

Математичко такмичење „Кенгур без граница” 2021.

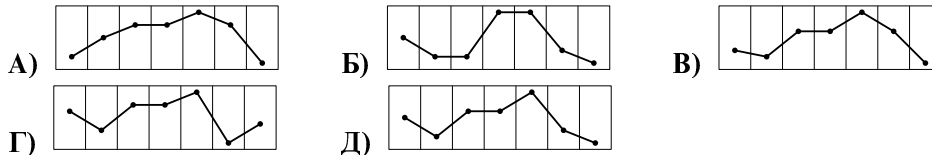
11 – 12. разред

Задаци који вреде 3 поена

1. На Тамариној апликацији за временску прогнозу приказана је прогноза времена са максималним температурама за наредних седам дана (видети слику испод).

-1 °C	-4 °C	0 °C	0 °C	3 °C	-3 °C	-5 °C
Пет	Суб	Нед	Пон	Уто	Сре	Чет

На којој од следећих слика је приказан график максималних прогнозираних температура?



2. Колико има целих бројева у интервалу $(20 - \sqrt{21}, 20 + \sqrt{21})$?

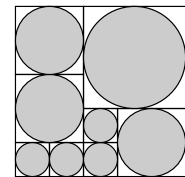
- А) 9 Б) 10 В) 11 Г) 12 Д) 13

3. Коцка ивице дужине 1 је расечена на два идентична квадрата. Површина једног добијеног квадрата једнака је:

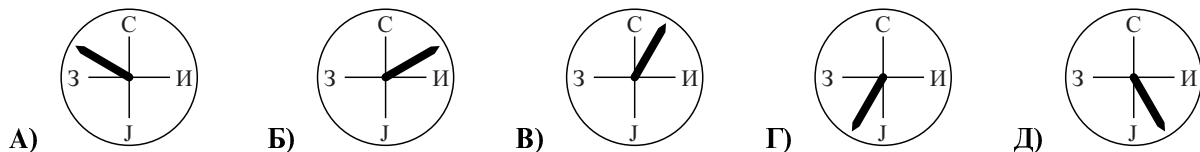
- А) $\frac{3}{2}$ Б) 2 В) 3 Г) 4 Д) 5

4. Велики квадрат је подељен на мање квадрате као што је приказано на слици десно. У сваки од добијених мањих квадрата уписан је осенчени круг. Који део површине великог квадрата је осенчен?

- А) $\frac{8\pi}{9}$ Б) $\frac{13\pi}{16}$ В) $\frac{3}{\pi}$ Г) $\frac{3}{4}$ Д) $\frac{\pi}{4}$



5. После синоћње олује јарбол са заставом на нашој школи је нагнут. Гледајући из правца северозапада, врх јарбола налази се десно од доње тачке. Гледајући из правца истока, врх јарбола је, такође, десно од доње тачке. У ком смеру може бити нагнут јарбол?



6. Правоугаони лист папира је дужине x и ширине y , при чему је $x > y$. Правоугаони папир се може преклопити тако да се добије кружни цилиндар на два различита начина. У ком односу су запремине простора унутар вишег и унутар нижег цилиндра?

- А) $y^2 : x^2$ Б) $y : x$ В) 1 : 1 Г) $x : y$ Д) $x^2 : y^2$

7. Нека је $x = \frac{\pi}{4}$. Који је од следећих бројева највећи?

- А) x^4 Б) x^2 В) x Г) \sqrt{x} Д) $\sqrt[4]{x}$

8. Колико има троцифрених бројева који садрже само цифре 1, 3 и 5 који су дељиви са 3, при чему се цифре могу понављати?

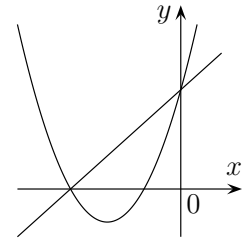
- А) 3 Б) 6 В) 9 Г) 18 Д) 27

9. Одредити површину троугла чија су темена у тачкама (p, q) , $(3p, q)$ и $(2p, 3q)$, ако важи $p, q > 0$?

- А) $\frac{pq}{2}$ Б) pq В) $2pq$ Г) $3pq$ Д) $4pq$

10. Једначина параболе на слици десно је облика $y = ax^2 + bx + c$ за неке различите реалне бројеве a, b и c . Која од следећих једначина може бити једначина праве на слици?

- А) $y = bx + c$ Б) $y = cx + b$ В) $y = ax + b$
 Г) $y = ax + c$ Д) $y = cx + a$



Задаци који вреде 4 поена

11. Који део свих делилаца броја $7!$ чине непарни бројеви?

- А) $\frac{1}{2}$ Б) $\frac{1}{3}$ В) $\frac{1}{4}$ Г) $\frac{1}{5}$ Д) $\frac{1}{6}$

12. Ако је $A = (0, 1) \cup (2, 3)$ и $B = (1, 2) \cup (3, 4)$, одредити скуп свих бројева облика $a + b$, где је $a \in A$ и $b \in B$?

- А) $(1, 7)$ Б) $(1, 5) \cup (5, 7)$
 В) $(1, 3) \cup (3, 7)$ Г) $(1, 3) \cup (3, 5) \cup (5, 7)$ Д) ниједан од понуђених одговора А) – Г)

13. Колико троцифрених природних бројева има особину да се, када му се цифре напишу обрнутим редоследом, добије троцифрен број који је за 99 већи од полазног броја?

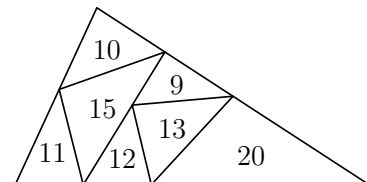
- А) 8 Б) 64 В) 72 Г) 80 Д) 81

14. Првих 1000 природних бројева су написани у низ у неком редоследу и израчунати су зборови свака три узастопна броја. Колико се највише непарних збирова може добити?

- А) 997 Б) 996 В) 995 Г) 994 Д) 993

15. Велики троугао је подељен на мање троуглове као што је приказано на слици десно. Број уписан у троугао представља његов обим. Одредити обим великог троугла?

- А) 31 Б) 34
 В) 41 Г) 62 Д) ниједан од понуђених одговора А) – Г)



16. За природан број N са $p(N)$ ћемо обележити производ цифара броја N записаног у декадном запису. На пример, $p(23) = 2 \cdot 3 = 6$. Одредити вредност збира

$$p(10) + p(11) + p(12) + \dots + p(99) + p(100).$$

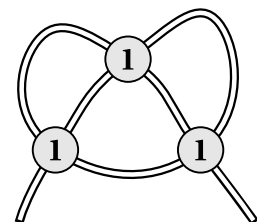
- А) 2025 Б) 4500
 В) 5005 Г) 5050 Д) ниједан од понуђених одговора А) – Г)

17. На столу лежи комад канапа који је прекривен са три новчића као што је приказано на слици десно. Испод сваког новчића под-

једнако је вероватно да канап преко себе прелази овако: или

овако: . Колика је вероватноћа да ће се канап завезати када се повуку његови крајеви?

- А) $\frac{1}{2}$ Б) $\frac{1}{4}$ В) $\frac{1}{8}$ Г) $\frac{3}{4}$ Д) $\frac{3}{8}$

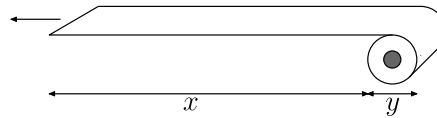


18. У квадрату 5×5 на слици десно збирови бројева у свакој врсти и у свакој колони су једнаки. У свако поље је уписан по један број, али неки од бројева нису приказани на слици. Који број је уписан у поље са знаком питања?

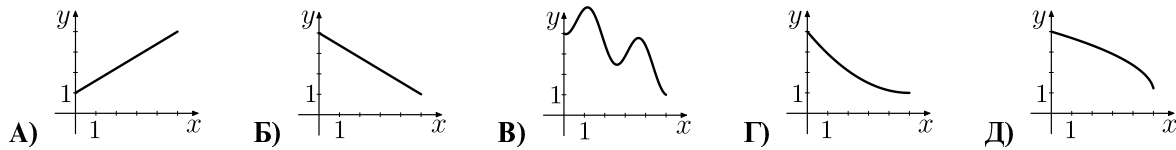
	16		22	
20		21		2
	25		1	
24		5		6
	4		?	

- А) 8 Б) 10 В) 12 Г) 18 Д) 23

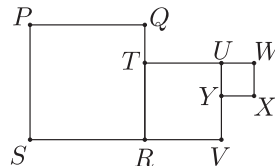
19. Несташно штене је ухватило крај ролне тоалет папира и кретало се константном брзином одмотавајући папир (видети слику испод).



Која од следећих функција најбоље описује зависност дебљине ролне y као функције одмотаног дела x ?



20. На слици испод приказана су три квадрата $PQRS$, $TRVU$ и $UWXY$ позиционирана тако да се додирују. Тачке P , T и X леже на истој правој. Површина квадрата $PQRS$ је 36, а површина квадрата $TRVU$ је 16.

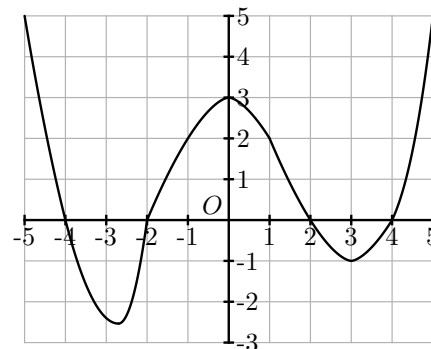


Површина троугла PXV једнака је:

- А) $14\frac{2}{3}$ Б) $15\frac{1}{3}$ В) 16 Г) $17\frac{2}{3}$ Д) 18

Задаци који вреде 5 поена

21. На слици десно приказан је график функције $f : [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$. Колико различитих решења има једначина $f(f(x)) = 0$?



- А) 2 Б) 4 В) 6 Г) 7 Д) 8

22. На табли су написани бројеви 1, 2, 7, 9, 10, 15 и 19. Два играча наизменично бришу по један број све док не остане само један број на табли. Збир бројева које је обрисао један од играча је два пута већи од збира бројева које је обрисао други играч. Који број је остао на табли?

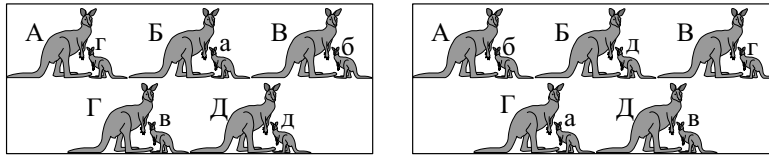
- А) 7 Б) 9 В) 10 Г) 15 Д) 19

23. Функција $f(x)$ је таква да је $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ за све реалне бројеве x и y и $f(1) = 2$.

Одредити вредност израза $\frac{f(2)}{f(1)} + \frac{f(3)}{f(2)} + \dots + \frac{f(2021)}{f(2020)}$.

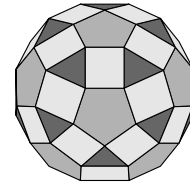
- А) 0 Б) $\frac{1}{2}$ В) 2 Г) 2020 Д) ниједан од одговора А) – Г) није тачан

24. Свака од пет кенгурица, које се зову А, Б, В, Г и Д, има по једно дете. Деца се зову а, б, в, г и д. На првој слици испод тачно двоје деце стоји поред својих мајки. На другој слици испод тачно троје деце стоји поред својих мајки. Како се зове мајка кенгура а?



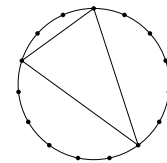
- А) А Б) Б В) В Г) Г Д) Д

25. Полиедар дат на слици десно има 12 страна које су правилни петоуглови, а остале стране су или једнакостранични троуглови или квадрати. Свака петоугаона страна је окружена са 5 квадратних страна и свака троугаона страна је окружена са 3 квадратне стране. Јован је написао број 1 на свакој троугаоној страни, број 5 на свакој петоугаоној страни и -1 на сваком квадрату. Збир свих бројева написаних на странама полиедра једнак је:



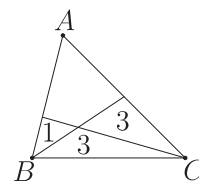
- А) 202 Б) 50 В) 60 Г) 80 Д) 120

26. На кругу је распоређено 15 тачака, тако да су растојања између сваке две суседне једнака. Спајајући било које три тачке од њих формирамо троугао. За два троугла кажемо да су иста ако се један добија ротацијом и/или рефлексijом другог. Колико различитих троуглова се може нацртати?



- А) 19 Б) 91 В) 46 Г) 455 Д) 23

27. Троугао ABC је двома дужима подељен на 4 дела, као што је приказано на слици десно. Површине мањих троуглова су 1, 3 и 3. Колика је површина троугла ABC ?

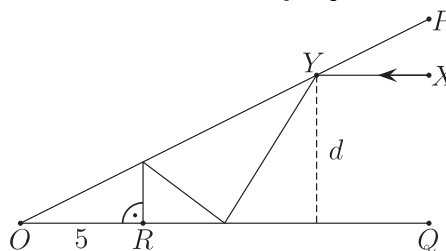


- А) 12 Б) 12,5 В) 13 Г) 13,5 Д) 14

28. Нека је $M(k)$ максимална вредност од $|4x^2 - 4x + k|$ за x из интервала $[-1, 1]$, где k може бити било који реалан број. Одредити минималну могућу вредност за $M(k)$?

- А) 4 Б) $\frac{9}{2}$ В) 5 Г) $\frac{11}{2}$ Д) 8

29. Два равна огледала OP и OQ су нагнута под оштрим углом (видети слику испод). Зрак светлости XU , паралелан огледалу OQ удара у огледало OP у тачки Y . Зрак се затим одбија и погађа огледало OQ , па се поново одбија и погађа огледало OP и одбија се трећи пут и погађа огледало OQ под правим углом у тачки R , као што је приказано на слици.



Дужина дужи OR једнака је 5 cm. Зрак XU је d cm удаљен од огледала OQ . Тада је d једнако:

- А) 4 Б) 4,5 В) 5 Г) 5,5 Д) 6

30. У извесној игри побеђује играч који стекне 3 поена предности. Два играча A и B играју ту игру и у једном тренутку A има 1 поен предности. Сваки играч има једнаку вероватноћу да освоји следећи поен. Колика је вероватноћа да играч A победи у игри?

- А) $\frac{1}{2}$ Б) $\frac{2}{3}$ В) $\frac{3}{4}$ Г) $\frac{4}{5}$ Д) $\frac{5}{6}$