Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

1. март 2020.

Први разред – А категорија

1. Релацију $\diamondsuit$ на скупу $\mathbb{R}$ дефинишемо на следећи начин:

$$x \diamondsuit y \quad \text{ако и само ако је} \quad |x-1| + |y-2| \leqslant 1.$$

Ако је $x \diamondsuit (y-x)$ и $x \diamondsuit (y+x)$, одредити y.

2. Природни бројеви су обојени у две боје с периодом d (тј. бројеви x и $x+d$ увек имају исту боју). Претпоставимо да постоје природни бројеви a, b и c такви да је, за свако $x \in \mathbb{N}$, тачно један од бројева $x+a$, $x+b$ и $x+c$ црвен. Доказати да је d дељиво са 3.

3. Наћи све тачке X унутар квадрата $ABCD$ за које важи

$$AX + CX = BX + DX.$$

4. Скуп од 2020 узастопних природних бројева подељен је на два подскупа од по 1010 бројева. Може ли најмањи заједнички садржалац свих бројева у првом скупу бити једнак најмањем заједничком садржаоцу свих бројева у другом скупу?

5. Одредити најмању могућу вредност израза

$$F = \max\{x, 1-y\} + \max\{y, 2-z\} + \max\{z, 3-x\},$$

где су x, y и z реални бројеви. Наћи све тројке (x, y, z) за које се та вредност достиже.

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

1. март 2020.

Други разред – А категорија

1. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева дељивих са 11 код којих је збир цифара једнак производу цифара.

2. Реални бројеви a, b, c и d су такви да важи

$$a+b+c+d=5 \quad \text{и} \quad (a+b)(c+d)+(a+c)(b+d)+(a+d)(b+c)=15.$$

Доказати да је бар један од бројева a, b, c, d мањи од 1.

3. Кружница γ додирује изнутра кружницу Γ у тачки X. Права ℓ сече кружницу Γ у тачкама A и D, а кружницу γ у тачкама B и C, при чему је тачка B између A и C. Доказати да је

$$\frac{XA^2}{XD^2}=\frac{AB\cdot AC}{DB\cdot DC}.$$

4. Нека су m и n природни бројеви. У свако поље квадратне табле $n\times n$ уписан је по један цео број. *Пут* је низ међусобно различитих поља у коме је прво поље у првој врсти, последње у n-тој, и свака два узастопна поља имају заједничку страницу. Доказати да:

(а) ако је $m \leqslant n$, увек постоји пут у коме је збир уписаних бројева дељив са m;

(б) ако је $m > n$, такав пут не мора да постоји.

5. Дато је неколико тачака у равни, при чему никоје три нису колинеарне. Нацртано је неколико дужи са крајевима у датим тачкама тако да је свака тачка теме највише четири дужи. Доказати да се свака дуж може обојити једном од две боје тако да никоје три дате тачке нису темена једнобојног троугла.

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

1. март 2020.

Трећи разред – А категорија

1. У троуглу ABC је $AB = 17$ и $AC = 14$, а тачке D, E и F на страницама BC, CA и AB редом су такве да је

$$BD : DC = CE : EA = AF : FB = 1 : 2.$$

Ако тачке A, D, E и F леже на истом кругу, наћи дужину странице BC.

2. Решити систем једначина у скупу комплексних бројева:

$$\begin{cases} |z|^2 + zw + \overline{w} = 2 + 6i \\ |w|^2 + \overline{zw} + z = 2 - 4i. \end{cases}$$

3. Наћи све бројевне системе у којима је број $3\,806\,130$ четвороцифрен палиндром. (*Палиндром* је број или низ карактера који се исто чита унапред и уназад.)

4. Наћи све функције $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такве да за све $x, y \in \mathbb{R}^+$ важи

$$f(f(x) + f(y)) = xf(f(y))f(x + y).$$

5. Да ли постоје два дисјунктна скупа целих бројева, сваки са бар три елемента, таква да:

(а) за свака два различита броја a и b из истог скупа постоји број c из другог скупа такав да је $2c \in \{a+b,\ a+b+1\}$?

(б) за свака два различита броја a и b из истог скупа постоји број c из другог скупа такав да је $2c \in \{a+b,\ a+b+2\}$?

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

1. март 2020.

Четврти разред – А категорија

1. Скуп природних бројева S има својство да се сваки природан број може представити као збир неколико (један или више) различитих бројева из S. За $x \in \mathbb{N}$, са $f(x)$ означавамо највећи могући број сабирака у таквом представљању броја x.

Доказати да за свако $a \in S$ постоји бесконачно много природних бројева x за које је $f(x+a) = f(x) + 1$.

2. Низ (a_n) је задат условима

$$a_1 = 4 \quad \text{и} \quad a_n = \frac{4n^2 a_{n-1} - 1}{a_{n-1} + 4n^2 - 2} \quad \text{за} \quad n \geqslant 2.$$

Израчунати a_{2020} (у експлицитном облику).

3. У троуглу ABC је $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle ACB$. Његов уписани круг има центар I и додирује страницу AC у тачки D. Права AI поново сече описану кружницу троугла ABC у тачки M. Тачка K на страници AC је таква да је $IK \parallel BC$, а права MK сече страницу BC у тачки L. Доказати да нормала из тачке D на праву MC полови дуж KL.

4. Знајући да важи

$$53999 \cdot 14!! \cdot 33!! = \overline{22{*}\,6{*}3\,493\,6{*}9\,{*}96\,8{*}4\,{*}10\,6{*}4\,{*}{*}{*}\,{*}{*}{*}},$$

одредити цифре означене звездицом.
(Са $n!!$ је означен *двоструки факторијел*: $n!! = n(n-2)(n-4)(n-6)\cdots$)

5. Низ природних бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$ је такав да је

$$a_i = |a_{i-1} - a_{i-2}| \ \text{ за свако } \ i \geqslant 3 \quad \text{и} \quad a_i \leqslant 2020 \ \text{ за } \ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Наћи највећу могућу дужину овог низа.

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

1. март 2020.

Први разред – Б категорија

1. Дата је тачка X унутар правоугаоника $ABCD$. Ако је $P_{XAB} = 15$, $P_{XBC} = 16$ и $P_{XCD} = 17$, одредити P_{XDA}.

(Са P_Φ означена је површина фигуре Φ.)

2. Одредити број парних шестоцифрених бројева чији је збир цифара једнак 51.

3. У троуглу ABC у коме је $\sphericalangle B = 110^\circ$ и $\sphericalangle C = 30^\circ$, спољашња симетрала угла BAC сече праву BC у тачки L. Ако је O центар описаног круга троугла ABC, израчунати угао AOL.

4. Могу ли се броју 2020 здесна дописати још три цифре тако да се добије седмоцифрен број који је дељив сваким од бројева 8, 9 и 11? Одредити сва решења.

5. Један радник у фабрици дневно произведе шест пари ципела. Радници раде у две смене, при чему је планирано да у неком периоду прва смена произведе 240 пари више него друга. Међутим, услед епидемије грипа одсуствовало је 5 радника из прве смене и 4 из друге, тако да је и једној и другој смени било потребно по два дана више да постигну предвиђену норму. Колико има радника у свакој смени?

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

1. март 2020.

Други разред – Б категорија

1. Приказати графички скуп тачака у xOy-равни за које је $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$.

2. Троцифрен број $\overline{abc}$ је паран, а његове цифре међусобно различите и различите од нуле. Познато је да је збир свих троцифрених бројева који се састоје од цифара a, b и c (без понављања) већи од 2700, а мањи од 3100. Који је највећи могући овакав број $\overline{abc}$?

3. У спољашњости троугла ABC конструисани су троуглови BCD, CAE и ABF који су слични у неком редоследу темена. Ако је шестоугао $AFBDCE$ тетиван, доказати да је троугао ABC једнакостраничан.

4. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{cases} x^2 + xz = y^2 + yz \\ xy + 1 = x + y \\ x^2 + yz = z^2 - xy. \end{cases}$$

5. На табли су написани бројеви 1 и 2. Нове бројеве дописујемо на следећи начин: ако на табли већ постоје различити бројеви a и b, можемо да допишемо број $ab - 5a + 7b$. Можемо ли применом овог поступка икада записати број:

(а) 2020? **(б)** 2019?

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

1. март 2020.

Трећи разред – Б категорија

1. У правилној четвоространој пирамиди $SABCD$ бочна страна SAB заклапа са основом $ABCD$ угао од $60°$. Израчунати косинус угла између бочних страна SAB и SBC.

2. Посматрајмо све троцифрене бројеве чије су све цифре у скупу $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ (не обавезно различите; прва цифра не може бити нула). Да ли међу овим бројевима има више оних дељивих са 3 или оних дељивих са 5?

3. Дат је квадрат $ABCD$ странице a и кружница k са центром у центру квадрата O и полупречником r. Нека је P произвољна тачка на кружници k. Доказати да је вредност израза

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$$

константна, тј. да не зависи од избора тачке P на кружници.

4. Дат је природан број n. Одредити све реалне бројеве x такве да за сваку пермутацију (a, b, c, d) бројева $n, n+1, n+2, n+3$ важи

$$\sin ax \cdot \sin bx = \sin cx \cdot \sin dx.$$

5. Означимо са $S(n)$ збир цифара природног броја n. Решити једначину

$$n \cdot S(n) = 2020 + n.$$

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

1. март 2020.

Четврти разред – Б категорија

1. Дат је скуп $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Колико има пресликавања $f : A \to A$ која сваки паран број сликају у паран број, а сваки број дељив са 3 у број дељив са 3?

2. Некопланарне тачке A, B, C и D у простору су такве да је $AB = BC = CD = DA$. Нека је M средиште дужи AC, а N средиште дужи BD. Доказати да је MN заједничка нормала за праве AC и BD.

3. Решити једначину

$$x^2 + (x-3)\log_2 x = 4x - 3.$$

4. На хипотенузи AB једнакокрако-правоуглог троугла ABC дате су тачке P и Q (при чему је P између A и Q) такве да је $\sphericalangle PCQ = 45^\circ$. Доказати да је $AP^2 + QB^2 = PQ^2$.

5. У скупу целих бројева решити једначину

$$2x^3 + 3x^2 + 3x = 2020 + 9y.$$

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.