_2D$, C_1, B_1 тачке странице DA_1 тако да је $DC_1 = C_1B_1 = B_1A_1$ и B_2 средиште дужи B_1B_3. Онда су $\triangle A_1A_2B_1$, $\triangle A_3A_4B_3$, $\triangle C_1C_2D$, $\triangle B_1B_2C_1$, $\triangle B_2B_3C_2$ једнакостранични странице $\frac{a}{3}$. По претходном вредност израза



Држ–22–3А3

$$\begin{aligned}
I(\triangle A_1A_4D) &= \big(f(A_1) + f(A_4) + f(D)\big) \\
&- \big(f(A_1) + f(A_2) + f(B_1)\big) - \big(f(A_3) + f(A_4) + f(B_3)\big) - \big(f(C_1) + f(C_2) + f(D)\big) \\
&+ \big(f(A_2) + f(B_2) + f(B_1)\big) + \big(f(C_2) + f(C_1) + f(B_2)\big) + \big(f(A_3) + f(B_3) + f(B_2)\big)
\end{aligned}$$

је једнака за све троуглове који се добијају пројекцијама $\triangle A_1A_4D$ на равни из добијене фамилије (сваки од троуглова за које је у изразу одређивана вредност f је дужине странице или $\frac{a}{3}$ или a). Са друге стране, та вредност је $3f(B_2)$.

Како се описана контрукција може спровести за произвољну $B_2 \in \mathbb{R}^3$ и произвољну раван која садржи B_2, следи да су вредности f у тачкама произвољне праве која садржи B_2 и које су на растојању ka, $k \in \mathbb{Z}$ једнаке, а како је и a произвољно, следи да су вредности f једнаке у свим тачкама произвољне праве која садржи B_2. Та вредност је $f(B_2)$, па је f константна функција на $\mathbb{R}^3$. Коначно, применом наведеног својства на произвољан правилан октаедар, следи $6f(B_2) = 0$, па је f идентички једнака 0.

4. Пресликавање комплексне равни које сваком комплексном броју z додељује комплексан број $\frac{1}{a}\cdot z$, $a \neq 0$, је обртна хомотетија, па се овим пресликавањем правилан n-тоугао пресликава у правилан n-тоугао. Следи да, попут тачака $a^1, a^2, \ldots, a^{2021}$, и тачке $1, a, a^2, \ldots, a^{2020}$ чине темена правилног 2021-тоугла. За $n \geqslant 4$ је правилан n-тоугао јединствено одређен са $n-1$ темена, па како наведена два скупа имају 2020 заједничких тачака, следи да се поклапа и преостала тачка, односно важи $a^{2021} = 1$, па је $a = \cos\frac{2k\pi}{2021} + i\sin\frac{2k\pi}{2021}$ за неко $k \in \mathbb{N}$.

Нека је $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{2021} + i\sin\frac{2\pi}{2021}$ и $a = \varepsilon^k$, за неко $0 \leqslant k \leqslant 2020$. Онда је $\{a, a^2, \ldots, a^{2021}\} = \{\varepsilon^k, \varepsilon^{2k}, \ldots, \varepsilon^{2021k}\} \subseteq \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{2020}\}$, па a задовољава наведени услов ако и само ако је $\{\varepsilon^k, \varepsilon^{2k}, \ldots, \varepsilon^{2021k}\} = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{2020}\}$, односно ако и само ако је $\{k, 2k, \ldots, 2021k\}$ потпун систем остатака при дељењу са 2021, а то је случај ако и само ако је $(k, 2021) = 1$, па бројева a који задовољавају наведени услов има $\varphi(2021) = \varphi(43\cdot 47) = \varphi(43)\cdot\varphi(47) = 42\cdot 46 = 1\,932$.

Друго решење. Број различитих дужина дужи у правилном n-тоуглу чији су крајеви темена тог n-тоугла једнак је $\left[\frac{n}{2}\right]$. Како за $n > 2$ важи $n-1 > \left[\frac{n}{2}\right]$, то међу дужима које су одређене тачкама a^i и a^{i+1}, за $1 \leqslant i \leqslant n-1$, постоје бар две исте дужине. Зато за неке $0 < i < j < n$ важи $|a^{i+1} - a^i| = |a^{j+1} - a^j|$, па је $|a| = 1$, односно $a = \cos\varphi + i\sin\varphi$ за неко $\varphi \in [0, 2\pi)$. Ако бројевима $a^1, 0, a^2$ одговарају тачке A, O, B, редом, онда је $\sphericalangle BOA = \varphi$, а како су A и B нека темена правилног n-тоугла чији је центар O, $\sphericalangle BOA$ је и целобројни умножак угла $\frac{2\pi}{n}$, па следи $a^n = 1$, тј. важи $a = \cos\frac{2k\pi}{2021} + i\sin\frac{2k\pi}{2021}$ за неко $k \in \mathbb{N}$. Остатак закључка се може пренети из првог решења.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Четврти разред – А категорија

1. Ако је $n = 1$ онда је низ са наведеним својствима $\emptyset, \{1\}$. Нека је конструисан низ који задовољава наведене особине за неко $n \in \mathbb{N}$. Чланови тог низа су и подскупови скупа $\{1, \ldots, n, n+1\}$ (тачно они који не садрже елемент $n+1$). Ако се непосредно након сваког члана X који се у низу конструисаном за n налази на месту са непарним индексом дода члан $X \cup \{n{+}1\}$, а непосредно пре сваког члана Y који се у низу конструисаном за n налази на месту са парним индексом дода члан $Y \cup \{n{+}1\}$, добија се низ састављен од свих чланова $\mathcal{P}(\{1, \ldots, n, n{+}1\})$. Делови овако конструисаног низа су облика $X, X \cup \{n{+}1\}, Y \cup \{n{+}1\}, Y$ и притом је $(X \cup \{n{+}1\}) \bigtriangleup X = \{n{+}1\}$, $(Y \cup \{n{+}1\}) \bigtriangleup Y = \{n{+}1\}$ и $(X \cup \{n{+}1\}) \bigtriangleup (Y \cup \{n{+}1\}) = X \bigtriangleup Y$ (а како су X и Y два узастопна члана низа који задовољава наведене услове за n, скуп $X \bigtriangleup Y$ садржи један елемент). Чланови непосредно пре члана X и непосредно након члана Y (ако постоје) су чланови низа конструисаног за n, као и X и Y.

Дакле, на описани начин се, на основу низа који задовољава наведене особине за n, добија одговарајући низ за $n+1$, па тврђење следи на основу математичке индукције.

2. Треба одредити $t \in \mathbb{R}$ за које систем $a+b+c = a^2+b^2+c^2 = a^3+b^3+c^3 = 3t$ има решења у $\mathbb{R}^3$. Како је $ab+bc+ca = \frac{1}{2} \cdot \big((a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)\big)$ и $abc = \frac{1}{3} \cdot \big(a^3+b^3+c^3 - (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\big)$, тај систем је еквивалентан систему $a+b+c = 3t$, $ab+bc+ca = \frac{9t^2-3t}{2}$, $abc = t - t\big(3t - \frac{9t^2-3t}{2}\big) = \frac{9t^3-9t^2+2t}{2}$. На основу Вијетових правила следи да су a, b, c све нуле полинома

$$f(x) = x^3 - 3tx^2 + \tfrac{9t^2-3t}{2} \cdot x - \tfrac{9t^3-9t^2+2t}{2} = (x-t)^3 + \tfrac{3t(t-1)}{2} \cdot (x-t) - 2t^3 + 3t^2 - t,$$

па треба одредити за које $t \in \mathbb{R}$ су нуле полинома $f(x)$ реалне, односно за које су нуле полинома $g(x) = x^3 + px + q$, где је $p = \frac{3t(t-1)}{2}$ и $q = -2t^3 + 3t^2 - t = -t(t-1)(2t-1)$, реалне (пошто је $f(x) = g(x-t)$).

Како је $g'(x) = 3x^2 + p$, следи да $g(x)$ има три реалне нуле ако и само ако је $p \leqslant 0$, $g(x_1) \geqslant 0$ и $g(x_2) \leqslant 0$, где је $x_1 = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$ и $x_2 = -x_1$ ($g(x)$ расте на $(-\infty, x_1)$ и на (x_2, ∞), а опада на (x_1, x_2)). Како је $x_1^2 = -\frac{p}{3}$, последње је еквивалентно са $0 \leqslant -\frac{p}{3} \cdot x_1 + px_1 + q = \frac{2px_1}{3} + q$ и $0 \geqslant \frac{2px_2}{3} + q = -\frac{2px_1}{3} + q$, тј. са $|q| \leqslant -\frac{2px_1}{3}$, односно са $q^2 \leqslant \frac{4p^2}{9} \cdot \big(-\frac{p}{3}\big) = -\frac{4}{27} \cdot p^3$. Дакле, нуле $g(x)$ су реалне ако и само ако је $0 \geqslant 4p^3 + 27q^2 = \frac{27t^3(t-1)^3}{2} + 27t^2(t-1)^2(2t-1)^2 = \frac{27}{2} \cdot t^2(t-1)^2(9t^2-9t+2) = \frac{27}{2} \cdot t^2(t-1)^2(3t-1)(3t-2)$, односно ако и само ако је $t \in \big[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\big] \cup \{0, 1\}$. Како је $a+b+c = 3t$, следи да су могуће вредности овог израза $[1,2] \cup \{0,3\}$.

Коментар. У решењу је изведен услов под којим су нуле полиномске једначине трећег степена реалне, тј. да се то дешава ако и само ако за њену (кубну) дискриминанту важи $-4p^3 - 27q^2 \geqslant 0$, а тај услов се може користити као познат (не захтева се његово извођење).

3. За свако $n \in \mathbb{N}$ су f_{n-2} и f_{n-1} непарни, $f_{n-1} + f_{n-2}$ је паран, па је највећи његов непаран делилац не већи од $\frac{f_{n-1}+f_{n-2}}{2}$. Следи $f_n \leqslant \frac{f_{n-1}+f_{n-2}}{2}$ за свако $n \geqslant 2$, па је $f_n \leqslant \max\{a,b\}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Дакле, чланови низа морају бити из скупа $\{1, 3, 5, \ldots, \max\{a,b\}\}$, па постоји број који се у уоченом низу јавља бесконачно много пута. Ако је k највећи такав број, онда постоји $m \in \mathbb{N}$ тако да је $f_i \leqslant k$ за свако $i \geqslant m$. Ако је $n \geqslant m+2$ такво да је $f_n = k$, онда су $f_{n-1} \leqslant k$ и $f_{n-2} \leqslant k$, па како је $k = f_n \leqslant \frac{f_{n-1}+f_{n-2}}{2} \leqslant \frac{k+k}{2} = k$, у овом низу једнакости мора важити једнакост, па је и $f_{n-1} = k$. Међутим, како је $f_{n-1} = f_n = k$, следи да је $f_i = k$ за свако $i \geqslant n-1$, што доказује прво наведено тврђење.

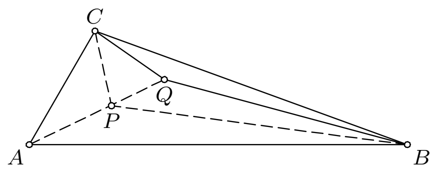
Сви чланови низа су дељиви са $d = NZD(a,b)$, па $d \mid k$. Ако је $k > d$, онда бар један од a и b није дељив са k, тј. нису сви чланови низа дељиви са k. Уколико је f_n члан са највећим индексом који није дељив са k (такав постоји, пошто су сви чланови почев од неког једнаки k), онда $k \mid f_{n+1} \mid f_n + f_{n+1}$, па како $k \nmid f_n$, следи да $k \nmid f_{n+1}$, што је у супротности са избором n. Следи да је $k = d = NZD(a,b)$.

4. Нека је $\frac{1}{2} \cdot \sphericalangle QBC = t < 10^\circ$. На основу Чевине теореме (у тригонометријском облику), примењене на $\triangle ABC$ и тачку P, следи $\sin 20^\circ \cdot \sin(10^\circ + t) \cdot \sin(50^\circ - 3t) = \sin 40^\circ \cdot \sin(50^\circ + 3t) \cdot \sin(10^\circ - t)$, односно

$$f(t) = \tfrac{\sin(10^\circ + t)}{\sin(50^\circ + 3t)} = 2\cos 20^\circ \cdot \tfrac{\sin(10^\circ - t)}{\sin(50^\circ - 3t)} = g(t).$$

Како је $f'(t) = \frac{\cos(10^\circ + t)\sin(50^\circ + 3t) - 3\sin(10^\circ + t)\cos(50^\circ + 3t)}{\sin^2(50^\circ + 3t)} = \frac{2\sin(40^\circ + 2t) - \sin(60^\circ + 4t)}{\sin^2(50^\circ + 3t)} = \frac{h(t)}{\sin^2(50^\circ + 3t)}$ и $g'(t) = -2\cos 20^\circ \cdot \frac{\cos(10^\circ - t)\sin(50^\circ - 3t) - 3\sin(10^\circ - t)\cos(50^\circ - 3t)}{\sin^2(50^\circ - 3t)} = -2\cos 20^\circ \cdot \frac{2\sin(40^\circ - 2t) - \sin(60^\circ - 4t)}{\sin^2(50^\circ - 3t)} = -2\cos 20^\circ \cdot \frac{h(-t)}{\sin^2(50^\circ - 3t)}$, где је $h(t) = 2\sin(40^\circ + 2t) - \sin(60^\circ + 4t)$, и како је $h'(t) = 4\cos(40^\circ + 2t) - 4\cos(60^\circ + 4t) = 8\sin(10^\circ + t)\sin(50^\circ + 3t)$, следи да $h(t)$ расте на $(-10^\circ, 10^\circ)$, па како је $h(-10^\circ) = 2\sin 20^\circ - \sin 20^\circ = \sin 20^\circ > 0$, следи $h(t) > 0$ за $t \in (-10^\circ, 10^\circ)$. Следи да је $f'(t) > 0$ за $t \in (0, 10^\circ)$ и $g'(t) < 0$ за $t \in (0, 10^\circ)$, тј. на $(0, 10^\circ)$ функција $f(t)$ расте, а $g(t)$ опада, па једначина $f(t) = g(t)$ може имати највише једно решење на $(0, 10^\circ)$.

Са друге стране, $t = 5^\circ$ је решење. Заиста, $f(5^\circ) = g(5^\circ)$ је еквивалентно са $\sin 15^\circ \sin 35^\circ = 2\cos 20^\circ \sin 5^\circ \sin 65^\circ$, односно са $\frac{1}{2} \cdot (\cos 20^\circ - \cos 50^\circ) = \cos 20^\circ \cdot (\cos 60^\circ - \cos 70^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \cos 20^\circ - \cos 20^\circ \cos 70^\circ$, тј. са $\cos 50^\circ = 2\cos 20^\circ \cos 70^\circ = 2\sin 20^\circ \cos 20^\circ = \sin 40^\circ$, што је тачно.



Држ–22–4А4

Нека је $z = \sphericalangle QAB$. На основу Чевине теореме (у тригонометријском облику), примењене на $\triangle ABC$ и тачку Q, пошто је $t = 5^\circ$, следи $\sin z \cdot \sin 10^\circ \cdot \sin 70^\circ = \sin(60^\circ - z) \cdot \sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ$, односно

$$f_1(z) = 2\sin 70^\circ \sin z = \sin(60^\circ - z) = g_1(z).$$

Притом је $z \in (0^\circ, 60^\circ)$ и на том интервалу $f_1(z)$ расте, а $g_1(z)$ опада, па једначина $f_1(z) = g_1(z)$ може имати највише једно решење. Како је $f_1(20^\circ) = 2\sin 70^\circ \sin 20^\circ = 2\cos 20^\circ \sin 20^\circ = \sin 40^\circ = g_1(20^\circ)$, следи да је једино решење те једначине $z = 20^\circ$.

Из добијеног следи $\sphericalangle PAB = \sphericalangle QAB = 20^\circ$, па су тачке A, P и Q колинеарне.

Коментар. Могуће је избећи коришћење извода приликом доказа да $f(t)$ расте, а $g(t)$ опада на $(0^\circ, 10^\circ)$. Ако је $0^\circ < x < y < 10^\circ$, онда је

$$\begin{aligned}
\operatorname{sgn}\big(f(y) - f(x)\big) &= \operatorname{sgn}\big(\sin(10^\circ + y)\sin(50^\circ + 3x) - \sin(10^\circ + x)\sin(50^\circ + 3y)\big) \\
&= \operatorname{sgn}\big(\cos(40^\circ + 3x - y) - \cos(60^\circ + 3x + y) \\
&- \cos(40^\circ - x + 3y) + \cos(60^\circ + x + 3y)\big) \\
&= -\operatorname{sgn}\big(\sin(x + y + 40^\circ)\sin(2x - 2y) + \sin(2x + 2y + 60^\circ)\sin(y - x)\big) \\
&= \operatorname{sgn}\big(2\cos(y - x)\sin(x + y + 40^\circ) - \sin(2x + 2y + 60^\circ)\big) \\
&= \operatorname{sgn}\big(\sin(2x + 40^\circ) + \sin(2y + 40^\circ) - \sin(2x + 2y + 60^\circ)\big),
\end{aligned}$$

па како је $\sin(2x + 40^\circ) + \sin(2y + 40^\circ) - \sin(2x + 2y + 60^\circ) > 2\sin 40^\circ - 1 > 2\sin 30^\circ - 1 = 0$ за $x, y \in (0^\circ, 10^\circ)$, $f(t)$ је растућа на $(0^\circ, 10^\circ)$. Аналогно се добија да за $0^\circ < x < y < 10^\circ$ важи

$$\operatorname{sgn}\big(g(x) - g(y)\big) = \operatorname{sgn}\big(\sin(40^\circ - 2x) + \sin(40^\circ - 2y) - \sin(60^\circ - 2x - 2y)\big),$$

па како је $\sin(40^\circ - 2x) + \sin(40^\circ - 2y) - \sin(60^\circ - 2x - 2y) = \sin(40^\circ - 2x) - 2\sin(10^\circ - x)\cos(50^\circ - x - 2y) > \sin(40^\circ - 2x) - 2\sin(10^\circ - x)\cos(30^\circ - x) = \sin(40^\circ - 2x) - \sin(40^\circ - 2x) - \sin(-20^\circ) = \sin 20^\circ > 0$, $g(t)$ је опадајућа на $(0^\circ, 10^\circ)$.