ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА 2020/2021.

Решења

1А.1. Пошто је $Q(1) = 0$, полином $Q(x)$ је дељив са $x-1$, па дељењем следи $Q(x) = (x-1)(x-a)$. Ако је полином $P(x)$ дељив са $Q(x)$, он је дељив и са $x-1$ и $x-a$, па је $P(1) = P(a) = 0$. Како је $P(1) = a^3 - a = a(a-1)(a+1)$, следи да је $a \in \{-1, 0, 1\}$. Тада је

$$P(x) = x(x^{2020} - 2x + 1) = x(x-1)R(x), \quad \text{где је} \quad R(x) = \frac{x^{2020}-1}{x-1} - 2 = x^{2019} + x^{2018} + \cdots + x - 1.$$

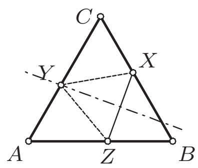
Очигледно решење је $a = 0$. То је и једино решење. Заиста, $R(-1)$ и $R(1)$ су различити од нуле, па $a \in \{-1, 1\}$ нису решења.

1А.2. Одговор је 13.

Важи $n \equiv 11\ldots1 = a + b \equiv 28 + 21 \equiv 4 \pmod 9$. Притом из услова задатка следи да је $a \geqslant 1999$, па је $a + b > 1111$, тј. n не може бити 4. Према томе, $n \geqslant 13$.

С друге стране, за $n = 13$ лако налазимо пример: $a = 1\,111\,111\,105\,555$ и $b = 5\,556$.

1А.3. Нека је Y' тачка на страници CA такву да је $CY' : Y'A = 2021 : 2020$. Тада је $CX = AY'$, $CY' = AZ$ и $\sphericalangle XCY' = \sphericalangle Y'AZ = 60°$, што значи да су троуглови XCY' и $Y'AZ$ подударни, па је $XY' = Y'Z$. Следи да је $Y' \equiv Y$, па је $CY : YA = 2021 : 2020$.



1А.4. Одговор је 8. Лева слика даје пример бојења са 8 боја.

Покажимо да 7 боја није довољно. Претпоставимо супротно. Колоне ћемо означавати са a, b, c, d, а врсте са $1, 2, 3, 4$. Из услова задатка следи да су поља $b4, c4, b3, c3, b2, c2$ различито обојена - рецимо, редом бојама $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Тада поља $a3$ и $d3$ имају седму боју - „7". Даље, поља $a2$ и $d2$ морају се обојити редом бојама 2 и 1. Међутим, сада поље $b1$ не може имати ниједну од седам понуђених боја, што је контрадикција.

1	2	3	4
5	6	7	8
3	4	1	2
7	8	5	6

4		1	2	
3	7	3	4	7
2	2	5	6	1
1		*		
	a	b	c	d

1А.5. Дати број је паран. Нека је $n \cdot 2^n + 4 = (2x)^2$. Тада је

$$n \cdot 2^{n-2} = x^2 - 1 = (x+1)(x-1).$$

Бар један од чинилаца $x \pm 1$ није дељив са 4, те не може бити већи од $2n$, тј. $x \leqslant 2n + 1$. Други чинилац је пак дељив са 2^{n-3}, па је $x \geqslant 2^{n-3} - 1$. Следи да је $2^{n-3} \leqslant 2n + 2$, тј. $2^{n-4} \leqslant n + 1$. Међутим, за $n \geqslant 8$ је $2^{n-4} = 2^4 + (2^4 + 2^5 + \cdots + 2^{n-5}) \geqslant 2^4 + (1 + 1 + \cdots + 1) = 16 + (n-8) > n + 1$, па тада нема решења.

Остају само случајеви $n \leqslant 7$. Директном провером налазимо да је само $n = 7$ решење.

2А.1. Означимо $y = 1 + u$, $x = 1 + u + v$, где су $u, v \geqslant 0$. Дата једначина постаје

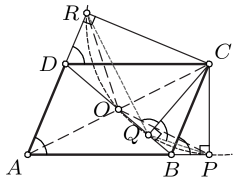
$$0 = (1+u+v)(1+u+2v) - 4u - 5v = u^2 + 2v^2 + 3uv - 2u - 2v + 1 = (u+v-1)^2 + uv + v^2$$

што је могуће само када је $u = 1$ и $v = 0$, тј. $(x, y) = (2, 2)$.

Напомена. Задатак се може решити и без увођења смене: $2x^2 - xy - 5x + y + 4 = (x-2)^2 + (x-1)(x-y)$.

2А.2. Из тетивности четвороуглова $CPBQ$ и $CQDR$ следи $\sphericalangle CQP = \sphericalangle CBP = \sphericalangle DAB$, а слично је и $\sphericalangle CQR = \sphericalangle CDR = \sphericalangle DAB$. Следи да је $\sphericalangle PQR = 2\sphericalangle DAB$.

С друге стране, тачка O је средиште хипотенузе у правоуглом троуглу APC, па је $OA = OC = OP$. Слично је и $OA = OC = OR$, тј. O је центар описане кружнице троугла APR. Одатле је $\sphericalangle POR = 2\sphericalangle PAR = 2\sphericalangle DAB = \sphericalangle PQR$, тј. $PQOR$ је тетиван четвороугао.



2A.3. За $4 \leqslant k \leqslant 10$, означимо са a_k број скупова A_i за које је $|A_i| = k$.

Укупно има $\binom{11}{3} = 165$ троелементних подскупова скупа X, од којих је сваки садржан у тачно једном од скупова A_i. С друге стране, сваки скуп A_i са k елемената садржи $\binom{k}{3}$ троелементних подскупова. Следи да је

$$165 = \binom{4}{3}a_4 + \binom{5}{3}a_5 + \cdots + \binom{10}{3}a_{10} = 4a_4 + 10a_5 + 20a_6 + 35a_7 + 56a_8 + 84a_9 + 120a_{10}.$$

Како су сви сабирци осим можда $35a_7$ парни, a_7 мора бити непарно, тј. $a_7 \geqslant 1$.

2A.4. За $n = 2$ једначина има решење $\cos x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, тј. $x = \arccos\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Нека је надаље $n \geqslant 3$. Са L и D редом означавамо леву и десну страну једначине. Разликујемо два случаја.

(1°) $\cos x \geqslant 0$. Тада је $L \geqslant n! = 2 \cdot 3 \cdots n > 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{n-1} \geqslant D$, па једначина нема решења.

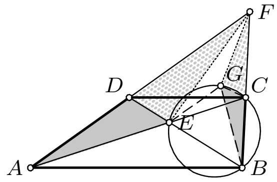
(2°) $\cos x < 0$. Тада је $1 + \cos^k x < 1$ за непарно k, па је $D < 2^{[n/2]}$, док је $L \geqslant 1 \cdot 2 \cdots (n-1) > 2^{n-2} \geqslant 2^{[n/2]}$, па ни у овом случају нема решења.

Према томе, дата једначина има решења само за $n = 2$.

2A.5. Приметимо да, ако је $2^k = (\epsilon_i \ldots \epsilon_1\epsilon_0)_3$, онда је $S_3(2^k) = \epsilon_i + \cdots + \epsilon_1 + \epsilon_0 \equiv 3^i\epsilon_i + \cdots + 3\epsilon_1 + \epsilon_0 = 2^k \pmod 2$. То значи да је $S_3(2^k)$ парно за свако $k \in \mathbb{N}$.

Најзад, из $2^{3n} < 3^{2n}$ следи да је $S_3(2^k) \leqslant 4n$ за $k \leqslant 3n$. Према томе, $2n+1$ бројева $S_3(2^n)$, $S_3(2^{n+1}), \ldots, S_3(2^{3n})$ су парни и не већи од $4n$, а таквих има само $2n$. По Дирихлеовом принципу нека два морају бити једнака.

3A.1. Како је $\sphericalangle BGC = \sphericalangle BEC = \sphericalangle AED$ и $\sphericalangle CBG = \sphericalangle CEG = \sphericalangle EAD$, троуглови BCG и ADE су слични. Притом је $\frac{AD}{DF} = \frac{BC}{CF}$, па су и троуглови BFG и AFE слични. Отуда је $\sphericalangle AFE = \sphericalangle BFG$.



3A.2. Услов задатка значи да $10^k \mid x^2 - x = x(x-1)$, при чему је $x < 10^k$. Довољно је наћи $x \in \{0, 1, \ldots, 10^k - 1\}$ такво да

$$2^k \mid x \quad \text{и} \quad 5^k \mid x - 1,$$

а на основу Кинеске теореме о остацима такво x постоји за свако $k \in \mathbb{N}$. Штавише, сваки такав број x се може добити само за коначно много вредности k, па оваквих бројева x заиста има бесконачно много.

Напомена. Бројеви x са траженом особином су познати као *аутоморфни бројеви*.

3A.3. Претпоставимо да се парови $\{x, x+24\}$ налазе у подели за свако $1 \leqslant x \leqslant 24$. Тада бројеви 49 и 98 морају бити упарени са 73 и 74 неким редом. Надаље мора постојати и пар $\{99, 75\}$, а затим редом и $\{51, 76\}$, $\{52, 77\}, \ldots, \{72, 97\}$. Тиме смо добили две могућности.

Остаје случај када за неко $x \leqslant 24$ постоји пар $\{x, x+25\}$. Посматрајмо најмање такво x.

(1°) Ако је $x = 1$, онда бројеви $1, 2, \ldots, 24$ морају бити редом у пару са $26, 27, \ldots, 49$. Сада се број 25 не може упарити, па је ово немогуће.

(2°) Ако је $x = 2$, онда имамо парове $\{1, 25\}$ и $\{2, 27\}$. Даље, бројеви $3, 4, \ldots, 24$ морају бити редом у пару са $28, 29, \ldots, 49$, а број 26 са 51. Даље, 75 мора бити у пару са 99, 74 са 98, итд, 52 са 76. Овде је подела јединствена.

(3°) Нека је сада $3 \leqslant x \leqslant 24$. Тада су бројеви $1, 2, \dots, x-1$ редом у пару са $25, 26, \dots, x+23$. С друге стране, $x, x+1, \dots, 24$ су редом у пару са $x+25, x+26, \dots, 49$. Бројеви $x+24$ и $x+73$ морају бити у пару са $x+48$ и $x+49$ неким редом. Даље су $x+74, \dots, 99$ редом у пару са $x+50, \dots, 75$. Најзад, $51, 52, \dots, x+47$ су у пару са $76, 77, \dots, x+72$. Тако за свако x имамо по две могућности.

Укупан број могућности је $22 \cdot 2 + 3 = 47$.

3A.4. По Фермаовој теореми је $x^{4k+4} = x^2 \cdot x^{p-1} \equiv a \cdot 1 = a \pmod p$, па се може узети $b = x^{k+1}$.

Друго решење. Довољно је доказати да постоји цео број b такав да је $b^2 \equiv \pm x \pmod p$, тј. да је један од бројева x и $-x$ квадратни остатак по модулу p. Ово је тачно јер је један од Лежандрових симбола $\left(\frac{x}{p}\right)$ и $\left(\frac{-x}{p}\right)$ једнак 1: заиста, $\left(\frac{x}{p}\right)\left(\frac{-x}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{x}{p}\right)^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = -1$.

3A.5. Комплексан број z је решење дате једначине ако и само ако је $z^{2021} - 1 = a(z^{2020} - 1)$ за неки комплексан број a модула 1. Једно решење је $z = 1$; скраћивањем $z - 1$ добијамо

$$P(z) = 0, \quad \text{где је} \quad P(z) = z^{2020} + (1-a)\big(z^{2019} + \dots + z + 1\big).$$

Полином P има (бар једну) комплексну нулу z_a за свако $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$. Приметимо и да је $z_a \neq 1$, јер је $P(1) = 2021 - 2020a \neq 0$. Како различите вредности a дају различите нуле $z = z_a$, тражених комплексних бројева z има бесконачно много.

4A.1. На основу Вијетових формула важи $\sqrt{x_1^3} + (x_2+x_3+9)\sqrt{x_1} = (x_1+x_2+x_3+9)\sqrt{x_1} = (t+9)\sqrt{x_1}$ и $x_2^2 x_3^2 = \frac{32t}{x_1^2}$, што једнакост из задатка своди на

$$\frac{32t + 288}{x_1^2} = (t+9)\sqrt{x_1}, \quad \text{тј.} \quad (t+9)\big(x_1^{5/2} - 32\big) = 0.$$

Следи да је $x_1^{5/2} = 32$, тј. $x_1 = 4$. Заменом у полазну једначину добијамо $\cancel{64} - 16t - \cancel{64} - 4\sqrt{2t} = 0$, што као једину могућност даје $t = 0$. То је решење задатка, јер тада полазна једначина гласи $x^3 - 16x = 0$ и има решења $x_1 = 4$, $x_2 = 0$ и $x_3 = -4$ која задовољавају услове.

4A.2. Нека има c црвених, p плавих и b белих корпи.

- Укупан број могућих распореда је $(c+p+b)^n$;
- број распореда у којима су црвене корпе празне је $(p+b)^n$;
- број распореда у којима су плаве корпе празне је $(c+b)^n$;
- број распореда у којима су и црвене и плаве корпе празне је b^n.

Вајлсов резултат је b^n, док Ферма уз помоћ принципа укључења и искључења добија резултат $(c+p+b)^n - (p+b)^n - (c+b)^n + b^n$. Из услова задатка следи да је $(p+b)^n + (c+b)^n = (c+p+b)^n$. Но, по чувеној теореми Фермаа и Вајлса, ово је могуће само за $n = 2$. Тако следи да је $(p+b)^2 + (c+b)^2 = (c+p+b)^2$, што се скраћивањем своди на $b^2 = 2cp$.

Ако је $b, p \leqslant c = 2020$ (случај $b, c \leqslant p$ је аналоган), онда из $b^2 = 4040p = 2^3 \cdot 5 \cdot 101p$ следи да $2020 \mid b$, па мора бити $b = 2020$ и $p = 1010$. С друге стране, ако је $c, p \leqslant b = 2020$, онда је $cp = 2 \cdot 1010^2$, па мора бити $\{c, p\} = \{2020, 1010\}$. У оба случаја има укупно 5050 корпи.

4A.3. Јасно је да је $\alpha \leqslant 1$. Штавише, ако је $\alpha > \frac{2}{3}$, онда из $a_0 < \alpha \cdot a_1 \leqslant a_0 + 1$ следи $a_1 = 2$, противно услову задатка. Према томе, $\alpha \leqslant \frac{2}{3}$.

Покажимо да овакав низ постоји за $\alpha = \frac{2}{3}$. Довољно је доказати да се за свако непарно $a_n \in \mathbb{N}$ може наћи непарно $a_{n+1} \in \mathbb{N}$такво да је $a_n < \frac{2}{3} a_{n+1} \leqslant a_n + 1$. И заиста:

(1°) ако је $a_n = 4k+1$ ($k \in \mathbb{N}$), може се узети $a_{n+1} = 6k+3$;

(2°) ако је $a_n = 4k+3$ ($k \in \mathbb{N}$), може се узети $a_{n+1} = 6k+5$.

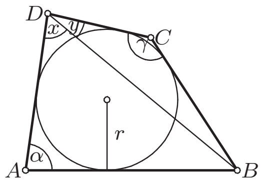
4А.4. Приметимо да је
$$M = a^2 + 2ab - 3b^2 - 2a + 2b = (a-b)(a+3b-2),$$
при чему су оба чиниоца исте парности. Следи да $4 \mid M$ ако и само ако су a и b исте парности, док $7 \mid M$ ако и само ако је $a \equiv b$ или $a + 3b \equiv 2 \pmod 7$.

Претпоставимо да има седам бројева. Бар четири од њих су исте парности: рецимо, четири непарна. Бар два од та четири при дељењу са 7 дају остатке из једног од скупова $\{0,3,2\}$, $\{1,5,6\}$ и $\{4\}$. Како је $0+3\cdot 3 \equiv 3+3\cdot 2 \equiv 2+3\cdot 0 \equiv 2$ и $1+3\cdot 5 \equiv 5+3\cdot 6 \equiv 6+3\cdot 1 \equiv 2 \pmod 7$, та два броја можемо означити са a и b тако да је $a \equiv b$ или $a+3b \equiv 2 \pmod 7$.

С друге стране, ако је дато шест бројева $0,1,4,7,8,11$, ни за које a и b неће важити $a + 3b \equiv 2 \pmod 7$. Зато M може бити дељиво са 7 само ако је $a \equiv b \pmod 7$, али тада је $a \not\equiv b \pmod 2$, па опет $28 \nmid M$. Овим је показано да је одговор $k = 7$.

4А.5. Из тангентности четвороугла $ABCD$ следи $AB+CD = BC+DA$, тј. $DA = 3$. Ако означимо $\alpha = \sphericalangle DAB$, и $\gamma = \sphericalangle BCD$, из једнакости $P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{CBD}$ добијамо $\frac{1}{2}(4+3+2+3)r = \frac{1}{2}(3\cdot 4\sin\alpha + 3\cdot 2\sin\gamma)$, одакле је $r = \sin\alpha + \frac{1}{2}\sin\gamma$.

Даље, косинусна теорема у троугловима ABD и CBD нам даје $BD^2 = 25 - 24\cos\alpha = 13 - 12\cos\gamma$, одакле је $\cos\gamma = 2\cos\alpha - 1$. Одавде имамо $\sin\gamma = 2\sqrt{\cos\alpha - \cos^2\alpha}$, па је најзад
$$r = \sin\alpha + \sqrt{\cos\alpha - \cos^2\alpha}.$$



Ако је $r > \sqrt{2}$, онда је $\cos\alpha - \cos^2\alpha > (\sqrt{2} - \sin\alpha)^2$, што се своди на $2\sqrt{2}\sin\alpha + \cos\alpha > 3$, а ово је еквивалентно немогућој неједнакости $\sin(\alpha+\varphi) > 1$, где је $\varphi = \arcsin\frac{1}{3}$.

С друге стране, услов $r > 1$ се своди на $1 - \sin\alpha < \sqrt{\cos\alpha - \cos^2\alpha}$, што се квадрирањем своди на $2 - \cos\alpha < 2\sin\alpha$ и даље на $\cos\alpha(4 - 5\cos\alpha) > 0$. Одмах имамо $\cos\alpha = \frac{1+\cos\gamma}{2} > 0$, па остаје да се докаже да је $\cos\alpha < \frac{4}{5}$. Означимо $x = \sphericalangle ADB$ и $y = \sphericalangle CDB$. По косинусној теореми у троугловима ABD и CBD имамо $\cos x + \cos y = \frac{BD^2-7}{6BD} + \frac{BD^2-5}{4BD} = \frac{5BD^2-29}{12BD}$, па како је $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} > 0$, следи $BD^2 > \frac{29}{5}$. Сада косинусна теорема у троуглу ABD даје $\cos\alpha = \frac{25-BD^2}{24} < \frac{25-\frac{29}{5}}{24} = \frac{4}{5}$.

1Б.1. Како је збир цифара датог броја једнак $9 + 3a$, што је дељиво са 3, дати број је и сам дељив са 3, а већи је од 3, што значи да је сложен.

1Б.2. **(а)** Разликујемо два случаја (који не морају бити дисјунктни).

- Ако је $x \leqslant 0$, онда је $x + |x| = x - x = 0$, па једначина постаје $|x+a| = 0$, тј. $x = -a$.
- Ако је $x \geqslant 0$, онда је $x + |x| = 2x$ и $|x+a| = x+a$ (јер је $a \geqslant 0$), па једначина постаје $4042x = x + a$ и има решење $x = \frac{a}{4041}$.

Све у свему, решења једначине су $x = -a$ и $x = \frac{a}{4041}$.

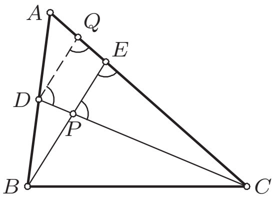
(б) По делу (а), дата једначина има само једно решење ако је $-a = \frac{a}{4041}$, тј. за $a = 0$.

1Б.3. Ако прво или последње место није означено, мора се означити свако друго седиште, па тада постоје само две могућности.

Нека је сада означено и прво и последње седиште. Имамо n означених седишта и између њих $n-1$ „празнина”, од којих се једна састоји од два празна седишта, а све остале од по једног. Позиција празнине са два седишта може се одабрати на $n-1$ начина, што даје $n-1$ могућности.

Дакле, укупно има $n+1$ могућности.

1Б.4. Нека је Q тачка на дужи AE таква да је $DQ \parallel PE$. Пошто је троугао CPE једнакокрак, важи $\sphericalangle CDQ = \sphericalangle CPE = \sphericalangle CEP = \sphericalangle CQD$, па је $DQEP$ једнакокраки трапез; отуда је $QE = DP = \frac{1}{2}AE$. Дакле, Q је средиште дужи AE. Следи да је DQ средња линија у троуглу ABE, што значи да је D средиште дужи AB.



1Б.5. Једино решење је $n = 2$: тада је $n \cdot 2^{n-3} + 3 = 2^2$. Директном провером налазимо да за $n \leqslant 4$ других решења нема.

Претпоставимо да је $n \geqslant 5$ и $n \cdot 2^{n-3} + 3 = x^2$. Број x мора бити непаран, а тада су $x+1$ и $x-1$ парни, па је $x^2 - 1$ дељиво са 4. Међутим, $x^2 - 1 = n \cdot 2^{n-3} + 2$ очигледно није дељиво са 4, па у овом случају нема решења.

2Б.1. Бројилац $-2x^2 + 2x + c$ је негативан за свако x. Заиста, пошто је $c \leqslant -1$, дискриминанта бројиоца је $4 + 8c < 0$. Према томе, x је решење дате неједначине ако и само ако је и именилац $x^2 - 3|x| + 2$ негативан.

Остаје да испитамо именилац: он је једнак $|x|^2 - 3|x| + 2 = (|x| - 1)(|x| - 2)$ и негативан је када је $1 < |x| < 2$, тј. за $x \in (-2, -1) \cup (1, 2)$. Овај скуп је решење неједначине.

2Б.2. Пошто је $c < a + b$, довољно је доказати неједнакост $2a^2 + 2b^2 \geqslant (a + b)^2$. Међутим, она је тривијална:

$$2a^2 + 2b^2 - (a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geqslant 0.$$

Напомена. Дужина тежишне дужи која одговара страници a је $t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$. Тако је једнакост из задатка заправо еквивалентна неједнакости $t_a^2 \geqslant 0$.

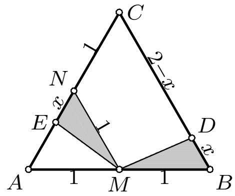
2Б.3. Из сваког од парова $\{1, 29\}, \{2, 28\}, \ldots, \{14, 16\}$ може се одабрати највише по један играч.

(1°) Ако је затвореник број 15 у екипи, треба изабрати још 10 парова и из сваког од тих парова по једног играча. Парови се могу одабрати на $\binom{14}{10}$ начина, а играчи из њих на 2^{10} начина. То је укупно $2^{10}\binom{14}{10}$ начина.

(2°) Ако затвореник 15 није у екипи, треба одабрати 11 парова и из сваког пара по једног играча, а то се може учинити на $2^{11}\binom{14}{11}$ начина.

Укупно има $2^{10}\binom{14}{10} + 2^{11}\binom{14}{11} = 1\,770\,496$ начина.

2Б.4. Означимо $BD = x$ и посматрајмо средиште N странице AC. Тада је $CD = 2 - x$, $CE = 1 + x$ и $NE = x$. При томе је $\sphericalangle MBD = \sphericalangle MNE = 60°$ и $MB = MN = 1$, одакле следи да су троуглови MBD и MNE подударни. Закључујемо да је $\sphericalangle BMD = \sphericalangle NME$ и, најзад, $\sphericalangle DME = \sphericalangle BMN = 120°$.



2Б.5. **(а)** Сваки делилац d броја $2^{28} \cdot 5^{49}$ је облика $d = 2^x \cdot 5^y$, где је $0 \leqslant x \leqslant 28$ и $0 \leqslant y \leqslant 49$. Експонент x се може одабрати на 29 начина, а експонент y на 50 начина. Следи да се број d може одабрати на $29 \cdot 50 = 1450$ начина, тј. одговор је 1450.

(б) Подсетимо се познате формуле за број делилаца $\tau(n)$ природног броја $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$, где су $p_1, \ldots, p_k$ различити прости, а $r_1, \ldots, r_k$ природни бројеви:

$$\tau(n) = (r_1 + 1)(r_2 + 1) \cdots (r_k + 1).$$

Број n је дељив са $2021 = 43 \cdot 47$. Ако је његова канонска факторизација $n = 43^a \cdot 47^b \cdot p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$, онда он има $\tau(n) = (a+1)(b+1)(r_1+1) \cdots (r_k+1) = 2021 = 43 \cdot 47$ делилаца. Како су сви чиниоци $a+1$, $b+1$ и r_i+1 већи од 1, ово је могуће само ако је $\{a, b\} = \{42, 46\}$ и $k = 0$. Дакле, тражених бројева n има само два: $43^{46} \cdot 47^{42}$ и $43^{42} \cdot 47^{46}$.

Напомена. Дајемо доказ формуле за $\tau(n)$. Сваки делилац броја n има облик $d = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k}$, где је $0 \leqslant s_i \leqslant r_i$ за свако $i = 1, \ldots, k$. Сваки од експонената s_i може се изабрати на $r_i + 1$ начина. То нам даје укупно $\tau(n) = (r_1 + 1) \cdots (r_k + 1)$ могућности за делилац d.

3Б.1. Нумеришући седишта бројевима од 1 до 9, можемо ручно да пребројимо дозвољене распореде: $1357, 1358, 1359, 1368, 1369, 1379$; $1468, 1469, 1479$; 1579; $2468, 2469, 2479$; 2579; 3579. Укупно 15 могућности.

Друго решење. Урадићемо општији задатак, у коме у реду од n седишта означавамо k тако да не буду два суседна означена.

Пошто се десно од сваког означеног седишта мора налазити једно празно, додајмо празну $(n+1)$-ву столицу на крај реда. Овако се ред састоји од k парова седишта (лево означено и десно празно) и $n + 1 - 2k$ празних седошта - укупно $n + 1 - k$ „објеката” које треба распоредити, а то се може учинити на $\binom{n+1-k}{k}$ начина.

3Б.2. Дати систем је линеаран по $X = \ln x$, $Y = \ln y$ и $Z = \ln z$. Решавамо га Гаусовим методом. Са $J_a + r \cdot J_b$ означавамо додавање a-тој једначини b-те помножене са r:

$$\begin{cases} X + 2Y + 3Z = 0 \\ 2X + 3Y + \;\; Z = a \\ 3X + 5Y + aZ = 2a-4 \end{cases} \xrightarrow[J_3 - J_2]{\substack{J_2 - 2J_1 \\ J_3 - 3J_1}} \begin{cases} X + 2Y + \quad 3Z = 0 \\ \quad -Y - \quad 5Z = a \\ \qquad\quad (a-4)Z = a-4. \end{cases}$$

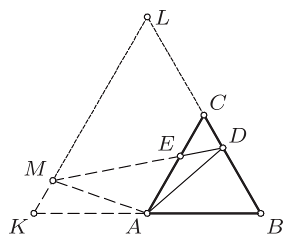
Ако је $a \neq 4$, следи $Z = 1$, а одатле $Y = -a-5$ и $X = 2a+7$, тј. $(x, y, z) = (e^{2a+7}, e^{-a-5}, e)$.

Ако је $a = 4$, трећа једначина постаје $0 = 0$, па узимањем $Z = t$ добијамо $Y = -5t-4$ и $X = 7t+8$, тј. $(x, y, z) = (e^{7t+8}, e^{-5t-4}, e^t)$ за произвољно $t \in \mathbb{R}$.

3Б.3. Пошто је $\cos x \leqslant 1$ и $\sin x \leqslant 1$, важи

$$\cos^{2020} x + \sin^{2021} x + \cos^{2022} x \leqslant \cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x = 1 + \cos^2 x \leqslant 2.$$

3Б.4. Нека су K и L тачке такве да су A и C редом средишта дужи BK и BL. Одаберимо тачку M на дужи KL тако да је $KM = \frac{1}{3} = CD$. Имамо $CD = \frac{1}{3}$, $DL = \frac{4}{3}$ и $ML = \frac{5}{3}$.



Како је $AK = AC = 1$ и $\sphericalangle AKM = \sphericalangle ACD = 60^\circ$, троуглови AKM и ACD су подударни. Следи да је $AM = AD$ и $\sphericalangle KAM = \sphericalangle CAD$, тј. $\sphericalangle MAD = \sphericalangle KAC = 120^\circ$. То значи да је троугао MAD једнакокрак, па је $\sphericalangle ADM = 30^\circ = \sphericalangle ADE$.

Сада на основу Талесове теореме имамо $\frac{CE}{LM} = \frac{DC}{DL} = \frac{1}{4}$, па је $CE = \frac{5}{12}$, тј. $AE = \frac{7}{12}$.

Друго решење. Нека је F подножје нормале из тачке D на AC. Тада је $CF = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{6}$, $AF = \frac{5}{6}$ и $DF = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Ако означимо $FE = x$, имамо $\operatorname{tg} \sphericalangle ADF = \frac{AF}{DF} = \frac{5}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{tg} \sphericalangle EDF = \frac{EF}{DF} = \frac{6x}{\sqrt{3}}$ и

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{tg} \sphericalangle ADE = \operatorname{tg} (\sphericalangle ADF - \sphericalangle EDF) = \frac{\frac{5}{\sqrt{3}} - \frac{6x}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{6x}{\sqrt{3}}} = \frac{5 - 6x}{(1 + 10x)\sqrt{3}}.$$

Следи да је $5 - 6x = 1 + 10x$, тј. $x = \frac{1}{4}$, тако да је $AE = AF - x = \frac{7}{12}$.

3Б.5. Пошто је $x^2 - 4y^2 = (x - 2y)(x + 2y)$, дата једначина се може записати као

$$(x - 2y)(x + 2y - 1) = 2^{2021}.$$

Следи да је $x + 2y - 1 = 2^a$ и $x - 2y = 2^b$, где су $a > b \geqslant 0$ цели бројеви и $a + b = 2021$. Међутим, $2^a + 2^b = 2x - 1$ је непаран број, а дељив је са 2^b, па мора бити $b = 0$. Тада је $a = 2021$, одакле коначно добијамо $x = 2^{2020} + 1$ и $y = 2^{2019}$.

4Б.1. Пошто је $2020 \equiv 1$ и $2021 \equiv -1 \pmod 3$, важи $2020^{2020} + 2021^{2021} \equiv 1^{2020} + (-1)^{2021} = 1 + (-1) = 0$. Следи да је дати број дељив са 3, а већи је од 3, па је сложен.

4Б.2. Разликоваћемо два случаја.

(1°) Прва кутија је празна. Тада друга кутија садржи једну, две или три куглице. Тако се садржај друге кутије (а самим тим и треће) може одабрати на $\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}=6+15+20=41$ начин.

(2°) Прва кутија садржи једну куглицу. Ова куглица се може изабрати на 6 начина. Друга кутија садржи ниједну, једну, две или три куглице, па се њен садржај може одабрати на $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}=26$ начина.

Према томе, одговор је $41+6\cdot 26=197$.

4Б.3. Једно решење је $x=0$. За $x\neq 0$ дата једначина је еквивалентна са $f(x)=1$, где је $f(x)=\frac{\sin x}{x^{2021}}$. Функција f је парна, па ако је x решење једначине, онда је то и $-x$. Зато је довољно показати да на интервалу $(0,\infty)$ једначина има јединствено решење.

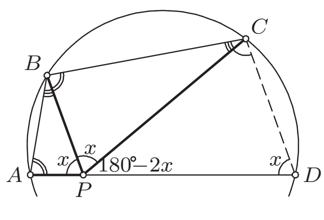
Јасно је да је $f(x)<1$ за $x>1$. С друге стране, за $x\in(0,1]$ важи $x<\operatorname{tg}x<2021\operatorname{tg}x$, па је

$$f'(x)=\frac{(x-2021\operatorname{tg}x)\cos x}{x^{2022}}<0.$$

То значи да је функција f строго опадајућа на интервалу $(0,1]$. При томе је $f(\frac{\pi}{6})<1<f(1)$, те на том интервалу једначина $f(x)=1$ заиста има тачно једно решење.

Напомена. Осим $x=0$, решења дате једначине су приближно $x=\pm 0{,}99991457$.

4Б.4. Означимо $\sphericalangle APB=\sphericalangle BPC=x$. Тада је $\sphericalangle CPD=180^\circ-2x$.



Даље, пошто је $\frac{PA}{PB}=\frac{PB}{PC}=\frac{1}{2}$, троуглови APB и BPC су слични, па је $\sphericalangle ABC=\sphericalangle ABP+\sphericalangle PBC=\sphericalangle ABP+\sphericalangle PAB=180^\circ-x$ и одатле $\sphericalangle ADC=x$, тј. $\sphericalangle PDC=x$. Одавде такође налазимо $\sphericalangle PCD=180^\circ-\sphericalangle CPD-\sphericalangle PDC=x$. Следи да је троугао PCD једнакокрак, па је $PD=PC=4$ и, најзад, $AD=5$.

4Б.5. Множењем друге једнашине са 4 и одузимањем од прве добија се $x^2-4y^2=8y-4x$, тј. $(x-2y)(x+2y)=-4(x-2y)$.

(1°) Ако је $x=2y$, систем се своди на једначину $y^2-2y+a=0$, тј. $(y-1)^2=1-a$. За $a<1$, $a=1$ и $a>1$ редом имамо два, једно, односно ниједно решење.

(2°) Ако је $x+2y=-4$, онда скраћивањем следи $x+2y=-4$, тј. $x=-2y-4$ и $y^2=-2y-4-a$. Одавде је $(y+1)^2=-3-a$, док је $x=y^2+a$. За $a<-3$, $a=-3$ и $a>-3$ редом имамо два, једно, односно ниједно решење.

Једино решење које се може појавити у оба случаја је $(x,y)=(-2,-1)$, а тада је $a=x-y^2=-3$. Све у свему, систем има четири решења за $a<-3$, два за $-3\leqslant a<1$, једно за $a=1$ и ниједно за $a>1$.