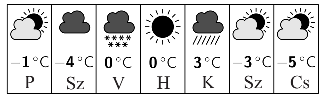
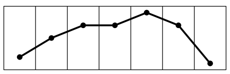
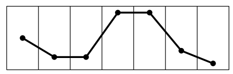
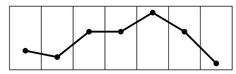
Kenguru Határok Nélkül Matematikaverseny 2021
11-12. osztály

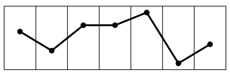
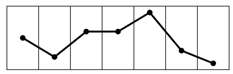
3 pontos feladatok

1. Tamara megnézte a mobiltelefonja időjárás-applikációján a következő hét napra várható maximális hőmérsékletet (lásd az alábbi ábrát).



Melyik ábra mutatja helyesen a várható maximális hőmérséklet grafikonját?

A)  **B)**  **C)** 

D)  **E)** 

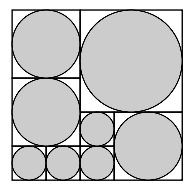
2. Hány egész szám van a $(20-\sqrt{21},\, 20+\sqrt{21})$ intervallumban?

A) 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 13

3. Egy 1 élhosszúságú kockát két egybevágó téglatestre vágtunk. Mekkora az egyik kapott téglatest felszíne?

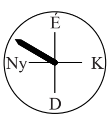
A) $\frac{3}{2}$ **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

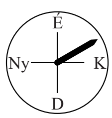
4. Egy nagy négyzetet felosztottunk kisebb négyzetekre, ahogyan az a jobb oldali ábrán látható. A kapott négyzetek mindegyikébe beírtunk egy árnyékolt kört. A négyzet területének hanyadrészét árnyékoltuk be?

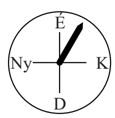


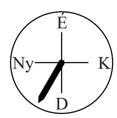
A) $\frac{8\pi}{9}$ **B)** $\frac{13\pi}{16}$ **C)** $\frac{3}{\pi}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{\pi}{4}$

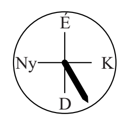
5. Egy zivatar miatt az iskola zászlóárbóca ferdén áll. Északnyugatról nézve az árbóc csúcsa jobbra van az aljához képest. Keletről nézve az árbóc csúcsa szintén jobbra van az aljához képest. Melyik irányba állhat az árbóc?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

6. Egy téglalap alakú papírlap hossza x, szélessége y, ahol $x>y$. A papírlapot meghajlítva kétféleképpen is lehet körhengerfelületet kialakítani. Milyen arányban van a magasabb hengerfelület által kialakított henger térfogata az alacsonyabbéval?

A) $y^2:x^2$ **B)** $y:x$ **C)** $1:1$ **D)** $x:y$ **E)** $x^2:y^2$

7. Legyen $x=\frac{\pi}{4}$. Az alábbi számok közül melyik a legnagyobb?

A) x^4 **B)** x^2 **C)** x **D)** $\sqrt{x}$ **E)** $\sqrt[4]{x}$

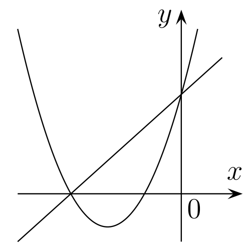
8. Hány olyan háromjegyű, 3-mal osztható szám van, amely csak az 1, 3 és 5 számjegyeket tartalmazza, és a számjegyek ismétlődhetnek?

A) 3 **B)** 6 **C)** 9 **D)** 18 **E)** 27

9. Mennyi annak a háromszögnek a területe, amelynek csúcsai a (p, q), $(3p, q)$ és $(2p, 3q)$ pontok, ahol $p, q > 0$?

A) $\frac{pq}{2}$ **B)** pq **C)** $2pq$ **D)** $3pq$ **E)** $4pq$

10. A jobb oldali ábrán látható parabola egyenlete $y = ax^2 + bx + c$ alakú, ahol a, b és c különböző valós számok. A következő egyenletek közül melyik lehet az ábrán látható egyenes egyenlete?



A) $y = bx + c$ **B)** $y = cx + b$ **C)** $y = ax + b$
D) $y = ax + c$ **E)** $y = cx + a$

4 pontos feladatok

11. A 7! szám összes osztójának hányad része páratlan?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{1}{5}$ **E)** $\frac{1}{6}$

12. Ha $A = (0,\, 1) \cup (2,\, 3)$ és $B = (1,\, 2) \cup (3,\, 4)$, határozd meg az összes olyan $a + b$ szám halmazát, ahol $a \in A$ és $b \in B$?

A) $(1,\, 7)$ **B)** $(1,\, 5) \cup (5,\, 7)$
C) $(1,\, 3) \cup (3,\, 7)$ **D)** $(1,\, 3) \cup (3,\, 5) \cup (5,\, 7)$ **E)** az **A)** – **E)** válaszok közül egyik sem

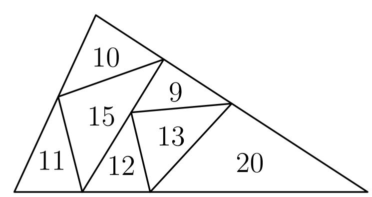
13. Hány háromjegyű természetes számra igaz, hogy ha leírjuk a számjegyeit fordított sorrendben, egy nála 99-cel nagyobb számot kapunk?

A) 8 **B)** 64 **C)** 72 **D)** 80 **E)** 81

14. Leírtuk az első 1000 természetes számot valamilyen sorrendben, majd kiszámoltuk minden három egymást követő szám összegét. Legfeljebb hány páratlan összeget kaphattunk így?

A) 997 **B)** 996 **C)** 995 **D)** 994 **E)** 993

15. Egy nagy háromszöget felosztottunk kis háromszögekre, ahogyan az a jobb oldali ábrán látható. A háromszögbe írt szám az adott háromszög kerületét jelöli. Határozd meg a nagy háromszög kerületét!



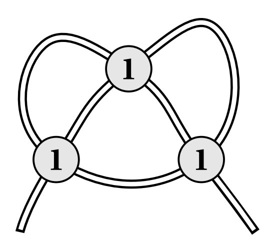
A) 31 **B)** 34
C) 41 **D)** 62 **E)** az **A)** – **E)** válaszok közül egyik sem

16. Jelölje $p(N)$ a tízes számrendszerben felírt N természetes szám számjegyeinek szorzatát. Például: $p(23) = 2 \cdot 3 = 6$. Határozd meg a következő összeg értékét:

$$p(10) + p(11) + p(12) + \cdots + p(99) + p(100).$$

A) 2025 **B)** 4500
C) 5005 **D)** 5050 **E)** az **A)** – **E)** válaszok közül egyik sem

17. Egy asztalon fekvő kötéldarabot letakartunk három érmével, ahogyan az a jobb oldali ábrán látható. Minden érme alatt ugyanakkora vaószínűséggel keresztezi a kötél saját magát így:  vagy így: . Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kötélen csomó keletkezik, ha meghúzzuk a végeit?



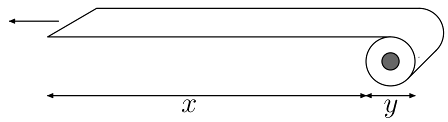
A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{1}{8}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{3}{8}$

18. A jobb oldali ábrán látható 5×5-ös négyzet mindegyik sorában és mindegyik oszlopában egyenlő a számok összege. Mindegyik mezőbe beírtunk egy számot azzal, hogy néhány szám nem szerepel az ábrán. Melyik szám van a kérdőjel helyén?

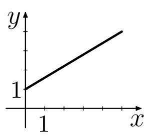
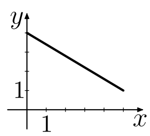
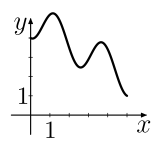
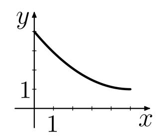
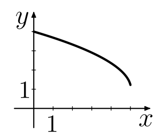
	16		22	
20		21		2
	25		1	
24		5		6
	4		?	

A) 8 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 18 **E)** 23

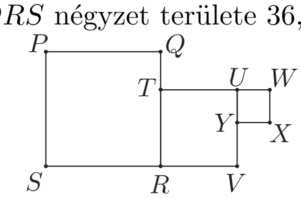
19. Egy gézengúz megragadta a WC-papír végét, és állandó sebességgel futni kezdett vele, így letekerve a papírt (lásd az alábbi ábrát).



Az alábbiak közül melyik függvény ábrázolja legjobban a guriga y átmérőjét a letekert x hosszúságú papír függvényében?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

20. Az alábbi ábrán három egymást érintő négyzet, $PQRS$, $TRVU$ és $UWXY$ látható. A P, T és X pontok egy egyenesen fekszenek. A $PQRS$ négyzet területe 36, a $TRVU$ négyzet területe 16.



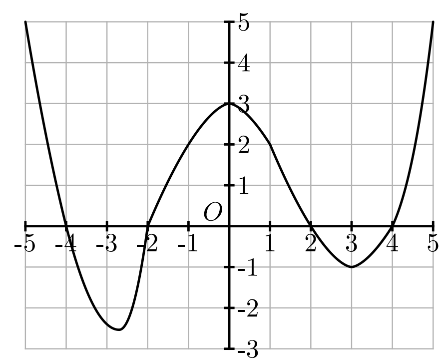
A PXV háromszög területe:

A) $14\frac{2}{3}$ **B)** $15\frac{1}{3}$ **C)** 16 **D)** $17\frac{2}{3}$ **E)** 18

5 pontos feladatok

21. A jobb oldali ábrán az $f : [-5, 5] \to \mathbb{R}$ függvény grafikonja látható. Hány különböző megoldása van az $f(f(x)) = 0$ egyenletnek?

A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8



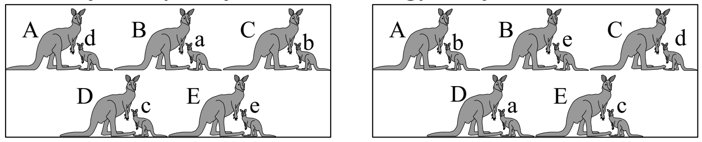
22. Egy táblán az 1, 2, 7, 9, 10, 15 és 19 számok szerepelnek. Két játékos felváltva letöröl egy-egy számot mindaddig, amíg csak egy szám marad a táblán. Az egyik játékos által letörölt számok összege kétszer annyi, mint a másik játékos által letörölt számok összege. Melyik szám maradt a táblán?

A) 7 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 15 **E)** 19

23. Az $f(x)$ függvényre teljesül, hogy $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ minden valós x és y szám esetén, valamint $f(1) = 2$. Mennyi az $\dfrac{f(2)}{f(1)} + \dfrac{f(3)}{f(2)} + \cdots + \dfrac{f(2021)}{f(2020)}$ kifejezés értéke?

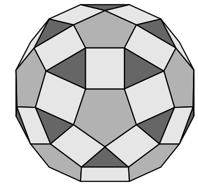
A) 0 **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** 2 **D)** 2020 **E)** az **A)** – **E)** válaszok közül egyik sem

24. Az öt kengurumama, A, B, C, D és E, mindegyikének van egy gyermeke. A gyerekek nevei: a, b, c, d és e. Az alábbi első képen pontosan két gyerek áll a saját anyukája mellett. Az alábbi második képen pontosan három gyerek áll a saját anyukája mellett. Hogy hívják az a nevű kenguru anyukáját?



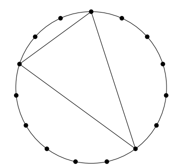
A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

25. A jobb oldali ábrán látható poliédernek van 12 szabályos ötszög alakú lapja, a többi lapja pedig négyzet vagy szabályos háromszög. Minden ötszög alakú lap körül 5, és minden háromszög alakú lap körül 3 négyzet alakú lap található. Juli minden háromszög alakú lapra ráírt egy 1-est, minden ötszög alakú lapra egy 5-öst, és minden négyzet alakú lapra egy -1-est. A poliéder lapjaira írt számok összege:



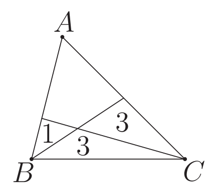
A) 202 **B)** 50 **C)** 60 **D)** 80 **E)** 120

26. Egy körön elhelyeztünk 15 pontot egyenlő távolságokra. Bármely három pont ezek közül meghatároz egy háromszöget. Két háromszög egyforma, ha egyikből megkaphatjuk a másikat elforgatással és/vagy tükrözéssel. Hány különböző háromszöget rajzolhatunk?



A) 19 **B)** 91 **C)** 46 **D)** 455 **E)** 23

27. Az ABC háromszöget két szakasszal 4 részre osztottuk, ahogyan az a jobb oldali ábrán látható. A kisebb háromszögek területei 1, 3 és 3. Mekkora az ABC háromszög területe?

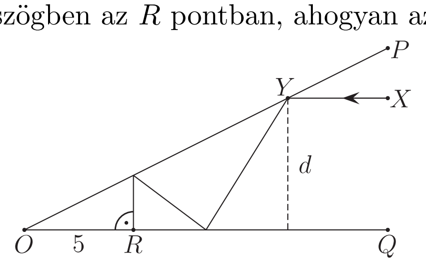


A) 12 **B)** 12,5 **C)** 13 **D)** 13,5 **E)** 14

28. Legyen $M(k)$ az $|4x^2 - 4x + k|$ kifejezés maximális értéke, ha x eleme a $[-1, 1]$ intervallumnak, a k pedig egy tetszőleges valós szám. Határozd meg az $M(k)$ lehető legkisebb értékét!

A) 4 **B)** $\frac{9}{2}$ **C)** 5 **D)** $\frac{11}{2}$ **E)** 8

29. Két síktükör OP és OQ hegyesszöget zárnak be (lásd az alábbi ábrát). Az OQ tükörrel párhuzamos XY fénysugár az OP tükörről az Y pontban verődik vissza. Ezután a fénysugár nekiütközik az OQ tükörnek, majd újból visszaverődik, nekiütközik az OP tükörnek, majd harmadszor is visszaverődve nekiütközik az OQ tükörnek derékszögben az R pontban, ahogyan az az ábrán látható.



Az OR szakasz hossza 5 cm. Az XY fénysugár d cm távolságra van az OQ tükörtől. A d értéke:

A) 4 **B)** 4,5 **C)** 5 **D)** 5,5 **E)** 6

30. Egy adott játékban az a játékos győz, amelyik 3 pont előnyt szerez. Két játékos, A és B, ezt a játékot játssza, és egy adott pillanatban az A játékosnak 1 pont előnye van. Mindkét játékos ugyanakkora valószínűséggel szerez pontot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az A játékos győz a játékban?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{2}{3}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{4}{5}$ **E)** $\frac{5}{6}$