Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

6. фебруар 2021.

Први разред – А категорија

1. На шаховском турниру је учествовало 8 такмичара и свако је играо са сваким од преосталих учесника. За сваку победу добија се 1 поен, за пораз 0 поена, а за реми 0,5 поена. На крају турнира свака два учесника су имала различите бројеве поена, а другопласирани такмичар је имао поена колико и четворица последњепласираних заједно. Који је био исход партије трећепласираног и седмопласираног шахисте?

2. Дати су непразни скупови A и B од којих ниједан није подскуп другог. За природан број n посматрајмо једнакост

$$\underbrace{A \setminus (B \setminus (A \setminus (B \setminus \cdots)))}_{n \text{ скупова}} = \underbrace{A \triangle (B \triangle (A \triangle (B \triangle \cdots)))}_{n \text{ скупова}}\ ?$$

(а) Испитати да ли је ова једнакост тачна за $n = 5$.

(б) За које природне бројеве n је она тачна?

(Са $X \triangle Y$ означена је *симетрична разлика* скупова X и Y, тј. $X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$.)

3. Дати су угао xOy и тачке A, B и C на краку Ox тако да је $OA = 3$, $OB = 4$ и $OC = 6$. Подножје нормале из тачке B на полуправу Oy је тачка D. Доказати да је $CD = 2AD$.

4. Дато је $n \geqslant 3$ узастопних непарних троцифрених бројева. Доказати да се ових n бројева могу поређати у низ $b_1, b_2, \ldots, b_n$ тако да број

$$\overline{b_1 b_2 \ldots b_n},$$

добијен записивањем ових бројева једног за другим у декадном запису, буде сложен.

5. Поља квадратне табле $n \times n$ треба обојити са n различитих боја тако да свака врста и свака колона садрже свих n боја. Наћи најмањи и највећи могући број парова истобојних поља која имају заједничко теме

(а) ако је $n = 4$;

(б) ако је $n = 5$.

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

6. фебруар 2021.

Други разред – А категорија

1. Квадратна функција $f(x) = ax^2 + bx + c$ са реалним коефицијентима задовољава услов $a + c + 1 = b$. Ако она нема реалних нула, доказати да је $b < \frac{1}{2}$.

2. Комплексни бројеви a и b су такви да је количник

$$\frac{a^2 + b^2}{ab}$$

реалан број из интервала $(-2, 2)$. Доказати да је $|a| = |b|$.

3. У кутији се налази 25 куглица, означених бројевима $1, 2, \ldots, 25$. Алимпије и Вартоломеј наизменично стављају по једну куглицу из кутије на сто, при чему Алимпије игра први. Играч после чијег потеза је збир бројева извучених куглица дељив са 3, или који узме последњу куглицу из кутије, губи. Доказати да, ма како Вартоломеј играо, Алимпије може да победи.

4. У оштроуглом троуглу ABC тачка O је центар описаног круга, а P тачка са супротне стране праве BO у односу на тачку A таква да је $AO = AP$ и $AP \perp BO$. Тачка Q је средиште дужи OP, а R тачка са супротне стране праве AB у односу на C таква да је ARB једнакокрако-правоугли троугао са правим углом у тачки R. Доказати да је $PR = \sqrt{2} \cdot BQ$.

5. Наћи све тројке природних бројева (a, b, c) такве да су сва три броја $2a + b$, $2b + c$ и $2c + a$ степени броја 3.
(*Степен* броја 3 је било који број облика 3^n, где је $n \geqslant 0$ цео број.)

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

6. фебруар 2021.

Трећи разред – А категорија

1. Доказати да постоји цифра која се у декадном запису броја $5\cdot 2^{2021}$ појављује бар 62 пута.
Напомена. $0{,}301 \leqslant \log_{10} 2 \leqslant 0{,}302$.

2. Наћи све тројке (x, y, z) реалних бројева који задовољавају једнакост

$$\frac{2^{x^2}}{(2^y)^2} + \frac{2^{y^2}}{(2^z)^2} + \frac{2^{z^2}}{(2^x)^2} = \frac{3}{2}.$$

3. Дат је природан број n. Фамилија $\mathcal{F}$ подскупова скупа $\mathbb{N}$ има следећа својства:

(i) за свако $X \in \mathcal{F}$ важи $|X| = n$ или $|X| = n+1$;

(ii) кад год су $A, B \subset \mathbb{N}$ подскупови такви да је $|A| = n$, $|B| = n+1$ и $A \subset B$, тачно један од њих припада фамилији $\mathcal{F}$.

Доказати да се, за неко $m \in \{n, n+1\}$, $\mathcal{F}$ поклапа са фамилијом свих m-точланих подскупова скупа $\mathbb{N}$.

4. Тачка O је центар паралелограма $ABCD$. Уписани круг ω_1 троугла ABC додирује странице AB и AC редом у тачкама P и Q, а уписани круг ω_2 троугла ABD додирује странице AB и BD редом у тачкама R и S. Праве PQ и RS се секу у тачки X. Доказати да је права OX нормална на праву која спаја центре кругова ω_1 и ω_2.

5. Може ли се круг поделити на међусобно подударне делове тако да бар један део не садржи центар круга (у унутрашњости или на граници)?

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

6. фебруар 2021.

Четврти разред – А категорија

1. Да ли постоји природан број N такав да се сваки природан број $n \geqslant N$ може представити у облику збира простог броја и квадрата сложеног броја?

2. Постоји ли строго растући геометријски низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ за који важи

$$S_{2021} = 20 \cdot S_{21},$$

где за свако $n \in \mathbb{N}$ означавамо $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$?

3. Одредити највећу могућу вредност детерминанте матрице 4×4 чији је сваки елемент једнак 1 или -1.

4. У конвексном четвороуглу $ABCD$ важи $\sphericalangle C = \sphericalangle D = 120^\circ$. Конструисани су једнакостранични троуглови ACE и BDF, при чему су тачке E и D са исте стране праве AC, а F и C са исте стране праве BD. Праве AE и DF секу се у тачки X, а праве CE и BF у тачки Y. Доказати да праве AC, BD и XY имају заједничку тачку.

5. Дати су природни бројеви n и $k < \frac{n}{2}$. У низ је поређано n кугли обележених бројевима од 1 до n, од којих су неке (бар једна) од сребра, а друге од олова. Све сребрне кугле су идентичне, све оловне такође, али оловна кугла је мало тежа од сребрне. Познато нам је да има највише d сребрних кугли, али без помагала не можемо да их препознамо. Од помагала имамо теразије са два таса које могу само да одреде да ли је маса на левом тасу већа, мања или једнака оној на десном. Дозвољено нам је да одаберемо низове A и B од по k узастопних кугли и на тасове поставимо скупове $A \setminus B$ и $B \setminus A$. За које највеће $d \in \mathbb{N}$ увек можемо да у коначном броју мерења идентификујемо све сребрне кугле?

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

6. фебруар 2021.

Први разред – Б категорија

1. Постоји ли природан број n такав да је $n! = 100^{100}$?

2. Дат је правоугли трапез $ABCD$, при чему су $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90^\circ$ и $AB \parallel CD$, такав да је $BC = AB + CD$. Нека је E тачка на правој AB таква да је A између E и B и $EA = 4CD$. Доказати да је $\sphericalangle EDB = 90^\circ$.

3. На колико начина се може распоредити 6 плавих и 7 зелених куглица у низ тако да никоје две плаве куглице нису суседне? (Куглице исте боје се не разликују.)

4. Ако су A и B произвољни скупови, доказати да је

$$A \setminus (B \setminus (A \setminus (B \setminus A))) = A \triangle (B \triangle (A \triangle (B \triangle A))).$$

(Са $X \triangle Y$ означена је *симетрична разлика* скупова X и Y, тј. $X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$.)

5. Наћи све троцифрене бројеве x (који не почињу нулом) са следећим особинама:

(i) ако се броју x дода његова цифра јединица, добија се број дељив са 7;
(ii) ако се броју x дода његова цифра десетица, добија се број дељив са 11;
(iii) ако се броју x дода његова цифра стотина, добија се број дељив са 13.

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

6. фебруар 2021.

Други разред – Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$(x+2)^4 = 3(8x+4-x^4).$$

2. Одредити најмању могућу вредност израза

$$T = x^2 + 5y^2 + 10z^2 + 2xy + 12yz + 4z - 1,$$

где су x, y и z реални бројеви.

3. Кандидати за чланство у управном одбору неке фирме су по четворо Немаца, Руса и Турака, и то из сваког народа по два мушкарца и две жене. Управни одбор је по правилу четворочлан и мора да укључује представника из сваког народа, као и оба пола. На колико начина се може изабрати управни одбор?

4. Тачке Q и R редом на страницама AC и AB троугла ABC су такве да је

$$CQ : QA = AR : RB = 2 : 1.$$

Доказати да тежишна дуж AA_1 троугла ABC дели дуж RQ у односу $2 : 1$.

5. Решити једначину $(n!)^2 = n^n$ у скупу природних бројева.

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

6. фебруар 2021.

Трећи разред – Б категорија

1. Наћи све парне четвороцифрене бројеве чији је производ цифара једнак 250.

2. Решити у скупу реалних бројева једначину

$$\log_{1+\sin x}(2+\cos x) + \log_{2+\cos x}(1+\sin x) = 2.$$

3. Доказати да за сваки позитиван број x важи неједнакост

$$x^7 + x + 2 \geqslant 4x^2.$$

4. У доњем левом угаоном пољу A квадратне таблице 5×5 налази се жаба. Она треба у тачно три скока да стигне до горњег десног угаоног поља B. Жаба при томе не може да скаче у месту, нити може директно да скочи са поља A на поље B.

(а) На колико начина жаба може испунити циљ?

(б) На колико начина жаба може испунити циљ, уз додатно ограничење да ни у једном скоку жаба не сме да скочи лево од своје тренутне колоне, нити испод своје тренутне врсте?

5. Дат је троугао ABC са страницама $BC = 26$, $CA = 20$ и $AB = 21$. Уписани круг k_1 троугла ABC додирује страницу AB у тачки D. Круг k_2, различит од k_1, додирује полуправе CA и CB и додирује дуж AB у тачки E. Израчунати дужину дужи DE.

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

6. фебруар 2021.

Четврти разред – Б категорија

1. Ако је n природан број већи од 1, доказати да је број $20n^2 - 21n + 1$ сложен.

2. У троуглу ABC је $\sphericalangle C = 90°$, $BC = a$ и $AC = b$. Ако симетрала угла код темена A сече страницу BC у тачки D, израчунати дужину дужи CD (у функцији од a и b).

3. Одредити граничну вредност

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}} + \sqrt{1-\sqrt{x}} - 2}{x}.$$

4. Потребно је обојити поља квадратне таблице 3×3 у четири боје - црвену, плаву, зелену и жуту, али тако да у свакој врсти или колони сва три поља имају различите боје. На колико начина се ово може учинити?

5. Постоји ли полином $f(x)$ са целим коефицијентима такав да је

$$f(1) = f(5) = -1, \quad f(2) = f(4) = 2 \quad \text{и} \quad f(3) = 2021?$$

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.