број: 106/2 година: 2021/22

Тангента

ЧАСОПИС ЗА МАТЕМАТИКУ И РАЧУНАРСТВО ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Београд 2022

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
„ТАНГЕНТА”- часопис за математику и рачунарство
за ученике средњих школа.
Излази у четири броја током школске године.
Адреса: „Тангента”, Друштво математичара Србије,
Поштански фах 355, 11000 Београд
Телефон: (011)3036-818

Уплате на жиро рачун:
Друштво математичара Србије – број 340-13536-62.
На уплатници као сврху уплате назначити „За Тангенту”.

Главни и одговорни уредник: Војислав Петровић, Нови Сад
e-mail: vojpet@gmail.com
Технички уредник: Зоран Стојаковић, Нови Сад
e-mail: stojakov@sbb.rs

Чланови редакције:

Александар Миленковић, Крагујевац
Миодраг Живковић, Београд
Ненад Стојановић, Крагујевац
Срђан Огњановић, Београд

Сва права умножавања, прештампавања и превођења задржава Друштво математичара Србије

Штампа: **Донат Граф** д.о.о, Београд
На основу члана 23. став 2, тачка 9. Закона о порезу на додатну вредност („Регистар прописа”, број 11 – новембар 2004.) часопис се сматра серијском публикацијом од посебног интереса за науку и опорезије се по стопи од 8%.

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

51
ТАНГЕНТА : часопис за математику и рачунарство за ученике средњих школа : часопис за математику и рачунарство Друштва математичара Србије / главни и одговорни уредник Војислав Петровић. - 1995/1996, бр. 1- . - Београд : Друштво математичара Србије, 1995- (Београд : Донат граф). - 24 cm

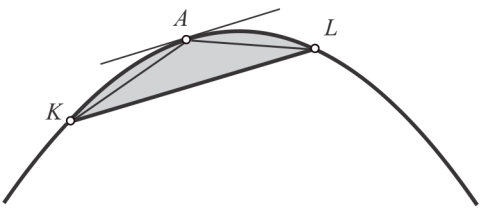
Тромесечно.
ISSN 0354-656X = Тангента
COBISS.SR-ID 103642375

АРХИМЕДОВА МЕТОДА ОДРЕЂИВАЊА ПОВРШИНЕ ОДСЕЧКА ПАРАБОЛЕ

***Јенс Карстенсен, Фредериксберг* (*Данска*)**
***Алија Муминагић, Фредериксберг* (*Данска*)**

У свом делу „Квадратура параболе“ Архимед[1] је приказао врло оштроумну методу за одређивање површине одсечка параболе. Управо њој је посвећен овај чланак.

Нека су K и L тачке параболе. Део равни ограничен дужи (тетивом) KL и луком KL параболе зове одсечак параболе. На сл. 1 означен је сиво.



Сл. 1.

Нека је A тачка лука KL таква да је тангента параболе у тој тачки паралелна с тетивом KL[2]. Означимо са $[KLA]^*$ и $[KLA]$ редом површине означеног одсечка параболе и троугла KLA. Архимед је доказао да је

$$[KLA]^* = \frac{4}{3}\,[KLA]. \tag{1}$$

У наставку ћемо показати како је Архимед дошао до овог резултата. Делом ћемо користити аналитичку геометрију која је Архимеду била недоступна.

Посматрајмо параболу којој је y-оса оса симетрије, као на сл. 2. (То повлачи да је теме параболе на y-оси.) Лако се показује да је једначина такве параболе

$$y = f(x) = ax^2 + b, \tag{2}$$

где је $a < 0$ и $b > 0$.

---

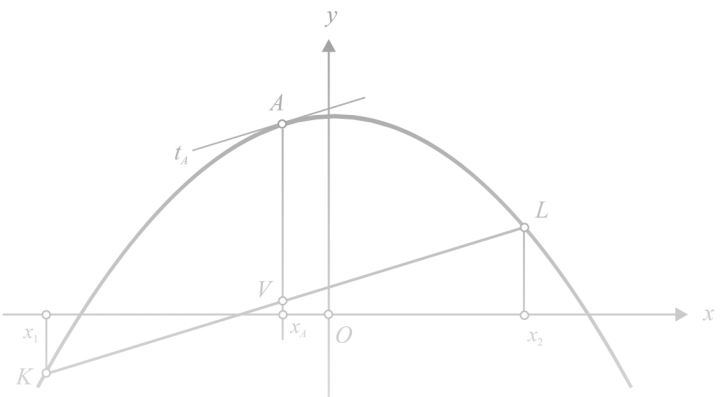
[1] Архимед (око 287-212 п.н.е) – старогрчки математичар, један од највећих математичара свих времена.

[2] Постојање такве тачке A следи из леме 1. У случају произвољне глатке криве то следи из тзв. Ролове теореме. Име носи по француском математичару Ролу (M. Rolle, 1652-1719).

Прво ћемо показати да за ову параболу важе следећа два тврђења.

Лема 1. *Тангента параболе* (2) *у тачки* A, *паралелна је с тетивом* KL *ако и само ако права која садржи тачку* A *и паралелна је са* y*-осом полови тетиву* KL.

Доказ. Нека су апсцисе тачака K, A и L, редом x_1, x_A и x_2 (сл. 2).



Сл. 2.

($\Rightarrow$) Претпоставка је да је тангента t_A параболе (2) у тачки A паралелна с тетивом KL. Покажимо да тада права која пролази кроз тачку A и која је паралелна са y-осом, полови тетиву KL. За то је довољно да се покаже да је $x_A = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Како је $t_A \parallel KL$, коефицијенти праваца тих правих су једнаки. Као што је познато, коефицијент правца тангенте t_A једнак је

$$f'(x_A) = 2ax_A, \qquad (3)$$

НАГРАДНИ ЗАДАЦИ

Александар Миленковић, Ненад Стојановић

У рубрици „Наградни задаци” у сваком броју дајемо 20 задатака који су подељени у две групе. Задаци из прве групе су подељени по разредима и намењени су пре свега ученицима који се такмиче у Б категорији, док су задаци из друге групе намењени ученицима А категорије и нису подељени по разредима.

Позивамо све читаоце да шаљу предлоге задатака које сматрају посебно интересантним, као и сугестије које ће нам помоћи при састављању рубрике. Такође, позивамо све ученике да на адресу редакције шаљу откуцана или читко исписана решења постављених задатака; сваки задатак на засебном листу. Исто важи и за предлоге задатака. У наредним бројевима часописа публикују се комплетна решења раније постављених задатака, а на крају циклуса најуспешнији решавачи се награђују.

Предлоге и решења задатака слати на адресу:

„Тангента” – за рубрику „Наградни задаци”
Природно-математички факултет
Радоја Домановића 12
34000 Крагујевац

или **електронском поштом** (искључиво **pdf** формат) на адресу

tg_nagradnizadaci@yahoo.com

најкасније до 10.02. 2022.

Прва група

Први разред

M1834. Нека су x, y и z реални бројеви за које важи

$$xyz(x+y)(y+z)(z+x) \neq 0,$$

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = \frac{1009}{1010}.$$

Доказати да је $\frac{xy}{(y+z)(z+x)} + \frac{yz}{(x+y)(z+x)} + \frac{zx}{(x+y)(y+z)} = 2021.$

M1835. У унутрашњости квадрата $ABCD$ странице a, уписан је полукруг са пречником AB. Тангента t на дати полукруг из тачке C сече страницу DA у тачки M. Израчунати дужину дужи CM.

M1836. У скупу целих бројева, решити систем једначина

$$x(y+z)=4$$
$$y(x+z)=-6$$
$$z(x+y)=-50.$$

Други разред

M1837. У скупу реалних бројева, решити систем једначина

$$(x+y)^{y-x}=\frac{1}{256}$$
$$(x+y)\cdot 2^{x-y}=64.$$

M1838. За троугао ABC чије су дужине страница a, b и c и мера угла код темена A једнака α важи $\ln a^2=\ln b^2+\ln c^2-\ln(2bc\cos\alpha)$. Доказати да је троугао ABC једнакокраки.

M1839. Ако за углове α и β важи да је $\cos\alpha+\cos\beta=1$ и $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{\sqrt{15}}{3}$, израчунати $\cos(\alpha-\beta)$.

Трећи разред

M1840. Дат је полином $P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$. Колико има различитих полинома $Q(x)$ таквих да постоји полином трећег степена $R(x)$ такав да је $P(Q(x))=P(x)\cdot R(x)$?

M1841. Нека је S_i збир првих i сабирака произвољног аритметичког низа. Доказати да вредност израза $I=\frac{S_i}{i}(j-k)+\frac{S_j}{j}(k-i)+\frac{S_k}{k}(i-j)$ не зависи од избора природних бројева i, j и k. Да ли вредност израза I зависи од избора аритметичког низа?

M1842. Одредити број решења система једначина

$$(|x|+|y|-6)^2=4$$
$$y=\frac{x^2}{4}-4.$$

Hello, World!

Увод у конструкцију и анализу алгоритама 1

Миодраг Живковић, Београд

1. Увод

Текст пред вама замишљен је као увод у начин размишљања приликом конструкције и анализе алгоритама (видети уводну главу познатог уџбеника о алгоритмима [1]). Приказује се

- псеудокод као алат за прецизно описивање алгоритама,
- две основне стратегије за конструкцију алгоритама и
- неке основне идеје које се користе при анализи алгоритама, односно доказивању коректности алгоритама.

Два приказана алгоритма решавају проблем сортирања (уређивања у неопадајућем поретку) датог низа бројева дужине n. Алгоритми се излажу у облику псеудокода, који, иако се не може директно превести у било који стандардни програмски језик, описује структуру алгоритма довољно јасно, тако може да се реализује на изабраном програмском језику. У питању су

- алгоритам сортирања уметањем, који користи инкрементални приступ

и

- сортирање обједињавањем, алгоритам који користи идеју разлагања (eng divide-and-conquer).

Иако време потребно за извршавање ова два алгоритма расте са n, брзине раста тих времена нису исте. Одредићемо времена извршавања ових алгоритама и упознати се са корисном нотацијом за њихово изражавање.

2. Алгоритми

Неформално, **алгоритам** је прецизно дефинисана процедура израчунавања, која, полазећи од неке вредности или скупа вредности као **улаза**, производи неку вредност, или скуп вредности, као **излаз**. Алгоритам такође можемо посматрати као средство за решавање прецизно дефинисаног

(рачунарског) **проблема**. Поставка проблема прецизира жељени однос излаза са улазом.

Алгоритам описује специјалну процедуру израчунавања којом се постиже жељени однос излаза са улазом.

На пример, нека је потребно поређати чланове датог низа бројева тако да чине неопадајући низ. На овај проблем се често наилази; он може да послужи као добра основа за увођење многих стандардних техника за конструкцију и анализу алгоритама. Формално се проблем **сортирања** може формулисати на следећи начин.

Улаз: Низ бројева $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.
Излаз: Пермутација $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ улазног низа таква да је $a'_1 \leq a'_2 \leq \cdots \leq a'_n$.

На пример, за дати низ $(31, 41, 59, 26, 41, 58)$ алгоритам сортирања као излаз даје низ (26,31,41,41,58,59). Сваки овакав улазни низ зове се **инстанца** проблема сортирања. Уопште, **инстанцу проблема** чини улаз (који задовољава сва ограничења која проистичу из формулације проблема) неопходан да би се одредило решење проблема.

Сортирање је фундаментална операција (многи програми је користе као свој саставни део), због чега је за њену реализацију развијен велики број добрих алгоритама. Који алгоритам је најбољи за конкретну примену зависи, поред осталог, од дужине низа који треба сортирати, од могућих ограничења за чланове низа, од тога у којој су мери чланови низа већ сортирани, као и од типа уређаја у коме је низ смештен (оперативна меморија, диск или магнетска трака).

Каже се да је алгоритам **коректан** ако за се за сваку инстанцу завршава дајући као резултат тачан излаз. Тада кажемо да алгоритам **решава** дати проблем.

Алгоритам може бити описан на српском језику, рачунарским програмом, или чак пројектом хардверског уређаја који га извршава. Једини захтев је да спецификација мора да обезбеди прецизан опис процедуре израчунавања.

Сортирање није једини проблем за чије решавање су развијени алгоритми. Наводимо примере проблема који се решавају алгоритмима:

- Један од циљева пручавања људског генома је идентификација свих око 100000 гена у људској ДНК (дезокси рибонуклеинској киселини), одређивање редоследа око три милијарде базних парова који чине људску ДНК, смештање тих информација у базе података, и развијање алата за анализу података. Сваки од тих корака захтева софистициране алгоритме. Циљ је постизање уштеда у утрошеном

ПРЕДЛОЗИ ЗА ДРУГИ ПИСМЕНИ ЗАДАТАК

Срђан Оїњановић

ГИМНАЗИЈЕ, СРЕДЊЕ ШКОЛЕ

I РАЗРЕД

Увод у їеометрију; їодударност ѿроуїлова

1. Права a и тачка A ван те праве одређују раван α. Ако права b садржи тачку A и не припада равни α, доказати да су праве a и b мимоилазне.

2. Нека су s_1 и s_2 редом симетрале спољашњих углова код темена A и B троугла ABC. Нормале из темена C на праве s_1 и s_2 секу праву AB у тачкама M и N. Доказати да је дужина дужи MN једнака обиму троугла ABC.

3. Доказати да су троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ подударни ако је $a = a_1$, $\beta = \beta_1$ и $t_c = t_{c_1}$.

4. Нека је P произвољна тачка у унутрашњости троугла ABC. Доказати да је збир $AP + BP + CP$ мањи од обима, а већи од полуобима троугла ABC.

5. Нека је тачка S пресек дијагонала AC и BD паралелограма $ABCD$ и нека је O произвољна тачка. Доказати да је $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OS}$.

II РАЗРЕД

Квадраѿна једначина; квадраѿна функција; квадраѿна неједначина

1. Решити једначину $x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$ и њена решења представити у облику $a + b\sqrt{2}$, при чему су a и b цели бројеви.

2. Решити једначину $(x + 1)(x + 2)(x - 3)(x - 4) = 6$.

3. Скицирати график функције $y = |x^2 + 2x| + 2x^2 + 6x + 4$.

4. Одредити све вредности реалног параметра p тако да за решења x_1 и x_2 једначине $2x^2 - (6p + 1)x + 9p^2 + 1 = 0$ важи $\left|x_1^2 + x_2^2\right| > 1$.

5. Решити неједначину $|x^2 + 2x - 3| < 3x + 3$.

III РАЗРЕД

Лопта; вектори; системи линеарних једначина

1. Темена A, B и C правоуглог троугла припадају лопти полупречника $R = 5\,cm$. Ако је дужина хипотенузе троугла ABC једнака $8\,cm$, израчунати одстојање центра лопте од равни троугла.

2. Над векторима $\vec{a} = (0, 2, 1)$ и $\vec{b} = (2, -1, -1)$, као над страницама, конструисан је паралелограм.

(а) Одредити меру угла између дијагонала тог паралелограма.

(б) Наћи површину паралелограма.

3. Тачке $A(0, -1, 0)$, $B(2, 0, 0)$ и $C(3, 1, 2)$ су три темена паралелограма који је основа пирамиде $ABCDS$ чији је врх тачка $S(1, 1, 5)$.

(а) Одредити координате темена D. (б) Израчунати запремину пирамиде.

4. Решити систем једначина

$$x + y + 2z = 1$$

$$3x + ay + 3z = a - 1$$

$$2x + 2y + (a - 2)z = 1$$

у зависности од реалног параметра a.

5. Нека су $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ некомпланарни вектори. Доказати да су вектори $\vec{a} = 5\vec{x} + \vec{y} + 9\vec{z}$, $\vec{b} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$ и $\vec{c} = \vec{x} - \vec{y} + 3\vec{z}$ компланарни и представити $\vec{a}$ као линеарну комбинацију $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

IV РАЗРЕД

Извод функције

1. Одредити локални максимум фунције $y = (x^2 + x - 1)e^x$.

2. Правилна шестострана призма има површину $P = 9\,cm^2$. Колика је максимална запремина такве призме?

ИЗ ШКОЛСКЕ ПРАКСЕ

ЛОГАРИТАМСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ И НЕЈЕДНАЧИНЕ С ПАРАМЕТРИМА

Милан Живановић

Задаци са праметрима спадају у комплексније проблеме средњошколског наставног програма математике. Они се у редовним курсевима математике или уопште не изучавају или се то чини доста површно. У овом прилогу навешћемо неколико примера таквих задатака у проблемима с логаритмима.

Подсетимо се, прво, неких основних особина логаритамске функције $y = \log_a x$. Њен домен D_y је скуп позитивних реалних бројева $\mathbb{R}^+$, тј. дефинисана је за $x > 0$. Уз то, основа логаритма a је позитивна и различита од 1, $a > 0$ и $a \neq 1$. Тако је логаритамска функција бијекција која пресликава $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Она је строго опадајућа за $0 < a < 1$, односно строго растућа за $a > 1$.

Пример 1. Решити једначину $\lg(ax + 2) = \lg(x + 2)$ у зависности од реалног параметра a. (Са lg је означен логаритам чија је основа 10.)

Решење. С обзиром на a, размотрићемо следеће случајеве.

1° $a > 0$. Овде имамо два подслучаја.

(а) $a = 1$. Тада дата једначина гласи $\lg(x + 2) = \lg(x + 2)$, па су решења сви реални бројеви из њеног домена. Према томе $x \in (-2, \infty)$.

(б) $a \neq 1$. Тада је домен леве стране једначине $\left(-\frac{2}{a}, +\infty\right)$, а десне $(-2, +\infty)$. Због бијективности логаритамске функције, имамо да је $ax + 2 = x + 2$ и $(a - 1)x = 0$. С обзиром да је $-\frac{2}{a} < 0$, решење је $x = 0$.

2° $a = 0$. Једначина гласи $\lg 2 = \lg(x + 2)$, па је решење $x = 0$.

3° $a < 0$. Сада је домен леве стране $\left(-\infty, -\frac{2}{a}\right)$, а десне $(-2, +\infty)$. Дакле, домен једначине је $\left(-2, -\frac{2}{a}\right)$. Како је $-\frac{2}{a} > 0$, решење је $x = 0$.

□

Пример 2. Одредити вредности реалног параметра a тако да једначина

$$\log_{a - \frac{13}{2}} (x^2 + 1) = \log_{a - \frac{13}{2}} (a + 5)x$$

има два различита решења.

Решење. Како је $x^2+1>0$ за свако x, лева страна је дефинисана за $a>\frac{13}{2}$ и $a\neq\frac{15}{2}$. Десна страна је дефинисана ако је $a>\frac{13}{2}$, $a\neq\frac{15}{2}$, $a>-5$ и $x>0$. Према томе, домен једначине је

$$a>\frac{13}{2},\ a\neq\frac{15}{2} \text{ и } x>0. \qquad (1)$$

У том домену, дата једначина је еквивалентна са $x^2+1=(a+5)x$, односно са квадратном једначином

$$x^2-(a-5)x+1=0. \qquad (2)$$

Да би дата логаритамска једначина имала два различита решења, неопходно да једначина (2) има два различита решења и то позитивна с обзиром на горе утврђен домен.

Једначина (2) има два различита решења ако и само је њена дискриминанта већа од нуле. Дакле, $(a-5)^2-4>0$, тј. $(a-7)(a-3)>0$, одакле $a\in(-\infty.3)\cup(7,\infty)$. Међутим, због услова (1) следи

$$a\in\left(7,\frac{15}{2}\right)\cup\left(\frac{15}{2},\infty\right). \qquad (3)$$

Решења једначине (2) су $x_{1,2}=\frac{a-5\pm\sqrt{a^2-10a+21}}{2}$ и она су различита ако је a у домену (3). Та решења су позитивна ако је мање решење позитивно. Како је $a-5=\sqrt{a^2-10a+25}>\sqrt{a^2-10a+21}$, следи $x_2>0$, па је $0<x_2<x_1$.

Дакле, дата логаритамска једначина има два различита решења за $a\in\left(7,\frac{15}{2}\right)\cup\left(\frac{15}{2},\infty\right)$.

□

Пример 3. Одредити област дефинисаности функције

$$f(x)=\log_2(ax^2-2x+4a)$$

у зависности од реалног параметра a.

Решење. Услов дефинисаности функције је $ax^2-2x+4a>0$. Дискриминанта квадратног тринома је $D=4-16a^2$, одакле је $D=0$ за $a_{1,2}=\pm\frac{1}{2}$.

Размотрићемо следеће карактеристичне случајеве.

1^0 $a<-\frac{1}{2}$. Тада је $D<0$ и $ax^2-2x+4a<0$, па функција f није

НАШ ГОСТ

NOMEN EST OMEN

Позната латинска изрека из наслова каже да је име особе знак, нека врста предсказања њених битних особина. Ако су Наташа и Братислав Јовановић у то веровали и тиме се руководили, нарочито у погледу математике и физике, кад су свом сину дали име Добрица, несумњиво су начинили прави избор.

Добрица је веома рано, још од другог разреда основне школе, испољио велики интерес и не мање способности и за математику и за физику. Као потврда тога, убрзо стижу успеси и награде са различитих такмичења. Седми и осми разред и даље гимназију похађа у Математичкој гимназији у Београду. Бављење математиком и физиком се наставља несмањеним интензитетом и с још већим и значајнијим успесима.

Ђак генерације у Математичкој гимназији

Данас је Добрица Јовановић студент угледног универзитета MIT (Massachusetts Institute of Technology) у Кембрицу (Масачусец, САД).

Опредељење за математику и физику дошло је доста рано, још у основној школи. Шта је главни узрок и како је све почело?

Пре свега бих желео да се захвалим на овако лепим уводним речима. С тим у вези, желео бих да искажем захвалност својој баби Милици која је заправо била та која је предложила име Добрица. Можда је то био један од многих начина којима ми је помогла у животу.

Још од младих дана сам волео да решавам загонетке и да играм таблића и меморије. Одрастао сам у професорској породици, мама и тата су наставници математике и физике. Баба је била наставник оба предмета, док ми је деда био учитељ. Тако да сам одувек био окружен математиком и физиком, а што је још важније, образовање је увек било најбитније у мојој породици.

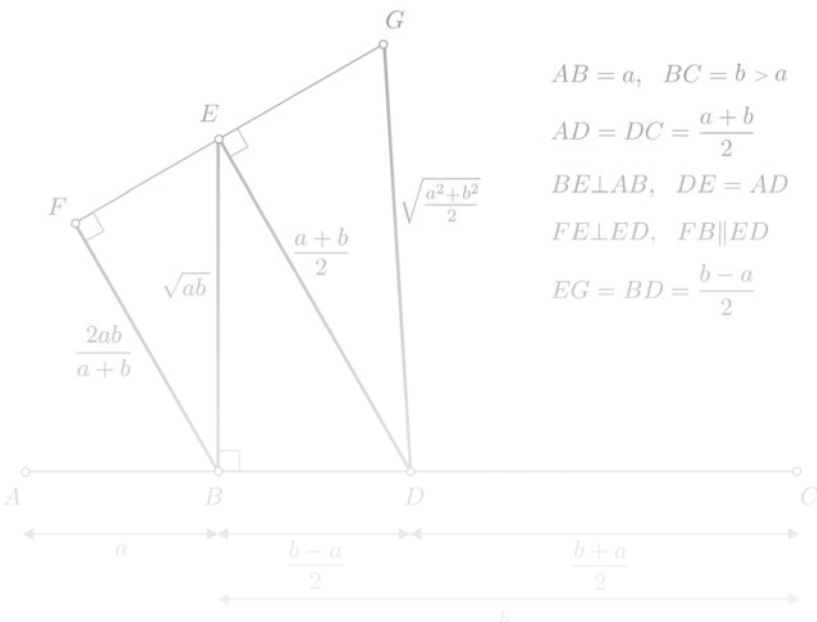
Рекао бих да сам се први пут озбиљније срео с математиком при крају 2. разреда основне школе кад сам победио на такмичењу „Мислиша“. После тога сам се уписао у школицу математике "Архимедес", где смо

ДОКАЗ БЕЗ РЕЧИ

Ненад Стојановић

Доказ без речи, назив је за методу визуелног „доказивања“ математичких тврђења. Појавио се у прошлом веку и брзо стекао широку популарност. Представља спој уметности и математике. Бројне речи и ознаке замењује слика која својим садржајем све објашњава.

Хармонијска, геометријска, аритметичка и квадратна средина



$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

С А З Н А Ј Е М О

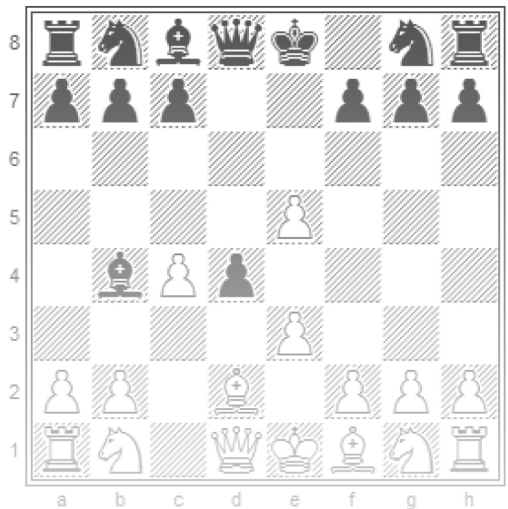
- Државни семинар из математике и информатике за наставнике средњих и основних школа, у организацији Друштва математичара Србије, биће одржан у суботу 22. и недељу 23. јануара 2022. године. Семинар ће се организовати online посредством одговарајуће платформе. Остале информације могу се наћи на сајту Друштва математичара Србије: https://dms.rs/.

- На математичком тржишту појавила се књига Радомира Маровића „Историја математике у настави средње школе – елементи методичког приступа“.

  Књига представља дуго очекивани текст оваквог садржаја у нашој математичкој литератури. На 500 страна аутор нам даје комплетан садржај математике за основне и средње школе, са кратким историјским напоменама на крају сваког поглавља. Може користити и као уџбеник и као збирка решених задатака и као таблица великог броја математичких формула.

  Аутор је професор математике са радним искуством од 40 година. Садржај књиге изложен је у 19 поглавља. На пример, поглавље 2, анализа, садржи део који се односи на тригонометријске функције. На четрдесетак страна изложени су основни тригонометријски појмови, од појма угла до тригонометријских неједначина. Споменимо поглавље 11 у коме се

НАГРАДНИ ШАХОВСКИ ЗАДАТАК
Тангента 105 - решење



Црни је одиграо 1. … de3.
Да ли је добро 2. Lb4?

Није добро. После 2. Lb4 бели губи.

2. … ef2+ 3. Ke2 (3. Kf2 Dd1) **fg1S+! 4. Ke1** (4. Tg1 Lg4+) **Dh4+**
и црни добија.

ШАХОВСКА СТРАНА

МЛИН

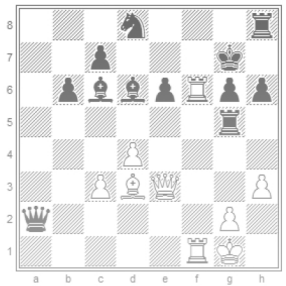
Називи тактичких удара у шаху често верно приказују њихов садржај или механизам. Тако је двојни удар истовремени напад на две противничке фигуре. Откривени шах настаје померањем једне фигуре након чега се открива дејство друге фигуре на противничког краља итд.

То важи и за удар *млин*. Он просто меље противничке фигуре. Може се рећи да се млин састоји од низа у коме се наизменично смењују обични и откривени шахови.

Један најјачих играча свих времена и бивши светски шампион Ласкер (црни), у партији с Тореом (Москва 1925), доспео је у следећу позицију после 24. ... Db5.

Изгледа као да бели губи јер

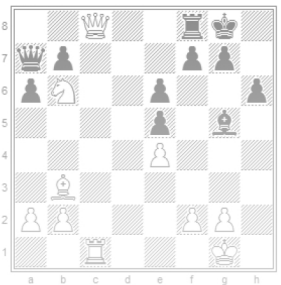
горе него у претходном примеру.



Осим што има ловца и коња мање, прети му и мат на g2. Но, он, не само да се спасава, већ добија. **1. Dg5! hg5** (не вреди 1. ... Dg2 2. Dg2 Lg2 3. Tg6+ Kh7 4. Tg2 мат) **2. Tg6+** и млин се поново укључио. **2. ... Kh7 3. Te6+ Kg7 (g8) 4. Tg6+ Kh7 5. Td6+ Kg7 6. Tg6+ Kh7 7. Tc6+ Kg7 8. Tg6+ Kh7 10. Tb6 Kg7 11. Tg6+ Kh7 12. Ta6+ Kg7 13. Ta2** и погледајте шта је остало од позиције црног.

2. ... Tg2+ 3. Kh1 Tc2+ 4. Kg1. (не помаже 4. Tf3 Lf3+ 5. Kg1 ab6 и црни остаје с топом и два пешака више) **Tg2+ 5. Kh1 Tb2+ 6. Kg1 ab6**. С три пешака више црни лако добија.

Млин могу да остваре и топ и скакач.



Тренутно је бели с фигуром више, али „висе“ му и дама и топ и скакач. Ипак, постоји нимало очигледан добитак заснован на идеји млина. **1. Sd7! Tc8 2. Tc8+ Kh7 3. Sf8+ Kg8 (h8)**. Помоћу млина се рашчишћава пут ловца b3 до поља f7. **4. Se6+! Kh7 5. Sf8+ Kg8 6. Sg6+ Kh7 7. Lf7** с неодбрањивим **8. Th8 мат**.

НАГРАДНИ ЗАДАТАК

1 *Јенс Карстенсен, Алија Муминагић,* Архимедова метода одређивања површине одсечка параболе
10 *Александар Миленковић, Ненад Стојановић,* Наградни задаци
27 *Миодраг Живковић,* Увод у конструкцију и анализу алгоритама 1
39 *Срђан Опењановић,* Предлози за други писмени задатак
45 *Милан Живановић,* Логаритамске једначине и неједначине с параметрима
55 *Војислав Петровић,* Наш гост – Nomen est omen
59 *Ненад Стојановић,* Доказ без речи
60 Сазнајемо
61 Наградни шаховски задатак
62 Шаховска страна, *Војислав Петровић,* Млин

YU ISSN 0354-656X