ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА 2020/2021.

Решења

1A.1. Последња четворица шахиста су у међусобним партијама освојили укупно 6 поена, па и другопласирани има бар 6 поена.

С друге стране, прва двојица имају укупно највише 13 поена, па другопласирани није могао имати 6,5, тј. имао је тачно 6. Толико имају и последња четворица у збиру.

Према томе, последња четворица нису освојила никакве поене против прве четворице. Између осталог, трећепласирани је победио седмопласираног.

1A.2. За произвољне скупове X и Y и природан број n означимо $S_1 = S_3 = \cdots = X$, $S_2 = S_4 = \cdots = Y$ и

$$D_n = S_n \setminus (S_{n-1} \setminus (\cdots \setminus S_1)) \quad \text{и} \quad E_n = S_n \triangle (S_{n-1} \triangle (\ldots \triangle S_1)).$$

Питање задатка је за које n важи $D_n = E_n$ ако је $X \not\subseteq Y$ и $Y \not\subseteq X$.

Имамо $D_1 = X$, $D_2 = Y \setminus X$ и $D_3 = X \setminus D_2 = X = D_1$, па је надаље низ $D_1, D_2, \ldots$ периодичан:

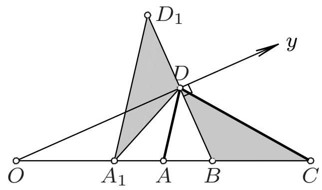
$$X,\ Y\setminus X,\ X,\ Y\setminus X,\ X,\ Y\setminus X,\ \ldots$$

С друге стране, $E_1 = X$, $E_2 = Y \triangle X$, $E_3 = X \triangle E_2 = Y$, $E_4 = Y \triangle E_3 = \emptyset$ и $E_5 = X$, па је и низ $E_1, E_2, \ldots$ периодичан:

$$X,\ Y \triangle X,\ Y,\ \emptyset,\ X,\ Y \triangle X,\ Y,\ \emptyset, \ldots$$

Чланови ових двају низова се поклапају само када је $n \equiv 1 \pmod 4$: тада је $D_n = E_n = X$.

1A.3. Нека су A_1 и D_1 редом тачке симетричне тачки B у односу на A и D. Пошто је A_1 средиште хипотенузе у правоуглом троуглу ODB, важи $DA_1 = A_1B = 2 = BC$. Такође је $DD_1 = BD$ и $\sphericalangle D_1DA_1 = 90^\circ + \sphericalangle ODA_1 = 90^\circ + \sphericalangle DOB = \sphericalangle DBC$. Следи да је $\triangle A_1DD_1 \cong \triangle CBD$ и одатле $CD = A_1D_1 = 2AD$, јер је AD средња линија у $\triangle DA_1D_1$.



Друго решење. Означимо са A' и C' подножја нормала из A и C на праву Oy. Како је на основу Талесове теореме $\frac{OC'}{OA'} = \frac{BC}{BA} = 2 = \frac{OC}{OA} = \frac{CC'}{AA'}$, следи да су троуглови $CC'D$ и $AA'D$ слични с коефицијентом 2, те је $CD = 2AD$.

1A.4. Ако је $n \geqslant 5$, онда је бар један од датих бројева дељив са 5, па постављањем њега на позицију b_n добијамо број дељив са 5.

Ако је $n = 3$, онда је број $\overline{b_1b_2b_3} \equiv b_1 + b_2 + b_3 \equiv 0 \pmod 3$ дељив са 3.

Најзад, за $n = 4$ узимањем $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (a, a{+}2, a{+}6, a{+}4)$ добијамо број дељив са 11: $\overline{b_1b_2b_3b_4} = 10^9a + 10^6(a{+}2) + 10^3(a{+}6) + (a{+}4) \equiv -a + (a{+}2) - (a{+}6) + (a{+}4) = 0 \pmod{11}$.

1A.5. **(а)** Нека су боје у првој врсти $1, 2, 3, 4$, тим редом. Приметимо да постоји бар један тражени пар поља у боји 1. Заиста, поље у трећој колони обојено бојом 1 има бар једног дијагоналног суседа исте боје. Слично, постоји тражени пар у боји 4, што укупно даје бар два пара. С друге стране, у бојама 2 и 3 постоје највише по два таква пара, па укупно нема више од 10 тражених парова. Слика даје примере са 2 и 10 парова.

(б) У једној боји могу постојати 4 тражена пара само ако се та боја пружа по дијагонали. Дакле, у бојама 2, 3 и 4 постоје највише по три пара, као и у бар једној од боја 1 и 5. Тако у овом случају има највише $4 \cdot 3 + 4 = 16$ парова. Слика даје примере са 0 и 16 парова.

$n = 4:$

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

2 пара

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

10 парова

$n = 5:$

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	1	2	3	4
2	3	4	5	1
4	5	1	2	3

0 парова

1	2	3	4	5
5	1	2	3	4
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1

16 парова

2A.1. Пошто функција f нема реалних нула, њена дискриминанта је негативна:

$$0 > D = b^2 - 4ac = (a+c+1)^2 - 4ac = (a-c)^2 + 2(a+c) + 1 = (a-c)^2 + 2b - 1 \geqslant 2b - 1,$$

одакле следи $b < \frac{1}{2}$.

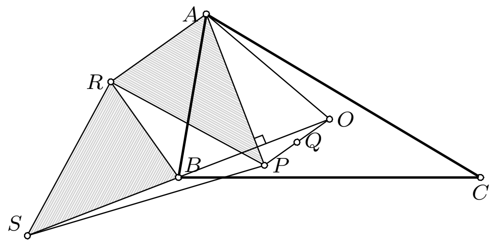
2A.2. Означимо $x = \frac{a}{b}$. Тада је $x + \frac{1}{x} = \frac{a^2+b^2}{ab} = 2c$, тј. $x^2 - 2cx + 1 = 0$ за неко $c \in (-1,1)$. Добијамо

$$x = c \pm i\sqrt{1-c^2} \quad \Rightarrow \quad |x| = \sqrt{c^2 + (1-c^2)} = 1 \quad \Rightarrow \quad |a| = |b|.$$

2A.3. Посматрајући бројеве на куглицама по модулу 3, сматраћемо да имамо 9 куглица с бројем 1 и по 8 с бројевима 0 и 2. Како је збир свих бројева $9 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 8 \cdot 0 \equiv 1 \pmod 3$, Алимпије побеђује ако последњи број у кутији буде 1.

Зато ће Алимпије почети игру куглицом с бројем 2. Како ниједан играч не жели да изгуби, следећи број различит од нуле мораће да буде опет 2, па 1, па редом $2, 1, 2, 1, \ldots, 2, 1$. Када се потроши 7 јединица и свих 8 двојки, у кутији ће остати две јединице и неколико нула. Играч који буде принуђен да постави јединицу губи, а то ће бити Вартоломеј.

2A.4. При ротацији око тачке R за 90° која слика тачку A у B, тачка P се слика у неку тачку S. При томе је $RP = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot SP$ и $BS = AP = BO$.



Даље, ако углове троугла ABC означимо уобичајено са α, β и γ, имамо $\sphericalangle ABO = 90^\circ - \gamma$, $\sphericalangle BAP = 90^\circ - \sphericalangle ABO = \gamma$ и $\sphericalangle RBS = \sphericalangle RAP = 45^\circ + \gamma$, док је $\sphericalangle RBO = 45^\circ + \sphericalangle ABO = 135^\circ - \gamma = 180^\circ - \sphericalangle RBS$. Следи да су тачке O, B и R колинеарне, тј. B је средиште дужи OS, па је $SP = 2BQ$ и, најзад, $RP = \sqrt{2} \cdot BQ$.

2A.5. Нека је $2a + b = 3^x$, $2b + c = 3^y$ и $2c + a = 3^z$. Ако је $x = y = z$, онда је $a = b = c = 3^{x-1}$.

Претпоставимо, без смањења општости, да је $z < y = \max\{x, y, z\}$. Ако је и $x < y$, онда је

$$9a = 4(2a+b) - 2(2b+c) + (2c+a) = 4 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^y + 3^z \leqslant \left(\tfrac{4}{3} - 2 + \tfrac{1}{3}\right)3^y < 0,$$

што није дозвољено. Зато мора бити $x = y$. Такође, из

$$0 < 9c = 4(2c+a) - 2(2a+b) + (2b+c) = 4 \cdot 2^z - 3^x$$

следи да је $z = x - 1$. Сада лако налазимо $(a, b, c) = (7 \cdot 3^{x-3}, 13 \cdot 3^{x-3}, 3^{x-3})$.

Све у свему, једина решења (x, y, z) су $(3^t, 3^t, 3^t)$ и $(7 \cdot 3^t, 13 \cdot 3^t, 3^t)$, где је $t \in \mathbb{N}_0$.

3A.1. Приметимо да је

$$5 \cdot 2^{2021} = 10 \cdot 2^{2020} = 10^{2020 \cdot \log_{10} 2 + 1} > 10^{609{,}02}.$$

Према томе, број $5 \cdot 2^{2021}$ има бар 610 цифара.

Ако се у овом броју ниједна цифра не појављује 62 пута, онда се свака од цифара $0, 1, 2, \ldots, 9$ појављује тачно 61 пута, али тада је збир цифара овог броја $61 \cdot 45$, што је дељиво са 9, па $9 \mid 5 \cdot 2^{2021}$, што није тачно. Ова контрадикција завршава доказ.

3A.2. На основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине важи

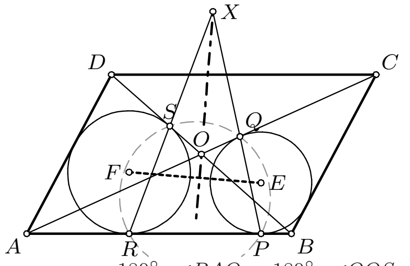
$$\frac{2^{x^2}}{(2^y)^2} + \frac{2^{y^2}}{(2^z)^2} + \frac{2^{z^2}}{(2^x)^2} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{2^{x^2}}{(2^y)^2} \cdot \frac{2^{y^2}}{(2^z)^2} \cdot \frac{2^{z^2}}{(2^x)^2}} = 3\sqrt[3]{2^{x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z}} \geqslant 3\sqrt[3]{2^{-3}} = \frac{3}{2},$$

јер је $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - 3 \geqslant -3$. Једнакост важи само ако је $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, па је то једина тројка која задовољава услов задатка.

3A.3. Довољно је доказати да, ако неки n-елементни подскуп $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\} \subset \mathbb{N}$ припада фамилији $\mathcal{F}$, онда и било који други n-елементни подскуп $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\} \subset \mathbb{N}$ припада фамилији $\mathcal{F}$.

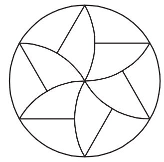
Показаћемо индукцијом по i да сваки од подскупова $C_i = \{d_1, \dots, d_i, c_{i+1}, \dots, c_n\}$ припада фамилији $\mathcal{F}$. Знамо да $C_0 = C \in \mathcal{F}$, а ако $C_i \in \mathcal{F}$ за $0 \leqslant i < n$, онда по услову задатка $C_i \cup \{d_{i+1}\} \notin \mathcal{F}$ и $C_{i+1} \in \mathcal{F}$, јер $C_i \subset C_i \cup \{d_{i+1}\} \supset C_{i+1}$. Индукција је готова, па $D = C_n \in \mathcal{F}$.

3A.4. Подсетимо се да, ако уписани круг троугла ABC додирује страницу AC у тачки E, а M је средиште дужи AC, онда је $ME = \frac{|AB-BC|}{2}$.



Према томе, $OQ = \frac{|AB-BC|}{2} = \frac{|AB-AD|}{2} = OS$, тј. тачка O има једнаку потенцију у односу на кругове ω_1 и ω_2. Довољно је доказати да је OX радикална оса ових двају кругова, тј. да и тачка X има једнаке потенције у односу на оба круга. Дакле, треба доказати да је $XP \cdot XQ = XR \cdot XS$, тј. да тачке P, Q, R, S леже на истом кругу. Пошто су троуглови APQ, BRS и OQS једнакокраки, имамо $\sphericalangle PQS = \sphericalangle PQA + \sphericalangle OQS = \frac{180^\circ - \sphericalangle PAQ}{2} + \frac{180^\circ - \sphericalangle QOS}{2} = 180^\circ - \frac{\sphericalangle BAO + \sphericalangle AOB}{2} = 90^\circ + \frac{\sphericalangle OBA}{2}$, док је $\sphericalangle SRP = 90^\circ - \frac{\sphericalangle ABO}{2}$. Дакле, $\sphericalangle PQS + \sphericalangle SRP = 180^\circ$, одакле следи тврђење.

3A.5. Одговор је *да*. На слици је круг подељен на 6 подударних делова луковима од по 60°, а затим је сваки део подељен на два подударна дела.



4A.1. Одговор је *не*. Наиме, кад год је $2x-1$ сложен број, број $n = x^2$ се не може приказати у жељеном облику. Заиста, ако важи $n = a^2 + b$ за неке природне бројеве a и b, онда је $b = (x+a)(x-a)$, што је за $a < x-1$ сложен број, а за $a = x-1$ је $b = 2x-1$, што је опет сложен број.

4A.2. Ако је q количник датог низа, онда је $S_n = (1 + q + \dots + q^{n-1})a_1$. Низ је растући ако је $a_2 - a_1 = (q-1)a_1 > 0$, а услов $S_{2021} = 20 S_{21}$ се своди на $P(q) = 0$, где је

$$P(x) = 1 + x + \dots + x^{2020} - 20(1 + x + \dots + x^{20}).$$

Како је $P(0) < 0 < P(1)$, полином $P(x)$ има нулу $q \in (0,1)$. Још само треба узети $a_1 < 0$ да би низ (a_n) био растући. Дакле, одговор је *да*.

4A.3. Нека је дата матрица $A = [A_{ij}]_{i,j=1}^4$, где су $a_{ij} = \pm 1$. Множењем врста и колона са ± 1 не мења се вредност $|\det A|$, па се може сматрати без смањења општости да су сви елементи прве врсте и прве колоне једнаки -1. Одузимањем прве од осталих врста $\det A$ се не мења:

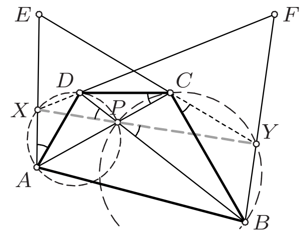
$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ -1 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ -1 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2b_{22} & 2b_{23} & 2b_{24} \\ 0 & 2b_{32} & 2b_{33} & 2b_{34} \\ 0 & 2b_{42} & 2b_{43} & 2b_{44} \end{vmatrix} = -8 \det B \quad \text{за} \quad B = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix},$$

при чему су сви елементи $b_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + 1)$ бројеви из скупа $\{0, 1\}$. Даље, како је међу елементима b_i бар једна нула (у супротном је $\det B = 0$), рецимо $b_{42} = 0$, следи да је

$$-2 \leqslant \det B = b_{22}(b_{33}b_{44} - b_{34}b_{43}) + b_{32}(b_{24}b_{43} - b_{23}b_{44}) \leqslant 2 \quad \text{и одатле} \quad \det A \leqslant 16.$$

Вредност 16 се достиже нпр. за $a_{24} = a_{33} = a_{42} = -1$ и $a_{22} = a_{23} = a_{32} = a_{34} = a_{42} = a_{43} = 1$.

4A.4. Ако је P пресек дијагонала AC и BD, онда је $\sphericalangle PAX = 60^\circ$ и $\sphericalangle XDP = 180^\circ - \sphericalangle BDF = 120^\circ$, па је четвороугао $APDX$ тетиван. Аналогно је и $BPCY$ тетиван четвороугао. Следи да је $\sphericalangle BPY = \sphericalangle BCY = 120^\circ - \sphericalangle ACB = \sphericalangle DCA = 60^\circ - \sphericalangle CAD = \sphericalangle DAX = \sphericalangle DPX$, па тачка P лежи на правој XY.



4A.5. За $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ кажемо да кугле на позицијама $i, i+k, i+2k, \dots$ чине *i-ту класу*. Једним мерењем можемо да упоредимо две узастопне кугле из исте класе (тј. m и $m+k$).

(i) Ако у некој класи све кугле теже исто, онда су све сребрне или све оловне. (Ако је притом у тој класи више од d кугли, онда је цела класа од олова.)

(ii) У супротном лако раздвајамо теже (оловне) од лакших (сребрних) кугли.

Ако је $(d+1)k \leqslant n$, свака класа има више од d кугли, па овако проналазимо све сребрне.

Ако је $(d+1)k = n+1$, онда једна класа има d кугли (зовемо је *малом*), а остале (*велике*) по $d+1$. У великим класама лако налазимо све сребрне кугле. Ако не пронађемо ниједну, онда је бар једна у малој класи сребрна, па их све можемо одредити као што је описано. У супротном мала класа садржи бар једну куглу од олова, па можемо пронаћи и остале.

Најзад, ако је $(d+1)k > n+1$, онда и $(k-1)$-та и k-та класа имају највише по d кугли. Ако је једна од те две класе цела од сребра, а све остале целе од олова, теразије ће у сваком мерењу показати равнотежу, па нема начина да откријемо која класа је сребрна.

Дакле, одговор је највеће d за које је $(d+1)k \leqslant n+1$, тј. $d_{\max} = \lfloor \frac{n+1}{k} \rfloor - 1$.

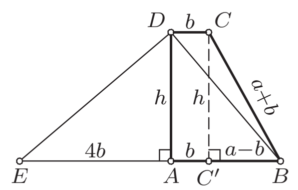
1Б.1. За $n < 3$ нема решења. С друге стране, ако је $n \geqslant 3$, број $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ је дељив са 3, док 100^{100} то није, па ни тада нема решења. Дакле, одговор је *не*.

1Б.2. Означимо са C' подножје нормале из тачке C на праву AB. Нека је $AB = a$, $AC' = CD = b$ и $CC' = AD = h$.

Питагорина теорема у троугловима $CC'B$, BAD и EAD нам даје

$$h^2 = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab,$$

$$BD^2 = a^2 + h^2 = a^2 + 4ab, \quad DE^2 = (4b)^2 + h^2 = 16b^2 + 4ab.$$



Најзад, како је $BD^2 + DE^2 = a^2 + 8ab + 16b^2 = (a+4b)^2 = BE^2$, из (обратне) Питагорине теореме у троуглу BDE следи да је $\sphericalangle BDE = 90^\circ$.

1Б.3. Нека су зелене куглице већ поређане. Плаве куглице постављамо између њих - сваку на једну од 8 могућих позиција. Пошто нема суседних плавих куглица, на шест позиција ћемо ставити по једну плаву куглицу, а две позиције ће остати празне. Те две позиције могу се одабрати на $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ начина. Дакле, одговор је 28.

1Б.4. Важи $A \setminus (B \setminus A) = A \cap (\overline{B \cap \overline{A}}) = A \cap (\overline{B} \cup A) = A$ и $A \setminus (B \setminus (A \setminus (B \setminus A))) = A \setminus (B \setminus A) = A$.

С друге стране,

$$A \triangle (B \triangle A) = (A \setminus (B \triangle A)) \cup ((B \triangle A) \setminus A) = (A \cap B) \cup (B \setminus A) = B$$

и, даље, $B \triangle (A \triangle (B \triangle A)) = B \triangle B = \emptyset$ и $A \triangle (B \triangle (A \triangle (B \triangle A))) = A \triangle \emptyset = A$.

1Б.5. Нека је то број $x = 100a + 10b + c$.

Број $x + b = 100a + 11b + c = a + c + 11(9a + b)$ је дељив са 11, па је $a + c = 11$.

Даље, број $x + c = 100a + 10b + 2c = 98a + 10b + 22 = 10b + 1 + 7(14a + 3)$ је дељив са 7, тј. $7 \mid 10b + 1$, па је $b = 2$ или $b = 9$.

Најзад, број $x+a=100a+10b+11=10(10a+b+5)-39$ је дељив са 13, па $13 \mid 10a+b+5$. Ако је $b=2$, онда $13 \mid 10a+7=10(a+2)-13$, па $13 \mid a+2$, што је немогуће. Следи да је $b=9$ и $13 \mid 10a+14=10(a-9)+8\cdot 13$, што као једину могућност даје $a=9$.

Према томе, $x=992$.

2Б.1. Дата једначина се развијањем своди на $4(x^4+2x^3+6x^2+2x+1)=0$, тј.

$$4\big((x^2+x+1)^2+3x^2\big)=0.$$

Одавде следи да је $x^2+x+1=0$ и $x=0$, што је немогуће. Дакле, нема реалних решења.

2Б.2. Одговор је -5. Дати израз се може записати као

$$\begin{aligned}T&=(x+y)^2+4y^2+10z^2+12yz+4z-1\\&=(x+y)^2+(2y+3z)^2+z^2+4z-1=(x+y)^2+(2y+3z)^2+(z+2)^2-5\geqslant -5.\end{aligned}$$

Једнакост се достиже ако је $x+y=2y+3z=z+2=0$, што важи за $(x,y,z)=(-3,3,-2)$.

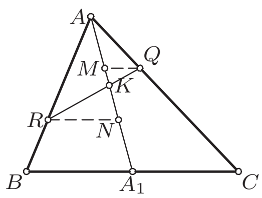
2Б.3. Два члана одбора су исте националности, која се може одабрати на 3 начина - рецимо да су то Немци. Имамо следеће случајеве.

(i) Двоје Немаца истог пола могу се одабрати на 2 начина - рецимо, две Немице. Још по један од Руса и Турака може се одабрати на 16 начина, али то не смеју бити Рускиња и Туркиња (4 начина отпадају). Укупно $2\cdot(16-4)=24$ могућности.

(ii) Један Немац и једна Немица могу се одабрати на 4 начина. Руси и Турци могу се одабрати било како - 16 начина. Укупно $4\cdot 16=64$ могућности.

Укупно има $3\cdot(24+64)=264$ начина.

2Б.4. Нека су M и N тачке на дужи AA_1 такве да је $QM \parallel RN \parallel BC$, а K тачка у којој AA_1 сече QR. На основу Талесове теореме је



$$\frac{RN}{BA_1}=\frac{AR}{AB}=\frac{2}{3},\quad \frac{QM}{CA_1}=\frac{AQ}{AC}=\frac{1}{3},\quad \frac{RK}{KQ}=\frac{RN}{QM}=\frac{\frac{2}{3}\cancel{BA_1}}{\frac{1}{3}\cancel{CA_1}}=2.$$

2Б.5. Очигледна решења су $n=1$ и $n=2$.

Претпоставимо да је $n\geqslant 3$. Број $n!^2$ је дељив са $n-1$. С друге стране, број n, а самим тим и n^n, је узајамно прост са $n-1$, па није дељив са $n-1$. Следи да је $n^n\neq n!^2$.

Према томе, $n=1$ и $n=2$ су једина решења.

<u>*Друго решење.*</u> Множењем неједнакости

$$1\cdot n\geqslant n,\quad 2(n-1)\geqslant n,\quad 3(n-2)\geqslant n,\quad \ldots\quad n\cdot 1\geqslant n$$

добија се $n!^2\geqslant n^n$. Једнакост важи само ако у свим наведеним неједнакостима важи знак једнакости, а то је само за $n\leqslant 2$.

3Б.1. Пошто је $250=2\cdot 5^3$, три цифре морају бити једнаке 5, а преостала цифра је 2. Да би број био паран, цифра 2 мора бити последња, па је једино решење број 5552.

3Б.2. Ако је $\log_{1+\sin x}(2+\cos x)=y$, онда је $\log_{2+\cos x}(1+\sin x)=\frac{1}{y}$, па из дате једначине следи $y+\frac{1}{y}=2$. Одавде је $y^2-2y+1=0$, тј. $y=1$, што значи да је $2+\cos x=1+\sin x$, тј.

$$\sin x-\cos x=1.$$

Сада је $\sin(x-\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, одакле налазимо $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ или $x=\pi+2k\pi$. Како за $x=\pi+2k\pi$ логаритми нису дефинисани, решење је само $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ($k\in\mathbb{N}$).

3Б.3. Разлика леве и десне стране је

$x^7-4x^2+x+2=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2-3x-2)=(x-1)^2(x^5+2x^4+3x^3+4x^2+5x+2)$,

што је очигледно позитивно.

Друго решење. Неједнакост између аритметичке и геометријске средине даје

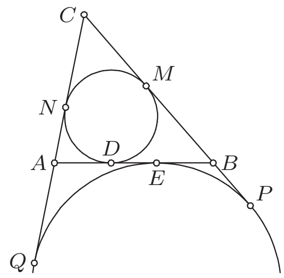
$$x^7+x+2=x^7+x+1+1 \geqslant 4\sqrt[4]{x^7\cdot x\cdot 1\cdot 1}=4x^2.$$

3Б.4. **(а)** Нека жаба скаче с поља A на поље C, затим на поље D, и одатле на поље B. Поље C се може одабрати на 23 начина, а поље D на 22 начина, па је одговор $23\cdot 22=506$.

(б) Ако жаба у првом скоку скочи на поље i-те врсте одозго и j-те колоне здесна, број могућности за други скок је $ij-2$. Ови бројеви су приказани на слици, а њихов збир је 153, што је и одговор.

3	2	1	0	B
8	6	4	2	0
13	10	7	4	1
18	14	10	6	2
A	18	13	8	3

3Б.5. Подсетимо се да две тангенте на дати круг из дате тачке ван круга имају исту дужину. Нека су M и N тачке додира круга k_1 са CB и CA, а P и Q тачке додира круга k_2 са CB и CA, редом.



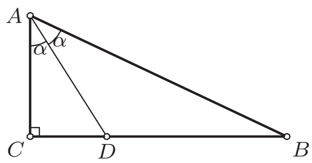
Означимо $AD=AN=x$, $BD=BM=y$ и $CM=CN=z$. Тада је $x+y=AB=21$, $x+z=AC=20$ и $y+z=BC=26$, одакле налазимо $x=7{,}5$.

Означимо $AE=AQ=p$, $BE=BP=q$ и $CP=CQ=r$. Тада је $p+q=AB=21$, $r-p=AC=20$ и $r-q=BC=26$, одакле налазимо $p=13{,}5$.

Најзад, $DE=AE-AD=p-x=6$.

4Б.1. Како је $20n^2-21n+1=(20n-1)(n-1)$, овај број је сложен за сваки природан број $n\geqslant 3$. За $n=2$ је $20n^2-21n+1=39$, што је такође сложен број. Овим је тврђење доказано за свако $n>1$.

4Б.2. Означимо $2\alpha=\sphericalangle CAB$. Тада је $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{a}{b}$ и $\operatorname{tg}\alpha=\frac{CD}{b}$. Како је



$$\frac{a}{b}=\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \quad\Rightarrow\quad a\operatorname{tg}^2\alpha+2b\operatorname{tg}\alpha-a=0,$$

налазимо $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{a^2+b^2}-b}{a}$. Одавде је $CD=\frac{b}{a}(\sqrt{a^2+b^2}-b)$.

Друго решење. Познато је да симетрала угла у троуглу дели наспрамну страницу у односу налеглих страница. Овде је $\frac{CD}{DB}=\frac{CA}{AB}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, па једноставно налазимо $CD=\frac{ab}{b+\sqrt{a^2+b^2}}$.

4Б.3. Ако означимо $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}}+\sqrt{1-\sqrt{x}}-2$, Лопиталово правило и рационализација нам дају

$$L=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{f'(x)}{\cancel{1}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}-\sqrt{1+\sqrt{x}}}{4\sqrt{x(1-x)}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\left(\frac{2\cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}+\sqrt{1+\sqrt{x}}}\right)}{4\sqrt{\cancel{x}(1-x)}}=-\frac{1}{4}.$$

Друго решење. Приметимо да, ако је $g(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}}+\sqrt{1-\sqrt{x}}$, онда је $g(x)^2=2+2\sqrt{1-x}$. Другим речима, $g(x)=\sqrt{2+2\sqrt{1-x}}$ за $x\geqslant 0$. Притом је $g(0)=2$, па је тражени лимес

$$L = \lim_{x\to 0+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = g'(0), \quad \text{где је} \quad g'(x) = \frac{(2+2\sqrt{1-x})'}{2\sqrt{2+2\sqrt{1-x}}} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{2+2\sqrt{1-x}}}.$$

Следи да је $L = g'(0) = -\frac{1}{4}$.

Напомена. Функције $\sqrt{1 \pm \sqrt{x}}$ нису диференцијабилне здесна у тачки $x = 0$, па се $g'(0)$ не може рачунати заменом $x = 0$ у једнакости $g'(x) = \left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)' + \left(\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)'$.

4Б.4. Прву врсту можемо обојити на $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ начина. Означимо боје у њој са 1, 2 и 3, редом: рећи ћемо да је прва врста „1 2 3". Четврта боја „4" се може појавити ниједном, једном или двапут у остатку таблице.

- (0°) Нема боје 4. Тада за другу и трећу врсту постоје два бојења: $\begin{smallmatrix}2&3&1\\3&1&2\end{smallmatrix}$ и $\begin{smallmatrix}3&1&2\\2&3&1\end{smallmatrix}$.
- (1°) Само једно поље има боју 4. То поље се може одабрати на 6 равноправних начина - рецимо да је то прво поље друге врсте. Онда за другу и трећу врсту постоје две могућности: $\begin{smallmatrix}4&1&2\\2&3&1\end{smallmatrix}$ или $\begin{smallmatrix}4&3&1\\3&1&2\end{smallmatrix}$. То укупно даје $6 \cdot 2 = 12$ бојења.
- (2°) Два поља имају боју 4. Та два поља се могу одабрати на 6 равноправних начина - рецимо да су то прво поље друге и друго поље треће врсте. Онда за другу и трећу врсту има пет могућности: $\begin{smallmatrix}4&1&2\\2&4&1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}4&1&2\\3&4&1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}4&3&1\\3&4&2\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}4&3&2\\2&4&1\end{smallmatrix}$ и $\begin{smallmatrix}4&3&2\\3&4&1\end{smallmatrix}$. То је укупно $6 \cdot 5 = 30$ бојења.

Укупан број могућих бојења је $24 \cdot (2 + 12 + 30) = 1056$.

4Б.5. Пошто је $f(x)+1 = 0$ за $x = 1$ и $x = 5$, полином $f(x)+1$ је дељив са $(x-1)(x-5)$. То значи да је

$$f(x) = (x-1)(x-5)g(x) - 1,$$

при чему полином g такође има целе коефицијенте - ово следи нпр. из стандардног алгоритма за дељење полинома. Међутим, заменом $x = 3$ добија се $2021 = f(3) = -4g(3) - 1$, тј. $g(3) = -\frac{1011}{2}$, што је немогуће. Према томе, одговор је *не*.