ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Материјали за младе математичаре
Свеска 54

1100 ЗАДАТАКА

са математичких такмичења ученика основних школа 2004–2013. године

БЕОГРАД, 2013.

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
Материјали за младе математичаре, св. 54

Републичка комисија за математичка
такмичења ученика основних школа

1100 ЗАДАТАКА

СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

2004–2013. године

Б Е О Г Р А Д
2013.

Аутори: *др Војислав Андрић, Ђорђе Баралић, Јожеф Б. Варга*
др Ненад Вуловић, др Драган Ђорић, Милош Ђорић,
Диана Зита, Александар Илић, мр Милан Јовановић,
Вера Јоцковић, Мирјана Катић, Славољуб Милосављевић,
др Бранислав Поповић, др Ратко Тошић

1100 ЗАДАТАКА

са математичких такмичења ученика основних школа 2004–2013. године

Материјали за младе математичаре, свеска 54

Издавач: ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
Београд, Кнеза Михаила 35/IV
www.dms.org.rs, e-mail: drustvomatematicara@yahoo.com

За издавача: *др Александар Липковски*

Рецензент: *др Зоран Каделбург*

Уредник: *др Зоран Каделбург*

Цртежи: *др Ненад Вуловић*

© Друштво математичара Србије

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

37.016 : 51(075.2)(079.1)

ХИЉАДУ сто задатака

1100 задатака са математичких такмичења ученика основних школа 2004–2013. године / [аутори Војислав Андрић ... [и др.] ; цртежи Ненад Вуловић]. – Београд : Друштво математичара Србије, 2013. (Крагујевац : Сквер). – 268 стр. : граф. прикази, табеле ; 21 cm – (Материјали за младе математичаре ; св. 54)

На врху насл. стр.: Републичка комисија за математичка такмичења ученика основних школа. – Тираж 1500.

ISBN 978–86–81453–92–6
1. Андрић, Војислав, 1952– (аутор)

COBISS.SR–ID 201669132

ISBN 978–86–81453–92–6

Тираж: 1500 примерака

Штампа: „Сквер“, Крагујевац

С А Д Р Ж А Ј

	Задаци	Решења
2004. година	1	117
2005. година	12	132
2006. година	23	149
2007. година	34	167
2008. година	45	182
2009. година	57	198
2010. година	69	214
2011. година	81	228
2012. година	92	241
2013. година	105	255

ПРЕДГОВОР

Ова збирка садржи све задатке (са решењима) са такмичења из математике ученика основних школа из последњих десет година – од 2004. до 2013. године, и то са свих нивоа – од школског, преко општинског, окружног, републичког (државног), савезног (односно Српске математичке олимпијаде), до Балканијаде. Укључени су задаци са десет Јуниорских балканских математичких олимпијада из наведених година.

Београд, октобра 2013. год. *Аутори*

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2004.

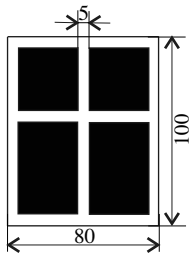
IV разред

1. Сабери највећи петоцифрени број написан различитим цифрама и најмањи шестоцифрен број написан различитим цифрама.

2. Умањилац је 2004, а разлика је пет пута већа од умањиоца. Колики је умањеник?

3. Ако се дужина правоугаоника повећа за 4 cm, а ширина за 6 cm добија се квадрат површине 81 cm^2. Колики је обим правоугаоника?

4. Марија се играла на рачунару тако што је откуцала један иза другог природне бројеве 123456789101112 . . . . Ако је Марија откуцала укупно 219 цифара, колико пута је откуцала цифру 1?



Сл. уз задатак 5

5. Наћи укупну површину стаклених делова на једном крилу прозора (осенчени део – видети слику) ако су сви његови дрвени делови ширине 5 cm, док је укупна ширина прозора 80 cm, а његова висина 100 cm.

V разред

6. Нацртај кружне линије $k_1(O_1, 2\,\mathrm{cm})$ и $k_2(O_2, 3\,\mathrm{cm})$ ако је $O_1O_2 = 6\,\mathrm{cm}$. Одредити тачке $A \in k_1$ и $B \in k_2$ тако да је дуж AB:

(а) најкраћа (б) најдужа.

Колика је тада дужина дужи AB?

7. Одредити све двоцифрене бројеве који при дељењу са 21 дају остатак 10.

8. Израчунај меру угла који је за $2004'$ већи од њему комплементног угла.

9. Одредити све четвороцифрене бројеве мање од 3000 такве да им је производ цифара 105.

10. Одредити све скупове X који задовољавају услове:

$$X \subset \{a, b, c, d, e\} \quad \text{и} \quad X \cap \{a, c, d\} = \{a, d\}.$$

VI разред

11. Збир 10 узастопних целих бројева је -5. Који су то бројеви?

12. У $\triangle ABC$ повучене су симетрале углова $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle ABC$. Под којим углом се секу те две симетрале ако се зна да је $\measuredangle BAC = 2004'$, а $\measuredangle ABC = 86°$?

13. За које вредности променљиве је израз $-7(-2-3x)$ већи од количника бројева -49 и 7?

14. Наћи збир целобројних решења неједначине $|x+5| \leqslant 7$.

15. У троуглу ABC угао β је већи од угла γ за $20°$, а мањи од угла α за $20°$. Симетрала угла α сече страницу BC у тачки D. шта је веће BD или CD?

VII разред

16. Делтоид чине два једнакокрака троугла са основицом $40\,\mathrm{cm}$ и крацима од $25\,\mathrm{cm}$, односно $52\,\mathrm{cm}$. Израчунати површину делтоида.

17. Да ли је број $0{,}2323323332\ldots$ (број тројки се стално повећава за 1) рационалан? Објаснити.

18. Доказати да је $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}} < 3$.

19. Израчунати: $a = \dfrac{3\sqrt{501}+\sqrt{3}\sqrt{668}-3\sqrt{2004}}{\sqrt{2004}}$.

20. За дати једнакостранични троугао конструисати квадрат такав да му је површина $\sqrt{3}$ пута већа од површине датог троугла.

VIII разред

21. За које вредности променљиве p израз $\dfrac{2p-\frac{3}{4}}{1-\frac{p}{2}}$ има вредност мању од 1?

22. Површина највећег дијагоналног пресека правилне шестостране призме је квадрат површине $64\,\mathrm{cm}^2$. Наћи запремину те призме.

23. Збир два броја је 135. Ако 35% једног броја износи колико и 28% другог броја, који су то бројеви?

24. Израчунати $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$.

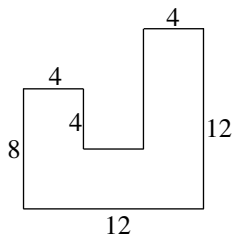
25. Израчунати површину круга описаног око правоуглог троугла чије су две странице $2\,\mathrm{cm}$ и $\sqrt{5}$ cm.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2004.

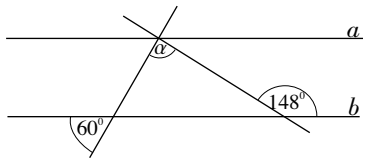
IV разред

26. Израчунати $4008 - 2004 : 6 + 6 \cdot 2004$.

27. Наћи обим и површину фигуре на слици.



Сл. уз задатак 27



Сл. уз задатак 32

28. Хокејашки тим састоји се од 6 играча на леду и 9 резерви на клупи. Сваки од 15 играча провео је исто време у игри на леду (замене су неограничене). Колико је времена сваки играч провео на леду ако меч траје 30 минута?

29. Ако се сва поља шаховске табле (8×8 квадрата) поређају једно поред другог, добије се правоугаоник обима 260 cm. Израчунати површину шаховске табле.

30. За неки природан број ћемо рећи да је „занимљив“ ако је записан међусобно различитим цифрама чији је збир једнак 45. Наћи збир највећег и најмањег „занимљивог“ броја.

V разред

31. Наћи све разломке са бројиоцем 8 и имениоцем из скупа природних бројева који су већи од $\frac{2}{5}$ и мањи од $\frac{4}{5}$.

32. Наћи угао α ако су позната два означена угла (видети слику) и ако се зна да су праве a и b паралелне.

33. Колико има четвороцифрених природних бројева записаних само цифрама 2, 3, 5 и 8 (цифре не могу да се понављају) који су дељиви са 12?

34. Збир углова упоредних углу α је 8 пута већи од угла α. Одредити меру угла комплементног углу α.

35. Шта је веће, $\frac{3*5*}{36}$ или $\frac{5*3*}{45}$, ако уместо звездица могу да стоје било које цифре?

VI разред

36. Решити неједначину $|x| + 1\frac{1}{4} > 4{,}5$.

37. Нека је AB тетива кружне линије $k(O,r)$ и C тачка која припада тој тетиви, таква да је $OC \perp AB$. Доказати да је $AC = BC$.

38. Ако различитим словима одговарају различите цифре, решити ребус

$$\begin{array}{r} \text{Ђ А К} \\ +\,\text{Б Л О К} \\ \hline \text{К Њ И Г А} \end{array}$$

39. У троуглу ABC је $\measuredangle CAB = 45^\circ$ и $\measuredangle ABC = 60^\circ$. Наћи углове троугла AOS, где је O центар уписане кружнице троугла ABC, а S пресек симетрале $\measuredangle ACB$ и спољашњег угла код темена A.

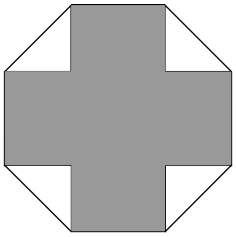
-10		-7
	-2	

40. Попунити празна поља таблице тако да збирови бројева у свим врстама, колонама и дијагоналама буду једнаки.

VII разред

41. Израчунати $\sqrt{(-4)^2} + (2^2)^2 \cdot \dfrac{5^{-8+2\cdot 7}}{\left(\sqrt{13+\sqrt{139+\sqrt{(-5)^2}}}\right)^3}$.

42. Израчунати површину осенченог дела правилног осмоугла странице $2\,\mathrm{cm}$.



Сл. уз задатак 42

43. Записати у облику разломка број $2,32004200420042004\ldots$.

44. Израчунати површину трапеза чије су основице дужина $a = 25\,\mathrm{cm}$, $b = 15\,\mathrm{cm}$ и краци $c = 6\,\mathrm{cm}$ и $d = 8\,\mathrm{cm}$.

45. Шта је веће, $5 \cdot 3^{61}$ или $3 \cdot 5^{41}$?

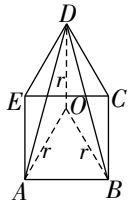
VIII разред

46. Именилац датог разломка је за два већи од бројиоца. Одредити тај разломак, ако се зна да када се и од бројиоца и од имениоца одузме 1 добије се разломак $\dfrac{1}{2}$.

47. Нека је $ABCDA_1B_1C_1D_1$ правилна четворострана призма основне ивице $12\,\mathrm{cm}$ и висине $8\,\mathrm{cm}$. Израчунати површину пресека $ACMN$ где су M и N средишта ивица B_1C_1 и A_1B_1 редом.

48. Ако је $a(b+c) = bc\left(\dfrac{a}{2004} - 1\right)$, где су $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, израчунати $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.

49. Петоугао $ABCDE$ је добијен „састављањем“ квадрата и једнакостраничног троугла (видети слику). Наћи полупречник описане кружнице око троугла ABD ако је страница тог петоугла дужине a.



Сл. уз задатак 49

50. Наћи све просте бројеве p за које је

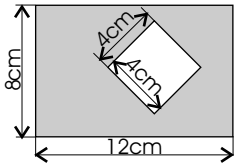
$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{p}+\sqrt{p+1}}$$

природан број.

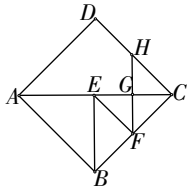
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 2004.

IV разред

51. Израчунати обим и површину осенчене фигуре на слици (према датим подацима).



Сл. уз задатак 51



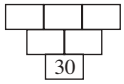
Сл. уз задатак 54

52. Збир два броја је 8016. О којим бројевима је реч ако се зна да је један од њих једнак трећини другог?

53. Ако различитим словима одговарају различите, а истим исте цифре, решити ребус $A+A\,A+B\,A\,A+B\,A\,A=2004$.

54. Навести све троуглове који се виде на слици.

Сл. уз задатак 55а



Сл. уз задатак 55б

55. Ако се табела попуњава као на слици а), уписати у празна поља на слици б) одговарајуће бројеве. Наћи сва решења.

V разред

56. Разлика два угла са паралелним крацима једнака је половини мањег. Израчунати меру угла комплементног мањем углу.

57. Наћи најмањи и највећи троцифрен природан број који при дељењу са 16 има количник исти као и остатак.

58. Ученик је у прва четири разреда порастао 17 cm. Сваке године је порастао природан број центиметара и сваке године више него претходне. У четвртом разреду је порастао три пута више него у првом. Колико је порастао у трећем разреду?

59. Нека су a и b паралелне праве. Нека тачке A, B, C припадају правој a и нека тачке K, L, M припадају правој b. Колико четвороуглова је одређено овим тачкама?

60. У двоцифреном броју прецртана је једна цифра и добијен је број који је 16 пута мањи од првобитног. Одредити све такве двоцифрене бројеве и у сваком од њих цифру коју треба прецртати.

VI разред

61. На стоваришту је било 304 тона робе. Најпре је однето $\frac{3}{8}$ робе, а затим $\frac{4}{5}$ преостале робе. Колико је тона робе остало на том стоваришту?

62. Дат је правоугоник $ABCD$ ($AB = 2BC = a$). Кружна линија са центром у тачки C и полупречником дужине a сече страницу AB у тачки M. Израчунати $\measuredangle CDM$.

63. Написати разломак $\frac{17}{2004}$ у облику збира два позитивна разломка са троцифреним имениоцима.

64. Конструисати троугао ABC ако је дата страница $AB = 4\,\mathrm{cm}$, тежишна дуж $BB_1 = 5\,\mathrm{cm}$ и $\measuredangle ABC = 60^\circ$.

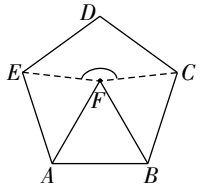
65. Ако истим словима одговарају исте, а различитим различите цифре, решити ребус

$$\text{М} : \text{А} = \text{Т} - \text{Е} = \text{М} \cdot \text{А} = \text{Т} : \text{И} = \text{К} - \text{А}.$$

VII разред

66. Ако је $a + \frac{1}{a}$ цео број већи од 2, доказати да је $a^3 + \frac{1}{a^3}$ сложен број.

67. У правилан петоугао $ABCDE$ уцртан је једнакостранични троугао ABF као на слици. Израчунати угао EFC означен на слици.



Сл. уз задатак 67

68. Доказати да у запису броја 2^{2004} постоји цифра која се појављује бар 61 пут.

69. У једнакокраком трапезу, са краком дужине 5 cm, једна основица је два пута дужа од друге. Ако је један унутрашњи угао трапеза $75°$, израчунати његову површину.

70. Колико има бројева већих од 500 и мањих од 10000 код којих никоје две суседне цифре нису једнаке?

VIII разред

71. Колико је лима потребно за израду једног шупљег тела које чине омотачи две праве четворостране пирамиде са заједничком основом? Основа има облик правоугаоника са страницама 8 dm и 6 dm, а висине ових пирамида су по 12 dm.

72. Доказати да не постоје позитивни реални бројеви a, b и c, такви да је $a + \frac{1}{b} < 2$, $b + \frac{1}{c} < 2$ и $c + \frac{1}{a} < 2$.

73. У троуглу ABC конструисане су висине AA' и CC'. Ако је H ортоцентар, $AH = HA'$ и $CH : HC' = 2 : 1$,

(а) одредити $\measuredangle ABC$; (б) доказати да је $AB : CC' = 4 : 3$.

74. У једном граду спроведена је анкета у којој је учествовало 20040 ученика који уче или енглески или немачки језик (тачно један од њих). Од ученика који уче енглески језик, из непознатих разлога, 20% је изјавило је да учи немачки и, слично, 20% ученика који уче немачки у анкети је изјавило да учи енглески. По овој анкети 40% ученика у овом граду је изјавило да учи немачки језик. Колико ученика у овом граду учи енглески језик?

75. M и K су тачке на страницама AB и CD, редом, паралелограма $ABCD$, такве да је $AM = CK$, а P је произвољна тачка на страници AD. Нека је $\{E\} = MK \cap PB$ и $\{F\} = MK \cap PC$. Доказати да је:

(а) $P_{\triangle EPF} = P_{\triangle BME} + P_{\triangle CFK}$; (б) $P_{BCFE} = P_{APEM} + P_{PDKF}$.

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ 2004.

VI разред

76. Сваки пут када погреши при изради домаћег задатка, Милан истргне један лист из свеске. Тако му се десило да из једне свеске истргне 25% листова, а из друге, исте такве свеске, сваки девети лист. Колико је било првобитно у свакој свесци и за колико процената се смањио укупан број листова (у обе свеске заједно) ако је Милан истргао укупно 26 листова?

77. У четвороуглу $ABCD$ углови ABC и ADC су прави. Нека су M и N тачке на страницама BC и DC (редом) такве да је $BM = DN$ и $\measuredangle BAM = \measuredangle DAN$. Доказати да се дијагонале AC и BD тог четвороугла секу под правим углом.

78. Нека је x троцифрен број чије су све цифре међусобно различите и различите од нуле. Збир свих троцифрених бројева који имају цифре исте као и број x је три пута већи од троцифреног броја чије су све цифре једнаке цифри стотина броја x. Одредити број x.

79. Нека је тежишна дуж AA_1 троугла ABC нормална на симетрали угла ABC тог троугла. Дужине страница $\triangle ABC$ су узастопни природни бројеви мерних јединица, рецимо центиметара. Колике су те дужине страница троугла ABC?

80. На табли су написани бројеви $1, 2, 3, 4, \ldots, 221, 222$. Дозвољено је у једном кораку било која два броја увећати за по 1. Да ли се, после извесног броја корака, могу добити сви једнаки бројеви? Одговор детаљно образложити.

VII разред

81. Између сваке две цифре броја 121 уписано је по 2004 нуле. Наћи квадратни корен тако добијеног броја.

82. Површина правоугаоника $ABCD$ је $2004\,\mathrm{cm}^2$. У троугао ABD уписана је кружна линија са центром у тачки O. Ако уочимо тачку $P \in BC$ и $Q \in CD$ тако да је $OP \parallel CD$ и $OQ \parallel BC$, израчунати површину правоугаоника $OPCQ$.

83. Одредити најмањи природан број n који је истовремено збир 7 узастопних природних бројева, збир 11 узастопних природних бројева, збир 13 узастопних природних бројева и није збир два узастопна природна броја.

84. Кружна линија полупречника $10\,\mathrm{cm}$ додирује две суседне странице квадрата, а крајње тачке једног пречника припадају другим двема страницама квадрата. Израчунати површину квадрата.

85. Дате су 2004 јединице. Бранко и Ратко играју игру тако што наизменично (један симбол ставља Бранко, па онда Ратко) између јединица редом стављају симболе $+$ и $\cdot$, при чему први игра Бранко.

(а) Може ли Бранко да победи ако се игра састоји у томе да вредност израза који се добија треба да буде паран број?

(б) Може ли Ратко да победи ако се игра састоји у томе да вредност израза који се добија треба да буде непаран број?

Подразумева се да оба играча играју без грешке, тј. примењују оптималну стратегију.

VIII разред

86. Воја је решио да у свом вођњаку засади 270 садница. Сваког дана је садио онај број садница који се добија када израчуна збир цифара броја који је збир

броја садница које је засадио претходног дана и његовог збира цифара. Зна се да је првог дана засадио једну садницу. Колико му је дана требало да засади све саднице? Детаљно образложити решење.

87. На страницама BC и CD правоугаоника $ABCD$ уочене су редом тачке M и N тако да је $BM = 2MC$ и $CN = 2ND$. Наћи однос страница тог правоугаоника $ABCD$, ако се зна да је троугао AMN правоугли са хипотенузом AM.

88. Неки број се повећа за 45 ако му цифре јединица и десетица замене места, а исти број се смањи за 270 ако цифре стотина и десетица замене места. шта ће се догодити са тим бројем ако цифре стотина и јединица замене места?

89. Наћи најмањи природан број који је 2004 пута већи од збира својих цифара.

90. Нека су M и N тачке на ивицама $A'B'$ и $A'D'$ коцке $ABCDA'B'C'D'$ тако да је $A'M + A'N = AB$. Доказати да је $\measuredangle A'AM + \measuredangle A'AN + \measuredangle MAN = 90°$.

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ 2004.

VI разред

91. Одредити све троцифрене бројеве који имају тачно 5 делилаца (укључујући јединицу и сам број).

92. У једнакокраком троуглу ABC је $\measuredangle ABC = \measuredangle BAC = 40°$. Симетрала угла BAC сече крак BC у тачки D. Доказати да је $AD + DC = AB$.

93. Дат је квадрат $ABCD$. Тачка E припада страници AD, тачка F припада страници DC, при чему је $DE = DF$. Ако је G подножје нормале из D на EC, доказати да је $\measuredangle BGF = 90°$.

94. Дат је једнакостранични троугао ABC странице $AB = 12\,\mathrm{cm}$. Нека је M тачка на страници AC, тачка P подножје нормале из M на AB, тачка Q подножје нормале из P на BC и тачка R подножје нормале из Q на AC. Израчунати растојање AM ако се тачка R поклапа са M.

95. Дато је пет природних бројева, Израчунати су сви збирови по два од датих бројева. Да ли добијени збирови могу бити 10 узастопних природних бројева?

VII разред

96. Дат је троугао ABC површине 2004. Нека су M и N, редом, тачке на страницама AB и BC, такве да је $AM : MB = 1 : 3$ и $BN : NC = 2 : 1$. Ако се праве AN и CM секу у тачки S, израчунати површину четвороугла $MBNS$.

97. Ако је $abc = 1$, доказати да је

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right) = \left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 + \left(c+\frac{1}{c}\right)^2 - 4.$$

98. На путу је колона аутобуса. Аутобус сматрамо препуним ако је у њему више од 50 путника. Контролори Воја и Раде зауставили су колону. Воја је одредио проценат препуних аутобуса, а Раде проценат свих путника у препуним аутобусима у односу на укупан број путника. Чији је проценат већи?

99. Дат је правоугаоник $ABCD$ код кога је $AB = 2\,BC$. Кружница k са центром A и полупречником AD сече дијагоналу BD у тачки M. Израчунати угао BMC.

100. Правоугаоник 2×2005 подељен је на 4010 подударних квадрата странице 1. На колико начина се од њих могу изабрати 2004 квадрата тако да међу њима нема суседних? (Два квадрата су суседна ако имају заједничку страницу.)

VIII разред

101. У равни су дате 2004 тачке. Неки парови тачака су спојени дужима. Доказати да постоје две тачке из којих полази једнак број дужи.

102. Основна ивица правилне тростране призме $ABCA_1B_1C_1$ је $AB = a$, а висина је $CC_1 = a\sqrt{2}$. Нека је α раван одређена тачкама A, C_1 и средиштем ивице BB_1, а β раван одређена тачкама C, B_1 и средиштем ивице AB. Одредити дужину дужи која припада пресеку равни α и β и налази се унутар призме.

103. Доказати да једначина $x^2 + y^3 = z^2$ има бесконачно много решења у скупу природних бројева.

104. Нека је M тачка унутар квадрата $ABCD$, таква да је $\measuredangle MDC = \measuredangle MBD = 20^\circ$. Израчунати угао MAB.

105. Дати су реални бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}$, такви да важи

$$a_1a_{2004} = a_2a_{2003} = \cdots = a_{1002}a_{1003} = 1.$$

Доказати да је $\dfrac{1}{1+a_1^{2004}} + \dfrac{1}{1+a_2^{2004}} + \cdots + \dfrac{1}{1+a_{2004}^{2004}} = 1002.$

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА 8. ЈУНИОРСКОЈ БАЛКАНИЈАДИ

106. У изразу $2004^2 * 2003^2 * \cdots * 2^2 * 1^2$ сваку звездицу заменити знаком $+$ или $-$ тако да вредност израза буде прост број.

107. Да ли постоји деветоцифрени природан број чије су све цифре међусобно различите и различите од нуле, који је дељив са 5 и потпун је квадрат?

108. Дат је лењир на коме су обележене две тачке. Користећи само овај лењир конструисати произвољну нормалу на дату праву.

109. Ако је разлика кубова два узастопна природна броја једнака n^2, доказати да је број n једнак збиру квадрата два узастопна природна броја.

ОСМА ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Нови Сад, 2004.

110. Доказати да неједнакост

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

важи за све реалне бројеве x и y, који нису оба једнаки нули.

111. Нека је ABC једнакокраки троугао, $AC = BC$, нека је M средиште дужи AC и нека је l права која пролази кроз тачку C а ортогонална је на AB. Кружница кроз B, C и M сече l у тачкама C и Q. Изразити полупречник круга описаног око троугла ABC преко $m = CQ$.

112. Ако су природни бројеви x и y такви да су бројеви $3x+4y$ и $4x+3y$ потпуни квадрати, доказати да су и x и y дељиви са 7.

113. Дат је конвексан полигон са n темена, $n \geqslant 4$. Разложимо на произвољан начин тај полигон на троуглове чија су темена истовремено и темена полигона, тако да никоја два од тих троуглова немају заједничких унутрашњих тачака. Обојимо у црно троуглове који имају две странице које су такође странице полигона, у црвено троуглове чија је само једна страница истовремено и страница полигона, а у бело оне троуглове који немају заједничких страница са полигоном. Доказати да је број црних троуглова за два већи од броја белих.

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2005.

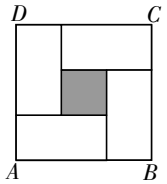
IV разред

114. Напиши разлику производа $4050 \cdot 6$ и количника $5004 : 6$, и одреди њену вредност.

115. У скупу $\mathbf{N}_0$ одреди решења неједначине $2524 - x > 2425$.

116. Бранко, Воја и Драган имају 36 ораха. Када је Бранко дао Воји 6 ораха, а Воја Драгану 4 ораха, сваки од њих је имао исти број ораха. Колико је ораха имао сваки од њих на почетку?

117. На слици је дат квадрат $ABCD$, подељен на четири правоугаоника и један мали квадрат. Обим сваког од правоугаоника је 90 mm. Ако је дужина сваког од тих правоугаоника два пута већа од ширине, наћи колико је пута обим квадрата $ABCD$ већи од обима осенченог квадрата.



Сл. уз задатак 117

118. Колико има непарних четвороцифрених бројева који су дељиви са 5?

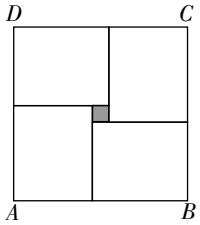
V разред

119. Одредити скуп свих троцифрених бројева дељивих са 9 чије цифре припадају скупу $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ и могу се понављати.

120. Израчунај меру угла који је за $2005'$ већи од њему суплементног угла.

121. Од 18 белих ружа, 45 жутих ружа и 72 црвене руже направљен је највећи могући број букета са истим бројем ружа истих боја (све руже морају бити употребљене). Ако је цена једне беле руже 10, жуте 15, а црвене 20 динара, одреди највећи могући број букета и израчунај колико ће да кошта један такав букет.

122. Квадрат $ABCD$ подељен је на четири правоугаоника и један мали квадрат (види слику). Сви правоугаоници имају једнаке одговарајуће странице, а површина сваког од тих правоугаоника је $506\,\mathrm{cm}^2$. Ако су дужине страница сваког од правоугаоника узастопни природни бројеви, колико пута је површина квадрата $ABCD$ већа од површине осенченог квадрата?



Сл. уз задатак 122

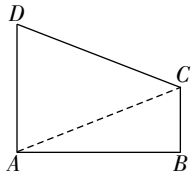
123. Дат је скуп $S = \{1, 2, 3, \ldots, 2005\}$. Постоје ли скупови A и B такви да је $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = S$ и збир бројева из скупа A једнак је збиру бројева из скупа B? Образложи одговор.

VI разред

124. Одреди углове троугла ако су збир и разлика два спољашња угла једнаки $\alpha_1 + \beta_1 = 220°$, $\alpha_1 - \beta_1 = 16°$.

125. Тачке A, B и права p се налазе у једној равни и тачке A и B су са исте стране праве p. Одредити на правој p тачку M за коју је збир растојања од тачака A и B најмањи.

126. Израчунај збир свих целобројних решења неједначине $|x - 1| < 2005$.



Сл. уз задатак 127

127. На слици је дат четвороугао (правоугли трапез) тако да је $\measuredangle BAD = \measuredangle ABC = 90°$ и $AD = 2BC$. Доказати да је $AC = CD$.

128. Одреди целе бројеве a, b и c који задовољавају услове $a < b < c$, $abc = 308$ и $ac = -28$.

VII разред

129. Ако је $a = 5$ и $b = -0{,}2$, израчунај $a^{2004} \cdot b^{2006}$.

130. У правоуглом троуглу ABC је $\measuredangle ACB = 90°$, $b = 3\,\mathrm{cm}$ и $t_b = 2{,}5\,\mathrm{cm}$. Наћи површину и обим троугла ABC.

131. Нацртај квадрат $ABCD$ странице a. Конструиши квадрат $A_1B_1C_1D_1$ такав да је $P_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{5}{4}P_{ABCD}$.

132. У једнакокраком троуглу ABC ($AC = BC$) је $\alpha + \gamma = 118°$. Шта је веће, висина која одговара краку или висина која одговара основици?

133. Постоје ли узастопни природни бројеви a, b и c такви да је $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{53}{60}$?

VIII разред

134. Ако се свака ивица коцке повећа за 20%, за колико ће се процената повећати површина те коцке?

135. Збир два броја је 2005. Ако 17% једног броја износи колико 68% другог броја, који су то бројеви?

136. Нека су α и β две паралелне равни, међусобно удаљене $12\,\mathrm{cm}$. У равни α дате су тачке A и C, а у равни β тачке B и D. Одреди угао који права, одређена тачкама C и D, гради са равни α, ако права одређена тачкама A и B гради са равни α угао од $30°$ и $AB + CD = 48\,\mathrm{cm}$.

137. Колико се највише различитих природних бројева може сабрати да се добије збир 2005?

138. На колико различитих начина три друга могу поделити 7 кликера? Узети у обзир и могућност да неки од другова може добити све кликере.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2005.

IV разред

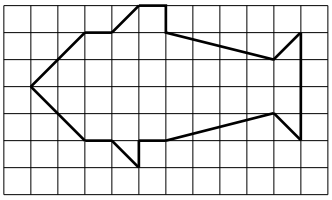
139. Ученик је замислио један број. Прво је тај број помножио бројем 12, а други пут бројем 9 и саопштио да је први производ већи од другог за 270. Који је број замислио ученик?

140. Дато је шест картона облика правоугаоника дужине 3 cm и ширине 2 cm. Користећи све дате картоне саставити један правоугаоник. (Квадрат је такође правоугаоник.) Израчунати:

(а) највећи могући (б) најмањи могући

обим тако састављеног правоугаоника.

141. Одреди површину приказане фигуре ако је јединица мере један квадратић са квадратне мреже.



Сл. уз задатак 141

142. Цена две оловке и три свеске је 100 динара, а цена три оловке и две свеске је 75 динара. Колико је потребно новца за куповину 60 свезака и 41 оловке?

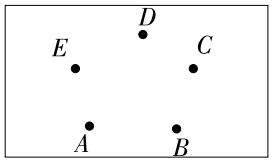
143. Природни бројеви a и b су такви да важи $a - b = 2005$. Наћи најмању вредност израза $2005 \cdot a - 2004 \cdot b$.

V разред

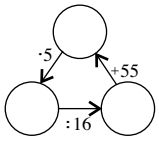
144. Разлика два упоредна угла једнака је половини мањег. Доказати да је угао комплементан мањем углу једнак четвртини мањег угла.

145. Цена две оловке и три свеске је 100 динара, а цена три оловке и две свеске је 75 динара. Колико највише предмета се може купити за 2005 динара?

146. У равни је дато пет тачака као на слици. Да ли има више дужи са крајевима у тим тачкама или троуглова са теменима у тим тачкама?



Сл. уз задатак 146



Сл. уз задатак 148

147. У четвороцифреном броју $\overline{32\clubsuit4}$ замени $\clubsuit$ одговарајућом цифром тако да добијени број буде дељив са 12.

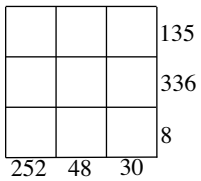
148. У кругове (видети слику) уписати бројеве тако да све три једнакости приказане шемом буду тачне.

VI разред

149. Одредити све целе бројеве n такве да је $-\frac{1}{3} < \frac{n+1}{15} < \frac{1}{5}$.

150. Цена две оловке и три свеске је 100 динара, а цена три оловке и две свеске је 75 динара. Ако је за 101 предмет плаћено 2005 динара, колико је купљено свезака, а колико оловака?

151. Висине CD и AE оштроуглог троугла ABC секу се у тачки H. Ако је $AB = CH$ израчунати $\measuredangle ACB$.



Сл. уз задатак 152

152. Бројеве $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ уписати у девет поља квадрата (видети слику) тако да производи по колонама и врстама буду једнаки датим бројевима (доле и десно).

153. У квадрату странице 44 cm дато је 2005 тачака. Доказати да се од тих тачака могу изабрати две чије је међусобно растојање мање од 2 cm.

VII разред

154. Доказати да је број $\overline{abcabc}$, где су $a, b, c \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ и $a \neq 0$, дељив са 7, 11 и 13.

155. Израчунати висину једнакокраког трапеза површине $16\,\mathrm{cm}^2$ ако се зна да су му дијагонале нормалне.

156. Цена две оловке и три свеске је 100 динара, а цена три оловке и две свеске је 75 динара. Да ли може да се за 2005 динара купи 205 предмета?

157. Дат је правоугли $\triangle ABC$ такав да је $\measuredangle ACB = 90^\circ$, $CA = \sqrt{5}$ и $CB = 2\sqrt{5}$. Нека је $D \in AB$ и $CD = \sqrt{5}$. Одредити обим и површину троугла BCD.

158. Доказати да не постоје прости бројеви p, q и r такви да је $p^2+q^2+r^2 = 2005$.

VIII разред

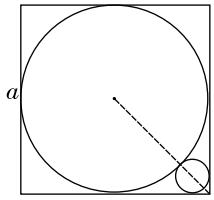
159. Наћи заједничка решења неједначина:

$$\frac{3}{4}y - \frac{2}{3}(y-1) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \frac{1-y}{2} - \frac{2+y}{3} < 0.$$

160. Цена две оловке и три свеске је 100 динара, а цена три оловке и две свеске је 75 динара. На колико начина се може потрошити 2005 динара за набавку свезака и оловака?

161. Ако правилну четворострану призму пресечемо једном равни која садржи ивицу основе и са основом захвата угао од 30°, добијамо тела чије су запремине у односу $1 : 2$. Израчунати запремину те правилне четворостране призме у зависности од странице основе.

162. У квадрат странице a уписан је круг, а затим је (видети слику) уписан још један мали круг који додирује велики круг и две странице квадрата. Наћи површину мањег круга.



Сл. уз задатак 162

163. Милан је написао десет узастопних природних бројева. Збир цифара ниједног од тих бројева није дељив бројем седам. Који је најмањи број који је Милан могао да напише?

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 2005.

IV разред

164. Колико је укупно цифара потребно одштампати за нумерацију књиге која има 225 страна?

165. Збир два броја је 2005, а њихова разлика умањена за 1 је 1000. Одредити те бројеве.

166. Квадрат је разрезан на два правоугаоника. Збир обима тих правоугаоника је за 210 cm већи од обима квадрата. Површина једног правоугаоника је четири пута већа од површине другог. Израчунај обим мањег правоугаоника.

167. Звездице заменити цифрама, тако да се добије тачна једнакост:

$$7 \star 8 = \star 9 \cdot 8 + 7 \star .$$

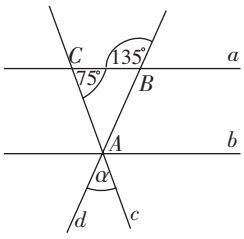
168. У празна поља (види слику) уписати бројеве тако да збирови по три броја у свакој врсти, колони и дијагонали буду међусобно једнаки.

	4	
10		
5		7

Сл. уз задатак 168

V разред

169. Израчунати меру угла α (види слику) ако су праве a и b паралелне.



Сл. уз задатак 169

170. Мерни бројеви дужина ивица квадра су природни бројеви. Површина квадра је $P = 592\,\mathrm{cm}^2$, а запремина $V = 960\,\mathrm{cm}^3$. Ако је дужина једне ивица тог квадра $a = 12\,\mathrm{cm}$, одредити дужине остале две ивице.

171. Одредити најмањи природан број дељив са 36 који је записан само цифрама 4 и 7.

172. Један пешчани сат мери 10 min (пресипање садржаја песка из једног у други део траје 10 min), а други пешчани сат мери 7 min. Како се коришћењем ова два сата може измерити 23 min?

173. У празна поља (види слику) уписати бројеве тако да збирови по три броја у свакој врсти, колони и дијагонали буду међусобно једнаки.

		$\frac{4}{5}$
$\frac{7}{10}$		
		0,4

Сл. уз задатак 173

VI разред

174. Одредити све целе бројеве x за које је $|x| < 3$ и $|1 - x| < |1 + x|$.

175. На страницама ромба $ABCD$ дате су тачке E, F, G и H које припадају редом страницама AB, BC, CD и DA тако да важи $AE = AH = CF = CG$. Доказати да је четвороугао $EFGH$ правоугаоник.

176. Одредити све просте бројеве p, q и r такве да је $p + 5q + 7r = 47$ (p, q и r не морају бити различити).

177. Одредити најмањи разломак $\frac{x}{y}$ (x и y природни бројеви) такав да су количници $\frac{x}{y} : \frac{11}{210}$ и $\frac{x}{y} : \frac{11}{280}$ природни бројеви.

178. Конструисати троугао ABC ако је дато $h_a = 4\,\text{cm}$, $t_a = 6\,\text{cm}$ и $t_b = 9\,\text{cm}$.

VII разред

179. Средишта страница правилног шестоугла странице дужине a су темена новог шестоугла. Доказати да је тај нови шестоугао правилан и одредити његову површину у зависности од a.

180. Одредити три проста броја чији је производ 47 пута већи од њиховог збира.

181. Нека је $ABCD$ четвороугао чије се дијагонале секу под правим углом. Ако су M и N средине страница AD и BC доказати да је $2MN \leqslant AD + BC$.

182. Број је „ружичаст“ ако у свом запису има цифре 1 и 2 које су суседне. Колико има „ружичастих“ четвороцифрених бројева којима су све цифре различите?

183. Од квадрата са страницама целобројне дужине треба сложити правоугаоник површине 2005. Колико је најмање квадрата потребно?

VIII разред

184. Дата је функција $y = (2m + 1)x + 6$.

(а) Одредити вредност броја m тако да њен график садржи тачку $M(4, 3)$.

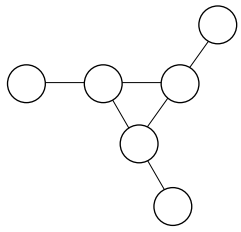
(б) За ту вредност броја m, одредити удаљеност координатног почетка од тог графика.

185. На страници AB троугла ABC уочена је тачка D. Нека су r, r_1 и r_2 редом дужине полупречника уписаних кружница у троуглове ABC, ADC и DBC. Доказати да је $r_1 + r_2 > r$.

186. Одредити просте бројеве p, q и r тако да важи $p + pq + pqr = 2005$.

187. Теме коцке удаљено је 2005 cm од дијагонале коцке. Наћи површину и запремину те коцке.

188. Бројеви $1, 2, 3, 4, 5$ и 6 могу се уписати у кругове (види слику) тако да су збирови по сва три правца међусобно једнаки. Доказати да је збир бројева уписаних у кругове који чине нацртани троугао дељив са 3.



Сл. уз задатак 188

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ 2005.

VI разред

189. У хотелу Славија у Врњачкој Бањи цена пансиона је у фебруару повећана за 20%, а онда у марту снижена за 20%. У исто време у хотелу Звезда је у фебруару прво снижена цена за 20%, а затим повећана за 20%. Сада је разлика у цени пансиона 240 динара. Колика је та разлика била пре прве промене цене?

190. Доказати да у $\triangle ABC$ чије су странице a, b и c и t_c дужина тежишне дужи из темена C важи

$$\frac{a+b-c}{2} < t_c < \frac{a+b}{2}.$$

191. Троцифрени број $\overline{abc}$ је за 860 већи од троцифреног броја $\overline{def}$. Одредити све шестоцифрене бројеве $\overline{abcdef}$ који су дељиви са 9.

192. Нека је $ABCD$ ромб. Конструисати кружницу тако да су темена датог ромба на једнаким растојањима од те кружнице. Колико има решења? [Под растојањем тачке M од кружнице $k(O, r)$ подразумевамо број $|OM - r|$.]

193. Природни бројеви од 1 до mn уписани су у поља табеле $m \times n$ (m врста и n колона). У поља прве врсте, слева на десно, уписани су редом бројеви $1, 2, \ldots, n$; затим су у поља друге врсте, опет слева на десно, уписани редом бројеви $n+1, n+2, \ldots, 2n$ итд. Ако је број 77 уписан у пету врсту, 127 у седму врсту и 307 у последњу врсту, одредити бројеве m и n.

VII разред

194. Шта је веће, $\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{7}}{6}$ или $\dfrac{1}{\sqrt{12}-\sqrt{6}}$?

195. Симетрала угла ACB сече страницу AB троугла ABC у тачки D. Ако је центар O уписане кружнице у троугао ADC уједно и центар кружнице описане око троугла ABC, израчунати углове троугла ABC.

196. Нека су p, q и r прости бројеви, а a, b и c такви природни бројеви да важи:

$$p = a^b + c, \quad q = b^c + a, \quad r = c^a + b.$$

Доказати да су у том случају два од бројева p, q и r међусобно једнака.

197. У троуглу ABC је $\measuredangle BAC = 65^\circ$, $\measuredangle ABC = 55^\circ$ и $AB = 10\,\mathrm{cm}$. Ако је A' подножје висине из темена A, а B' подножје висине из темена B тог троугла, израчунати дужину дужи $A'B'$ и углове троугла $A'B'C$.

198. У квадрату странице $a = 31\,\mathrm{cm}$ на произвољан начин је распоређено 2005 тачака. Доказати да међу датим тачкама постоје бар две чије је растојање мање од $1\,\mathrm{cm}$.

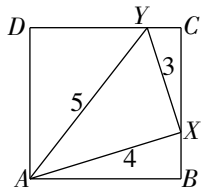
VIII разред

199. Одредити све природне бројеве m и n који су решења једначине

$$\frac{5}{m} + \frac{401}{n} = 1.$$

200. Нека је $ABCV$ правилна тространа пирамида основне ивице a и бочне ивице b. Нека је T тежиште бочне стране BCV и S подножје висине пирамиде из врха V. Доказати да се дужи AT и VS секу и одредити у којој размери пресечна тачка дели дуж AT.

201. У круг су уписани квадрат и једнакостраничан троугао тако да ниједно теме квадрата није истовремено и теме троугла. Доказати да постоји лук одређен двема од тих седам тачака чија дужина није већа од $\dfrac{O}{24}$ (O – обим круга).



Сл. уз задатак 202

202. Тачке X и Y припадају страницама BC и CD квадрата $ABCD$ (видети слику). Дужине дужи XY, AX и AY су редом 3, 4 и 5. Одредити дужину странице квадрата.

203. Један хотел има 40 соба. Цена једнодневног издавања собе је 1000 динара. Ако би се та цена повећала за 50 динара, једна соба би остала празна, ако би се повећала за 100 динара, две собе би остале празне, итд. Трошкови одржавања једне издате собе су 100 динара дневно. Колико би требало да буде цена једнодневног издавања собе, па да дневна зарада хотела буде највећа?

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ 2005.

VI разред

204. Одредити све просте бројеве p и q за које важи једнакост $249 \cdot p^3 + q = 2005$.

205. У троуглу ABC симетрале спољашњих углова код темена A и B секу праве BC и CA редом у тачкама D и E, тако да је $AD = BE = AB$. Израчунати углове троугла ABC ако је:

(а) $\alpha < 90°$; (б) $\alpha > 90°$.

206. Анка, Бранка и Весна су купиле по један примерак исте књиге и при томе потрошиле, редом, 100%, $55\frac{5}{9}$% и 50% новца који је свака од њих имала код себе. Онда су решиле да укупни остатак новца међусобно поделе на једнаке делове. Бранка је дала Анки 100 динара. Колико је новаца Анки дала Весна?

207. Дат је једнакокраки труогао ABC код кога је $AC = BC$. Симетрала угла ABC сече крак AC у тачли D. Права p садржи тачку D, нормална је на BD и сече праву AB у тачки E. Доказати да је $BE = 2 \cdot AD$.

208. На кружници су редом дате тачке A_1, A_2, ..., A_{108}. Свакој тачки је додељен један природан број тако да важе следећи услови:

(а) тачкама A_1, A_{19} и A_{50} су редом додељени бројеви 1, 19 и 50;
(б) збир бројева који су додељени било ком низу од 20 узастопних тачака је 1000.

Одредити који је број додељен тачки A_{100}.

VII разред

209. У оштроуглом троуглу ABC висине BE и AG секу се у тачки D. Тачке M, N, P и Q су, редом, средишта дужи AD, BD, BC и AC. Доказати да је четвороугао $MNPQ$ правоугаоник.

210. Доказати да је број $2002 \cdot 2003 \cdot 2004 \cdot 2006 \cdot 2007 \cdot 2008 + 36$ квадрат неког природног броја.

211. Ако су a и b природни бројеви и ако је број $ab + 1$ дељив са 24, онда је и број $a + b$ дељив са 24. Доказати.

212. Шесторка цифара $abcdef$ представља време на дигиталном часовнику. При томе цифре ab одређују број сати од 00 до 23, цифре cd одређују број минута

од 00 до 59, а цифре ef одређују број секунди од 00 до 59. Колико има оваквих шесторки за које и шесторка цифара $fedcba$ представља време које се може прочитати на дигиталном часовнику?

213. Нека је ABC једнакокраки троугао код кога је $AC = BC$ и угао при врху C једнак $20°$. Ако је M тачка на краку BC и $CM = AB$, одредити величину угла AMB.

VIII разред

214. Одредити најмањи број облика $101010\ldots10101$ који је дељив са 9999.

215. Дужина основне ивице правилне тростране пирамиде је $3\,\mathrm{dm}$. Пирамида је пресечена са равни која садржи једну основну ивицу и нормална је на наспрамну бочну ивицу и при томе је дели у односу $9:8$, рачунајући од темена основе. Израчунати површину пирамиде.

216. Ако су a, b и c дужине страница троугла, онда је

$$\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}-\frac{a}{c}\right|<1.$$

Доказати.

217. Дат је правилан седмоугао $ABCDEFG$ странице 1. Доказати да је

$$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=1.$$

218. На кружници је дато 2005 плавих и 2005 црвених тачака које деле кружницу на 4010 подударних лукова. Свака црвена тачка је средиште неког лука са плавим крајевима. Доказати да је свака плава тачка средиште неког лука са црвеним крајевима.

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА 9. ЈУНИОРСКОЈ БАЛКАНИЈАДИ

219. Дат је правоугли троугао ABC са правим углом код темена B и $BC < AB < 2\,BC$. Нека је M тачка катете AB, таква да је $AM = BC$ и нека је N тачка катете BC, таква да је $CN = BM$. Одредити угао између правих AN и CM.

220. Дат је квадрат странице 2. Унутар квадрата дато је 2005 тачака тако да никоје три нису колинеарне. Квадрат је подељен на троуглове чија су темена све дате тачке и сва темена квадрата. Странице троуглова се међусобно не секу. Доказати да постоји троугао чија површина није већа од $\dfrac{1}{1003}$.

221. Нека су a, b, c и d бројеви из интервала $[0,1]$. Доказати да је

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}-\frac{1}{4}\leqslant\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2.$$

Када важи једнакост?

ДЕВЕТА ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Вериа (Грчка), 2005.

222. Наћи све природне бројеве x, y који задовољавају једначину

$$9(x^2 + y^2 + 1) + 2(3xy + 2) = 2005.$$

223. Нека је ABC оштроугли троугао уписан у кружницу k. Познато је да тангента на кружницу k у тачки A сече праву BC у тачки P. Нека је M средиште дужи AP, а R друга тачка пресека кружнице k и праве MB. Права PR сече поново кружницу k у тачки S, различитој од R. Доказати да су праве AP и CS паралелне.

224. Доказати да:

(а) постоји 5 тачака у равни таквих да међу свим троугловима са теменима у тим тачкама постоји 8 правоуглих троуглова;

(б) постоје 64 тачке у равни такве да међу свим троугловима са теменима у тим тачкама има бар 2005 правоуглих троуглова.

225. Наћи све троцифрене природне бројеве $\overline{abc}$ такве да је

$$\overline{abc} = abc(a + b + c)$$

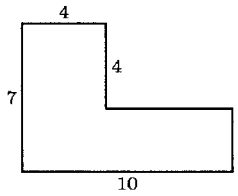
где је $\overline{abc}$ декадни запис броја.

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2006.

IV разред

226. Шта је веће: $27 \cdot 10^6$ или $3 \cdot 10^7$?

227. На основу података на слици израчунати површину фигуре (мере су дате у метрима).



Сл. уз задатак 227

228. Израчунати збир $1 + 2 + 3 + \cdots + 2006$.

229. Слагањем 12 једнаких квадрата странице 1 cm (један до другог, тако да имају заједничку страницу) треба направити правоугаоник. Навести сва решења и одредити који ће од тако добијених правоугаоника имати најмањи обим.

230. Наћи највећи шестоцифрен непаран број чији је збир цифара 4.

V разред

231. Одредити све скупове X за које је $\{2, 3, 4, 5\} \cup X = \{2, 3, 4, 5\}$.

232. Разлика угла α и њему упоредног угла β је $48°$. Израчунати угао комплементан углу β.

233. Одредити све цифре a такве да је производ $\overline{17a} \cdot 520$ дељив са 12.

234. Дуж AB чија је дужина 28 cm подељена је тачкама P и Q на три дела, тако да је први део два пута мањи од другог, а два пута већи од трећег. Ако су M и D средишта крајњих делова, израчунати дужину дужи MD.

235. Ивице дрвеног квадра су 21 cm, 24 cm и 27 cm. Све стране квадра обојене су плавом бојом, а затим је цео исечен на једнаке коцке највећих могућих ивица. Колико тих коцки има плаво обојену само једну страну?

VI разред

236. Одредити све двоцифрене бројеве који су 4 пута већи од збира својих цифара.

237. Нека је D средиште крака BC једнакокраког троугла ABC. Израчунати дужину основице AB тог троугла ако је познато да је његов обим 25 cm, а да је обим троугла ABD за 1 cm већи од обима троугла ADC.

238. Израчунати збир свих природних бројева којима је при дељењу са 6 количник једнак остатку.

239. У оштроуглом троуглу ABC је $\measuredangle BAC = 2\measuredangle ABC$. Доказати да висина из темена C и симетрала угла BCA образују угао једнак полуразлици углова BAC и ABC.

240. Каубој пешачи од места А до места Б, а враћа се назад јашући, и за све то му је потребно $5\frac{1}{4}$ сати. Да је пешачио у оба смера требало би му 7 сати. Колико би му времена требало да је јахао у оба смера? (Подразумева се да каубој пешачи и јаше сталним брзинама.)

VII разред

241. Упоредити бројеве $\sqrt{7-\sqrt{7}}$ и 2.

242. Доказати да вредност израза $(8^{2n+1} \cdot 16^n) : 4^{5n+1}$ не зависи од природног броја n.

243. Израчунати обим једнакокраког трапеза ако су му оштри углови 45°, дужина висине $2\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$ и површина $32\,\mathrm{cm}^2$.

244. Цифра десетица два различита двоцифрена броја је 6. Ако у сваком од њих цифре десетица и јединица замене места, производ тако добијених бројева је једнак производу датих бројева. О којим бројевима је реч?

245. Страница AB правоугаоника $ABCD$ је два пута већа од странице BC. Нека је E тачка странице AB таква да су углови AED и DEC једнаки. Одредити величину тих углова.

VIII разред

246. Доказати да је $4x^2 - 4x + 3 > 0$ за сваки реалан број x.

247. Збир дужина катета датог правоуглог троугла је $22\,\mathrm{cm}$. Ако се једна катета смањи за $4\,\mathrm{cm}$, а друга повећа за $2\,\mathrm{cm}$, добија се правоугли троугао чија је површина једнака површини датог троугла. Одредити дужине катета датог троугла.

248. Одредити бројеве x, y и z такве да је $xy = 20$, $yz = 35$ и $xz = 28$. Наћи сва решења.

249. У кружницу полупречника дужине R смештено је шест подударних мањих кружница полупречника дужине r, тако да свака додирује велику кружницу и две суседне мале кружнице. Одредити R у функцији од r.

250. Колико има четвороцифрених бројева у којима се појављују тачно две различите цифре?

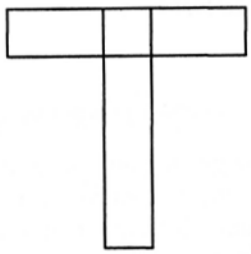
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2006.

IV разред

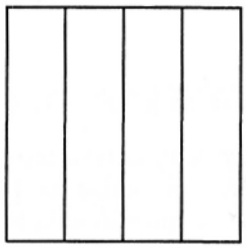
251. Одредити разлику највећег и најмањег шестоцифреног броја записаних помоћу цифара $0, 2, 3, 6, 7$ и 9, тако да се свака цифра појављује у сваком од бројева тачно једном.

252. Ако су x и $x - 2006$ природни бројеви, колико решења има неједначина $x - 2006 < 6002$?

253. Од два правоугаоника чије су дужине страница $15\,\mathrm{cm}$ и $3\,\mathrm{cm}$ делимичним преклапањем (као на слици) добијена је фигура (у облику слова Т). Израчунати обим тако добијене фигуре.



Сл. уз задатак 253



Сл. уз задатак 254

254. Квадрат је подељен на четири једнака правоугаоника (као на слици). Ако је обим једног од тако добијених правоугаоника $20\,\mathrm{cm}$, одредити површину квадрата.

255. Колико листова има књига ако је за нумерисање њених страна употребљено тачно 77 седмица?

V разред

256. Одредити све парове цифара x и y тако да важи $\dfrac{x}{5} - \dfrac{2}{y} = \dfrac{4}{5}$.

257. Означимо са $*$ операцију на скуповима дефинисану са $A*B = (A\backslash B)\cup(B\backslash A)$. Одредити $A * B$ ако је $A = \{\, x \mid x \in \mathbf{N}, 500 \leqslant x \leqslant 2005 \,\}$, а $B = \{\, x \mid x \in \mathbf{N},\ x$ паран $, 1000 \leqslant x \leqslant 2006 \,\}$.

258. Збир два угла износи $\dfrac{8}{9}$ правог угла, а један од њих је за четвртину правог угла већи од другог. Колики су ти углови?

259. Множењем два двоцифрена броја добија се број у чијем се запису појављују једино седмице. Одредити све такве парове двоцифрених бројева.

260. У једној години је било 53 петка. Ако је 1. јануар био четвртак, који дан је био 1. април?

VI разред

261. Одредити 2006-у цифру иза децималне запете у децималном запису броја $\frac{21}{37}$.

262. При сабирању два децимална броја ученик је непажњом код једног од бројева померио децималну запету за два места удесно. Услед тога је уместо резултата 62,5876 добио 295. Које бројеве је ученик требало да сабере?

263. У оштроуглом једнакокраком троуглу ABC дужина основице AB већа је од дужине крака BC. Симетрала угла на основици и висина из истог темена граде угао од $18°$. Колики је угао на основици тог троугла?

264. Нека је $ABCD$ правоугаоник ($AB > BC$), а тачке E и F су такве да су троуглови AED и CDF једнакостранични и тачка E припада унутрашњости и правоугаоника $ABCD$ и троугла CDF. Доказати да је троугао BEF једнакостраничан.

265. Таблица 5×5 попуњена је на произвољан начин бројевима из скупа $\{-1, 0, 1\}$. Посматрају се збирови тих бројева по врстама, колонама и обе дијагонале таблице. Доказати да међу њима бар два морају бити једнака.

VII разред

266. Израчунати вредност израза $\frac{a^2+b^2}{ab}$ ако се зна да је $\frac{a+b}{b} = 2 - \sqrt{2}$.

267. Нека су a и b дужине основица AB и CD, а c дужина крака једнакокраког трапеза $ABCD$ са узајамно нормалним дијагоналама. Доказати да је $c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

268. Нека је $a = 2^{2005} - 2^{2004} + 2^{2003}$, $b = 2^{2004} - 2^{2005} + 2^{2006}$, а $c = 3\sqrt{3} \cdot 2^{2003}$. Доказати да је збир квадрата нека два од бројева a, b, c једнак квадрату трећег.

269. Нека су P и R тачке страница AB и CD паралелограма $ABCD$ и нека је $\{Q\} = PC \cap BR$ и $\{S\} = AR \cap DP$. Доказати да је површина четвороугла $PQRS$ једнака збиру површина троуглова ASD и BCQ.

270. Бројеви $1, 2, \ldots, 9$ су подељени у три групе. Доказати да бар у једној од тих група производ бројева није мањи од 72.

VIII разред

271. Ако су x и a реални бројеви такви да важи $x + \frac{1}{x} = a$, изразити $x^4 + \frac{1}{x^4}$ у функцији од a.

272. Одредити цифре x, y и z такве да је $\frac{1}{x+y+z} = 0,\overline{xyz}$. Наћи сва решења.

273. Дужине катета правоуглог троугла ABC су a и b. Симетрала правог угла код темена C сече хипотенузу у тачки D. Израчунати дужину дужи CD.

274. Одредити све реалне бројеве a за које једначина $|x-1| + |x-2| = a$ има бесконачно много решења.

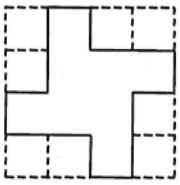
275. Одредити запремину квадра код кога су растојања од тачке пресека дијагонала до ивица једнака 7 cm, 8 cm и 9 cm.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 2006.

IV разред

276. Одредити све троцифрене бројеве чији производ са неким једноцифреним бројем је 2030.

277. Мирко је од комада картона облика квадрата одсекао комаде облика осам једнаких малих квадрата тако да је остао комад облика фигуре као на слици. Ако је површина те фигуре 200 mm^2, израчунати њен обим.



Сл. уз задатак 277

278. На сваком од такмичења из математике, српског језика и природе из једне школе учествовало је по 30 ученика. Колико је ученика из те школе учествовало на сва три такмичења ако се зна да је 23 ученика учествовало на по тачно једном, а 23 ученика на по тачно два такмичења?

279. Ако неком броју допишемо са десне стране 9, добијени број поделимо са 13, затим количнику допишемо са десне стране 1 и добијени број поделимо са 11, добијамо број 21. Који је почетни број?

280. Од три коцке са ивицама дужине 1 cm, 2 cm и 3 cm треба направити (само прислањањем, без сечења) тело најмање могуће површине. Колика је та површина?

V разред

281. У једној корпи налазе се црвене, а у другој беле руже. Број црвених једнак је $\frac{7}{8}$ броја белих ружа. Ако се 7 белих ружа премести у корпу са црвеним ружама, у корпама ће бити исти број ружа. Колико има црвених ружа?

282. Производ пет узастопних природних бројева је број $\overline{95*4*}$. Одредити непознате цифре.

283. Нека је $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, b, 4\}$, $C = \{2, 4, c\}$, $D = \{a, b, 3\}$, $E = \{1, b\}$. Одредити бројеве a, b, c и d тако да важи $B \subset A$, $C \subset A$, $D \subset A$ и $E \subset B$. Подразумева се да су у сваком од датих скупова елементи различити.

284. Пресек правоугаоника $ABCD$ и $PQRS$ је правоугаоник $TURS$, при чему је $PQUT$ квадрат површине $25\,\mathrm{cm}^2$. Израчунати површину правоугаоника $ABCD$ ако је површина правоугаоника $TURS$ једнака $\frac{2}{7}$ површине правоугаоника $PQRS$, а такође једнака $\frac{2}{11}$ површине правоугаоника $ABCD$.

285. Првих десет простих бројева исписани су један иза другог у растућем поретку. На тај начин је добијен низ цифара. Избрисати девет цифара из тог низа тако да број који чине преостале цифре буде највећи могућ.

VI разред

286. Разлика $\frac{7}{9}$ једног и $\frac{7}{9}$ другог броја је $\frac{3}{7}$. Колико износи разлика $\frac{3}{4}$ другог и $\frac{3}{4}$ првог броја?

287. Кроз центар O уписане кружнице у троугао ABC повучена је права паралелна са AB која сече AC у тачки K, а BC у тачки L. Ако је дужина дужи AB једнака c, а обим троугла KLC једнак s, колики је обим троугла ABC?

288. Одредити најмањи 2006-тоцифрени природан број који се записује само цифрама 0, 2 и 6, а дељив је са 18.

289. Тачка M је средиште странице AD паралелограма $ABCD$, а тачка K је пресек дужи BD и CM. Доказати да је $3KD = BD$.

290. Продавац има шест балона запремине 7, 9, 13, 14, 15 и 16 ℓ. Неки од њих су напуњени соком од боровнице, неки соком од рибизле, а само један је празан. Укупна запремина сока од боровнице је два пута већа од укупне запремине сока од рибизле. Одредити садржај сваког балона.

VII разред

291. Одредити скуп свих целих бројева a за које је $\frac{a^2}{a+3}$ цео број.

292. Израчунати површину ромба чији је обим 36 cm, а збир дужина дијагонала 20 cm.

293. Одредити све двоцифрене бројеве $\overline{ab}$ чији је корен једнак $a + \sqrt{b}$.

294. Израчунати дужину странице правилног дванаестоугла уписаног у круг чији је полупречник дужине R.

295. Колико има петоцифрених бројева који се исто читају и са леве на десну и са десне на леву страну?

VIII разред

296. Данас (15-тог априла 2006.) једна особа пуни толико година колики је збир цифара године њеног рођења. Које године је рођена та особа?

297. Одредити све парове реалних бројева k и n, такве да график функције $y = kx + n$ садржи тачку $M(4, 6)$ и са графиком функције $y = x + 2$ и x осом гради троугао површине 36.

298. Око круга чији је полупречник дужине 2 cm описан је једнакокраки трапез површине 20 cm^2. Израчунати дужине страница тог трапеза.

299. Нека су a, b и c реални бројеви различити од нуле, такви да је збир њихових реципрочних вредности једнак нули. Доказати да је збир бројева a, b и c различит од нуле.

300. Коцка чија је страница дужине 5 cm пресечена је са равни која од три ивице са заједничким теменом A одсеца дужи AM, AN и AP једнаке дужине. Ако је однос запремина тако добијених делова коцке $371 : 4$, одредити разлику површина тих делова.

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ 2006.

VI разред

301. Да ли је могуће бројеве $1, 2, \ldots, 9$ распоредити у таблици 3×3 тако да производи бројева у свакој врсти и свакој колони буду међусобно једнаки?

302. У једној туристичкој агенцији авионска карта за Лондон може се купити са попустом од 10% ако се резервише од 7 до 13 дана раније од дана путовања, са попустом од 25% ако се резервише од 14 до 29 дана раније од дана путовања и са попустом од 40% ако се резервише 30 и више дана раније од дана путовања. Путник је купио карту за 21 000 динара. Да је резервисао дан касније морао би да је плати 4 200 динара више. Колико дана пре путовања је путник резервисао карту?

303. Нека су тачке E и F средишта страница AD и CD правоугаоника $ABCD$. Ако је тачка G пресек дужи AF и EC, доказати да је $\measuredangle EBF = \measuredangle EGA$.

304. Велики миксер у фабрици еурокрема напуни се славином за течну црну чоколаду за 23 минута, а славином за течну белу чоколаду за 17 минута. После колико времена од отварања славине за црну треба отворити славину за белу чоколаду, тако да у миксеру који је на почетку био празан, на крају буде 2,5 пута више црне него беле чоколаде?

305. У спољашњости правоуглог троугла ABC конструисани су квадрати чије су странице хипотенуза AB и катета AC. Доказати да су растојања од средишта A_1 катете BC до пресека дијагонала сваког од квадрата једнака.

VII разред

306. Испитати да ли постоји природан број од којег се, премештањем прве цифре иза последње, тј. иза цифре јединица, добија пет пута већи број.

307. Нека је k круг са центром O и полупречником дужине $10\,\mathrm{cm}$. Тетиви AB круга k одговара централни угао од 90°. У троугао ABO уписан је круг k_1, а у област одређену тетивом AB и мањим луком AB уписан је највећи могући круг k_2. Одредити однос дужина полупречника кругова k_1 и k_2.

308. Одредити све просте бројеве p такве да број p^2+11 има тачно 6 различитих делилаца.

309. Квадрати природних бројева записани су редом један за другим: $1491625\ldots$. Одредити цифру која се налази на 2006. месту у том низу.

310. Тачка D је средиште странице BC троугла ABC, а E је тачка дужи AD таква да је $AE : ED = 3 : 1$. Одредити однос дужи AF и FC, где је F пресечна тачка праве BE и странице AC.

VIII разред

311. Одредити све четвороцифрене природне бројеве $\overline{abcd}$ за које важи

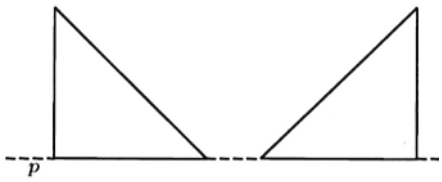
$$\frac{a+b+c}{2} = \frac{a+b+d}{8} = \frac{a+c+d}{8} = \frac{b+c+d}{6}.$$

312. (а) Одредити све могуће остатке при дељењу куба природног броја са 7.

(б) Испитати да ли постоје природни бројеви x и y такви да је $x^3 + y^3 = 2^{2006}$.

313. На столу се налази суд облика праве четворостране призме висине $10\,\mathrm{cm}$, чија је основа квадрат странице дужине $4\,\mathrm{cm}$. У суду је вода која заузима више од половине његове запремине. Суд се нагне тако да додирује сто само једном својом основном ивицом, а угао између равни основе суда и равни стола је 30°. Тада вода дође до горње ивице суда, али не пређе преко ње. Одредити висину празног дела суда пре његовог нагињања.

314. Дато је 50 позитивних реалних бројева чији је збир 100. Доказати да међу њима постоје три броја чији збир није мањи од 6.



Сл. уз задатак 315

315. Дата су два подударна једнакокрако-правоугла троугла чије су катете дужине 1 cm (као на слици). Одредити максималну површину пресека ових троуглова која се може добити померањем троуглова по правој p.

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ 2006.

VI разред

316. Троцифрени број $\overline{abc}$ је прост, а број $\overline{cba}$ је куб једног природног броја. О којим бројевима је реч?

317. Нека је K средиште тежишне дужи CC_1 троугла ABC и M пресечна тачка правих AK и BC. Одредити однос дужина дужи CM и MB.

318. На столу су три свеће једнаких дужина, али неједнаких дебљина. Јагода је у 8 h упалила прву свећу, а после једног сата и друге две. Сат после тога су се изједначиле по дужини прва и трећа свећа. Када ће се изједначити по дужини прва и друга свећа ако трећа цела изгори за 8 сати, а друга цела изгори за 12 сати?

319. У једнакокраком троуглу ABC је $\measuredangle CAB = \measuredangle ABC = 40^\circ$. Симетрала угла CAB сече наспрамни крак у тачки D. Доказати да је $AD + DC = AB$.

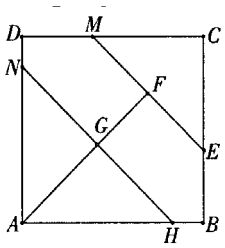
320. Јелена и Радован играју следећу игру. На листу облика паралелограма наизменично уписују кругове, све једнаке величине, који се не поклапају међу собом и не излазе из оквира папира. Победник је онај ко упише последњи круг. Доказати да Јелена, ако она црта први круг, може да игра тако да сигурно побеђује.

VII разред

321. Да ли постоје прости бројеви p, q и r такви да је

$$pqr + pq + qr + rp + p + q + r = 2006\ ?$$

322. Квадрат $ABCD$ странице a разрезан је на 5 фигура једнаких површина као на слици. Тачке F и G припадају дијагонали AC, а дужи NH и ME паралелне су дијагонали BD. Израчунати обим петоугла $BEFGH$.



Сл. уз задатак 322

323. Нека је

$$\frac{1}{1\cdot 6\cdot 11}+\frac{1}{6\cdot 11\cdot 16}+\frac{1}{11\cdot 16\cdot 21}+\cdots+\frac{1}{1996\cdot 2001\cdot 2006}=\frac{p}{q}$$

и нека су p и q узајамно прости бројеви. Доказати да број q није дељив са 2006.

324. Кошаркаш на тренингу изводи слободна бацања. Прво је промашио, а испоставило се да је на крају тренинга имао проценат успешности (однос броја датих кошева и броја свих покушаја) слободних бацања већи од 80%. Доказати да је у једном тренутку проценат успешности овог кошаркаша био тачно 80%.

325. У унутрашњости правоугаоника чије су странице 7 cm и 3 cm на произвољан начин је распоређено 9 тачака. Доказати да постоје две тачке чије је растојање мање од $\sqrt{5}$ cm.

VIII разред

326. За природан број кажемо да је палиндром ако се исписивањем цифара у обрнутом поретку добија исти број (на пример, 7482847 је палиндром). Наћи највећи петоцифрени палиндром који је дељив са 101.

327. У троуглу ABC тачка A_1 је средиште странице BC, а тачка E је пресек симетрале угла CAB и странице BC. Круг описан око троугла AEA_1 сече странице AB и CA, редом, још у тачкама F и G. Доказати да је $BF = CG$.

328. Производ три позитивна броја је 1, а њихов збир је већи од збира њихових реципрочних вредности. Доказати да је тачно један од ових бројева већи од 1.

329. На рукометном турниру за победу се добија 2 бода, за реми 1 бод, а за пораз 0 бодова. Зна се да је свака екипа играла са сваком једанпут и да је победничка екипа на крају освојила 7 бодова, другопласирана 5 бодова, а трећепласирана екипа 3 бода. Колико бодова је имала екипа која је била последња на турниру?

330. У троуглу ABC је $\measuredangle A = 60^\circ$, $\measuredangle C > 60^\circ$, D и E су тачке на страници BC такве да је AD симетрала угла CAB, а AE симетрала угла BAD и $CD = DE$. Одредити $\measuredangle BCA$.

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА 10. ЈУНИОРСКОЈ БАЛКАНИЈАДИ

331. Одредити највећи природан број n, такав да је број $n^2 + 2006n$ потпун квадрат.

332. Дат је једнакокраки троугао чија је основица a и крак b. Ако за углове на основици важи $\measuredangle ABC = \measuredangle BCA = 80^\circ$, онда је $a^3 + b^3 = 3ab^2$. Доказати.

333. Правоугаоник је са 6 хоризонталних и 6 вертикалних правих подељен на 49 мањих правоугаоника. Обими малих правоугаоника су цели бројеви. Доказати да је и обим великог правоугаоника цео број.

ДЕСЕТА ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

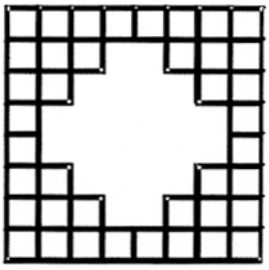
Чишинау (Молдавија), 2006.

334. Доказати да за сваки сложени број $n > 4$, број $2n$ дели производ $(n-1)!$.

335. Нека је ABC једнакокраки троугао са $AB = AC$ и $\measuredangle BAC < 60^\circ$. Нека су D и E унутрашње тачке странице AC такве да је $EB = ED$ и $\measuredangle ABD = \measuredangle CBE$. Симетрале углова ACB и BDC секу се у тачки O. Израчунати $\measuredangle COD$.

336. Цео број $n > 1$ се зове *савршен* ако је збир свих његових делилаца (укључујући 1 и n) једнак $2n$. Наћи све савршене бројеве n такве да су $n-1$ и $n+1$ прости бројеви.

337. Нека је $n \geqslant 2$ цео број. Из квадратне таблице $2n \times 2n$ (састављене од 1×1 малих квадрата) уклоњени су неки од малих квадрата, и то: средња два из реда број 2, средња четири из реда број 3, ... , средња $2n-2$ из реда број n, средња $2n-2$ из реда број $n+1$, ... , средња четири из реда број $2n-2$ и средња два из реда број $2n-1$, тако да се добила нова фигура (као што је показано на датој слици за $n = 4$). Наћи највећи број 2×1 правоугаоника који се могу поставити на добијену фигуру, без преклапања, тако да сваки правоугаоник прекрива тачно два мала квадрата.



Сл. уз задатак 337

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2007.

III разред

338. Израчунај:

а) $462 + 231 =$ б) $892 - 351 =$

в) $486 + 392 - 678 =$

339. Које бројеве треба написати на црте тако да једнакост буде тачна:

$$8 \cdot ____ + 8 : ____ = 60\ ?$$

340. Мењајући место тачно једном „штапићу“ учини да једнакост постане тачна:

$$\mathrm{II} + \mathrm{IV} + \mathrm{VI} = \mathrm{XIV}.$$

Нађи два различита решења.

341. Користећи цифре 5 и 2 можеш да напишеш 8 троцифрених бројева (цифре се могу понављати).

а) Одреди два таква броја чији је збир 77.

б) Одреди два таква броја чија је разлика 33.

Нађи сва могућа решења.

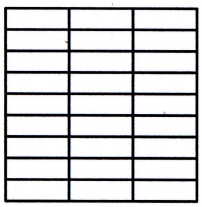
342. Софија је написала број који је за 70 већи од броја који је за 148 мањи од 600. Који број је Софија написала?

IV разред

343. Ако је $a + b = 2\,006\,000$, израчунати $a + 444\,444 + b$.

344. Брат има 20, а сестра 6 година. За колико година ће брат бити два пута старији од сестре?

345. Дужина странице квадрата је 2007 cm. Тај квадрат је паралелним дужима подељен на 27 једнаких правоугаоника, као на слици. Израчунати обим једног од тих правоугаоника.



Сл. уз зад. 345

346. У једној основној школи је 1458 ученика, а у другој 946. Колико ученика треба преместити из једне школе у другу тако да у обе школе буде исти број ученика?

347. Збир три различита четвороцифрена броја је 10 000. Ако је a највећи од та три броја, колика је највећа могућа вредност броја a?

V разред

348. Производ $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$ поделити бројем 4536.

349. Разлика мера два комплементна угла је $2007'$. Одредити мере тих углова.

350. Одредити све четвороцифрене бројеве дељиве са 15 код којих је цифра десетица 5, а цифра стотина 1.

351. Дуж AB дужине 60 cm тачкама C и D подељена је на три једнака дела. Растојање средишта крајњих делова је 45 cm. Колика је дужина дужи CD?

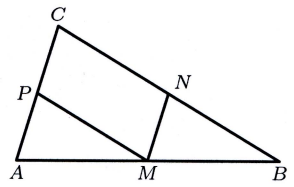
352. Скупови A и B имају исти број елемената. Ако је $A \cup B = \{\, x \mid x \in \mathbf{N} \text{ и } x < 18 \,\}$, а $A \cap B = \{1, 2, 7, 13, 17\}$, одредити скупове A и B знајући да је сваки елемент скупа $A \setminus B$ већи од сваког елемента скупа $B \setminus A$.

VI разред

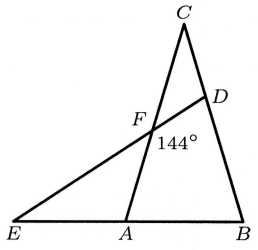
353. Израчунати вредност израза $\dfrac{9 \cdot \left(-2007 + \dfrac{2007}{9}\right)}{(9 \cdot 2007 - 2007) : 9}$.

354. Израчунати збир заједничких целобројних решења неједначина $7x - 16 \geqslant -58$ и $-9x + 73 > 100$.

355. У троуглу ABC тачка M је средиште странице AB. Ако је MN паралелно са AC и MP паралелно са BC (као на слици), доказати да је $\triangle AMP \cong \triangle MBN$.



Сл. уз зад. 355



Сл. уз зад. 357

356. Упоредити бројеве a и b ако је

$$a = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots + 2005 - 2006,$$
$$b = 1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + \cdots + 2005 - 2007.$$

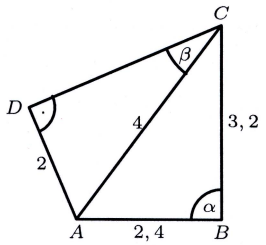
357. Израчунати углове једнакокраких троуглова ABC ($AC = BC$) и BDE ($BE = DE$) (видети слику).

VII разред

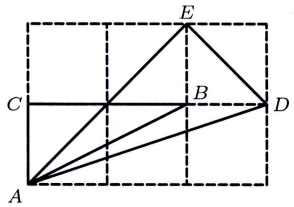
358. Израчунати x ако је $\frac{1}{9} \cdot 3^{10} + \frac{1}{3} \cdot 3^9 - 5 \cdot 3^8 = x \cdot 3^8$.

359. Поређати бројеве $-5\sqrt{2}$, $4\sqrt{3}$, $-3\sqrt{5}$ и $2\sqrt{6}$ по величини од већег ка мањем.

360. Користећи податке са слике одредити меру угла $\alpha + \beta$.



Сл. уз зад. 360



Сл. уз зад. 365

361. Упоредити бројеве 15^{15} и 45^{10}.

362. Израчунати површину једнакокраког трапеза $ABCD$ чије су дијагонале узајамно нормалне, а дужина висине је $5\,\mathrm{cm}$.

VIII разред

363. Дужина правоугаоника повећана је за $p\%$, а ширина је смањена за $p\%$. Ако се површина правоугаоника смањила за 16%, одредити p.

364. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\frac{x}{2 \cdot 3} + \frac{x}{3 \cdot 4} + \frac{x}{4 \cdot 5} + \frac{x}{5 \cdot 6} - x \geqslant -\frac{2}{3}.$$

365. Правоугаоник се састоји од шест квадрата, као на слици. Ако је површина троугла ABC једнака $32\,\mathrm{cm}^2$, израчунати површину троугла ADE.

366. У скупу реалних бројева решити једначину $x + |x| = \frac{x}{|x|}$.

367. У простору су дате две различите паралелне праве и три различите тачке. Колико највише равни оне одређују?

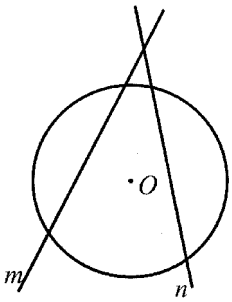
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2007.

III разред

368. Израчунај:

а) $438 + 163$; б) $908 - 159$;

в) $60 : 5 + 5 \cdot 3$; г) $85 + 15 : 5$.



Сл. уз зад. 369

369. Нацртај на свом папиру круг са центром у тачки O и две праве m и n које се секу ван тог круга (види слику).

а) Нацртај тачку B која припада и нацртаном кругу и правој n.

б) Нацртај праву s која сече праву n у тачки B и пролази кроз центар O круга.

в) Нацртај тачке C и D у којима права s сече кружну линију (кружницу).

г) Шта представља дуж OC за дати круг?

370. Симонида је рекла: „За три године ћу имати три пута мање година од своје мајке, која сада има 27 година.“ Колико година Симонида има сада?

371. Милан је поподне гледао пренос утакмице на ТВ-у од 14 часова и 30 минута до 16 часова и 15 минута, а увече емисију о рибама од 19 часова и 15 минута до 20 часова и 10 минута.

а) Колико је трајао пренос утакмице?

б) Да ли је дуже трајао пренос утакмице или емисија о рибама и за колико?

372. Број 509 има збир цифара 14 јер је $14 = 5+0+9$. Нађи највећи троцифрени број чији је збир цифара 12 и најмањи троцифрени број чији је збир цифара 21, а затим и разлику тако добијених бројева.

IV разред

373. Између две цифре броја 664422 уписати цифру 3 тако да добијени седмоцифрени број буде:

(а) највећи могући, (б) најмањи могући.

374. Годишњи комплет Математичких листова састоји се од шест свешчица. Свешчице не морају имати исти број страница, али се зна да свака свешчица има 40 или 44 странице. Одредити може ли годишњи комплет Математичких листова имати укупно 260 страница.

375. Правоугаоник је помоћу две паралелне праве подељен на три једнака квадрата. Колико пута је обим тог правоугаоника већи од обима једног од квадрата?

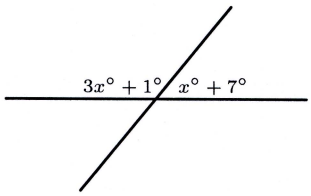
376. Љиља и Биља заједно имају 228 динара, а Маша и Таша 166. Ако Љиља има 70 динара више од Маше, ко има више динара, Биља или Таша и за колико?

377. Колико има троцифрених природних бројева чији је збир цифара једнак 4, а колико четвороцифрених природних бројева чији је производ цифара једнак 4?

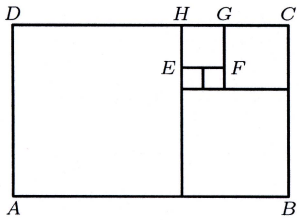
V разред

378. Цифрама 1, 4, 5 и 7 написати све троцифрене бројеве чије су све цифре међусобно различите, а дељиви су са 3.

379. Израчунати мере углова на слици.



Сл. уз зад. 379



Сл. уз зад. 381

380. У једној школи сваки ученик учи бар један од два језика, енглески и француски. Енглески језик учи $\frac{4}{5}$ свих ученика, а француски $\frac{3}{4}$. Који део свих ученика учи оба језика?

381. Правоугаоник $ABCD$ подељен је на шест квадрата, као на слици. Одредити површину правоугаоника $ABCD$ ако је обим квадрата $EFGH$ једнак $8\,\mathrm{cm}$.

382. Поређати, од мањег ка већем, бројеве $\frac{2}{9}$, $\frac{25}{111}$ и $\frac{447}{2007}$.

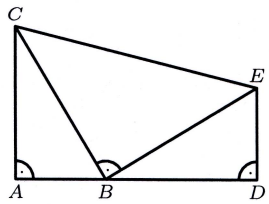
VI разред

383. Одредити збир целобројних решења неједначине $|x-1| < 6$.

384. Симетрале углова BAC и ABC троугла ABC секу се под углом од $124°$. Одредити меру угла ACB.

385. Аца, Бора и Веса су имали неколико кликера у кеси. Аца је пришао и додао онолико кликера колико је било у кеси и још 1 кликер. Затим је Бора пришао и додао два пута онолико кликера колико је у том тренутку било у кеси и још 3 кликера. Последњи је пришао Веса и додао три пута онолико кликера колико је у том тренутку било у кеси и још 5 кликера. Ако је на крају у кеси било 149 кликера, колико кликера је било у кеси на почетку?

386. На дужи AD дата је тачка B, таква да су троуглови ABC и DEB правоугли, а троугао CBE једнакокрако правоугли, као на слици. Доказати да су троуглови ABC и DEB подударни.



Сл. уз зад. 386

387. У једној школи има 800 ученика. Доказати да бар три ученика имају рођендан истог датума.

VII разред

388. Израчунати вредност израза $\sqrt{(\sqrt{5}-5)^2}-(\sqrt{5}-5)$.

389. У правоуглом троуглу ABC дужине катета AC и BC су редом $30\,\mathrm{cm}$ и $40\,\mathrm{cm}$. Ако је C_1 средиште хипотенузе, а C_2 подножје хипотенузине висине, израчунати дужину дужи C_1C_2.

390. Дужине страница AB и BC правоугаоника $ABCD$ су редом $5\,\mathrm{cm}$ и $3\,\mathrm{cm}$. Пресек праве која садржи тачке B и C и симетрале угла BAD је тачка M, а пресек праве која садржи тачке A и D и симетрале угла BCD је тачка N. Израчунати површину четвороугла $ANCM$.

391. Одредити најмањи природан број који је дељив са 15, а свака цифра му је 0 или 4.

392. Одредити најмањи природан број који се може добити кад се у изразу $1*2*3*\cdots*2005*2006$ свака звездица замени са $+$ или $-$.

VIII разред

393. У једначини $3\cdot(x-4k)-2k=3\cdot(2x-3)+1$ број k је реалан параметар. Одредити све вредности тог параметра за које је решење једначине веће од -2.

394. У једнакостраничан троугао ABC уписана су три круга, тако да сваки од њих додирује по две странице и уписани круг k тог троугла. Одредити однос површине круга k и збира површина та три уписана круга.

395. Одредити скуп свих вредности позитивног реалног броја a за које неједначина $|x-2|<a$ има тачно четири решења у скупу целих бројева.

396. Коцка чија ивица је дужине $10\,\mathrm{cm}$ пресечена је једном равни на два квадра. Одредити однос запремина тих квадара ако је однос њихових површина $2:3$.

397. На свакој страници квадрата дате су по 3 тачке тако да ниједна од њих није теме квадрата. Колико је троуглова одређено овим тачкама?

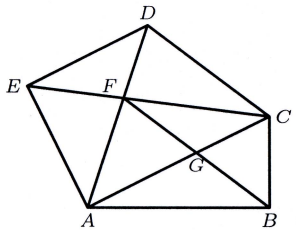
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 2007.

IV разред

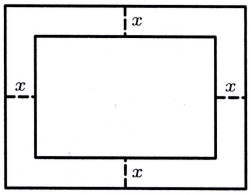
398. Колико има троуглова на слици? Навести те троуглове.

399. На колико начина Воја, Раде и Зоран могу да поделе 7 једнаких кликера, тако да сваки од њих добије бар један кликер?

400. Травњак је облика правоугаоника чија је краћа страница дужине $16\,\mathrm{m}$. Око травњака је направљена стаза исте ширине на свим правцима (као на слици)



Сл. уз зад. 398



Сл. уз зад. 400

чија је површина $176\,\mathrm{m}^2$. Израчунати дужину друге странице правоугаоника (травњака) ако пешак који обиђе целу стазу идући спољном ивицом те стазе пређе $16\,\mathrm{m}$ више него пешак који обиђе целу стазу идући унутрашњом ивицом те стазе.

401. У шуми је укупно било 565 фазана и јаребица. Када је број фазана порастао 3 пута, а број јаребица порастао 5 пута, било их је укупно 2007. Колико је фазана, а колико јаребица било на почетку у шуми?

402. Дата је једнакост ВУК + ЛОВАЦ = БАЈКА. Иста слова заменити истом цифром, а различита слова различитим цифрама, тако да једнакост буде тачна. Познато је да слово Л треба заменити цифром 5. Детаљно образложити.

V разред

403. Одредити све природне бројеве a и b такве да је $\frac{a}{10}+\frac{b}{15}=\frac{5}{6}$ и $\frac{1}{2}<\frac{a}{10}<\frac{3}{4}$.

404. Стена у облику коцке чија је дужина ивице $10\,\mathrm{m}$ исечена је на једнаке коцкице чије су дужине ивица $1\,\mathrm{dm}$. Ређањем тих коцкица једне поред друге поплочана је правоугаона стаза ширине $1\,\mathrm{m}$. За колико сати би ту стазу прешао пешак који сваког сата прелази $5\,\mathrm{km}$?

405. Одредити све просте бројеве p, q и r такве да је $2p+3q+4r=2006$.

406. При дељењу бројева 287 и 431 природним бројем n добијају се редом остаци 1 и 2, а при дељењу броја 231 бројем $n+1$ добија се остатак 3. Одредити све такве бројеве n.

407. Нацртати 6 правих и 7 тачака тако да свака од тих правих садржи тачно 3 од тих тачака.

VI разред

408. Одредити све парове природних бројева a и b таквих да је $a+b=30$ и $\frac{2005}{2007}=\frac{198}{223}+\frac{a}{b}$.

409. Нека је $ABCD$ паралелограм код кога је $AB>BC$. Права p која садржи пресек дијагонала O и нормална је на дијагоналу BD сече страницу AB у тачки M и страницу CD у тачки N. Доказати да је четвороугао $MBND$ ромб.

410. Ако су a и b прости бројеви већи од 3 и $a > b$, доказати да је производ $(a+b)\cdot(a-b)$ дељив са 12.

411. У оштроуглом троуглу ABC тачке D и E су средишта страница AC и BC. Ако се симетрале углова ADE и BED секу на страници AB, доказати да је $AB = \dfrac{AC+BC}{2}$.

412. Одредити колико има једнакокраких троуглова чије странице имају целобројне дужине (у cm), а обим им је једнак 2005 cm.

VII разред

413. Доказати да је $\sqrt{5+\sqrt{\sqrt{17}+\sqrt{37}}+\sqrt{2}} > 3$.

414. У квадрат чија је дужина странице 10 cm уписан је правилни дванаестоугао, тако да свакој страници квадрата припада по једна страница дванаестоугла. Израчунати дужину странице тог дванаестоугла.

415. Упоредити бројеве $3^{2007} - 2^{3000}$ и $2007 \cdot 2^{2007}$.

416. Испитати да ли постоји троугао чије су дужине висина 1 cm, 2 cm и 3 cm.

417. Одредити колико има четвороцифрених бројева који се записују помоћу цифара 1, 2 и 3, али тако да се ниједна од тих цифра не појављује више од два пута у запису броја.

VIII разред

418. Доказати да је број $2007^{2005} - 2007$ дељив са 90.

419. Бочна страна правилне тростране пирамиде је једнакокраки троугао са углом од 30° при врху. Дужина бочне ивице је 8 cm. Израчунати површину те пирамиде.

420. Израчунати разлику израза $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 2005^2$ и $1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 5 + \cdots + 2004\cdot 2006$.

421. Хипотенузе BC и AD правоуглих троуглова ABC и ABD секу се у тачки E. Ако је дужина дужи AC једнака 6 cm, а дужина дужи BD једнака 3 cm, израчунати растојање тачке E од дужи AB.

422. Петоцифрен број је „петоразлик“ ако су му све цифре различите и припадају скупу $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Израчунати збир свих таквих бројева.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ 2007.

VI разред

423. Одредити све седмоцифрене бројеве који почињу са 7002, а дељиви су и са 5 и са 7 и са 11.

424. Конструисати паралелограм $ABCD$ чија је дијагонала AC дужине 6 cm, дијагонала BD дужине 4 cm, а висина DD' дужине 3 cm.

425. На једном тестирању учествовало је 300 ученика, од којих је 10% било дечака. Сви дечаци су освојили исти број бодова, а просечан број бодова девојчица је био 83. Ако је просечан број бодова свих ученика био 84, колико бодова је освојио сваки дечак? (*Напомена.* Просечан број бодова за неколико ученика се рачуна тако што се збир бодова које су освојили ти ученици подели бројем тих ученика.)

426. Троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ су једнакокракоправоугли са хипотенузама AB и A_1B_1, при чему $C_1 \in BC$, $B_1 \in AB$, $A_1 \in AC$. Доказати да је $AA_1 = 2 \cdot CC_1$.

427. Дато је 2007 различитих простих бројева. Доказати да се бар 502 од тих бројева завршавају истом цифром.

VII разред

428. Ако за реалне бројеве a и b важи једнакост $ab = a - b$, доказати да вредност израза $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} - ab$ не зависи ни од a ни од b.

429. У правоуглом троуглу ABC са правим углом код темена C дата је тачка D таква да је дужина дужи CD једнака 5 cm. Одредити дужину хипотенузе AB ако су и површина троугла ACD и површина троугла BCD једнаке четвртини површине троугла ABC.

430. Ћирило је написао на табли низ од пет бројева тако да је разлика сваког броја (почев од другог) и његовог претходника један исти број. Онда је дошао Методије и заменио све цифре словима, и то исте цифре истим словима, а различите цифре различитим словима. Тако је добијен запис: A, BC, BD, CE, FF. Које бројеве је написао Ћирило?

431. Испитати постоји ли природан број n, такав да је збир $2^n + 3^{n+3}$ једнак квадрату неког природног броја.

432. Нека су D и E тачке у којима уписани круг троугла ABC додирује странице AC и BC, а O центар тог круга. Ако је F пресечна тачка правих DE и AO, израчунати меру угла AFB.

VIII разред

433. Одредити најмањи реалан број A, такав да за било који реалан број x за који је $|x-2|<0{,}04$ важи да је $|x^2-5|<A$.

434. Тачка D је средиште странице AC троугла ABC. Симетрала угла ADB сече страницу AB у тачки E, а симетрала угла BDC сече страницу BC у тачки F. Ако је пресек дужи BD и EF тачка M, доказати да је $EM=MF$.

435. Одредити највећи заједнички делилац свих бројева облика $4^n+15n-1$, где је n природан број.

436. Дужине ивица квадра (у cm) су природни бројеви. Ако се површина тог квадра (у cm^2) изражава истим бројем као збир дужина свих ивица тог квадра, одредити дужине ивица тог квадра.

437. Раша и Гаша имају чоколаду квадратног облика која се састоји од $27\cdot 27$ коцкица. На почетку је чоколада код Раше. Онај који држи чоколаду пресече је праволинијски једним потезом ножа онако како жели на два дела, али тако да не „оштети“ ниједну коцкицу. Један део поједе, а други да противнику. Губи онај играч који добије само једну коцкицу. Који од двојице играча може смислити стратегију којом побеђује независно од тога како противник игра и која је то стратегија?

ПРВА СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

438. У унутрашњој области паралелограма $ABCD$ дата је тачка P таква да је $\measuredangle ADP=\measuredangle ABP$ и да је $\measuredangle DCP=30^\circ$. Одредити меру $\measuredangle DAP$.

439. На једној прослави било је укупно 2007 особа. За сваке 1003 од тих особа постојала је бар једна особа од преосталих присутних која се познавала са сваком од те 1003 особе. Доказати да је на прослави постојала особа која се познавала са свим присутним особама.

440. За позитивне реалне бројеве x, y и z важи да је $xyz=1$. Доказати да је

$$\frac{2}{(x+1)^2+y^2+1}+\frac{2}{(y+1)^2+z^2+1}+\frac{2}{(z+1)^2+x^2+1}\leqslant 1.$$

441. Поља таблице димензије 3×3 попуњена су бројевима -1 и 1. У сваком кораку истовремено се у свако поље таблице упише производ свих бројева који су у пољима која са тим пољем имају заједничку ивицу. Да ли се, независно од тога који су бројеви били у пољима таблице на почетку, овим поступком може добити да у свим пољима таблице буде број 1?

442. Наћи највећи природан број k такав да постоји број облика $1!+2!+\cdots+n!$ ($n\in\mathbf{N}$) чији је делитељ број 3^k. [$m!=m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$]

443. Тачке D, E и F припадају редом страницама AB, BC и CA оштроуглог троугла ABC, при чему дужине дужи AE, BF и CD нису веће од $\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$. Доказати да површина троугла ABC није већа од $\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$.

ЈЕДАНАЕСТА ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Шумен (Бугарска), 2007.

444. Нека је a позитиван реалан број, такав да је $a^3 = 6(a+1)$. Доказати да једначина $x^2 + ax + a^2 - 6 = 0$ нема реалних решења.

445. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао у којем је $\measuredangle DAC = \measuredangle BDC = 36^\circ$, $\measuredangle CBD = 18^\circ$ и $\measuredangle BAC = 72^\circ$. Дијагонале AC и BD секу се у тачки P. Одредити величину $\measuredangle APD$.

446. У равни је дато 50 тачака, од којих никоје три не припадају истој правој. Свака од тих тачака је обојена једном од четири дате боје. Доказати да постоји боја и најмање 130 разностраничних троуглова чија су темена обојена том бојом.

447. Доказати да ако је p прост број, тада $7p + 3^p - 4$ није квадрат целог броја.

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2008.

III разред

448. Израчунај вредност израза:

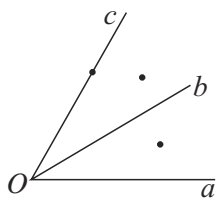
а) $363 + 435$, б) $910 - 462$, в) $62 + 8 \cdot 3$.

449. а) Нацртај дату слику на свом папиру (који ћеш предати).

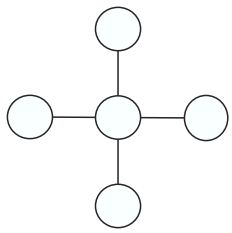
б) На нацртаној слици обележи тачке A, B и C тако да се:

– тачка B налази на полуправој Oc;

– тачка A налази у углу aOc и није у углу bOc.



Сл. уз зад. 449



Сл. уз зад. 451

450. Марко је замислио један број који када умањиш за 348 добијаш 485. Који број је Марко замислио?

451. У сваки кружић на слици треба уписати један од бројева 1, 2, 3, 4 и 5 тако да збир бројева у водоравном правцу и збир бројева у усправном правцу буде по 8.

452. Бројеве 7, 24 и 336 можеш помоћу четири цифре 3 и неких рачунских операција записати на следећи начин:

$$7 = 3 + 3 + 3 : 3, \qquad 24 = 33 - 3 \cdot 3, \qquad 336 = 333 + 3$$

а) Користећи четири цифре 3 на сличан начин напиши број 39.

б) Који је највећи број треће стотине који можеш да напишеш помоћу четири цифре 3 на сличан начин?

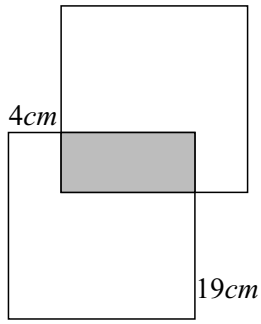
IV разред

453. Израчунај вредност израза:

а) $8002 - 2008$, б) $715 + 285 \cdot 3$.

454. Наћи збир највећег парног петоцифреног броја записаног цифрама 1, 2, 3, 4 и 5 (цифре се не могу понављати) и највећег четвороцифреног непарног броја записаног цифрама 6, 7, 8 и 9 (цифре се не могу понављати).

455. Два квадрата дужина страница по 28 cm имају заједнички осенчени део, облика правоугаоника, као на слици. Израчунај обим правоугаоника.



Сл. уз зад. 455

456. Који је непаран број већи од 501 и мањи од 599, а дељив је и са 5 и са 9?

457. Ана је рекла: „Замислила сам један четвороцифрен и један троцифрен број, чија је разлика 9 863 и који имају највећи могући збир“. Које је бројеве Ана замислила и који је тај највећи могући збир?

V разред

458. Одреди највећи заједнички делилац најмањег и највећег непарног четвороцифреног броја.

459. Углови α и β су комплементни. Одреди углове α и β, ако је њихова разлика једнака трећини већег угла.

460. У једној школи последњег наставног дана 17 наставника је радило у преподневној смени, 20 у поподневној, а 5 у обе смене. Тог дана су 3 наставника била на боловању. Колико наставника ради у тој школи?

461. Испод сваке колоне уписан је збир бројева из те колоне, а поред сваке врсте производ бројева из те врсте (види табелу лево). На исти начин попуни табелу десно.

2	3	2	12
4	2	1	8
3	6	2	36
9	11	5	

			4
			15
			18
8	9	5	

Сл. уз зад. 461

462. Бака Мица направи 25 медењака од 1 шоље меда, 2 шоље уља, 3 шоље шећера и 4 шоље брашна. Колико највише медењака бака Мица може да направи ако у кући има 13 шоља меда, 14 шоља уља, 15 шоља шећера и 16 шоља брашна?

VI разред

463. Израчунај вредност израза

$$2000x - 2001x + 2002x - 2003x + 2004x - 2005x + 2006x - 2007x$$

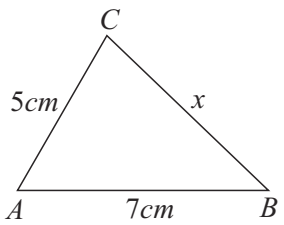
ако је x негативно решење једначине $|x| = 2008$.

464. У троуглу ABC угао $\measuredangle BAC = \alpha$ и $\measuredangle ABC = \beta$. Симетрале углова α и β секу се под углом $124°$. Одреди $\measuredangle ACB = \gamma$.

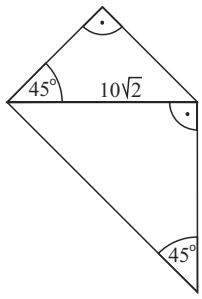
465. Ако су странице троугла 5, 7 и x (у cm), гледај слику и одреди могуће природне бројеве x. За сваку вредност x упореди одговарајуће углове.

466. Нађи разломак са имениоцем 4 мањи од $-\dfrac{5}{23}$, а већи од $-\dfrac{6}{23}$.

467. Нацртај правоугаоник $ABCD$ ($AB = 3\,\text{cm}$, $BC = 5\,\text{cm}$). Одреди тачке M, N, P, Q које су редом средишта страница AB, BC, CD, DA. На изломљеној линији $MNQP$ конструиши тачке које су једнако удаљене од темена A и C.



Сл. уз зад. 465



Сл. уз зад. 471

VII разред

468. Израчунај вредност израза $8x^3 - 4x^2$ за $x = \sqrt{2 + \dfrac{1}{4}}$.

469. Ако многоугао има $\dfrac{5}{2}$ пута више дијагонала него страница, израчунај збир свих његових унутрашњих углова.

470. Одредити x ако је $\dfrac{2008^{2007} + 2008^{2008}}{2009} = 2008^x$.

471. Израчунај обим и површину четвороугла са слике.

472. Одредити целе бројеве a и b ако је $a\sqrt{3} + b = \sqrt{\left(1 - \sqrt{3}\right)^2} + 3$.

VIII разред

473. Одредити вредност променљиве k тако да једначине

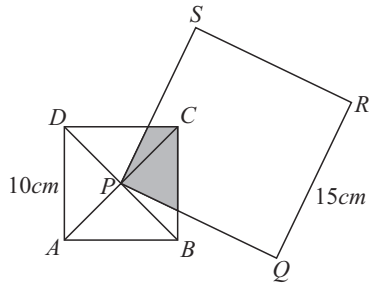
$$\frac{x}{2}+\frac{1}{5}=\frac{x}{3}+\frac{1}{4} \qquad \text{и} \qquad x\cdot(1-k)+1{,}5=k\cdot(1-x)$$

буду еквивалентне.

474. Површина основе правилне четворостране призме је B, а површина једне бочне стране је $2B$. Изрази површину и запремину призме у функцији од површине основе B.

475. Реши неједначину $\frac{y}{2}+\frac{y}{3}-\frac{y}{4}<1-\frac{y+6}{3}$.

476. Колико је највише равни одређено са 3 тачке и 3 паралелне праве?



Сл. уз зад. 477

477. Ако је теме квадрата $PQRS$ у пресеку дијагонала квадрата $ABCD$, израчунај површину осенченог дела.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2008.

III разред

478. Израчунај:

а) $52-10+12$, б) $7\cdot 8+124$, в) $12+8\cdot 5$, г) $20-8:4$.

479. Ана је требало да помножи неки број са 7. Уместо да помножи са 7, она је тај број сабрала са 7 и добила резултат 20. Који резултат би Ана добила да није погрешила?

480. Коста, Јова и Влада су засадили крушку, јабуку и вишњу. Сваки је засадио по једно дрво чији назив не почиње истим словом као његово име. Ко је засадио које дрво, ако се зна да Влада није засадио крушку?

481. На слици су приказана два круга K_1 и K_2 и њима одговарајуће кружнице k_1 и k_2 и дуж AB тако да је тачка A на кружници k_1 и ван круга K_2, а тачка B у кругу K_2 и ван круга K_1.

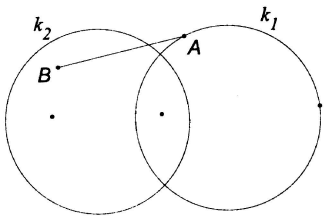
а) Нацртај ову слику на папиру који ћеш предати.

б) Обележи три назначене тачке словима C, D и E, тако да:

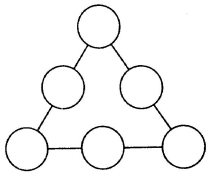
– C припада кружној линији k_1 и не припада кругу K_2;

– D припада кругу K_2 и не припада кругу K_1;

– E припада и кругу K_1 и припада кругу K_2.



Сл. уз зад. 481



Сл. уз зад. 482

482. Упиши бројеве 14, 15, 16, 17, 18 и 19 у кругове на слици, али тако да збирови на свакој од страница замишљеног троугла буду међусобно једнаки.

IV разред

483. Између неких цифара у низу

1 2 3 4 5 6 7 8 9

уметни знаке основних рачунских операција тако да бројевна вредност добијеног израза буде 2 008.

484. Дато је 6 картона облика правоугаоника дужине 3 cm и ширине 2 cm. Користећи све дате картоне састави један правоугаоник који има:

а) највећи могући обим, б) најмањи могући обим.

485. Једна девојчица ће у 2008. години напунити онолико година колики је збир цифара њене године рођења. Које године 21. века је рођена та девојчица?

486. У једној игри са друговима, Марко је купио 100 бомбона по цени 5 бомбона за 2 динара, а затим их све продао по цени 2 бомбоне за 1 динар. Колико динара је Марко зарадио у игри?

487. У три корпе има 12, 14 и 22 јабуке. Дозвољено је јабуке пребацивати из једне у другу корпу али само тако да из једне корпе пребациш у другу тачно онолико јабука колико у другој већ има. Покажи како са три пребацивања можеш да постигнеш то да у свакој корпи буде једнак број јабука.

V разред

488. Којом цифром се завршава производ $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ (девет деветки)?

489. На правој су дате тачке A, B, C и D, тим редом. Тачке M и N су средишта дужи AB и BC. Израчунај дужину дужи CD ако је $AD = 32\,\mathrm{cm}$, а дужина дужи $MN = 1{,}5\,\mathrm{dm}$.

490. Два пужа A и B се „тркају“ на стази дугачкој $1\,\mathrm{m}$. Пуж A прелази $2\,\mathrm{dm}$ за 2 минута, а после свака 2 минута ходања, мора 1,5 минута да се одмара. Пуж B прелази $2\,\mathrm{dm}$ за 3 минута, а одмара се 0,5 минута после сваких пређених $2\,\mathrm{dm}$. Који пуж ће први стићи на циљ?

491. У једној улици куће су нумерисане тако да су са једне стране куће са парним бројевима, а са друге стране са непарним. Са непарне стране бројеви иду од 1 до 169, а са парне од 2 до 114. Колико је цифара (знакова) употребљено за нумерацију свих кућа у тој улици?

492. Углови α и β су суплементни, а $\frac{2}{5}\alpha$ и β комплементни. Израчунај разлику углова α и β.

VI разред

493. Ако је

$$x = (-5) - (-3) + 5 + (-5) \quad \text{и} \quad y = -5 - x,$$

израчунај колико је $|x - 1| - |y - 2|$.

494. Милован је требало да подели неки број са 9. Уместо да подели са 9 он је од тог броја одузео 9 и добио резултат -603. Који резултат би Милован добио да није погрешио?

495. У троуглу ABC, $\measuredangle BAC = 40^\circ$, $\measuredangle ABC = 20^\circ$ и $AB - BC = 10\,\mathrm{cm}$. Ако симетрала угла $\measuredangle ACB$ сече праву AB у тачки M, одреди дужину CM.

496. За углове троугла ABC важи: $\measuredangle ACB = 90^\circ$, $\measuredangle ABC = 2 \cdot \measuredangle CAB$. Катета BC је $8\,\mathrm{cm}$. Тачка M је средиште хипотенузе AB, тачка N је средиште катете AC и тачка P средиште дужи AM. Израчунај дужину изломљене линије $BCMNPA$.

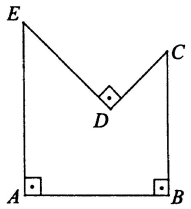
497. За природне бројеве a, b и c важи да су већи од 1 и да је бар један од њих паран. Ако је $a + 1 = 2b + 2 = 3c + 3$, наћи најмању вредност производа $a \cdot b \cdot c$.

VII разред

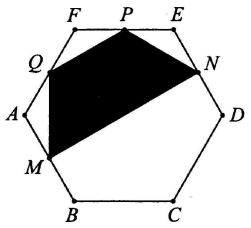
498. Ако је $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$, израчунај

$$(x - y)^3 - (x - y^3) + (-x \cdot y^3) - (-x \cdot y)^3.$$

499. Нађи обим многоугла на слици ако је $AE = 13\,\text{cm}$, $BC = 7\,\text{cm}$, $ED = 8\,\text{cm}$ и $CD = 6\,\text{cm}$ и ако је $\measuredangle EAB = \measuredangle ABC = \measuredangle CDE = 90°$.



Сл. уз зад. 499



Сл. уз зад. 501

500. Ако је $\sqrt{2} \cdot x - \sqrt{2} \cdot y = \sqrt{18}$, израчунај вредност израза $\dfrac{\sqrt{3} \cdot x}{3} - \dfrac{y}{\sqrt{3}}$.

501. Одреди однос површина правилног шестоугла $ABCDEF$ и четвороугла $MNPQ$ на слици ако су M, N, P, Q средишта страница AB, DE, EF, FA.

502. Нађи просте троцифрене бројеве чији је производ цифара 252.

VIII разред

503. Колико има целих бројева x за које важи $\dfrac{1}{4} < \dfrac{2-x}{7} < \dfrac{11}{12}$?

504. Однос површина страна једног квадра је $2 : 3 : 5$. Израчунај однос дужина ивица тог квадра.

505. Одреди x ако је $x^2 + \sqrt{3} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$.

506. Краци трапеза припадају правим које су међусобно нормалне. Докажи да је збир квадрата дужина дијагонала тога трапеза једнак збиру квадрата дужина основица.

507. Дат је скуп $S = \{8,\ 5,\ 1,\ 13,\ 3,\ 21,\ 2\}$. Милена за сваки двочлани подскуп скупа S на табли записује већи број. Одреди збир бројева које је Милена написала на табли.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 2008.

IV разред

508. Три пријатеља, Милош, Урош и Јанош, поклонили су 12 502 књиге школи. Милош је поклонио 4 260 књига, а Урош 456 књига више од Милоша. Колико књига је поклонио Јанош?

509. На травнатом терену квадратног облика дужине 200 метара, направљен је базен облика правоугаоника, димензија 30 m и 15 m. Око базена је бетонска стаза ширине 1 метар (која са базеном има облик већег правоугаоника). Колико ари травњака има око базена?

510. Дешифрујсабирање, ако истим словима одговарају исте, а различитим словима различите цифре.

$$\begin{array}{r} A \\ B\,A \\ C\,B\,A \\ +\ D\,C\,B\,A \\ \hline 2\ 0\ 0\ 8 \end{array}$$

511. Површина правоугаоника је $2\ 008\,\mathrm{cm}^2$. Дужина једне странице је паран број центиметара, а друге непаран број центиметара. Израчунати обим правоугаоника. Наћи сва решења.

512. У згради са 4 улаза (I, II, III и IV) и 4 спрата на сваком спрату је по један стан у сваком улазу. У сваком од станова у непарним улазима живи по једнак број станара. У сваком од станова у парним улазима живи дупло више станара него у сваком од станова у непарним улазима. Ако у згради укупно живи 48 станара и на сваком спрату по једнак број станара, колико станара живи у сваком стану?

V разред

513. Ако је $a = 2,5$ и $b = 10$, израчунај вредност израза $1 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$.

514. Дате су две различите кружнице и три различите праве. За тачку кажемо да је „симпатична“ ако је заједничка за два од датих пет геометријских објеката. Колико највише „симпатичних“ тачака могу имати дате кружнице и праве?

515. Скуп M чине прости чиниоци броја 2 310. Колико бројева постоји који су једнаки производу тачно два елемента из скупа M.

516. Страница квадрата је 6 cm. Једном правом је подељен на 2 правоугаоника чији се обими разликују за 5 cm. Израчунај површине тих правоугаоника.

517. Златар Златко је за $\frac{1}{2}$ kg сребра и $\frac{1}{3}$ kg злата платио 750 000 динара, а за 1 kg сребра и $\frac{1}{2}$ kg злата платио је 1 250 000 динара. Колико ће Златко платити 1 kg сребра и 2 kg злата?

VI разред

518. Ако је $\frac{a}{b} = \frac{1}{20}$, израчунај вредност израза $\frac{a}{2b} + \frac{2a}{b} + 90a - 4{,}5b$.

519. Одреди цифре a и b ($a \neq b$) тако да број $0{,}\overline{abab\ldots}$ буде једнак нескративом разломку за који је збир имениоца и бројиоца једнак 17.

520. Конструиши троугао ABC ако је познато $a + c = 8\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 60^\circ$ и $\beta = 45^\circ$.

521. Одреди све просте бројеве p, q и r такве да је $p \cdot (264q + 4r) = 2008$.

522. Страница ромба $ABCD$ је 12 cm, а $\measuredangle BAD = 60^\circ$. Тачке P и Q су средишта страница BC и CD, редом. Праве AP и AQ секу дијагоналу BD у тачкама M и N. Израчунај дужину дужи MN.

VII разред

523. Израчунај вредност израза $\sqrt{\left(\sqrt{2008}-45\right)^2}+\sqrt{\left(44-\sqrt{2008}\right)^2}$.

524. У правоуглом троуглу ABC, дужине тежишних дужи које одговарају катетама су $2\sqrt{13}$ cm и $\sqrt{73}$ cm. Колика је дужина хипотенузе тог троугла.

525. Дат је правилан осмоугао $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$, чија је страница $a = 8\,\text{cm}$. Израчунај површину троугла $A_1A_2A_5$.

526. Да ли је вредност израза

$$1004^2 - 1003^2 + 1002^2 - 1001^2 + \cdots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$$

дељива са 2008?

527. Природан број зовемо „симпатичним“ ако је производ његових цифара паран. Колико има „симпатичних“ шестоцифрених бројева?

VIII разред

528. Одреди решења једначине $|x - |x - |x||| = 2008$.

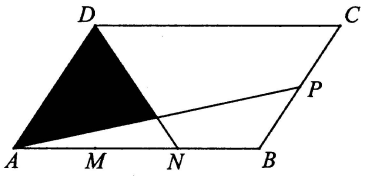
529. Теме A троугла ABC је нула линеарне функције $y = \frac{3}{4}x + 12$, а теме B је нула линеарне функције $y = -\frac{4}{3}x + 12$. Теме C је заједничка тачка графика тих линеарних функција.

а) Докажи да је троугао ABC правоугли.

б) Израчунај обим и површину троугла ABC.

530. Од папира облика квадрата површине $50\,\text{cm}^2$ изрезана је мрежа правилне четворостране пирамиде тако да се при састављању темена квадрата састају у врху пирамиде (темена квадрата су врхови једнакокраких троуглова мреже те пирамиде). За ту пирамиду се зна да је ивица основе два пута мања од висине бочне стране. Колико процената површине квадрата чини површина мреже?

531. Велика коцка је састављена од малих коцки једнаких ивица, али које су обојене црвеном, плавом или белом бојом. Од укупног броја, $\frac{13}{72}$ коцки је црвене боје, а $\frac{25}{}$ је беле боје. Број плавих коцки је мањи од 1000. Колико има плавих коцки, а колико укупно малих коцки?



Сл. уз зад. 532

532. Тачке M и N деле страницу AB паралелограма $ABCD$ на три једнака дела. Тачка P је средиште странице BC. Који део површине паралелограма чини осенчени део?

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ 2008.

VI разред

533. Збир година рођења Марка, Маркове сестре и Маркове мајке је 5923. Ако је 2000-те године Марко напунио два пута више година него његова сестра, а два пута мање година него његова мајка, колико година је Марко напунио 2008. године?

534. Дијагонале AC и BD паралелограма $ABCD$ се секу у тачки O. Тачка M је на правој AB, при чему је $\measuredangle AMO = \measuredangle MAD$. Докажи да је $MC = MD$.

535. Дати су природни бројеви од 1 до 2008. Докажи да међу њима има мање од 604 проста броја.

536. У правоуглом троуглу ABC тачка D је подножје хипотенузине висине, а тачке E и F су средишта катета AC и BC. Докажи да тачке C, D, E и F припадају истој кружници.

537. Дато је пет бројева: $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$, $a_5 = -1$. Шести број је једнак производу првог и другог броја, седми број је једнак производу другог и трећег броја, а осми број је једнак производу трећег и четвртог броја. Сваки следећи број је једнак производу бројева који су за четири и за пет места испред њега. Који број је на 2008. месту? Израчунај збир првих 2008 бројева.

VII разред

538. Одреди све целе бројеве x и y такве да је $x^4 + y^{2008} = 2x^2$.

539. Дате су две паралелне тетиве једне кружнице. Дужине тих тетива су 12 cm и 8 cm. Ако је разлика растојања ових тетива од центра кружнице 2 cm, израчунај дужину тетиве која је једнако удаљена од њих.

540. Са $f(n)$ означимо број колико пута је потребно да се притисне типка „корен“ на калкулатору тако да од броја n добијемо број мањи од 2. На пример, $f(2) = 1$, $f(5) = 2$. За колико природних бројева n $(1 < n \leqslant 2008)$ је број $f(n)$ паран?

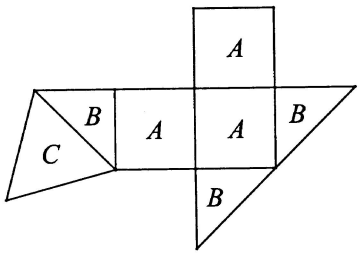
541. Дат је правоугли трапез $ABCD$, при чему је $AB = 6$ и $CD = DA = 4$, а $\measuredangle A = \measuredangle D = 90^\circ$. Разрежи дати трапез на три дела и од њих састави квадрат.

542. Колико има 2008-цифрених бројева у чијем се запису не појављује цифра 3, а који су дељиви са 3?

VIII разред

543. У правоугаонику $ABCD$, тачка M је средиште странице CD, а N пресечна тачка дужи AM и BD. Израчунај површину правоугаоника $ABCD$ ако је $ND = 3$ cm и $AN = 4$ cm.

544. Одреди све целе бројеве a, b и c за које је $|a-b|+c=19$ и $ab-|c|=-97$.



Сл. уз зад. 546

545. Да ли постоје цели бројеви x и y такви да је $x^5-y^5-5x^3+4x+y=2008$?

546. Мрежа тела (види слику) састављена је од 3 квадрата странице a (означена са A), 3 једнакокрака правоугла троугла (означена са B) и једног једнакостраничног троугла (означен са C). Изрази запремину тог тела у функцији странице a.

547. Квадрат је помоћу 8 правих, од којих су 4 паралелне са једним паром, а 4 паралелне са другим паром страница квадрата, подељен на 25 правоугаоника. Докажи да ако међу добијених 25 правоугаоника има тачно 4 квадрата, онда су бар два од тих квадрата подударна.

ДРУГА СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

548. У троуглу ABC је $\measuredangle A=120^\circ$, $AB=3$ и $AC=6$. Симетрала угла A сече страницу BC у тачки D. Одреди дужину дужи AD.

549. Одреди најмањи збир цифара броја облика $3n^2+n+1$ за $n\in\mathbf{N}$.

550. Из квадрата 100×100 исечена су четири поља која образују квадрат 2×2.

а) Доказати да се преостали део не може поплочати правоугаоницима 1×3 (сваки правоугаоник прекрива три поља) ако је квадрат 2×2 исечен у једном углу квадрата 100×100.

б) Доказати да је поплочавање могуће ако је квадрат 2×2 исечен из центра квадрата 100×100.

551. Одреди све уређене четворке (x,y,z,t) природних бројева x, y, z и t тако да је

$$x+y=zt, \qquad z+t=xy.$$

552. Бројеве $1, 2, \ldots, 2008$ распоредимо на 1004 домине, тако да се на свакој домини налазе тачно два броја. Ако производе бројева на доминама означимо са $p_1, p_2, \ldots, p_{1004}$, доказати неједнакост

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_{1004}}\leqslant\frac{1}{1005}+\frac{1}{1006}+\cdots+\frac{1}{2008}.$$

553. У троуглу ABC страница BC је најмања. На страницама AB и AC дате су редом тачке D и E такве да је $BD=CE=BC$. Доказати да је полупречник круга описаног око троугла ADE једнак растојању између центра круга описаног око троугла ABC и центра круга уписаног у троугао ABC.

ДВАНАЕСТА ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Валона (Албанија), 2008.

554. Наћи све реалне бројеве a, b, c, d тако да важи $a+b+c+d=20$ и $ab+ac+ad+bc+bd+cd=150$.

555. Темена A и B једнакостраничног троугла ABC припадају кружници k полупречника 1, а теме C припада унутрашњости круга k. Тачка $D \neq B$ кружнице k таква је да је $AD = AB$, а E је тачка (различита од D) у којој права DC сече k. Наћи дужину дужи CE.

556. Наћи све просте бројеве p, q и r за које важи $\dfrac{p}{q} - \dfrac{4}{r+1} = 1$.

557. Свако поље табле 4×4 обојено је белом бојом. У једном потезу дозвољено је променити боју произвољном пољу заједно са његовим суседним пољима у супротну (белу у црну, односно црну у белу). (Два поља су суседна ако имају заједничку страницу.) Одредити све вредности броја n, такве да је могуће после n потеза добити таблу са свим пољима обојеним у црно.

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2009.

III разред

558. Израчунај вредност израза:

(а) $468 + 389$; (б) $902 - 209$; (в) $40 - 15 : 5$.

559. У квадрате између бројева упиши тачно један од знакова $+$, или $=$ (сва три знака морају бити употребљена) тако да добијеш тачну једнакост:

а) $7 \square 2 \square 39 \square 30$; б) $30 \square 40 \square 70 \square 0$.

Пронађи сва решења.

560. Гордана има 85 салвета. Мирјана има 5 пута мање салвета од Гордане, а Славица за 5 салвета више од Мирјане. Колико салвета има Славица?

561. Дата је дуж $AD = 20\,\mathrm{cm}$. Између тачака A и D је тачка B, таква да је $BD = 16\,\mathrm{cm}$ и тачка C између B и D таква да је $AC = 15\,\mathrm{cm}$. Израчунај дужину дужи BC.

562. Ненад и његов син су пре две године заједно имали 40 година. Колико година ће они имати заједно за 3 године?

IV разред

563. Напиши најмањи и највећи паран седмоцифрени број користећи неке од цифара 3, 5, 0, 8 и 7 у коме се ниједна од цифара не појављује више од два пута.

564. Који је број 5 пута мањи од разлике бројева 46238 и 9393?

565. Доврши уписивање бројева у празна поља тако да збирови свака три узастопна броја буду међусобно једнаки.

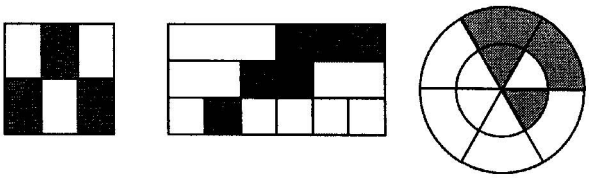
	528				1477	2306		

566. Колико се пута употреби цифра 4 за исписивање свих троцифрених бројева?

567. Обим правоугаоника, чије су странице a и b, износи $2\,\mathrm{m}$. Ако се странице дужине a смање за по $10\,\mathrm{cm}$, а странице дужине b повећају за по $10\,\mathrm{cm}$, добија се квадрат. Израчунај странице тог правоугаоника и добијеног квадрата.

V разред

568. Којим геометријским фигурама је осенчена тачно трећина? (Квадрат је подељен на једнаке делове; слојеви правоугаоника су исте ширине а сваки слој садржи једнаке делове; сваки круг је подељен на једнаке делове).



Сл. уз зад. 568

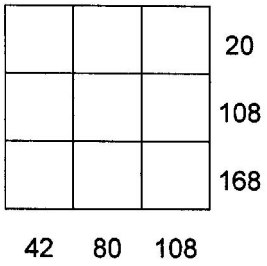
569. Одреди најмањи петоцифрени број коме су све цифре различите и који је дељив и са 3 и са 4.

570. Одреди елементе скупова A и B ако је

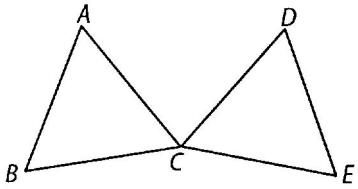
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad A \cap B = \{\, x \mid x \in \mathbf{N} \text{ и } 3 \leqslant x < 6 \,\} \quad \text{и} \quad A \setminus B = \{1, 6\}.$

571. Угао α је за 32° већи од своје трећине. Одреди угао комплементан углу α.

572. Попуни табелу бројевима 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 тако да производ бројева у сваком реду буде једнак броју са десне стране реда, а производ бројева у колони буде једнак броју испод колоне.



Сл. уз зад. 572



Сл. уз зад. 575

VI разред

573. Ако је $x = (-5) - (-3) + 5 + (-5)$ и $y = -5 - x$, израчунај колико је $|x - 1| - |y - 2|$.

574. Израчунај $|(-2009 : 49 + 2009 : 41 - 2009 : 7) : 9|$

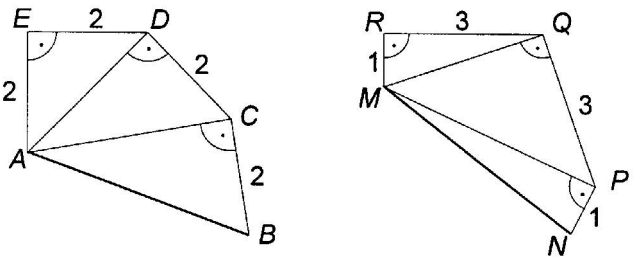
575. Троуглови на слици су једнакостранични и подударни, и имају једно заједничко теме, тачку C. Израчунај $\measuredangle ABD$ ако је $\measuredangle ACD = 70^\circ$.

576. Весна је записала 2009 целих бројева, таквих да је сваки следећи за 2 већи од претходног. Ако је највећи међу њима 2008, одреди збир свих ових бројева.

577. Срећко је запослен у сервису „Аладин“ и за 8 сати треба да очисти $80\,\mathrm{m}^2$ тепиха. За 6 сати је очистио 3 тепиха димензија $3\,\mathrm{m} \times 2{,}5\,\mathrm{m}$, тепих стазу ширине $1{,}4\,\mathrm{m}$ и дужине $12\,\mathrm{m}$ и 2 тепиха димензија $3{,}5\,\mathrm{m} \times 3\,\mathrm{m}$. Колико још m^2 тепиха треба да очисти до краја радног времена?

VII разред

578. Израчунај дужине дужи AB и MN, па их упореди.



Сл. уз зад. 578

579. Одреди последњу цифру у броју 2008^{2009}.

580. У трапезу $ABCD$ дијагонала AC дели средњу линију трапеза на одсечке од $2\,\mathrm{cm}$ и $5\,\mathrm{cm}$. Ако је висина трапеза $3\,\mathrm{cm}$, одреди однос површина троугла ABC и троугла ACD.

581. За колико се разликују вредности корена:

а) $\sqrt{3+\frac{1}{16}}$ и $\sqrt{2-\frac{7}{16}}$; б) $\sqrt{1{,}69-0{,}25}$ и $\sqrt{6{,}25-5{,}76}$?

582. Славина A пуни базен за 12 часова, а славина B за 15 часова. Одводна цев C празни базен за 10 часова. За које време ће се напунити базен ако су истовремено отворене славине A и B и одводна цев C?

VIII разред

583. Колико највише равни одређују три паралелне праве и 5 различитих тачака од којих су три колинеарне?

584. Ако са d_n означимо број дијагонала из једног темена конвексног многоугла, а са D_n укупан број дијагонала тог многоугла, одреди многоугао за који важи $9d_n^2 - D_n^2 = 0$.

585. Реши неједначину $2x + 1 \geqslant 2 - \frac{1}{2} - \frac{x}{3}$ и решење представи на бројевној правој.

586. У равни α се налази правоугли троугао ABC са катетама $3\,\mathrm{cm}$ и $4\,\mathrm{cm}$. У средишту C_1 хипотенузе AB је постављена дуж C_1M нормална на раван α. Тачка M је од α удаљена $5\,\mathrm{cm}$. Колика је дужина дужи MC?

587. Одреди најмањи природан број који се записује само цифрама 2 и 9, а коме је збир цифара 2009.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2009.

III разред

588. а) У назначена поља $13\square + 62\square = 753$ упиши цифре тако да једнакост буде тачна. Два решења су $130 + 623 = 753$ и $133 + 620 = 753$. Нађи још два решења.

б) У назначена поља $4\square 2 - 3\square 9 = 163$ упиши одговарајуће цифре тако да добијеш тачну једнакост. Нађи сва решења.

589. Између цифара (на левој страни једнакости)

$$5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad = 100$$

упиши знаке рачунских операција и заграда тако да једнакост буде тачна. Нађи бар два решења.

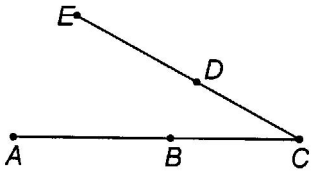
$$\begin{array}{r} A \\ A\,A \\ +\ A\,A\,A \\ \hline 8\ 6\ 1 \end{array}$$

590. Уместо слова A (десно) стави одговарајућу цифру тако да добијеш тачно сабирање.

591. Колико различитих

а) правих, б) дужи

одређују тачке A, B, C, D и E које имају положај као на слици?



Сл. уз зад. 591

592. Један часовник заостаје (касни) 6 секунди за 5 дана. Које време ће показивати 7. марта 2009. године у подне ако је дотеран да показује тачно време првог јануара у подне?

IV разред

593. Израчунај $209 \cdot 208 - 208 \cdot 207 - 2 \cdot 207$.

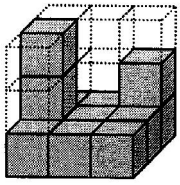
594. Од цифара 1, 2, 3 и 4 можеш да напишеш 24 четвороцифрена броја, а да се свака од тих цифара у сваком од бројева јавља тачно једанпут. Одреди два таква броја чији је збир 7733. Колико има решења?

595. Правоугаоник је помоћу 3 праве подељен на 6 једнаких квадрата. Ако је обим правоугаоника 120 cm, колики је обим једног од тих квадрата?

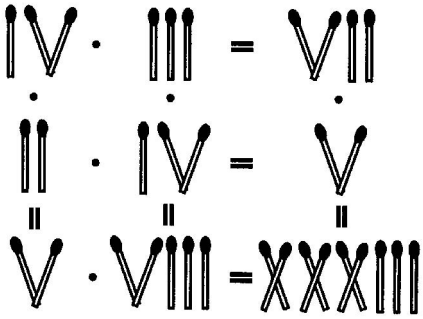
596. Велика коцка је састављена од 27 малих жутих коцки и обојена је споља зеленом бојом (слика). Када се боја осушила, Јеротије је раздвојио све мале коцке. Колико ће малих коцки имати:

а) 3 жуте и 3 зелене стране; б) 4 жуте и 2 зелене стране;

в) 5 жутих и 1 зелену страну; г) све стране жуте боје?



Сл. уз зад. 596



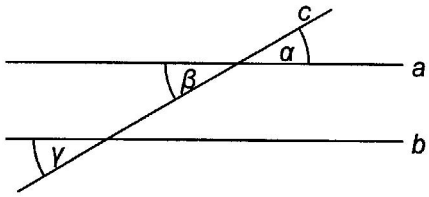
Сл. уз зад. 597

597. У сваком хоризонталном реду (врсти) на слици премести једно палидрвце тако да добијеш шест тачних једнакости.

V разред

598. Колико има парова природних бројева n и $2n+1$ таквих да су оба броја (и n и $2n+1$) проста и мања од 100?

599. Пеца поједе целу пицу за 15 минута, а Пеца и Неца заједно поједу целу пицу за 6 минута. Колико је времена потребно Неци да сам поједе целу пицу?



Сл. уз зад. 601

600. Производ неколико простих бројева је 2009. Израчунај збир тих простих бројева.

601. Права c сече две паралелне праве a и b (слика). Ако је $\alpha+\beta+\gamma=2009'$, израчунај α.

602. Деда је 2 пута јачи од бабе, баба је 3 пута јача од унуке, унука је 4 пута јача од Жуће, Жућа је 5 пута јачи од мачке, мачка је 6 пута јача од миша. Деда, баба, унука, Жућа, мачка и миш могу заједно да ишчупају репу, а деда, баба, унука, Жућа и мачка (без миша) не могу. Колико мишева треба позвати да би они сами могли да ишчупају репу?

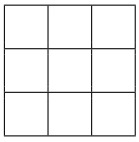
VI разред

603. Одреди три рационална броја која су мања од $-\frac{5}{12}$ и већа од $-\frac{1}{2}$ а којима су именилац и бројилац узајамно прости бројеви.

604. У троуглу ABC ($AB > BC$) кроз тачке A и C конструисане су праве које су нормалне на симетралу угла ABC. Оне секу праве BC и AB, редом, у тачкама K и M. Израчунај дужину странице AB ако је $KC = 5\,\mathrm{cm}$ и $MB = 8\,\mathrm{cm}$.

605. Колико има природних бројева мањих од 2009 чији је производ цифара 42?

606. Дат је троугао чије су дужине страница цели бројеви (у центиметрима). Колики је најмањи, а колики највећи могући обим овог троугла ако је једна страница дужине $2009\,\mathrm{cm}$, а друга $2008\,\mathrm{cm}$?



607. Да ли се у квадрат 3×3 (слика) могу уписати бројеви из скупа $\{-1, 0, 1\}$ тако да збирови бројева по колонама, врстама и дијагоналама буду различити (свака два)?

VII разред

608. Докажи да вредност израза $\frac{(8^5)^{4n}}{(32^{3n})^4}$ не зависи од n.

609. Упрости израз $\sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2} + 2\sqrt{3}$ ако је $x = 2 - \sqrt{3}$.

610. У једнакостранични троугао странице $6\,\mathrm{cm}$, уписан је круг, а у круг је уписан квадрат. Израчунај површину тог квадрата. Који део површине троугла заузима површина квадрата?

611. За четвороугао $ABCD$ је познато да је $AB = 4\,\mathrm{cm}$, $BC = 4\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$, $CD = \sqrt{2}\,\mathrm{cm}$, $\measuredangle ABC = 45^\circ$ и $\measuredangle BCD = 90^\circ$. Израчунај обим и површину тог четвороугла.

612. На фудбалској утакмици у једном реду седишта на трибинама сео је известан број гледалаца. Затим је између свака два гледаоца сео још по један гледалац. Овакав начин заузимања места (седишта) поновио се укупно три пута (још 2 пута), па је после тога у том реду било 2009 гледалаца. Колико је гледалаца на почетку село у овај ред?

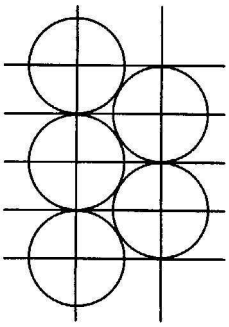
VIII разред

613. Реши једначину $\Big|x + \big|2x + |4x|\big|\Big| = 2009$.

614. Три рационална броја a, b и c су таква да је један већи од нуле, један једнак нули и један мањи од нуле. Ако за те бројеве важи

$$\frac{a(c-b)}{b} > 0,$$

који од тих бројева је већи, који мањи, а који једнак нули?



Сл. уз зад. 615

615. Колико је растојање (слика) између суседних правих (водоравних односно усправних) ако су пречници свих кругова по 10 cm?

616. Докажи да је број $6^{2n+2}-2^{n+3}\cdot 3^{n+2}+36$ дељив са 900 за сваки природан број n.

617. Основна ивица правилне шестостране призме повећана је за 200%, а висина је смањена за p%. Ако се запремина те призме повећала за p%, одреди да ли се површина омотача повећала или смањила и за колико процената.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 2009.

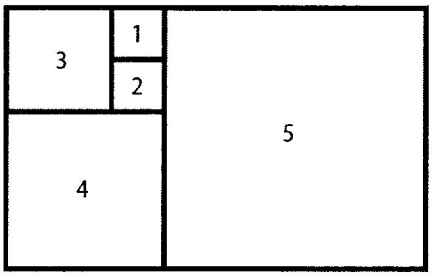
IV разред

618. Допиши један пар заграда тако да буде тачна једнакост $6027 \cdot 287 - 2009 : 7 = 0$.

619. Дешифруј сабирање ако се оба сабирка читају исто и са леве и са десне стране (такви бројеви су, на пример, 373, 4224, 5555).

$$\begin{array}{r} * \; * \; * \\ + \; * \; * \; * \; * \\ \hline 2 \; 0 \; 9 \; 1 \end{array}$$

620. Маја је у башти на цвећу видела бубамаре са 4 и са 7 тачкица. Колико је најмање бубамара са 7 тачкица могло да буде ако је Маја избројала укупно 90 тачкица?



Сл. уз зад. 621

621. На слици су бројевима од 1 до 5 означени квадрати који формирају правоугаоник. Израчунај обим правоугаоника ако је површина најмањег квадрата $4\,\mathrm{cm}^2$.

622. Две ивице квадра су дужина 5 cm и 10 cm. Збир дужина свих ивица квадра је 140 cm. Израчунај површину тог квадра.

V разред

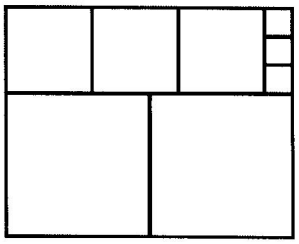
623. Дешифрујe одузимање ако се умањеник и умањилац читају исто и са леве и са десне стране (такви бројеви су, на пример, 989, 3883, 9999).

$$\begin{array}{r} * * * * \\ - \quad * * * \\ \hline 2\ 0\ 9\ 1 \end{array}$$

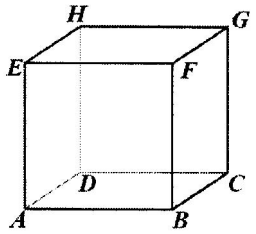
624. Уместо звездица стави знаке рачунских операција тако да добијеш тачну једнакост (можеш користити и заграде):

$$\frac{1}{2} * \frac{1}{6} * \frac{1}{6027} = 2009.$$

625. Правоугаоник је подељен на 8 квадрата (слика). Израчунај површину правоугаоника ако је обим најмањег квадрата 2 cm.



Сл. уз зад. 625



Сл. уз зад. 626

626. Маја је означила врхове коцке словима, као што је приказано на слици. Затим је словима дала вредности тако да збир четири броја на свакој страни коцке (у теменима сваког квадрата) буде једнак. Мајина сестра је избрисала неке бројеве, па тренутно знамо, да је: $A = 1$, $C = \frac{1}{3}$, $F = \frac{1}{2}$, $G = 1$, $H = \frac{1}{4}$. Одреди вредности слова B, D и E.

627. У 6 сати казаљке сата образују опружен угао. За колико минута ће казаљке први пут образовати угао од $70°$?

VI разред

628. Одреди све парове целих бројева x и y за које важи

$$x^2 \cdot |y| = 2009.$$

629. Конструиши троугао ABC ако је позната страница $a = BC$, висина h_a која одговара тој страници и полупречник r_o описане кружнице око троугла ABC.

630. На једном острву $\frac{3}{4}$ мушкараца су ожењени, а $\frac{2}{3}$ жена су удате. Који део становништва острва није у браку ако је број ожењених мушкараца једнак броју удатих жена?

631. На страницама AB и BC ромба $ABCD$ изабране су тачке E и F тако да је $AE = BF$. Угао BAD тог ромба је $60°$. Докажи да је троугао DEF једнакостраничан.

632. Дато је 5 природних бројева a, b, c, d и e, чији је збир 2009. Збир нека 3 од њих је 1000. Докажи да је $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e$ дељиво са 4.

VII разред

633. Докажи да је број $4^9 + 6^{10} + 3^{20}$ квадрат неког природног броја.

634. Израчунај површину правоуглог троугла чији је обим 36 cm, ако за странице тог троугла важи $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{7}{5}$ (a и b су катете, c хипотенуза).

635. Нека је $m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n + 57$. Одреди све природне бројеве n за које је број m квадрат неког природног броја.

636. Од квадрата су одрезана 4 правоугла троугла тако да је добијен правилан осмоугао. Израчунај површину тог осмоугла ако је страница квадрата 10 cm.

637. Колико има троцифрених бројева у којима ниједна цифра није нула, а производ цифара је дељив са 15?

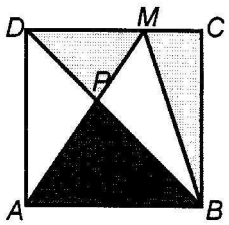
VIII разред

638. Докажи да ребус са десне стране нема решење ако различитим словима одговарају различите, а истим словима исте цифре.

$$\begin{array}{r} A \\ AB \\ ABC \\ +\ ABCD \\ \hline 2\,0\,0\,9 \end{array}$$

639. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Са S је означен центар те коцке. Израчунај запремину пирамиде A_1BC_1S.

640. Ако за природне бројеве a, b и c важи $a+b+c = 2010$, докажи да је $a^3+b^3+c^3$ дељиво са 6.



Сл. уз зад. 642

641. Колико има троцифрених бројева у којима ниједна цифра није нула, а производ цифара је дељив са 20?

642. Дат је квадрат $ABCD$. Нека је M произвољна тачка на страници CD и пресек дужи AM и BD је тачка P (слика). Шта је веће: површина троугла ABP или збир површина троуглова MDP и BCM?

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ 2009.

VI разред

643. Одреди целе бројеве x, y и z такве да је $x < y < z$ и $x \cdot y \cdot z = 2009$.

644. Дате су 4 „плаве“ и 5 „црвених“ тачака, тако да међу тих 9 тачака нема колинеарних. Колико троуглова, чија сва темена нису исте боје, одређују ове тачке?

645. Ако Вера уложи у банку 25 000 динара на годину дана, добиће камату од $p\%$. На сав новац који уложи преко 25 000 динара добија $(p+2)\%$ камате. Колико новца је Вера уложила у банку ако је укупна камата за годину дана била $(p + 0{,}4)\%$?

646. Дат је оштроугли разностранични троугао ABC са ортоцентром H и центром описане кружнице O. Нека је D пресечна тачка праве BO и описане кружнице $(B \neq D)$. Докажи да је четвороугао $AHCD$ паралелограм.

647. Број је „леп“ ако је непаран и једнак збиру три узастопна цела броја. Докажи:

а) збир два лепа броја није леп,

б) производ два лепа броја јесте леп број.

VII разред

648. Ако $13 \mid (a^2 + b^2)$, докажи да $13 \mid (2a + 3b)(3a + 2b)$.

649. У круг полупречника 1 су уписани правоугаоник $ABCD$, са страницама $AB = a$ и $BC = b$, и једнакокраки троугао CDE са основицом CD. За које вредности странице b троугао CDE и правоугаоник $ABCD$ имају једнаке површине?

650. Одреди све природне бројеве x и y такве да је $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2009}$.

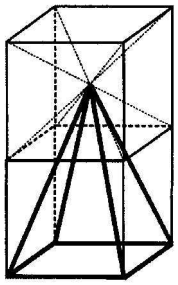
651. Две наспрамне странице конвексног четвороугла леже на узајамно нормалним правим и њихове дужине су 8 cm и 6 cm. Одреди дужину дужи која спаја средишта дијагонала тог четвороугла.

652. Бранко је изабрао 4 броја. Воја је за свака два Бранкова броја израчунао разлику већег и мањег броја и добио бројеве: 2, 2, 3, 4, 5, 6. Вера тврди да је Воја погрешио у рачуну. Да ли је Вера у праву?

VIII разред

653. Одреди све вредности реалних бројева a, b, c и d за које је

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a(b + c + d).$$



Сл. уз зад. 654

654. Дате су две једнаке коцке. Једна је стављена на другу тако да формирају квадар. Направљена је пирамида чији је врх средиште горње коцке, а основа основа доње коцке (слика). Одреди који део запремине пирамиде је у горњој коцки у односу на запремину читаве пирамиде.

655. Нека је $x \in \mathbf{R}$ и $n \in \mathbf{N}$. Одреди све вредности за x за које важи

$$\frac{x^{2009}+1}{2} + \frac{2x^{2009}+1}{3} + \cdots + \frac{n \cdot x^{2009}+1}{n+1} = n.$$

656. Страница квадрата $ABCD$ је дужине a. Нека је M средиште странице BC, а X подножје нормале из темена A на дуж MD. Израчунај обим троугла ABX у зависности од странице a.

657. Докажи да је $\dfrac{1}{2009} < \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2007}{2008} < \sqrt{\dfrac{1}{2009}}$.

ТРЕЋА СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

658. Дати су природни бројеви a, b и n такви да је $a^2 + 2nb^2$ потпун квадрат. Докажи да се број a^2+nb^2 може приказати као збир квадрата два природна броја.

659. У једнакокрако-правоуглом троуглу ABC уписана је кружница. Нека је CD висина на хипотенузу ($D \in AB$), и нека је P (други) пресек уписане кружнице и висине CD. У ком односу кружница дели дуж AP?

660. На сваком пољу табле димензија $n \times n$ ($n \geqslant 2$) налази се по један жетон. У једном кораку померамо сваки жетон на једно њему суседно дијагонално поље. После неког корака на једном пољу може се налазити више жетона. Одреди најмањи број поља на која се могу поставити сви жетони после неког броја померања.

661. У запису 2009-цифреног природног броја појављују се само цифре 5 и 8. Докажи да се изостављањем само једне цифре може добити 2008-цифрени број дељив са 11.

662. Одреди све двоцифрене бројеве $\overline{AB}$, такве да $\overline{AB}$ дели $\overline{A0B}$.

663. Из скупа $\{1, 2, 3, \ldots, 2009\}$ изабрано је 1005 бројева, тако да збир никоја два није ни 2009 ни 2010. Одреди све начине на које је могуће изабрати тих 1005 бројева.

664. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао, такав да је

$$\measuredangle CBD = 2\measuredangle ADB, \quad \measuredangle ABD = 2\measuredangle CDB \quad \text{и} \quad AB = CB.$$

Докажи да је четвороугао $ABCD$ делтоид.

665. За позитивне реалне бројеве x, y, z важи

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{2}.$$

Докажи неједнакост

$$\frac{1}{x^3+2}+\frac{1}{y^3+2}+\frac{1}{z^3+2}<\frac{1}{3}.$$

ТРИНАЕСТА ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Сарајево (Босна и Херцеговина), 2009.

666. Нека је $ABCDE$ конвексан петоугао такав да је $AB+CD=BC+DE$ и k круг са центром на страници AE који додирује странице AB, BC, CD и DE у тачкама P, Q, R и S (различитим од темена петоугла), редом. Доказати да су праве PS и AB паралелне.

667. Решити у скупу ненегативних целих бројева једначину $2^a\cdot 3^b+9=c^2$.

668. Нека су x, y и z реални бројеви такви да је

$$0<x,\,y,\,z<1$$

и

$$xyz=(1-x)(1-y)(1-z).$$

Доказати да је бар један од бројева $(1-x)y$, $(1-y)z$, $(1-z)x$ већи или једнак од $\frac{1}{4}$.

669. Свака од 2009 различитих тачака у равни обојена је плавом или црвеном бојом, тако да се на свакој јединичној кружници са центром у плавој тачки налазе тачно две црвене тачке. Одредити највећи могући број плавих тачака.

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2010.

III разред

606	611	703	610
780	600	665	644
872	677	755	688
700	674	858	622
735	788	756	630
767	679	753	672

Сл. уз зад. 670

670. Напиши (на папиру који предајеш) све парне бројеве седме стотине који су записани у таблици.

671. Запиши речима бројеве написане римским цифрама: а) IV; б) CCXLII; в) CM.

672. Напиши све бројеве који се пишу цифрама 1, 4 и 7 (цифре се могу понављати), а који су већи од 242 и мањи од 466.

673. Који од бројева 723, 732 и 273 се највише смањи и за колико ако у сваком од њих цифре 7 и 3 замене места?

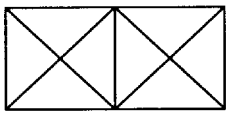
674. Дата је дуж $AC = 25\,\mathrm{cm}$. Између тачака A и C је тачка B, таква да је $BC = 8\,\mathrm{cm}$. Тачка D је дата тако да је C између B и D и да је $BD = 21\,\mathrm{cm}$. Израчунај дужину дужи AD.

IV разред

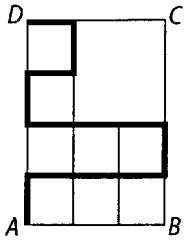
675. Ако цифре 5 и 4 замене места, који од бројева 35246, 42385, 45263 и 75234 ће се највише повећати и за колико?

676. Када је један број прво увећан за 17 200, па затим умањен за 8 620, добијен је број 88 888. О ком броју је реч?

677. Колико троуглова можеш да уочиш на слици? Образложи одговор.



Сл. уз зад. 677



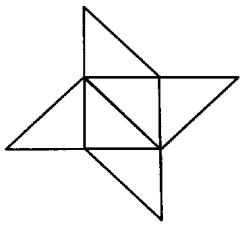
Сл. уз зад. 678

678. На слици је 8 мањих (међусобно једнаких) и један већи квадрат. Ако је обим правоугаоника $ABCD$ једнак 28 cm, израчунај дужину назначене изломљене линије.

679. На папиру који ћеш предати прецртај табелу са слике па доврши попуњавање табеле.

+	4080		
		10000	9000
	4980		7565
		10000	

Сл. уз зад. 679



Сл. уз зад. 683

V разред

680. Израчунај збир првих десет сложених (природних) бројева.

681. Одреди бројеве x и y ако је

$$\{1, x, 3, 4, 5\} \cup \{y, 2, 3, 15\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 15, 45, 54\}.$$

682. Дат је круг $K(S, r)$ и ван круга тачка M. Најкраће растојање тачке M од круга K је 3 cm, а највеће растојање тачке M од круга је 11 cm. Колики је полупречник тога круга?

683. Колико дужи, а колико троуглова има на слици? Образложи одговор.

684. Замени звездице неким цифрама тако да буде тачан следећи рачун:

$$2009 \cdot **** = ****2010.$$

VI разред

685. Израчунај вредности израза a, b, c, d и e ако је:

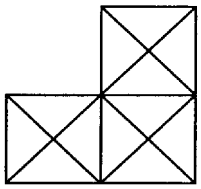
$$a = -3 - 8,\ b = 2 - |-4|,\ c = |a - b|,\ d = -(c - b),\ e = a + b + c + d.$$

686. Упореди углове троугла ABC ако за његове странице a, b и c важи да је $b = a + 2$, $c = b - 1$, а његов обим је 72.

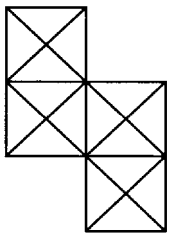
687. Колико троуглова можеш да уочиш на слици? Образложи одговор.

688. Мајка и ћерка су рођене у истом веку. Колико година је мајка старија од ћерке ако је данас производ њихових година 2010?

689. У унутрашњости троугла ABC дата је тачка P. Покажи да је $\measuredangle ACB < \measuredangle APB$.



Сл. уз зад. 687



Сл. уз зад. 693

VII разред

690. а) Израчунај $(3\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{3})^2$.

б) Упрости израз $\sqrt{(x+\sqrt{3})^2} - \sqrt{(x-2)^2} + 2\sqrt{3} - 2$ ако је $x = 2 - \sqrt{3}$.

691. Странице правоуглог троугла имају дужине 20 cm, 25 cm и 15 cm. Колико је теме правог угла тог троугла удаљено од хипотенузе троугла? Колико је подножје хипотенузине висине удаљено од катета троугла?

692. Нека је $ABCD$ квадрат странице $AB = 10\,\text{cm}$. Тачка M је средиште странице BC, а тачка E је симетрична са тачком A у односу на праву BC. Израчунај:

а) дужину изломљене линије $ABDCME$;

б) обим и површину четвороугла $AECD$.

693. Колико троуглова можеш да уочиш на слици? Образложи одговор.

694. Нађи све целе бројеве n за које је $\dfrac{45}{45-n}$ квадрат неког природног броја.

VIII разред

695. Ако је број дијагонала многоугла 5 пута већи од броја његових страница, колико тај многоугао има страница?

696. Колико правих одређују темена коцке?

697. Дешифрујсабирање (истим словима одговарају исте, а различитим, различите цифре): АВ + АВ = ПАС.

698. Реши неједначину $(2x-4)(x-5)^2 > 0$.

699. Равни π_1 и π_2 су узајамно нормалне. Тачке A и B припадају њиховој заједничкој правој тако да дуж AB има дужину 24 cm. Једнакостранични троугао ABD је у равни π_1 а једнакокраки провоугли троугао ABE са хипотенузом AB је у равни π_2. Израчунај растојање тачака D и E.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2010.

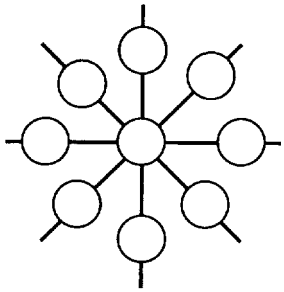
III разред

700. Запиши речима:

а) највећи непаран број мањи од 500;

б) најмањи паран број треће стотине.

701. Прецртај слику на папир који ћеш предати. Затим, бројеве 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 упиши у кругове тако да је збир бројева у круговима на свакој од четири праве исти.



Сл. уз зад. 701

702. Нацртај кружну линију са центром у тачки A. Обележи једну тачку те кружне линије са B и нацртај кружну линију са центром у тачки B. Нацртај тачке C, D и E тако да C припада тачно једном од добијених кругова, D припада и једном и другом добијеном кругу а E не припада ниједном од добијених кругова.

703. Сваком од бројева између 60 и 70 дописана је нула између цифре десетице и цифре јединице.

а) Израчунај највећи могући збир почетног двоцифреног и од њега добијеног троцифреног броја;

б) Израчунај најмању разлику која се добија када се почетни двоцифрен број одузме од добијеног троцифреног броја.

704. Када је у Београду 18.00 часова, у Москви је 20.00 часова. Авион на линији Москва-Београд је у Београд слетео у подне. Ако је лет трајао 2 сата и 40 минута, у колико сати је авион полетео из Москве (по московском времену)?

IV разред

705. Колико има четвороцифрених бројева облика 4∗∗7 ?

706. Када се једна страница правоугаоника повећа за 48 cm, добија се квадрат обима 2008 cm. Израчунај дужину странице квадрата и обим првобитног правоугаоника.

707. Ако је $x - 2009 = 3434$, колико је:

а) $(x + 2009) - 2009$, б) $(x - 2000) - 2009$?

26		28
	29	

Сл. уз зад. 709

708. Зграда има три спрата. На другом и трећем спрату живи 20 особа, а на првом и другом спрату живе 22 особе. Колико људи станује на сваком спрату, ако је број особа на другом спрату једнак укупном броју особа на првом и трећем спрату?

709. Прецртај на папир који ћеш предати магични квадрат са слике па га попуни.

V разред

710. Одреди најмањи и највећи петоцифрени број дељив са 2010.

711. Упореди разломке $\frac{61}{2010}$ и $\frac{5}{149}$.

712. Броју 2009 дописати са леве и са десне стране једну исту цифру тако да добијени шестоцифрени број буде дељив са 12.

713. Дати су скупови $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{2, 3\}$, $S_3 = \{4, 5, 6\}$, $S_4 = \{7, 8, 9, 10\}$, ... Одреди збир елемената скупа S_{10}.

714. Колики угао заклапају сатна и минутна казаљка на часовнику у 8 часова и 10 минута?

VI разред

715. Ако су a, b и c цели бројеви и ако је $a \cdot b = -6$, $a \cdot c = -10$ и $b \cdot c = 15$, израчунај $a \cdot b \cdot c$, a, b и c.

716. Над страницом AB квадрата $ABCD$ конструисан је једнакостранични троугао ABE при чему је тачка E у унутрашњости квадрата. Израчунај угао DEC.

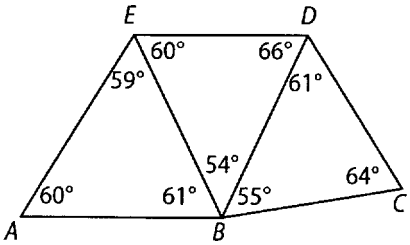
717. Одреди $n \in \mathbf{N}$ тако да је $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{n}$ природан број.

718. Седам дужи формирају три троугла као на слици. Која од тих седам дужи је најдужа?

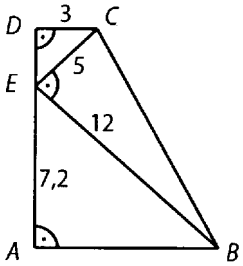
719. У једнакостраничном троуглу странице 4 cm на случајан начин је распоређено 17 тачака. Докажи да постоје две тачке чије је растојање мање од 1 cm.

VII разред

720. Да ли је $\sqrt{0{,}\overline{1}}$ рационалан или ирационалан број? $[0{,}\overline{1} = 0{,}111\ldots]$



Сл. уз зад. 718



Сл. уз зад. 721

721. Израчунај обим и површину трапеза са слике.

722. Шта је веће, 2^{2010} или 5^{861}?

723. Четири друга имају по једну оловку. На колико начина они могу да размене своје оловке али тако да ниједан друг не добије своју оловку?

724. На страници AB троугла ABC дата је тачка D, а на страници AC тачка E тако да изломљена линија DEB дели троугао ABC на три троугла једнаких површина. У ком односу тачка D дели страницу AB, а у ком односу тачка E дели страницу AC?

VIII разред

725. Реши једначину $\big|\big||x|+1\big|+2\big| = 2010$.

726. Површина основе правилне тростране призме је $36\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$ а однос површине једне основе и површине омотача је $\sqrt{3}:2$. Израчунај запремину призме.

727. Колико равни одређују темена коцке?

728. Тачка D је пресек симетрале угла BAC и странице BC троугла ABC. Ако је $|AB| = 10\,\mathrm{cm}$ и $|AC| = 15\,\mathrm{cm}$, доказати да је $|AD| < 12\,\mathrm{cm}$.

729. Група људи подели неку суму новца тако што је први добио 10 динара и десетину остатка; други 20 динара и десетину новог остатка; трећи 30 динара и десетину новог остатка, ... и тако све док нису поделили целокупну суму. На крају се испоставило да су сви добили исте суме новца. Колико људи је делило новац?

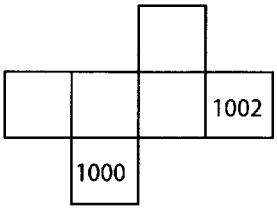
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 2010.

IV разред

730. Збир два броја је 56, количник 4, а остатак 1 (при дељењу првог другим). Који су то бројеви?

731. Колико има двоцифрених бројева код којих је цифра јединица већа од цифре десетица?

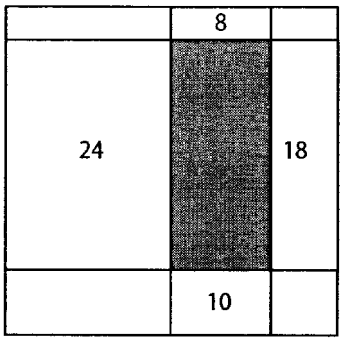
732. На слици је дата мрежа коцке и у два њена квадрата уписани су бројеви 1000 и 1002. Упиши још четири различита парна четвороцифрена броја (у преостала 4 квадрата) тако да збирови бројева на супротним странама коцке (када је склопимо) буду једнаки 2010.



Сл. уз зад. 732

2	0	1	0
0	0	0	0
1	0	1	0
0	0	0	0

Сл. уз зад. 733



Сл. уз зад. 734

733. На колико начина из дате табеле можемо да прочитамо број 2010 ако можемо да се крећемо само у 3 смера: десно, доле и дијагонално десно-доле?

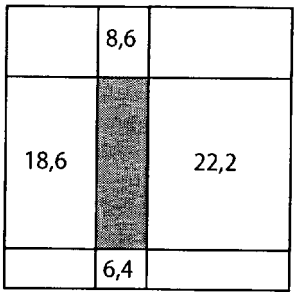
734. Квадрат странице 10 cm подељен је на 9 правоугаоника као на слици. У четири правоугаоника су записани њихови обими (у центиметрима). Израчунај обим осенченог правоугаоника.

V разред

735. Попуни магични квадрат на слици.

$\frac{1}{6}$		
	$\frac{5}{12}$	
	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$

Сл. уз зад. 735



Сл. уз зад. 738

736. Збир половине, четвртине и осмине угла α једнак је углу који је суплементан углу α. Израчунај угао α.

737. Одреди: а) најмањи; б) највећи шестоцифрени природни број коме су све цифре различите и који је дељив са 9.

738. Квадрат странице 10 cm подељен је на 9 правоугаоника као на слици. У четири правоугаоника су записани њихови обими (у центиметрима). Израчунај обим осенченог правоугаоника.

739. Колико има четвороцифрених природних бројева мањих од 2009 чији је производ цифара једнак 10?

VI разред

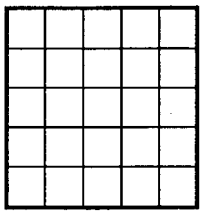
740. Ако је $\frac{a}{b} = -3$, израчунај $\dfrac{-2}{\frac{a}{b}} + \dfrac{\frac{b}{a}}{-2}$.

741. Конструиши троугао ABC ако су дати висина из темена C, $h_c = 4\,\mathrm{cm}$, углови $\alpha = 75^\circ$ и $\beta = 45^\circ$.

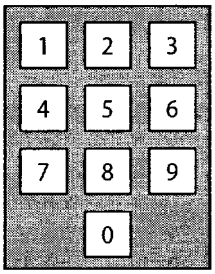
742. Одреди цифре a и b такве да је збир $\overline{991a} + \overline{b234}$ дељив бројем 18.

743. Дат је једнакокрако-правоугли троугао ABC са хипотенузом AB. Над страницом BC конструисан је једнакостранични троугао BCD. Израчунај угао ADB.

744. Дат је квадрат 5×5. Подели овај квадрат „сечењем“ по линијама нацртане мреже на 7 правоугаоника, тако да међу њима нема подударних.



Сл. уз зад. 744



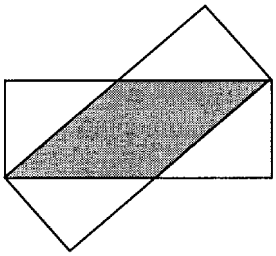
Сл. уз зад. 746

VII разред

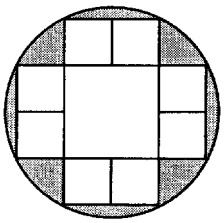
745. Ако је x природан број већи од 1 и $x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{82}{9}$, колико је $x + \frac{1}{x}$, $x - \frac{1}{x}$ и x?

746. Типке на телефону су распоређене тако да је растојање између центара две суседне типке 12 mm (види слику, суседне су типке које су лево, десно, горе или доле од посматране). Да ли је најкраћа путања која је „повучена прстом“ када бирамо број Друштва математичара Србије 0113036818, рачунајући да притискамо увек тачно у центар типке, дужа од 21 cm?

747. Два подударна правоугаоника који се преклапају као на слици имају странице дужине 5 cm и 12 cm. Израчунај површину осенченог дела.



Сл. уз зад. 747



Сл. уз зад. 751

748. Да ли постоји n-тоугао код кога је укупан број дијагонала за 2010 већи од броја страница?

749. Одреди последњу цифру броја $\dfrac{44^{44}}{2}$.

VIII разред

750. Производ два природна броја је два пута већи од њиховог збира. О којим бројевима је реч?

751. У круг полупречника 1 cm уцртано је 9 квадрата међу којима је 8 једнаких, тако да је по једно теме сваког од 8 једнаких квадрата на кружници (види слику). Израчунај површину дела круга који је ван уцртаних 9 квадрата.

752. Тачка $A(32, 76)$ спојена је са координатним почетком O. Колико тачака на дужи OA има обе координате које су природни бројеви?

753. На ивицама AB и BC коцке $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дате су тачке M и N, такве да је $BN = BM$. Израчунај дужину дужи BN ако раван MND_1 заклапа са равни ABC угао од $45°$, а ивица коцке је 10 cm.

754. Папир правоугаоног облика исечемо на два дела. Затим један од добијених делова поново исечемо на 2 дела. Ово понављамо укупно 5 пута (сечења су увек по правој линији). Колико највише, а колико најмање темена могу имати све добијене фигуре заједно?

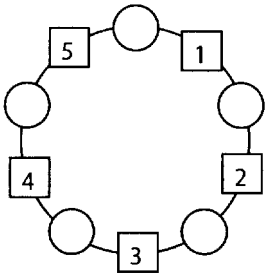
ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ 2010.

VI разред

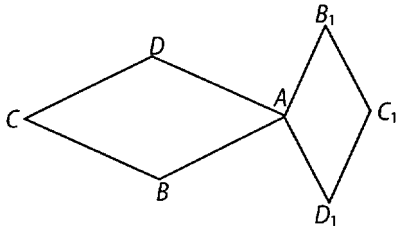
755. Одреди просте бројеве p, q, r, s и t, такве да је $p \cdot q \cdot r \cdot (s + t) = 2010$. Бројеви не морају сви бити међусобно различити.

756. Нека је тачка M на страници BC, а тачка K на страници AC троугла ABC. Да ли дужи AM и BK могу да се секу тако да тачка пресека полови ове дужи?

757. У сваки кружић упиши по један број тако да је сваки број у квадратићу једнак збиру бројева у два њему суседна кружића (види слику).



Сл. уз зад. 757



Сл. уз зад. 758

758. Ромб $ABCD$ и ромб $AB_1C_1D_1$ имају заједничко теме A и при томе је $\measuredangle DAB_1 = \measuredangle BAD_1$ (види слику). Докажи да средина дужи BD_1, пресек дијагонала ромба $ABCD$ и пресек дијагонала ромба $AB_1C_1D_1$ су темена једнакокраког троугла.

759. На математичком такмичењу учествовало је 2010 ученика. Докажи да се међу њима може изабрати 45 ученика таквих да су или сви из истог града или сви из различитих градова.

VII разред

760. Природан број n при дељењу са 3 даје остатак a, при дељењу са 6 даје остатак b, а при дељењу са 9 даје остатак c. Ако је $a+b+c = 15$, одреди остатак при дељењу броја n са 18.

761. Нека су a, b и c природни бројеви који су дужине страница троугла у центиметрима. Једна висина тог троугла једнака је збиру друге две. Докажи да је $a^2 + b^2 + c^2$ квадрат неког природног броја.

762. У земљи чуда цене се мењају свакога дана. Првог дана се повећају за 1%, наредног дана се смање за 1%, затим се следећег дана поново повећају за 1%, па се наредног опет смање за 1%, и тако даље. Да ли је цена после 2010 дана иста као на почетку?

763. Дат је квадрат $ABCD$. У спољашњости квадрата конструисане су полукружнице k_1 и k_2 над пречницима AB и BC, редом. Права кроз теме B сече k_1 у тачки M, а k_2 у тачки N. Докажи да су дужи CM и DN нормалне.

764. Да ли је могуће заменити слова цифрама (различита слова различитим цифрама) тако да буде тачна једнакост $ZEC + VUK + SLON = 2010$?

VIII разред

765. Реши систем једначина

$$\begin{aligned} |x| + y + z &= 2009 \\ x + y + z &= 2010 \\ x + y + 2z &= 2011 \end{aligned}$$

766. Дат је једнакостранични троугао ABC. Над страницом BC, као пречником, конструисана је полукружница у спољашњости троугла. Тачке D и E деле полукружницу на три једнака дела. Докажи да дужи AD и AE деле страницу BC на три подударне дужи.

767. На свакој страни коцке написан је по један природан број. На теменима коцке написан је број који је једнак производу бројева који су написани на странама коцке које одређују то теме. Наћи збир свих бројева написаних на странама коцке ако је збир бројева написаних на теменима једнак 105.

768. Збир три ивице правилне n-тостране призме које полазе из једног темена те призме је 100. Колика је највећа могућа површина омотача те призме?

769. Квадрат 19×19 подељен је на јединичне квадрате (поља). Обојено је 95 поља. Докажи да постоји правоугаоник 5×3 (који се састоји од 15 поља) у коме се налазе највише три обојена поља.

ЧЕТВРТА СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

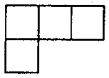
770. Нека су тачке E и F подножја висина из темена B и C троугла ABC. Тачка M је подножје нормале из тачке F на страницу BC, а тачка N је подножје нормале из тачке B на праву EF. Докажи да су праве AC и MN паралелне.

771. Нека су x и y бројеви из интервала $[1, 2]$. Докажи да је

$$(x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \leqslant \frac{9}{2}.$$

772. Одреди просте бројеве p за које је $2^{p^2} + 3^{p^2} + 4^{p^2} - 5$ дељиво са 13.

773. Табла димензија 7×7 је покривена L-фигурама састављеним од 4 једнака квадрата (слика), тако да је тачно једно поље остало непокривено. Одреди сва поља табле која могу остати непокривена.



Сл. уз зад. 773

Сл. уз зад. 781

774. Нађи све троцифрене природне бројеве $A < 500$ који имају следеће својство: „Ако се један иза другог испишу бројеви A, $2A$ и A, добије се деветоцифрени број који је потпун квадрат и који има тачно 4 различита проста делиоца“.

775. Докажи следећу неједнакост за све позитивне реалне бројеве a, b и c:

$$\frac{a^2+2b^2+4c^2}{bc}+\frac{b^2+2c^2+4a^2}{ac}+\frac{c^2+2a^2+4b^2}{ab} \geqslant 21.$$

Када важи једнакост?

776. На табли је написано 2010 природних бројева и један од њих је број 2011. Познато је, такође, да је за свака два написана броја на табли написана и апсолутна вредност њихове разлике. Докажи да су сви бројеви написани на табли дељиви са 2011.

777. На страници BC троугла ABC изабрана је тачка M тако да тежиште троугла ABM припада кружници описаној око троугла ACM, а тежиште троугла ACM припада кружници описаној око троугла ABM. Доказати да су тежишне дужи из темена M, троуглова ABM и ACM, једнаке.

ЧЕТРНАЕСТА ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

(Баиле Оланешти, Румунија), 2010.

778. Реални бројеви a, b, c, d задовољавају следећи систем једнакости:

$$abc-d=1, \quad bcd-a=2, \quad cda-b=3, \quad dab-c=-6.$$

Доказати да је $a+b+c+d \neq 0$.

779. Наћи све природне бројеве n такве да је $n \cdot 2^{n+1}+1$ потпун квадрат.

780. Нека су AL и BK симетрале углова неједнакокраког троугла ABC (L припада страници BC, K припада страници CA). Симетрала дужи BK сече праву AL у тачки M. Тачка N праве BK је таква да је $LN \parallel MK$. Доказати да је $LN = NA$.

781. Правоугаоник димензија 9×7 покривен је фигурама двају облика (види слику; квадрати се састоје од четири јединична квадратића, а L-облици од три и могу се више пута ротирати за $90°$). Нека је $n \geqslant 0$ број фигура димензија 2×2 које се могу искористити у оваквом покривању. Наћи све могуће вредности броја n.

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2011.

III разред

782. Израчунај $209 + 211 - (208 + 210)$.

783. Попуни табелу уписујући бројеве уочених оштрих, правих и тупих углова на сваком од слова.

	П	Е	Т	А	Р
оштри			/		
прави			2		
тупи			/		

Сл. уз зад. 783

784. Запиши све троцифрене бројеве који се пишу цифрама 5, 3 и 8 (цифре се могу понављати) а који су већи од 555.

785. Може ли се круг помоћу 3 праве поделити на 5 делова? Ако може да се подели, нацртај како!

786. Танасије зна да ће му остати 46 динара ако купи 3 свеске, а да му за куповину 5 таквих свезака недостаје 90 динара. Колико динара кошта једна свеска?

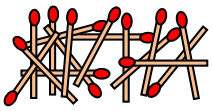
IV разред

787. а) Израчунај број који је за 45568 већи од 109109.

б) Израчунај број који је за 60006 мањи од 100000.

788. Прецртај десет цифара у низу 2011201120112011 тако да шестоцифрени број који се састоји од преосталих цифара буде:

а) највећи могући; б) најмањи могући.



Сл. уз зад. 789

789. Како од 16 датих палидрваца може да се направи фигура на којој може да се уочи 5 квадрата и 10 правоугаоника (који нису квадрати)?

790. На колико најмање, а на колико највише делова 4 праве (свака права сече круг) могу поделити круг?

791. Дешифруј сабирање на слици (иста слова замени истом цифром, а различита различитим цифрама).

$$\begin{array}{r} A\,A\,A \\ +\quad B\,B \\ \hline 4\;A\;2 \end{array}$$

V разред

792. Израчунај $2011 - 1111 : 11 - 11011 : 11 + 110011 : 11$.

793. Скуп A има 2009 елемената, скуп B има 2010, а њихова унија има 2011 елемената. Колико елемената има њихов пресек?

794. Одреди угао који је суплементан са својом осмином.

795. Производ три узастопна парна броја је 960. Одреди њихов збир.

796. Милица је прве недеље прочитала $\frac{5}{7}$ књиге која има 840 страница. Друге недеље је прочитала $\frac{3}{4}$ остатка књиге. Колико јој је страница остало да прочита треће недеље и да стигне до краја књиге?

VI разред

797. Који број треба да стоји уместо $*$ да би једнакост

$$(2006 + 2005 + 2004 + 2003) - (2010 + 2009 + 2008 + 2007) = 1999 - *$$

била тачна?

798. Одреди углове троугла ABC чији спољашњи угао β_1 је три пута већи од суседног унутрашњег угла, а два пута већи од једног несуседног унутрашњег угла троугла.

799. Дати су скупови $A = \{-5, -4, -2, 1, 3\}$ и $B = \{-3, -1, 0, 2\}$. Одреди елементе скупа $C = \{c \mid c = |a + b|, a \in A, b \in B\}$.

800. Мерни бројеви страница троугла (у cm) су природни бројеви. Ако је обим троугла 22 cm и једна страница 11 cm, колико центиметара могу имати друге две странице тог троугла?

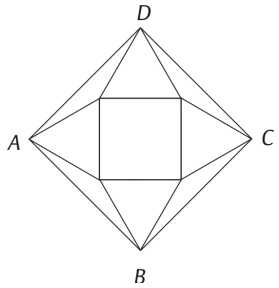
801. Збир k $(k > 1)$ узастопних целих бројева је 9. Који су то бројеви? Колико решења има задатак?

VII разред

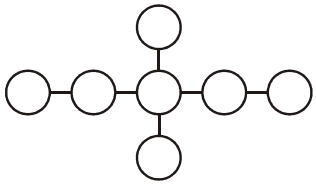
802. Израчунај вредност израза $(-2\sqrt{3})^2 : \left(20 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - (-2)^2 \cdot \frac{(2\sqrt{2})^2}{2}\right)$.

803. Одреди узајамно просте бројеве x и y такве да је $\frac{x}{y} = -0{,}20112011\ldots$ (2011 се понавља).

804. Над страницама квадрата странице $a = 4\,\text{cm}$ конструисани су једнакостранични троуглови. Докажи да је четвороугао $ABCD$ квадрат. Види слику!



Сл. уз зад. 804



Сл. уз зад. 806

805. Реши једначину $\sqrt{x^2} = x + 5$.

806. Прецртај слику на папир који ћеш предати! Попуни кружиће са слике бројевима 7, 72, 73, 74, 75, 76, 77 тако да збир последњих цифара бројева у пет кружића водоравно буде једнак са збиром последњих цифара бројева у три кружића усправно.

VIII разред

807. Странице једног троугла су 12 cm, 24 cm и 15 cm. Израчунај странице њему сличног троугла ако је:

а) коефицијент сличности 3 : 4 (однос страница датог троугла у односу на странице сличног троугла);

б) најдужа страница њему сличног троугла 32 cm;

в) обим њему сличног троугла 34 cm;

г) разлика најдуже и најкраће странице њему сличног троугла 4,5 cm.

808. Који број треба да стоји уместо $*$ да би квадрат на слици био магичан?

$*$		
	15	9
		24

809. Вера је од жице дужине 64 m направила квадар чије су две суседне ивице једнаке. Одреди дужине ивица квадра ако је Вера употребила сву жицу коју је имала.

810. Једна страница правоугаоника $ABCD$ је 6 cm, а дијагонала је од друге странице дужа за 2 cm. Израчунај обим и површину четвороугла BB_1DD_1 где су B_1 и D_1 пресеци нормала из темена B и D, редом, са дијагоналом AC.

811. Израчунај x ако је $\dfrac{x}{0{,}016 : 0{,}12 + 0{,}7} = \dfrac{6\frac{4}{25} : 15\frac{2}{5} + 0{,}8}{1{,}2 : 0{,}375 - 0{,}2}$.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2011.

III разред

812. Нацртај четири праве a, b, c и d, ако знаш да је права a нормална на праву b, права c нормалана на b, а d паралелна са a. Затим попуни табелу стављајући знак $\perp$ (ако су праве нормалне) или $\parallel$ (ако су праве паралелне):

	a	b	c	d
a				
b				
c				
d				

813. Вера је рођена деведесетог дана 2009. године. Колико дана је стара Вера данас (5. марта 2011. године)?

814. Израчунај збир и разлику највећег и најмањег троцифреног броја од којих сваки има збир цифара 8.

815. У квадрате на слици упиши бројеве 2, 5, 7, 13, 16 и 21 тако да између свака два броја важи неједнакост одређена знаком који стоји између њих.

$$\square < \square < \square < \square > \square > \square$$

816. У земљи Ненадији постоји метални новац од 1 јоцка, 2 јоцка, 5 јоцка, 10 јоцка и 15 јоцка. Харалампије има 7 новчића у џепу. Ако има највише 2 металних новчића од исте врсте, колико највише, а колико најмање јоцка може имати Харалампије?

IV разред

817. Правоугаоник страница 44 cm и 16 cm издељен је на квадрате обима 16 cm. Колико има таквих квадрата?

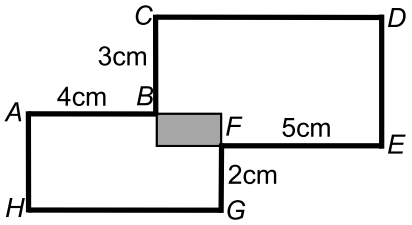
818. Колико има четвороцифрених бројева са збиром цифара 4, којима је збир прве две цифре једнак збиру последње две цифре?

819. Три друга, Боба, Јова и Мома, скупљају сличице фудбалера. Боба има три пута више сличица од Јове, а Јова два пута више сличица од Моме. Колико сличица има сваки од њих ако Боба и Мома заједно имају 210 сличица?

820. Доврши попуњавање табеле на слици одговарајућим чиниоцима и производима.

	25	55	
		66	42
			63

Сл. уз зад. 820



Сл. уз зад. 821

821. Два правоугаоника имају заједнички осенчени део (види слику). Тај део је облика правоугаоника чији је обим 6 cm. Ако је $AB = 4\,\text{cm}$, $BC = 3\,\text{cm}$, $EF = 5\,\text{cm}$, $FG = 2\,\text{cm}$, одреди дужину затворене изломљене линије $ABCDEFGHA$.

V разред

822. Одреди збир свих разломака који су једнаки $\frac{1}{2}$ и такви су да им је именилац већи од 2, а бројилац мањи од 100.

823. Две праве се секу. Израчунај добијене углове ако се зна да је:

а) збир два од четири тако добијена угла $73°$;

б) разлика два од четири тако добијена угла $73°$;

в) збир три од четири тако добијена угла $273°$.

824. У једнакости $a+b = c+d = e+f$ слова означавају различите просте бројеве мање од 30. Одреди бар једно решење за слова a, b, c, d, e и f.

825. Ивица коцке је a. Када се та ивица повећа за 2 cm, површина тако добијене коцке је за $96\,\text{cm}^2$ већа од првобитне. Израчунај површину првобитне коцке.

826. Које године је рођена особа која 2011. године пуни онолико година колики је збир цифара године њеног рођења?

VI разред

827. Ако је $x = 12 + 4$, $y = 12 : 4$, $z = 12 \cdot 4$, израчунај:

а) $(x + y) \cdot (x - z)$, б) $\dfrac{z - x}{x - y}$, в) $\dfrac{x \cdot y + z}{z : x}$.

828. Странице правоуглог троугла су 6 cm, 10 cm и 8 cm. Израчунај растојање тежишта тог троугла од средишта хипотенузе.

829. Одреди целе бројеве a, b и прост број p такве да је $|a \cdot b| \cdot p = 4022$.

830. Разлика највећег и најмањег угла једнакокраког троугла је 8°. Одреди углове тог троугла.

831. Одреди: а) највећи, б) најмањи природан број чији је производ цифара 7560, а у запису броја се не појављује цифра 1.

VII разред

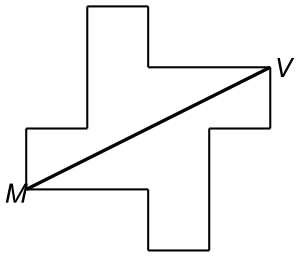
832. Израчунај: а) $\left(\frac{1}{9}\right)^4 \cdot (3^5)^2$; б) $\frac{4^4 \cdot 125^3}{(-50)^4}$.

833. У трапезу $ABCD$ дијагонала AC дели средњу линију трапеза на одсечке дужина $2\,\mathrm{cm}$ и $5\,\mathrm{cm}$. Ако је висина трапеза $3\,\mathrm{cm}$, одреди однос површина троугла ABC и троугла ACD.

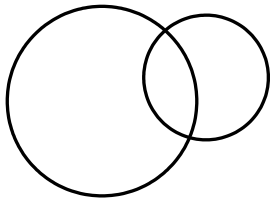
834. Реши једначину $\left|(\sqrt{x-2}\,)^2+1\right| = 7$.

835. Одреди све двоцифрене бројеве такве да је збир тога броја и броја који је написан истим цифрама обрнутим редом квадрат неког броја.

836. Фигура на слици састављена је од четири подударна правоугаоника чија је једна страница два пута већа од друге (види слику). Ако је површина фигуре $200\,\mathrm{cm}^2$, израчунај дужину дужи MV.



Сл. уз зад. 836



Сл. уз зад. 840

VIII разред

837. Одреди све рационалне бројеве x тако да је $\left|x+\left|x+|x|\right|\right| = 2010$.

838. Дијагонала правилне четворостране призме је $16\sqrt{3}$ cm. Израчунај површину и запремину призме ако је дијагонала призме нагнута према равни основе под углом од 30°.

839. Потребно је направити железничку композицију од 4 путничка и 2 теретна вагона. На колико се начина може направити композиција ако се зна да теретни вагони не смеју бити један поред другог, при чему се не прави разлика између вагона исте врсте. Запиши све распореде вагона у композицији.

840. Два круга (види слику) секу се тако да је $\frac{6}{7}$ већег круга ван пресека, а $\frac{3}{4}$ мањег круга ван пресека. Ако је полупречник већег круга 7 cm, израчунај површину мањег круга.

841. За све могуће бројеве a, b и c, различите од нуле, одреди све вредности које може имати S ако је

$$S = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}.$$

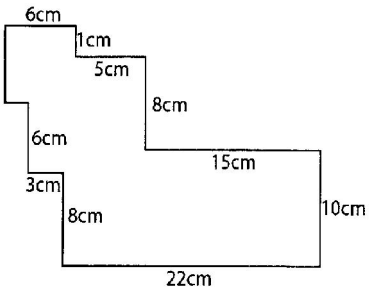
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 2011.

IV разред

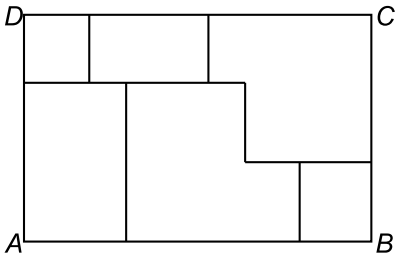
842. Којим бројем треба помножити број 257 тако да када се од тог производа одузме број 422, добија се број 88500?

843. Четвороцифрен и троцифрен број у разлици $**** - *** = 2011$ имају исту вредност ако их читамо и са леве и са десне стране. Одреди те бројеве.

844. Израчунај површину фигуре представљене на слици. Све странице фигуре припадају правим које су или паралелне или нормалне међусобно.



Сл. уз зад. 844



Сл. уз зад. 851

845. Од 12 једнаких коцки чија је ивица дужине 1 cm направљен је квадар. Који од овако добијених квадара има: а) најмању; б) највећу површину? Израчунај те површине.

846. Чика Ратко у џепу има 6800 динара. Тај износ има у новчаницама од 100 динара, 500 динара и 1000 динара. Број новчаница од 100 динара и од 500 динара је исти. Колико новчаница чика Ратко може да има?

V разред

847. Израчунај вредност израза $7 \cdot 1{,}2 - \frac{9}{10} : 0{,}3 - \frac{1}{2}$.

848. Испитај да ли је број $2009 \cdot 2011 \cdot 2013 + 2008 \cdot 2010 \cdot 2012$ прост или сложен.

849. Углови α, β и γ имају паралелне краке. Збир углова α и β је $2011'$, а разлика углова γ и β је већа од правог угла. Израчунај углове α, β и γ.

850. Дешифрујсабирање на слици ако су цифре P, Q, R и S различити прости бројеви.

$$\begin{array}{r} P \\ PQ \\ PQR \\ +\ PQRS \\ \hline *\,SQP \end{array}$$

851. Одреди збир обима свих шест фигура (види слику) које су настале поделом правоугаоника $ABCD$ чије су странице дужине $AB = 14{,}26\,\mathrm{cm}$ и $BC = 11{,}3\,\mathrm{cm}$. Свака од страница свих шест фигура паралелна је једном пару страница правоугаоника $ABCD$.

VI разред

852. Изабери четири броја из скупа $\left\{-\frac{1}{3}, -\frac{7}{8}, \frac{2}{5}, -\frac{5}{14}, -\frac{4}{7}\right\}$ тако да њихов производ буде:

а) највећи; б) најмањи.

Израчунај те производе.

853. Конструиши троугао ABC ако је $\measuredangle ACB = 90^\circ$, $\measuredangle CAB = 15^\circ$ и $CC_1 = 3\,\mathrm{cm}$, где је C_1 средиште странице AB.

854. Дат је правоугаоник чије су странице $10\,\mathrm{cm}$ и $67\,\mathrm{cm}$. У унутрашњости правоугаоника на случајан начин је распоређено 2011 тачака. Докажи да при ма ком распореду тачака постоје четири тачке које припадају једном истом квадрату странице $1\,\mathrm{cm}$.

855. На страници CD квадрата $ABCD$ дата је тачка L. Из темена A и C спуштене су нормале на праву BL и секу је, редом, у тачкама P и Q. Докажи да је $CP = DQ$.

856. Нека су a, b, c разне цифре, све различите од нуле. Да ли збир

$$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba}$$

може бити једнак квадрату неког природног броја?

VII разред

857. Ако је $a^2 + b^2 - 2a + 6b + 10 = 0$, колико је $a^{2009} - 2009b$?

858. Хипотенузина висина у правоуглом троуглу дели хипотенузу на делове од $9\,\mathrm{cm}$ и $16\,\mathrm{cm}$. Одреди обим и површину тог троугла.

859. Да ли је број $2009 \cdot 2011 - 48$ сложен? Образложи одговор.

860. Нека су P, Q, R, S средишта страница AB, BC, CD, DA, тим редом, конвексног четвороугла $ABCD$ и M тачка унутар тог четвороугла, таква да је $APMS$ паралелограм. Докажи да је четвороугао $MQCR$ паралелограм.

861. Одреди четвороцифрени број чији је збир цифара једнак производу прве две цифре и једнак двоцифреном завршетку тог четвороцифреног броја.

VIII разред

862. Израчунај површину фигуре ограничене правом $y = 4$ и графиком функције $y = |x + 1| + |x - 1|$.

863. Одреди вредност израза $a - b$ ако је

$$a = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^3}{5} + \cdots + \frac{2011^2}{4021} \quad \text{и} \quad b = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \cdots + \frac{2010^2}{4021}.$$

864. Права која садржи теме A троугла ABC сече страницу BC у тачки M, тако да је $BM : CM = 2012 : 2011$. Тежишна дуж CC_1 сече праву AM у тачки S. Одреди однос дужи CS и SC_1.

865. Реши једначину $65x^3 + 4y^3 = 2011$ у скупу природних бројева.

866. Правилна четворострана пирамида $ABCDS$ основне ивице a и висине H пресечена је са равни α. Раван α сече основне ивице AB, AD и бочну ивицу AS редом у тачкама M, N, P тако да је

$$AM : MB = 1 : 1, \qquad AN : ND = 2 : 1, \qquad AP : PS = 3 : 1.$$

Израчунај размеру запремина делова пирамиде које одређује раван α.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ 2011.

VI разред

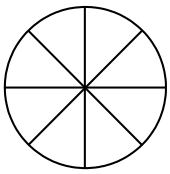
867. Испред и/или иза броја 357 допиши цифре 3, 5 и 7, тако да нови шестоцифрени број буде дељив истовремено са 3, 5 и 7.

868. Спољашњи углови троугла су 20%, 35% и 45% збира спољашњих углова. Одреди угао између симетрале најмањег угла и најкраће странице.

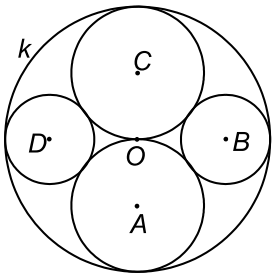
869. Круг је подељен на осам исечака (види слику). У сваки исечак упиши троцифрени број који се записује само цифрама 1 и 2, тако да се записи два броја у суседним исечцима (са заједничким полупречником) разликују само у једној цифри (разлика тих бројева је 1, 10 или 100).

870. Колико најмање сабирака може да буде у изразу да би важило

$$BROJ + BROJ + \cdots + BROJ = AAAAAA.$$



Сл. уз зад. 869



Сл. уз зад. 874

871. Конструиши четвороугао $ABCD$ ако је $AB = 5\,\mathrm{cm}$, $BC = 6\,\mathrm{cm}$, $CD = 7\,\mathrm{cm}$, $DA = 3\,\mathrm{cm}$ и $\measuredangle BAC = \measuredangle DAC$.

VII разред

872. На квадрату је уочено 9 тачака: 4 тачке су темена квадрата, 4 тачке су средишта страница и једна тачка је пресек дијагонала квадрата. Колико троуглова је одређено са ових 9 тачака?

873. Одреди целе бројеве x и y такве да је $x^2y = y^3 + 10$.

874. У кружницу $k(O, 6\,\mathrm{cm})$ уписане су две веће кружнице која се додирују у тачки O и додирују кружницу k и две мање кружнице које додирују две веће кружнице и кружницу k (види слику). Одреди површину четвороугла $ABCD$ аија су темена центри уписаних кружница.

875. У спољашњости једнакостраничног троугла ABC дата је тачка M, таква да је $\measuredangle CMA = 30^\circ$ и $\measuredangle BMA = 45^\circ$. Одреди величину угла ABM.

876. Да ли постоји природан број n такав да важи $(1020^n - 1) \mid (2010^n - 1)$?

VIII разред

877. За које x израз $x(x+2)(x+4)(x+6)$ има најмању вредност? Образложи одговор.

878. Пресек коцке и равни је петоугао. Докажи да је површина тог петоугла мања од производа две његове најдуже странице.

879. Докажи да не постоје цели бројеви x, y и z такви да је $x^4 + y^4 = z^4 + 3$.

880. Јанко је уочио скуп свих 2011-цифрених природних бројева који се записују помоћу две тројке, једне двојке, а остале цифре су јединице. Колико у том скупу има бројева који су дељиви са 99?

881. Дат је круг K_1. Тетиве AM и BN тог круга секу се у тачки P. Нека је O средиште лука MN. Ако је $ON = OP = OM$, докажи да је P ортоцентар троугла ABO.

ПЕТА СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

882. Тетрамино је многоугао површине 4 чије су све странице целобројне дужине и сваке две странице су узајамно нормалне. (Такав многоугао може се саставити од четири јединична квадрата при чему сваки квадрат има заједничку страницу са бар једним од остала три квадрата.) Два тетрамина сматрамо различитим ако се један из другог не могу добити симетријом и/или ротацијом.

а) Колико има различитих тетрамина?

б) Да ли је могуће покрити без преклапања правоугаоник 4×7 тетраминима тако да се сваки тетрамино употреби бар једнапут?

883. Означимо са $p(n)$ производ свих цифара нроја n. Израчунај вредност збира

$$p(1001) + p(1002) + p(1003) + \cdots + p(2011).$$

884. У правоуглом троуглу ABC ($BC > AC$) на катетама BC и CA, редом, означене су тачке M и N такве да је $BM = AC$ и $AN = CM$. Одреди угао између правих BN и AM.

885. Одреди најмању вредност израза

$$S = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \frac{1}{\sqrt{abc}}$$

за позитивне реалне бројеве a, b и c са особином $a + b + c = 1$.

ПЕТНАЕСТА ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Ларнака (Кипар), 2011.

886. Нека су a, b и c позитивни реални бројеви, такви да је $abc = 1$. Доказати неједнакост

$$(a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)(b^5 + b^4 + b^3 + b^2 + b + 1)(c^5 + c^4 + c^3 + c^2 + c + 1) \geqslant$$
$$\geqslant 8(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1).$$

887. Наћи све просте бројеве p за које постоје природни бројеви x и y који задовољавају једнакост $x(y^2 - p) + y(x^2 - p) = 5p$.

888. Нека је $n > 3$ природан број. Једнакостранични троугао ABC је подељен на n^2 подударних „малих“ једнакостраничних троуглова помоћу правих паралелних његовим страницама. Нека је m број ромбова састављених од два „мала“ троугла, а d број ромбова састављених од 8 „малих“ троуглова. Израчунати разлику $m-d$ у зависност од броја n.

889. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао и нека су E и F тачке на страницама AB и CD, редом, тако да је $AB : AE = CD : DF = n$. Ако је S површина четвороугла $AEFD$, доказати да важи

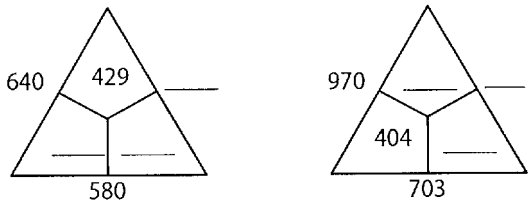
$$S \leqslant \frac{AB \cdot CD + n(n-1)DA^2 + n\,DA \cdot BC}{2n^2}.$$

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2012.

III разред

890. Запиши римским цифрама бројеве:
(а) највећи непаран број шесте стотине;
(б) најмањи паран број девете стотине.

891. Нацртај кружну линију са центром у тачки A. Обележи једну тачку те кружне линија са B и нацртај кружну линију са центром у тачки B. Одреди положај таачака C, D, E и F тако да:
– C припада кругу са центром у A и не припада кругу са центром у B,
– D припада кругу са центром у тачки B и не припада кругу са центром у A,
– E припада и једној и другој кружној линији,
– F не припада ниједном од кругова.



Сл. уз зад. 892

892. Ако су у троугловима на слици сабирци, а око њих одговарајући збирови, напиши на цртама бројеве који недостају.

893. Напиши све непарне троцифрене бројеве којима је збир цифара једнак 5.

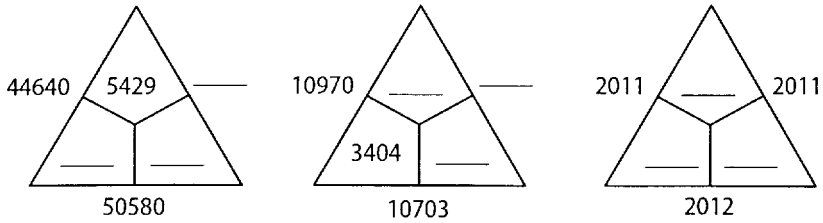
894. Стефан има 54 кликера: белих, жутих и плавих. Белих кликера има два пута више него жутих, а плавих колико белих и жутих заједно. Колико Стефан има белих, колико плавих, а колико жутих кликера?

IV разред

895. Напиши број који је за 34689:

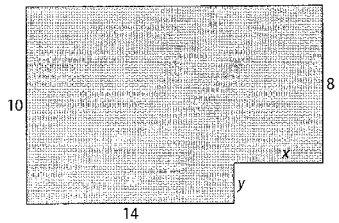
(а) већи од најмањег петоцифреног броја;

(б) мањи од најмањег шестоцифреног броја.



Сл. уз зад. 896

896. Ако су у троугловима сабирци, а око њих одговарајући збирови, напиши на цртама бројеве који недостају.



Сл. уз зад. 898

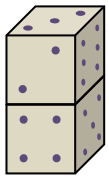
897. Напиши све троцифрене бројеве којима је производ цифара једнак 27.

898. Од правоугаоника је „одсечен“ мали правоугаоник, види слику (дужине на слици су дате у центиметрима). Ако је обим добијене фигуре 60 cm, израчунај x и y.

899. Да ли је могуће бројеве 1, 2, 3, ..., 10 поделити на две групе тако да збирови бројева у те две групе буду једнаки?

V разред

900. Израчунај $20122012 : 4 - 20122012 : 2012 + 20122012 : 503$.



Сл. уз зад. 901

901. Стандардна коцка за игру је она код које је збир бројева тачака на наспрамним странама једнак 7. Две стандардне коцке су стављене да стоје једна на другој (види слику). Збир броја тачака које су на доњој страни горње коцке и оних које су на горњој страни доње коцке мањи је од 10. Колико је тачака на доњој страни доње коцке?

902. Тачке A, B и C су на једној, а D и E на другој од две паралелне праве. Наброј све дужи и све троуглове које одређују тих 5 тачака.

903. Елементи скупа E су вредности израза:

$$40 : 5 - 1 \cdot 2; \qquad 40 : (5 - 1) \cdot 2; \qquad 40 : ((5 - 1) \cdot 2).$$

Елементи скупа M су вредности израза:

$$40 - 10 + 10; \qquad 40 - (10 + 10); \qquad 40 - 10 - 10.$$

Одреди $E \cup M$, $E \cap M$, $E \setminus M$.

904. Углови α и β су суплементни, а углови β и γ су комплементни. Одреди углове α, β и γ ако је угао α пет пута већи од угла: (а) β; (б) γ.

VI разред

905. Израчунај вредност израза $2012 : \left(4 - \frac{1}{503}\right) - \frac{503}{2011}$.

906. На кружници $k(O, 3\,\mathrm{cm})$ изабери тачке A, B, C и D. Конструиши симетралу s дужи OA. Пресликај кружницу k и тачке A, B, C и D осном симетријом у односу на праву s.

907. Израчунај вредности израза a, b, c, d и e ако је:

$$a = -3 - 8, \;\; b = 2 - |-4|, \;\; c = |a - b|, \;\; d = -(c - b), \;\; e = a + b + c + d + e.$$

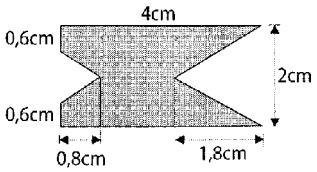
908. Славко и Марко су садили дрвеће. При томе $\frac{1}{3}$ садница су биле букве, $\frac{3}{8}$ орах, а остало багрем. Колико највише багрема су они засадили ако су садили мање од 360 дрвета?

909. Одреди $a \in \mathbf{Z}$, тако да и $\frac{7}{a+3} \in \mathbf{Z}$.

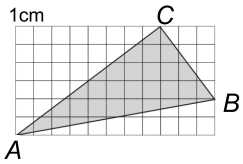
VII разред

910. Среди израз $\frac{2\sqrt{175}}{5} - \frac{3\sqrt{245}}{7} - \sqrt{28} + \sqrt{45}$.

911. Из правоугаоника су „одсечена“ два троугла (види слику). Израчунај површину добијене фигуре.



Сл. уз зад. 911



Сл. уз зад. 913

912. Да ли је $\sqrt{0{,}\overline{1}}$ рационалан или ирационалан број?

913. Користећи Питагорину теорему докажи да је троугао ABC на слици правоугли.

914. Напиши: (а) највећи; (б) најмањи петоцифрени број чија је цифра јединица 7, а који је дељив бројем 9.

VIII разред

915. За коју вредност променљиве x је вредност израза $\dfrac{2x-5}{3}$ за 5 већа од половине вредности бинома $1-3x$?

916. Тачке A, B, C, D, E и F су темена правилног многоугла, а тачка S не припада равни тог многоугла.

(а) Колико правих је одређено паровима од тих 7 тачака?

(б) Колико равни је одређено са по 3 од тих 7 тачака?

917. Конструиши троугао ABC ако је $AB = 5\,\mathrm{cm}$, $AC = 3\,\mathrm{cm}$, $\angle BAC = 30^\circ$. На страници BC конструиши тачку M тако да је $BM : MC = AB : AC$.

918. Катета правоуглог троугла ABC је $3\,\mathrm{cm}$ и њој наспрамни угао је 60°. Израчунај површину круга описаног око тог троугла.

919. Петнаест радника завршило је половину посла за 20 дана. Тада су се разболела 3 радника, па су остали завршили посао сами. За колико дана су они завршили посао?

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2012.

III разред

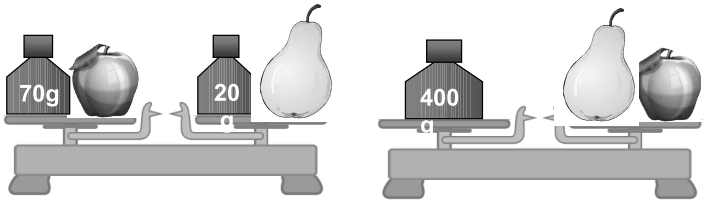
920. Иста слова замени истим, а различита слова различитим цифрама, тако да сабирање

$$\text{МС} + \text{МС} + \text{МС} = \text{ДМ}$$

буде тачно и да је при томе у броју МС цифра десетица већа од цифре јединица. Израчунај $\text{Д} + 2 \cdot \text{М} + 3 \cdot \text{С}$.

921. Тимотије је случајно отворио књигу и израчунао да је 41 збир броја којим је обележена лева страна и броја којим је обележена десна страна те књиге. Израчунај производ тих бројева.

922. У оба случаја на слици теразије су у равнотежи. Израчунај масу јабуке и масу крушке на основу слика.



Сл. уз зад. 922

923. Премести само једно палидрвце на слици тако да добијеш тачну једнакост. Одреди сва решења.

Сл. уз зад. 923

924. На правој су тачке A, B, C и D такве да је B између A и C, а D између B и C. Ако је $AB = 7\,\text{cm}$, $BC = 5\,\text{cm}\,4\,\text{mm}$ и $AD = 8\,\text{cm}\,8\,\text{mm}$. Израчунај дужину дужи CD.

IV разред

925. Ако је $x - 2012 = 3434$, израчунај:

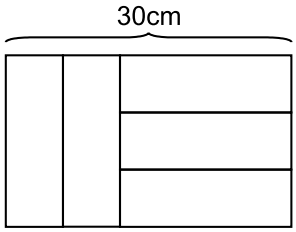
(а) $(x + 2000) - 2012$; (б) $(x - 2000) - 2012$; (в) $x - (2012 - 2000)$.

926. Иста слова замени истим, а различита слова различитим цифрама, тако да сабирање $AA + A = BCD$ буде тачно. Израчунај вредност израза $A - B + C - D$.

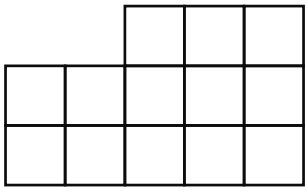
927. Кроз неку цев истекне 54 литара воде за 6 минута. Колико литара воде истече кроз ту цев од 6 сати и 13 минута ујутру до поноћи?

928. Прецртај 6 цифара у низу 2012201220122012 тако да десетоцифрени број који се састоји од преосталих цифара буде: (а) највећи могући; (б) најмањи могући.

929. Велики правоугаоник на слици је састављен од 5 једнаких мањих правоугаоника. Ако је дужина веће странице великог правоугаоника 30 cm, израчунај обим једног малог правоугаоника.



Сл. уз зад. 929



Сл. уз зад. 933

V разред

930. За колико је сваки од бројева 0,09; 0,24; 0,222; $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{125}$ мањи од $\frac{1}{4}$?

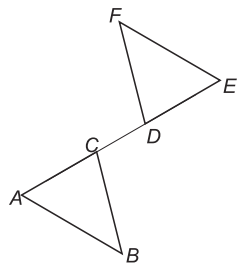
931. Дужине страница правоугаоника су $a\,\mathrm{cm}$ и $b\,\mathrm{cm}$, где су a и b природни бројеви. Ако је површина тог правоугаоника $48\,\mathrm{cm}^2$, израчунај његов обим. Колико решења постоји?

932. Угао α је за $\frac{2}{5}$ правог угла већи од њему суплементног угла. Израчунај угао α.

933. На слици је фигура састављена од једнаких квадрата странице $1\,\mathrm{cm}$. Колико укупно квадрата уочаваш на слици? Израчунај збир површина свих тих квадрата. Напомена. Странице квадрата могу бити само на линијама које су на слици нацртане.

934. Одреди природан број n такав да је $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{7}{n}=1$.

VI разред



Сл. уз зад. 935

935. Ако је на слици $AB=EF$, $AB \parallel EF$ и $AD=CE$, докажи да је $FD=BC$.

936. Производ 7 различитих целих бројева је 252. О којим бројевима је реч?

937. У троуглу ABC ($\measuredangle C=90^\circ$), тачка D је на страници BC таква да су троуглови CDA и ADB једнакокраки. Одреди углове троугла ABC.

938. На тезги су биле крушке, јабуке, брескве и банане. Укупно је било више од 50, а мање од 100 комада воћа. Број крушака и јабука је исти, а заједно чине трећину укупног броја воћки. Од преосталог воћа $\frac{5}{7}$ нису банане. Колико комада јабука и банана је заједно било на тезги?

939. Реши једначину $|ab|+p=53$ у скупу целих бројева, ако је p прост, а a и b су непарни бројеви.

VII разред

940. (а) Израчунај вредност израза

$$(-2\sqrt{3})^2 : \left(20\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-(-2)^2\cdot\frac{(2\sqrt{2})^2}{2}\right).$$

(б) Упрости израз $-2\sqrt{72}\cdot(3\sqrt{24}-\sqrt{54})\cdot(\sqrt{200}-\sqrt{48})$.

941. У правоуглом троуглу ABC (угао ACB је прав) $AB = 3$ и $AC = 1$. На дужи BC дата је тачка M таква да је $CM = \frac{7\sqrt{2}}{4}$. Шта је веће, BC или AM?

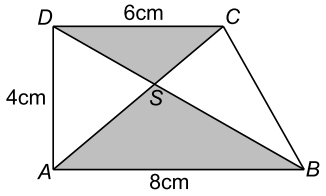
942. Одреди x ако је $8^8 + (4^4)^x = 2^{25}$.

943. Вера је замислила петоцифрени број A. Ратко је броју A дописао с десне стране цифру 1. Славољуб је броју A с леве стране дописао цифру 1. На овај начин Ратко је добио три пута већи број од Славољубовог. Који број је Вера замислила?

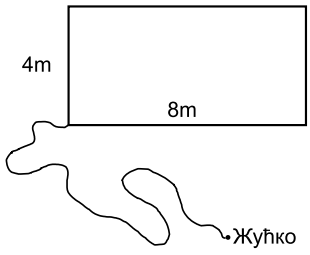
944. У правоуглом трапезу $ABCD$ дијагонале се секу у тачки S и $AB = 8\,\text{cm}$, $AD = 4\,\text{cm}$ и $CD = 6\,\text{cm}$ (види слику).

(а) Докажи да троуглови ASD и BCS имају једнаке површине.

(б) Одреди разлику површина троуглова ABS и CDS.



Сл. уз зад. 944



Сл. уз зад. 946

VIII разред

945. Дијагонала једне бочне стране правилне тростране призме је $8\sqrt{3}\,\text{cm}$. Израчунај површину и запремину призме ако је дијагонала бочне стране нагнута према равни основе под углом од $60°$.

946. Пас Жућко је везан канапом дужине $12\,\text{m}$ за угао правоугаоне зграде чије су димензије $4\,\text{m}$ и $8\,\text{m}$ (види слику). Ако је зграда на равном терену, колика је површина по којој Жућко може да се креће?

947. Нека је O центар описаног круга једнакокраког троугла ABC ($AC = BC$) и нека су тачке D и E, редом, средишта основице AB и крака AC.

(а) Докажи да су троуглови ADC и OEC слични.

(б) Израчунај полупречник описаног круга тог троугла ако је основица $a = 12\,\text{cm}$ и крак $b = 10\,\text{cm}$.

948. Одреди број a тако да једначине

$$2ax - \frac{1}{3}x = a + 4 \quad \text{и} \quad -\frac{1}{4}(2x - 1) = x - \frac{1 + x}{2}$$

буду еквивалентне.

949. Колико има петоцифрених бројева чије су све цифре различите и исте парности?

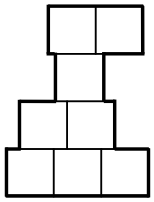
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 2012.

IV разред

950. Шта је веће, $72504 : 36$ или $3292510 : 1634$ и за колико?

951. Дешифруј сабирање $\mathrm{ML} + \mathrm{ML} = \mathrm{DMS}$ ако истим словима одговарају исте цифре, а различитим словима различите цифре. Одреди сва решења.

952. Диана је на сваком од 19 картона исписала по један од бројева од 1 до 19. Може ли Диана поделити картоне у две групе тако да збир бројева у једној групи буде за 40 већи од збира бројева у другој групи?



Сл. уз зад. 953

953. Фигура на слици је састављена од 8 једнаких квадрата. Обим фигуре је 32 cm. Израчунај њену површину.

954. Бранко је записао број 1 и иза њега почео редом да дописује природне бројеве:

$$12345678910111213141 5\ldots 99100101102\ldots$$

Која цифра се налази на 2012 месту у овом Бранковом запису?

V разред

955. Три молера за три дана окречe три стана.

(а) Колико станова окречи шест молера за шест дана?

(б) За колико ће дана девет молера окречити девет станова?

(в) Колико молера је потребно да за дванаест дана окречe дванаест станова?

956. Броју 2012 дописати са леве и са десне стране једну исту цифру тако да добијени шестоцифрени број буде дељив са 12.

957. Дата су 4 надовезана угла α, β, γ и δ тако да су свака два узастопна угла комплементна (било која два од ових углова имају највише један заједнички крак). Израчунај $\dfrac{\alpha+\delta}{2}$.

958. Воја је записао три броја. Други од њих је добио када је у првом броју децималну запету померио за једно место у десно. Трећи од њих је добио када је у другом броју децималну запету померио за једно место у десно. Када је на крају сабрао три записана броја, добио је збир 2233,32. Које бројеве је Воја записао?

959. Од осам Бориних оваца прва би пласт сена појела за 1 дан, друга би исти пласт појела за 2 дана, трећа би исти пласт појела за 3 дана, ... , осма за 8 дана. Да ли ће пласт сена пре појести прва и друга овца заједно или преостале овце заједно?

VI разред

960. Израчунај вредност израза

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(2-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(3-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(4-\frac{4}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(9-\frac{9}{10}\right):14\frac{2}{5}.$$

961. Конструиши једнакокраки троугао ако је основица троугла 5 cm и висина која одговара краку 4 cm.

962. Дешифруј множење $\overline{xx}\cdot\overline{yz}\cdot\overline{xyz}=\overline{xyzxyz}$ ако истим словима одговарају исте цифре, а различитим словима различите цифре.

963. У троуглу ABC симетрала угла BAC сече страницу BC у тачки D. Права која садржи тачку D и паралелна је страници AC сече страницу AB у тачки E. Права која садржи тачку E и паралелна је са BC сече страницу AC у тачки F. Докажи да је $AE=FC$.

964. Користећи неке од цифара 1, 2, 3, 4, 5, 6, Маја је написала један четвороцифрени број (једна цифра може више пута да се искористи). Ненад је хтео да погоди тај број, па је рекао први пут 4215 и погодио је две цифре али само је једну рекао на одговарајућем месту. Други пут је рекао 2365 и опет погодио две цифре и то једну на одговарајућем месту. Трећи пут је рекао 5525, али тада није погодио ниједну цифру. Да ли може из четвртог пута да са сигурношћу каже Мајин број, или још увек може само да погађа? Образложи одговор.

VII разред

965. За које вредности променљивих x, y и z је вредност израза

$$2x+6z-x^2-y^2-z^2$$

највећа? Одреди ту највећу вредност.

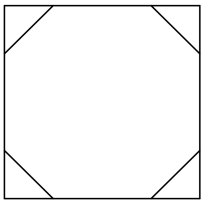
966. Дат је природан број $n=2^{20}\cdot 3^{15}\cdot 5^{10}$.

(а) Са колико нула се завршава број n?

(б) Која је прва цифра, гледајући с десна на лево, у броју n која је различита од 0?

(в) Колико различитих делилаца има број n?

967. Од квадрата површине $144\,\mathrm{cm}^2$ „одсечена“ су четири међусобно подударна једнакокрака правоугла троугла (види слику). Обим новодобијеног осмоугла једнак је збиру обима „одсечених“ троуглова. Израчунај обим и површину тог осмоугла.



Сл. уз зад. 967

968. Реши једначину

$$x^6 - 4x^5 + 4x^4 - 81x^2 + 324x - 324 = 0$$

у скупу реалних бројева.

969. Воја је означио на кружници n тачака. $n-1$ тачку је спојио сваку са сваком, а онда је n-ту тачку спојио са некима од њих. Када је пребројао, видео је да је повукао 60 дужи. Колико дужи је повукао из тачке коју није спојио са свим осталим тачкама?

VIII разред

970. Одреди растојање координатног почетка од графика функције $y = -2x + 2$.

971. Реши једначину $\big|\,2013 - \big||2012 - x| - 2011\big|\,\big| = 0$.

972. Ивица четворостране једнакоивичне пирамиде $SABCD$ је a. Тачке P, Q, M, N су средишта бочних ивица AS, BS, CS и DS, редом, а тачка O је подножје висине пирамиде из врха S. Израчунај површину и запремину тела $OPQMNS$.

973. Да ли се коцка ивице $13\,\mathrm{cm}$ може исећи на 2012 мањих коцки чије су ивице $1\,\mathrm{cm}$, $2\,\mathrm{cm}$ или $3\,\mathrm{cm}$?

974. Нека је $ABCD$ правоугаоник са страницама a и b ($a > b$). Кружнице уписане у троуглове ABC и ACD додирују дијагоналу AC у тачкама M и N. Одреди дужину дужи MN.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ 2012.

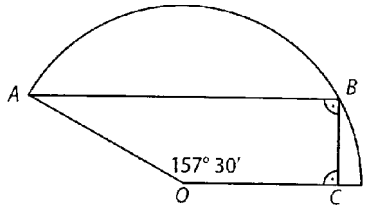
VI разред

975. Производ шест узастопних целих бројева је седмоцифрен број $\overline{*6036**}$. Одреди те бројеве.

976. Дат је четвороугао $ABCD$ у коме је $AB = BC$, $\measuredangle ACB = 50^\circ$, $\measuredangle ACD = 30^\circ$ и $\measuredangle CBD = 20^\circ$. Одреди $\measuredangle CAD$.

977. Дате су тачке C, B_1 и права p (слика). Конструиши троугао ABC, ако је тачка C теме троугла, тачка B_1 средиште странице AC и ако је права p симетрала угла ABC.

Сл. уз зад. 977



Сл. уз зад. 982

978. Милашин је записао три броја. Златана је у тим бројевима заменила различите цифре различитим словима, а исте цифре истим словима и добила следећи запис: ОХО, СЛОЖЕН, БРОЈ. Радашин тврди да је збир та три броја увек сложен број. Да ли је Радашин у праву?

979. Школа математике „Интеграл“ има два разреда. У првом разреду су 65% девојчице. У другом разреду су 45% девојчице. Укупно у оба разреда су 53% девојчице. Колико процената ученика школе је у првом разреду?

VII разред

980. Бане је записао низ бројева 7, 14, 17, ... Сваки члан низа, почевши од другог, добија се тако што се претходни члан квадрира, саберу се цифре добијеног квадрата и на тај збир дода 1. (На пример, $7^2 = 49$, $4 + 9 = 13$, $13 + 1 = 14$, па је други члан низа 14). Који број се налази на 2012. месту овог низа?

981. Пред фудбалску утакмицу између Звезде и Партизана пет лица је дало следеће прогнозе:
А: Неће бити нерешено;
Б: Звезда ће примити бар један гол;
В: Партизан ће победити;
Г: Партизан неће изгубити;
Д: на утакмици ће се постићи тачно три гола.
По завршетку утакмице испоставило се да су три прогнозе биле тачне, а две нетачне. Којим резултатом је завршена утакмица?

982. Централни угао кружног исечка полупречника 12 cm је $157°30'$ (види слику). Израчунај површину четвороугла $OABC$ са слике.

983. Ако су p и q прости бројеви већи од 3, онда је $p^4 - q^4$ дељиво са 48. Докажи.

984. Нека је у правоуглом троуглу ABC тачка D подножје висине из темена C правог угла и O_1, O_2 центри уписаних кружница троуглова ACD и BCD. Кружница са центром C и полупречником CD сече катете AC и BC у тачкама M и H, редом. Докажи:

(а) Тачке O_1, O_2, M и N су колинеарне.

(б) $MN > 2O_1O_2$.

VIII разред

985. Акцијама компаније за промет сулундара "Milashin & Radashin Ltd" из Петловца тргује се на Лондонској берзи. У току једног месеца, сваког радног дана у 12.00 часова вредност акција повећава се или се смањује за 17%. Да ли је могуће да је цена акција те компаније у два различита радна дана после 12.00 часова имала исту вредност?

986. Полупречник круга је r. Тетива CD тог круга сече пречник AB у тачки M под углом од $45°$. Докажи да је $MC^2 + MD^2 = 2r^2$.

987. На дну језера постоји извор који сваког дана допуњава језеро константном количином воде. Крдо од 183 слона попије воду из језера за 1 дан, а крдо од 37 слонова за 5 дана. Колико дана би на језеру могао да пије један слон?

988. У правилну четворострану призму чија је основна ивица $a = 12\,\mathrm{cm}$ и висина $H = 24\,\mathrm{cm}$, уписана је правилна четворострана пирамида. Темена основе те пирамиде су на ивицама једне основе призме, а врх је у центру друге основе призме. Израчунај површину оне пирамиде која има најмању запремину.

989. Бројеви од 1 до 9 исписани су на 9 картица, на свакој по један. Два играча виде бројеве на свим картицама и наизменично узимају по једну картицу. Победник је онај који први објави да од изабраних карата, коришћењем операција $+$, $-$, $\cdot$, $:$ и заграда, може саставити израз чија је вредност једнака 50. Није допуштено од карата састављати вишецифрене бројеве. Који играч има победничку стратегију, тј. може да осигура победу без обзира на начин игре његовог противника?

ШЕСТА СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

990. Одреди све четвороцифрене бројеве n чији је декадни запис облика $\overline{abba}$ и који су једнаки производу неколико узастопних простих бројева.

991. Докажи да једначина $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = 3$ има бесконачно много решења у скупу природних бројева.

992. Нека је A, BCD, AEF, GFG, HCI, DEA, IFD, JGF, $BFEG$, $\ldots$ растући аритметички низ, тј. низ у коме је сваки следећи члан већи од претходног за један исти број d. У низу су једнаке цифре замењене истим, а различите цифре различитим словима. Одреди 16. члан овог низа.

993. У правоуглом Декартовом систему нацртани су графици функција $y = ax+b$ и $y = bx+a$ $(a \neq b)$. Тачку њиховог пресека означили смо црвено, а тачке пресека тих правих са y осом означили смо плаво. После тога су избрисани графици и координатне осе, а остале су само означене тачке (a и b су такође непознати). Помоћу шестара и лењира наћи координатни почетак.

ШЕСНАЕСТА ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Вериа (Грчка), 2012.

994. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви такви да је $a+b+c=1$. Докажи да је

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+6 \geqslant 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}\right).$$

У ком случају важи једнакост?

995. Нека се кругови k_1 и k_2 секу у две различите тачке A и B. Нека је t заједничка тангента кругова k_1 и k_2 која k_1 додирује у тачки M, а k_2 у тачки N. Ако је $t \perp AM$ и $MN = 2AM$, одреди меру угла NMB.

996. На табли је укуцано n ексера и свака два су спојена концем. Сваки конац је обојен једном од датих n различитих боја. За сваке три различите боје постоје 3 ексера која су спојена концима у те три боје. Да ли може бити: (а) $n = 6$; (б) $n = 7$?

997. Одреди све природне бројеве a, b, c и d такве да је $2^a \cdot 3^b + 5^c = 7^d$.

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2013.

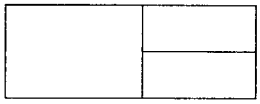
III разред

998. Који број треба одузети од највећег броја девете стотине, па да се добије најмањи број пете стотине?

999. Бане и Лаза имају заједно 48 кликера. Саша и Лаза имају заједно 44 кликера. Ако Лаза има 8 кликера мање од Саше, колико кликера имају заједно Саша, Бане и Лаза?

1000. Нацртај две кружнице полупречника 3 cm и 2 cm које се секу у две тачке тако да центри обеју кружница припадају и једном и другом кругу.

1001. Страницама три „слепљена“ правоугаоника (види слику) одређено је шест правих. Колико парова нормалних правих је на тај начин одређено?



Сл. уз зад. 1001

1002. Колико бројева можеш записати римским цифрама I и X (при записивању неког броја можеш користити једну или обе цифре)?

IV разред

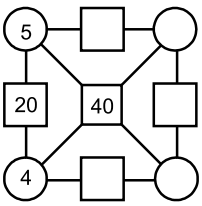
1003. Ако цифре 8 и 3 замене места, који од бројева 408723, 804732 и 480273 се највише смањи и за колико?

1004. Правоугаоник од папира је пресечен на два једнака дела. Сваки од тих делова је квадрат обима 5 dm 2 cm. Одреди обим почетног правоугаоника.

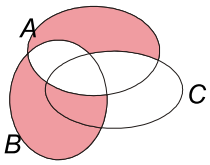
1005. Нека је x највећи, а y најмањи четвороцифрен број записан цифрама 0, 1, 2, 3 (цифре се не понављају). Израчунај $(x + y) - (x - y)$.

1006. Израчунај збир четвртине броја 2012 и трећине броја 2013.

1007. На свакој од шест линија на слици налазе се по два круга и квадрат. Бројевима који су уписани у кругове одговара њихов производ уписан у одговарајући квадрат. По овом правилу упиши бројеве у празне кругове и квадрате.



Сл. уз зад. 1007



Сл. уз зад. 1009

V разред

1008. а) Одреди број који је за 12 мањи од броја $5050050 : 50 - 45$.

б) Колико пута је број $36 \cdot 15$ већи од броја 20?

1009. Дати су скупови A, B и C (слика). Запиши користећи скуповне операције скуп који се састоји од осенчених делова.

1010. Одреди угао: а) комплементан; б) суплементан углу $\alpha = 2013'$.

1011. Тачке A, B и C су на једној, а D и E на другој од две паралелне праве. Наброј све дужи и све троуглове које одређују тих 5 тачака.

1012. Све стране дрвене коцке су обојене, а затим је та коцка исечена паралелно својим странама на мале коцке ивица 1 cm. Зна се да тачно шест малих коцки имају тачно по једну обојену страну.

а) Колика је површина велике коцке?

б) Колико има малих коцки чија ниједна страна није обојена?

VI разред

1013. Ако је $x = (-4) - (-3) + (-5)$ и $y = -1 - x$, израчунај колико је $|x - 1| - |y - 2|$.

1014. За које a и b је петоцифрени број $\overline{201a3b}$ дељив са 15 (цифре a и b су различите)?

1015. Нека су α_1, α_2, α_3, α_4 и α_5 надовезани углови при чему је збир свака два суседна угла $40°$. Њихове симетрале су редом s_1, s_2, s_3, s_4 и s_5. Израчунај $\measuredangle(s_3, s_4)$ и $\measuredangle(s_2, s_5)$.

1016. Из скупа $A = \left\{\frac{2}{5}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{7}{8}, \frac{3}{4}\right\}$ изабери четири броја тако да њихов збир буде:

а) најмањи; б) највећи могући.

1017. На колико се начина број 2013 може записати као производ два цела броја?

VII разред

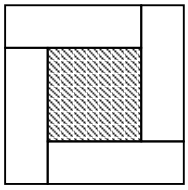
1018. Израчунај: $\sqrt{0{,}1} \cdot \sqrt{0{,}9} - \sqrt{2 - 0{,}56} + \dfrac{\sqrt{0{,}12}}{\sqrt{3}}$.

1019. У скупу рационалних бројева реши следеће једначине:

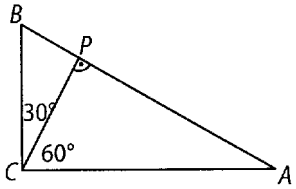
$$x^2 - 2{,}\overline{3} = 1{,}\overline{6} \quad \text{и} \quad 0{,}\overline{6}\, y^2 = 1{,}5,$$

где ознака $\overline{a}$ значи да се цифра a бесконачно много пута понавља.

1020. Четири подударна правоугаоника су постављена тако да формирају мањи и већи квадрат види слику). Сваки правоугаоник има површину $6\,\mathrm{cm}^2$ и краћу страницу $\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$. Израчунај површину мањег и површину већег квадрата.



Сл. уз зад. 1020



Сл. уз зад. 1021

1021. Израчунај обим и површину троугла ABC (види слику) ако је $CA = 10\,\mathrm{cm}$.

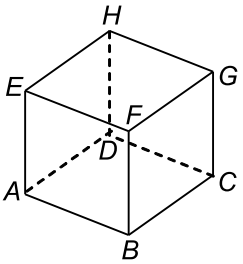
1022. Колико има 2013-цифрених бројева којима је збир цифара 2?

VIII разред

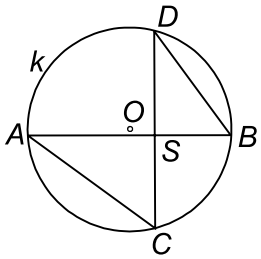
1023. У равни β налази се правоугли троугао ABC чије су катете $AC = 8\,\mathrm{cm}$ и $BC = 6\,\mathrm{cm}$. У центру круга описаног око троугла ABC постављена је нормала на раван и на њој одређена тачка M која је од равни β на растојању од $4\,\mathrm{cm}$. Колико је растојање тачке M од темена троугла?

1024. Које праве одређене теменима коцке на слици су:

а) паралелне равни ABD; б) нормалне на раван ABD?



Сл. уз зад. 1024



Сл. уз зад. 1027

1025. Пера је купио чоколаде за прављење поклон пакета и то: 15 чоколада од по $100\,\mathrm{g}$ по цени 110 динара, 20 од $200\,\mathrm{g}$ по 200 динара и 10 од $250\,\mathrm{g}$ по 220 динара. Одреди средњу вредност цене једног килограма чоколаде (у динарима).

1026. Одреди a тако да решења једначине $\dfrac{2a-y}{3} = 1 + y$ не буду мања од 2.

1027. У кругу k на слици тетиве AB и CD су међусобно нормалне. Израчунај њихове дужине ако је $AC = 10\,\mathrm{cm}$, $DB = 8\,\mathrm{cm}$ и $SC = 6\,\mathrm{cm}$.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2013.

III разред

1028. Замени слова цифрама тако да рачун буде тачан ако знаш да је ММ број четврте десетице. Различита слова замени различитим цифрама, а иста слова истим цифрама.

$$\begin{array}{r} \text{М М} \\ +\ \text{Л Л} \\ \hline \text{Д М С} \end{array}$$

1029. После 12 минута од почетка филма, Марина је видела да часовник показује тачно 20 сати и 27 минута. Ако филм траје 90 минута, у колико сати ће се завршити?

1030. Лопта се котрља на низбрдици. У првој секунди је прешла 3 метра. У другој секунди је прешла 4 метра, а у трећој 5 метара. У свакој следећој секунди прелази по 1 метар више него у претходној. Колико укупно метара је лопта прешла за 10 секунди?

1031. Прецртај табелу на папир на коме радиш задатке! Доврши попуњавање табеле:

+			
	467	546	
500	650		826
208			

1032. Производ цифара броја 127 је $1 \cdot 2 \cdot 7 = 14$. Напиши све парне троцифрене бројеве чији је производ цифара једнак 12.

IV разред

1033. Борис је замислио неки број. Када га је помножио са 2, добио је број 43598. Одреди број који је 12 пута већи од броја који је Борис замислио.

1034. Укупна маса чаше напуњене са водом је 300 грама и једнака је збиру маса две празне чаше и тега од 60 грама. Колика је маса воде у чаши?

1035. Напиши све четвороцифрене бројеве чији је збир цифара 4.

1036. Квадрат је са 2 праве подељен на 2 квадрата и 2 правоугаоника. Обим једног од добијених квадрата је 20 cm, а обим једног правоугаоника 30 cm. Израчунај обим почетног квадрата.

1037. Замени слова цифрама тако да рачун буде тачан. Различита слова замени различитим цифрама.

$$\begin{array}{r} \text{A B C} \\ \text{D E F} \\ +\ \text{G H I} \\ \hline 9\ 6\ 3 \end{array}$$

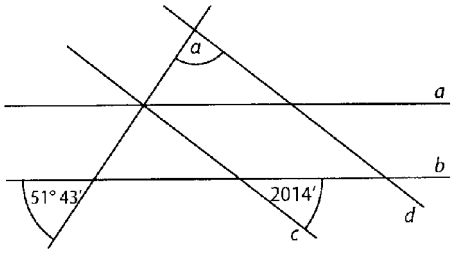
V разред

1038. Дешифруј множење $*7 \cdot 30 = *0**$.

1039. Израчунај збир најмањег и највећег разломка облика $\frac{a}{b}$, при чему је $a \in \{1, 2, 4, 8\}$ и $b \in \{3, 5, 9\}$.

1040. Дужине ивица квадра су $a\,\mathrm{cm}$, $b\,\mathrm{cm}$ и $c\,\mathrm{cm}$, где су a, b и c различити природни бројеви. Запремина тог квадра је $70\,\mathrm{cm}^3$. Одреди највећу могућу површину тог квадра.

1041. Израчунај величину угла α на слици ако је $a \parallel b$ и $c \parallel d$.



Сл. уз зад. 1041

1042. Две оловке и три свеске коштају 110 динара. Четири оловке и седам свезака коштају 250 динара. Израчунај цену осам оловака и осам свезака.

VI разред

1043. Колико има четвороцифрених бројева дељивих са 5, код којих:

а) цифре се могу понављати; б) све су цифре различите?

1044. У правоуглом троуглу један оштар угао је $30°$. Дужина катете наспрам тог угла је $9\,\mathrm{cm}$. Израчунај растојање тежишта троугла од:

а) ортоцентра троугла; б) центра описаног круга тог троугла.

1045. У троуглу ABC угао α је $80°$, а висине h_a и h_b секу се под углом од $126°$. Која је најмања, а која највећа страница у троуглу ABC?

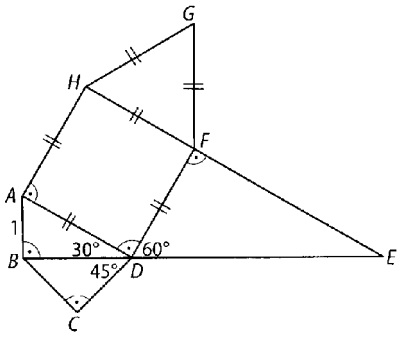
1046. Лука је на тастатури хтео да укуца двоцифрени број $\overline{ab}$. Грешком је испред прве цифре и после друге цифре укуцао 4. На тај начин добио је четвороцифрени број 54 пута већи од двоцифреног броја $\overline{ab}$. Одреди број $\overline{ab}$.

1047. У квадрату странице $44\,\mathrm{cm}$ распоређено је 2013 тачака. Докажи да постоји квадрат странице $1\,\mathrm{cm}$ у коме су бар две тачке.

VII разред

1048. Ако је $\sqrt{2}\,x - \sqrt{2}\,y = \sqrt{18}$, израчунај вредност израза $\dfrac{\sqrt{3}\,x}{3} - \dfrac{y}{\sqrt{3}}$.

1049. Израчунај површину многоугла $ABCDEFGH$ на слици.



Сл. уз зад. 1049

1050. Одреди све двоцифрене природне бројеве $\overline{ab}$ за које важи $\overline{ab} - \overline{ba} = n^2$, где је $n \in \mathbf{N}$.

1051. Којом цифром се завршава број $4^n + 5^n + 6^n$?

1052. Конструиши квадрат чија је површина једнака збиру површина три квадрата чије су странице 2 cm, 3 cm и 4 cm.

VIII разред

1053. Реши једначину $|5x - |4x + |3x - |2x + |x||||| = 2013$.

1054. Дате су две једнаке праве призме чије основе су једнакокраки правоугли троуглови са катетама од 5 cm. Висине призми су по 10 cm. Колико различитих тространих и четвоространих призми можемо да саставимо од те две једнаке призме? Која од њих има највећу површину?

1055. Одреди најмањи природан број који је дељив са 12 и који има 12 делилаца.

1056. Нека је T тежиште троугла ABC, а B_1 тачка у којој права BT сече AC. Израчунај површину троугла ABC ако је површина троугла B_1TC једнака 3.

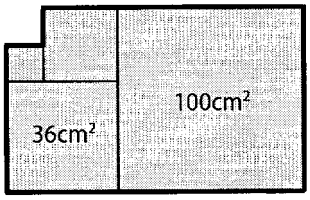
1057. Датуми се често записују овако: 22.06.2008, 04.11.1936. Ако су при томе све цифре парне, кажемо да је то паран датум. На пример, последњи паран датум другог миленијума био је 28.08.2000. Одреди број парних датума у трећем миленијуму.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 2013.

IV разред

1058. Ружица је замислила један број. Број је умањила за 100, па тако добијени број умањила је 100 пута и добила је број 100. Који број је Ружица замислила?

1059. Фигура на слици састављена је од 4 квадрата. Израчунај обим и површину те фигуре ако су на слици дате површине два квадрата.



Сл. уз зад. 1059

1060. За нумерацију страна једне књиге цифра 1 је употребљена 100 пута. Колико страна има та књига?

1061. Дужине ивица квадра су 6 cm, 4 cm и 3 cm. Све стране тог квадра су изрезане од правоугаоног картона чија је једна страница дужине 6 cm. При том резању цео картон је искоришћен. Израчунај дужину друге странице тог картона и нацртај како би то резање требало да се уради.

1062. Дати су бројеви 192, 64, 32, 16 и 8. Користећи те бројеве и рачунске операције сабирање, одузимање, множење и дељење могу се саставити разни изрази чије су вредности природни бројеви. Који је: а) најмањи, б) највећи природан број који се може добити на тај начин? Сваки од датих бројева се мора користи тачно једанпут и свака рачунска операција тачно једанпут. Није дозвољено користити заграде.

V разред

1063. Колико пута је вредност израза $(20{,}13 : 1{,}1 - 0{,}1) : 0{,}7 + 0{,}3$ већа од разломка $\frac{26{,}3}{5}$?

1064. Дешифруј рачун $\frac{AAA}{AB} = A \cdot A$. Различитим словима одговарају различите цифре, а истим словима исте цифре.

1065. Обим квадрата је 6 cm, а обим правоугаоника је 8 cm. Ако је једна страница правоугаоника за 1,2 cm дужа од странице квадрата, упореди површину квадрата и површину правоугаоника.

1066. Одреди најмањи природан број чији је производ цифара 6048.

1067. Одреди угао који заклапају сатна и минутна казаљка часовника у 12 сати и 14 минута.

VI разред

1068. Одреди просте бројеве p и q такве да је $p^2 + 497q^2 = 2013$.

1069. Одреди цифре x и y различите од нуле ако је број $\overline{xyxyx}$ дељив са 3, а број $\overline{yxyxyxy}$ дељив са 18.

1070. Конструиши троугао ABC ако је $a = 5\,\mathrm{cm}$, $\beta = 45^\circ$ и полупречник описане кружнице $3\,\mathrm{cm}$.

1071. У скупу целих бројева реши неједначину $\frac{1}{3} < \frac{2}{1-x} < \frac{3}{4}$.

1072. Симетрала једне дијагонале правоугаоника сече дужу страницу правоугаоника тако да је један од добијених делова једнак краћој страници. Одреди угао између дијагонала правоугаоника.

VII разред

1073. Ако су x и y природни бројеви и $1+x^2-y^2-2x = 0$, израчунај $(y-x)^{2013}$.

1074. Дата је кружница $k(O,r)$. У кружницу су уписани правилни осмоугао и правилни дванаестоугао. Одреди однос површина ових многоуглова.

1075. Одреди све целе бројеве n за које је вредност разломка $\frac{3n^2+15}{n+2}$ такође цео број.

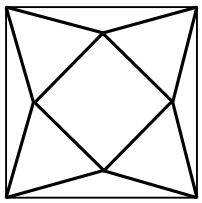
1076. Од правилног многоугла одсечен је једнакокраки троугао ABC, кога чине три суседна темена. На најдужој страници AC тог троугла постоји тачка K, таква да дуж BK дели троугао ABC на два једнакокрака троугла. Колико страница може да има тај правилни многоугао?

1077. У складишту се налази 2013 сулундара. Милашин и Радашин играју следећу игру: они наизменично износе сулундаре из складишта, при чему Радашин сваки пут изнесе 1 или 4 сулундара, а Милашин 2 или 3 сулундара. Први почиње Милашин. Победник је онај који изнесе последњи сулундар. Који од њих двојице може да осигура победу, без обзира како игра његов противник?

VIII разред

1078. У трапезу $ABCD$ основица CD је два пута мања од основице AB. Из темена B повучена је нормала BE на праву AD. Докажи да је $CE = CB$.

1079. Мрежа правилне четворостране пирамиде је уцртана у квадрат странице $7\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$ (види слику). Израчунај запремину те пирамиде ако су основна и бочна ивица у размери $6:5$.



Сл. уз зад. 1079

1080. Стана и Брана су кренуле једна у сусрет другој. Када је Стана прешла петину пута, а Брана 1300 метара, растојање између њих било је три пута дуже од пута који је Стана прешла. Колико су биле удаљене једна од друге на почетку?

1081. Дате су линеарне функције $y = 3x + a$, $y = -2x + b$ и $y = x + 1$. Изрази a у функцији од b ако графици ове три функције имају једну заједничку тачку.

1082. Дата је једначина $8x + 3y = 2013$. Нека су (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n) парови природних бројева који задовољавају дату једначину. Израчунај збир $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ 2013.

VI разред

1083. Бранко и Ратко трче трку. Ратко има за 15% дужи корак од Бранка, али зато за исто време направи 15% мање корака од Бранка. Ко ће пре стићи на циљ?

1084. Бане се јутрос сетио да има домаћи задатак из математике и урадио га је пре поласка у школу, између 7 и 8 сати. Када је почео да ради домаћи, казаљке на часовнику су биле једнако удаљена од цифре 6 и нису се поклапале. Када је завршио домаћи, казаљке су се поклопиле. Колико времена је Бане радио домаћи?

1085. а) Докажи да симетрала унутрашњег угла код темена A троугла ABC пролази кроз тачку пресека симетрала спољашњих углова код темена B и C.

б) Конструиши троугао ако су дате тачке пресека симетрала спољашњих углова.

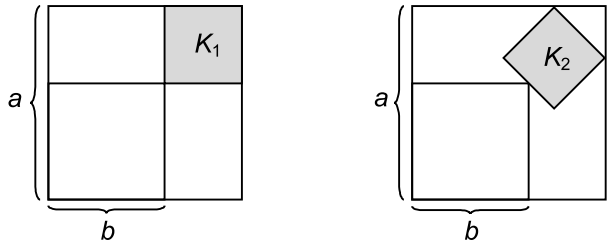
1086. Наћи најмањи природан број чији се збир цифара смањи за 2013 када се тај број повећа за 3.

1087. Све странице трапеза $ABCD$ су различитих дужина. Дужине основица су 20 cm и 10 cm. Нека су M и N, редом, средишта основица AB и CD. Ако је дужина дужи MN једнака 5 cm, докажи да се праве одређене страницама BC и AD секу на кружници чији је пречник основица AB.

VII разред

1088. Одреди цифре a, b и c тако да важи $(\overline{ab})^a = \overline{bcb}$.

1089. У квадрату су нацртана два квадрата као на сликама (обе слике су осносиметричне). Површина квадрата K_2 је 256. Израчунај површину квадрата K_1.



Сл. уз зад. 1089

1090. Нека су a, b и c позитивни реални бројеви такви да је апсолутна вредност разлике свака два мања од 2. Докажи да је

$$a+b+c<\sqrt{ab+1}+\sqrt{bc+1}+\sqrt{ac+1}.$$

1091. Нека су k_1, k_2, k_3, k_4 четири кружнице једнаких полупречника које имају заједничку тачку O при чему се никоје две не додирују. Означимо са A, B, C, D, редом, пресечне тачке суседних кружница k_1 и k_2, k_2 и k_3, k_3 и k_4, k_4 и k_1, различите од тачке O. Докажи да је четвороугао $ABCD$ паралелограм.

1092. Уочено је 9 темена правилног 16-тоугла. Докажи да постоји једнакокрако-правоугли троугао са теменима у уоченим тачкама.

VIII разред

1093. Реши систем једначина: $x-2y-1=0$, $x^2-4y^2+4y-17=0$.

1094. Докажи да важи неједнакост

$$2013<\frac{2^2+1}{2^2-1}+\frac{3^2+1}{3^2-1}+\cdots+\frac{2013^2+1}{2013^2-1}<2013+\frac{1}{2}.$$

1095. Правилна тространа пирамида $VABC$ пресечена је са равни која садржи средишта основних ивица AB и AC и паралелна је са бочном ивицом AV. Израчунај обим и површину пресека ако је дужина основне ивице 12 cm, а дужина бочне ивице 14 cm.

1096. Дат је правилан 2013-угао. На колико начина се могу изабрати три његова темена која су истовремено и темена једног једнакокраког троугла?

1097. Нека је O тачка на кружници $k(S,r)$. Кружница m са центром у тачки O сече кружницу k у тачкама P и Q. Нека је R тачка у унутрашњости кружнице k у којој се секу кружница m и кружница $s(Q,QO)$, а L друга тачка пресека праве PR и кружнице k. Докажи да је дуж LR једнака полупречнику кружнице k.

СЕДМА СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

1098. Докажи да у скупу бројева облика $48+2013\,k$ (k је природан број) има бесконачно много потпуних квадрата.

1099. На неким пољима шаховске табле постављена је по једна фигура, тако да се у сваком квадрату 3×3 (састављеном од 9 поља) налази тачно по једна фигура. Колико

а) најмање б) највише

фигура је постављено на табли?

1100. Дат је круг k и његов пречник AB. Докажи да је свака тачка S у унутрашњости круга k центар уписаног круга неког троугла чија су два темена на кружници k, а треће теме на дужи AB.

1101. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви чији је збир једнак 1. Докажи да важи неједнакост

$$\frac{1}{\sqrt{a+bc}}+\frac{1}{\sqrt{b+ca}}+\frac{1}{\sqrt{c+ab}}\geqslant\frac{9}{2}.$$

Када важи једнакост?

СЕДАМНАЕСТА ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Измир (Турска), 2013.

1102. Одредити све уређене парове природних бројева (a, b) за које су вредности оба разломка $\dfrac{a^3b-1}{a+1}$ и $\dfrac{b^3a+1}{b-1}$ такође природни бројеви.

1103. Нека је ABC оштроугли троугао у коме је $AB < AC$ и O центар описане кружнице k троугла ABC. Нека је D тачка на страници BC, таква да је $\measuredangle BAD = \measuredangle CAO$ и E тачка пресека кружнице k и праве AD, различита од A. Ако су тачке M, N и P, редом, средишта дужи BE, OD и AC, доказати да су тачке M, N и P колинеарне.

1104. Нека су a и b позитивни реални бројеви за које важи $ab \geqslant 1$. Доказати да је

$$\left(a+2b+\frac{2}{a+1}\right)\left(b+2a+\frac{2}{b+1}\right)\geqslant 16.$$

1105. Нека је n природан број. Два играча, Ана и Бане, играју следећу игру:

- Ана бира n реалних бројева (међу њима може бити и једнаких);
- Ана сабира свака два од n изабраних бројева, збирове пише на папир и папир даје Банету (написаних бројева има $\frac{1}{2}n(n-1)$ и међу њима може бити и једнаких);
- Бане побеђује ако тачно у првом покушају каже којих n бројева је Ана изабрала.

Да ли Бане може сигурно да победи у следећим случајевима:

(а) $n = 5$; (б) $n = 6$; (в) $n = 8$?

Одговоре образложити.

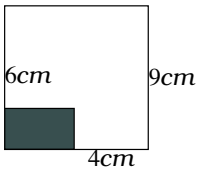
[На пример, за $n = 4$, Ана може да изабере бројеве 1, 5, 7, 9. Када сабере свака два од њих, добиће исте збирове као и када би на исти начин сабирала бројеве 2, 4, 6, 10, па према томе Бане не може сигурно да победи у овом случају.]

2004. година

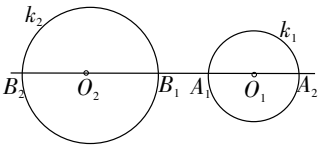
1. Највећи тражени петоцифрени број је 98765, а најмањи тражени шестоцифрени број је 102345. Њихов збир је 201110.

2. Ако са x означимо умањеник, наш задатак се своди на решавање једначине $x - 2004 = 5 \cdot 2004$. Према томе $x = 12024$.

3. Ако је површина добијеног квадрата $81\,\mathrm{cm}^2$, онда је његова страница $9\,\mathrm{cm}$. Одавде израчунавамо да су странице почетног правоугаоника $5\,\mathrm{cm}$ и $3\,\mathrm{cm}$. Обим тог правоугаоника је $O = 2 \cdot (5 + 3) = 16\,\mathrm{cm}$.



Сл. уз задатак 3



Сл. уз задатак 6

4. Са 219 цифара, Марија је откуцала 9 једноцифрених бројева, 90 двоцифрених бројева и 10 троцифрених бројева. При том је откуцала $1 + 19 + 11 = 31$ пут цифру 1.

5. „Ширина“ стаклених делова је $80 - 15 = 65\,\mathrm{cm}$, а „висина“ $100 - 15 = 85\,\mathrm{cm}$. Према томе укупна површина стаклених делова је $65 \cdot 85 = 5525$.

6. (а) $A_1B_1 = 1\,\mathrm{cm}$ (б) $A_2B_2 = 11\,\mathrm{cm}$ (в. слику).

7. Двоцифрени бројеви који имају остатак 10 при дељењу са 21 су: 10, 31, 52, 73 и 94.

8. Ако је један од тих комплементних углова x, други је $x+2004'$. Како је $2004' = 33°24'$, то је $2x + 33°24' = 90°$. Одавде је $x = 28°18'$, а тражени угао је $61°42'$.

9. Како је $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, то ће цифре четвороцифрених бројева чији је производ цифара 105 бити: $1, 3, 5$ и 7. Тражени бројеви су: 1357, 1375, 1537, 1573, 1735 и 1753.

10. Како је $X \cap \{a, c, d\} = \{a, d\}$, закључујемо да $a \in X$, $d \in X$ и $c \notin X$. Према томе, због $X \subset \{a, b, c, d, e\}$ скуп X може бити $X = \{a, d\}$ или $X = \{a, d, b\}$ или $X = \{a, d, e\}$ или $X = \{a, b, d, e\}$.

11. Јасно је да се ради о бројевима $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

12. Ако са O обележимо пресек тих симетрала, а са D пресек симетрале $\measuredangle ABC$ и странице AC, видимо да треба одредити $\measuredangle AOD$. Како је то спољашњи угао троугла ABO то је $\measuredangle AOD = \dfrac{1}{2}(\measuredangle BAC + \measuredangle ABC)$. Није тешко видети да је $\measuredangle AOD = 59°42'$.

13. Очигледно важи $-7(-2 - 3x) > -\dfrac{49}{7}$, тј. $7(2 + 3x) > -7$. Даљим сређивањем добијамо $x > -1$.

14. Одмах видимо да је $-7 \leqslant x + 5 \leqslant 7$, тј. $-12 \leqslant x \leqslant 2$. Према томе целобројна решења су $-12, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$, а њихов збир је -75.

15. Очигледно је $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 60^\circ$ и $\gamma = 40^\circ$. Сада можемо приметити да је $\triangle ADC$ једнакокрак, тј. $AD = CD$. У троуглу ABD је $AD > BD$ јер се наспрам већег угла налази већа страница. Значи, $CD > BD$, јер је $CD = AC$.

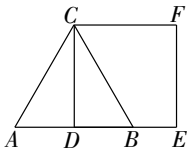
16. Лако се добија да је висина једног троугла $h_1 = 15\,\mathrm{cm}$, а другог $h_2 = 48\,\mathrm{cm}$. Површина делтоида је $P = \dfrac{d_1 d_2}{2}$, тј. $P = \dfrac{40 \cdot 63}{2} = 1260\,\mathrm{cm}^2$.

17. Није, јер бесконачни децимални запис овог броја није периодичан.

18. $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}} < 3$ ако је $6+\sqrt{6+\sqrt{6}} < 9$, тј. $\sqrt{6+\sqrt{6}} < 3$. Међутим, $\sqrt{6+\sqrt{6}} < 3$ ако је $6+\sqrt{6} < 9$, тј. $\sqrt{6} < 3$, што је очигледно тачно.

19. $a = \dfrac{3\sqrt{501}}{\sqrt{2004}} + \dfrac{\sqrt{2004}}{\sqrt{2004}} - \dfrac{3\sqrt{2004}}{\sqrt{2004}} = \dfrac{3\sqrt{501}}{2\sqrt{501}} + 1 - 3 = \dfrac{3}{2} - 2 = -\dfrac{1}{2}$.

20. Како је $P_K = \sqrt{3} \cdot P_T$, тј. $P = \sqrt{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (a – страница троугла), то је страница x траженог квадрата дата са $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Значи, страница траженог квадрата је једнака висини датог једнакостраничног троугла.



Сл. уз задатак 20

Према томе конструкција ће ићи на следећи начин.

(1) Конструишемо једну висину датог једнакостраничног троугла.

(2) Конструишемо квадрат чија је страница добијена висина датог једнакостраничног троугла.

21. Неједначина $\dfrac{2p - \frac{3}{4}}{1 - \frac{p}{2}} < 1$ се своди на $\dfrac{10p-7}{2-p} < 0$, односно

$$10p - 7 < 0,\ \ 2 - p > 0 \quad \text{или} \quad 10p - 7 > 0,\ \ 2 - p < 0.$$

Према томе, тражене вредности за p су $p < \dfrac{7}{10}$ и $p > 2$.

22. Како је пресек квадрат, то је $H = 2a = 8\,\mathrm{cm}$. Према томе, $V = H \cdot 6 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 192\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^3$.

23. Ако један број означимо са x, други број ће бити $135 - x$, па је тада

$$\frac{35}{100}x = \frac{28}{100}(135 - x).$$

Сада је $5x = 4(135 - x)$ односно $x = 60$. Тражени бројеви су 60 и 75.

24. $\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{(1+\sqrt{5})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{5})^2} = 1 + \sqrt{5} - |1-\sqrt{5}| = 1 + \sqrt{5} - \sqrt{5} + 1 = 2$.

25. Разликујемо два случаја:

1° катете су дужине $2\,\mathrm{cm}$ и $\sqrt{5}\,\mathrm{cm}$, па је дужина хипотенузе $3\,\mathrm{cm}$. Тада је $R = \dfrac{3}{2}\,\mathrm{cm}$, а површина круга $P = \dfrac{9}{4}\pi\,\mathrm{cm}^2$;

2° $\sqrt{5}$ је дужина хипотенузе, па је тада $R = \dfrac{\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{cm}$, а $P = \dfrac{5}{4}\pi\,\mathrm{cm}^2$.

26. $4008 - 2004 : 6 + 6 \cdot 2004 = 4008 - 334 + 12024 = 3674 + 12024 = 15698$.

27. $O = 8 + 12 + 12 + 4 + 8 + 4 + 4 + 4 = 56$, $P = 8 \cdot 12 = 96$.

28. Укупно време свих играча на леду у том мечу је $6 \cdot 30 = 180$ минута. Ако је сваки од 15 играча провео исто време на леду, онда је сваки од играча био у игри $180 : 15 = 12$ минута.

29. Ако је поље шаховске табле (квадрат) странице a, тада је обим правоугаоника $O = 2 \cdot (64a + a)$. То значи да је $130a = 260$, односно да је $a = 2\,\mathrm{cm}$. Сада је површина шаховске табле $P = 64 \cdot a \cdot a = 256\,\mathrm{cm}^2$.

30. Најмањи „занимљив“ број је 123456789, а највећи је 9876543210. Њихов збир је 9 999 999 999.

31. Значи, за $n \in \mathbf{N}$, важи $\frac{2}{5} < \frac{8}{n} < \frac{4}{5}$. Ово је исто што и

$$\frac{2 \cdot n}{5 \cdot n} < \frac{40}{5 \cdot n} < \frac{4 \cdot n}{5 \cdot n},$$

односно $n < 20$ и $n > 10$. Према томе, $n \in \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$.

32. Очигледно је $\alpha + 60^\circ = 148^\circ$, тј. $\alpha = 88^\circ$.

33. Очигледно је да ће било који четвороцифрен природан број чије су цифре $2, 3, 5$ и 8 бити дељив са 3 јер је $2+3+5+8 = 18$. Да би тај број био дељив са 12, мораће његов двоцифрени завршетак да буде дељив са 4, тј. његов двоцифрени завршетак је облика 28, 32 или 52. Дакле, ти бројеви су 3528, 5328, 8532, 5832, 8352 и 3852. Има их 6.

34. Та два упоредна угла углу α су међусобно једнака и једнака су 4α. Како је $4\alpha + \alpha = 180$, то је $\alpha = 36^\circ$. Мера комплементног угла углу α је $90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$.

35. Највећа могућа вредност разломка $\frac{3*5*}{36}$ је

$$\frac{3959}{36} < \frac{3600 + 360}{36} = 110.$$

Најмања могућа вредност разломка $\frac{5*3*}{45}$ је

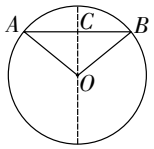
$$\frac{5030}{45} > \frac{4500 + 450}{45} = 110.$$

Према томе је $\frac{3*5*}{36} < 110 < \frac{5*3*}{45}$.

36. Ова неједначина се своди на $|x| > 3{,}25$, а њена решења су $x > 3{,}25$ и $x < -3{,}25$.

37. (i) Ако $O \in AB$, тада је $C \equiv O$ и одмах $AC = BC$.

(ii) Ако $O \notin AB$, уочимо тачку $C \in AB$ такву да је $OC \perp AB$, слика. Ако сада уочимо $\triangle ACO$ и $\triangle BCO$, лако је видети да су они подударни ($OA = OB$, $OC = OC$ и $\measuredangle OCA = \measuredangle OCB = 90^\circ$). Према томе, $AC = CB$.



Сл. уз задатак 37

38. Одмах се види да је К $= 1$, Њ $= 0$, А $= 2$, и Б $= 9$. Ако је О $= 3$ тада је Г $= 5$, а Ђ $= 8$ (или 6) и Л $= 6$ (или 8). Ако је О $= 4$ тада је Г $= 6$, а Ђ $= 8$ (или 7) и Л $= 7$ (или 8), или Ђ $= 8$ (или 5) и Л $= 5$ (или 8). Коначно ако је О $= 5$ тада је Г $= 7$, а Ђ $= 8$ (или 6) и Л $= 6$ (или 8).

Сва решења су: $821+9631 = 10452$, $621+9831 = 10452$, $821+9741 = 10562$, $721+9841 = 10562$, $821+9541 = 10362$, $521+9841 = 10362$, $821+9651 = 10472$ и $621+9851 = 10472$ (има их 8).

39. Одмах се може израчунати $\measuredangle ACB = 75^\circ$. Даље, $\measuredangle AOS = 60^\circ$ (као збир унутрашњих несуседних углова $\triangle AOC$). $\measuredangle OAS$ као угао између симетрала спољашњег и унутрашњег угла $\triangle ABC$ је прав. И коначно $\measuredangle ASO = 30^\circ$.

40. Ако са x означимо вредност у средњем пољу прве врсте, тада одмах можемо добити да је у свакој врсти, колони и дијагонали збир тих бројева $x - 17$. Тада су у последњој врсти редом бројеви $x - 8$, -15 и $x - 5$. Сада је $x - 17 = x - 8 + x - 5 + (-15)$, тј. $x = 11$, односно $x - 17 = -6$. Решење је дато на слици.

-10	11	-7
1	-2	-5
3	-15	6

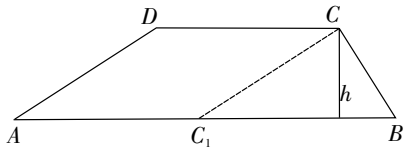
41.

$$\sqrt{(-4)^2} + \left(2^2\right)^2 \cdot \frac{5^{-8+2\cdot 7}}{\left(\sqrt{13+\sqrt{139+\sqrt{(-5)^2}}}\right)^3} = 4 + 16 \cdot \frac{5^6}{5^3} = 2004.$$

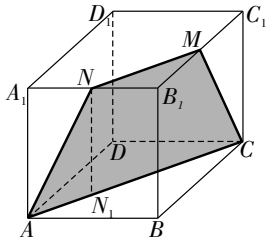
42. Осенчени део се састоји од четири правоугаоника и једног квадрата. Правоугаоници су дужине $2\,\mathrm{cm}$ и ширине $\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$. Према томе, површина осенченог дела је $P = (2^2 + 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}) = 4(1 + 2\sqrt{2})\,\mathrm{cm}^2$.

43. Ако ставимо $x = 2,320042004\ldots$, тада је $10x = 23,20042004\ldots$, а $100000x = 232004,20042004\ldots$. Сада можемо да израчунамо да је $99990x = 231981$, па је коначно $x = \dfrac{77327}{33330}$.

44. Нека је дат трапез $ABCD$ тако да је $AB = 25\,\mathrm{cm}$, $BC = 6\,\mathrm{cm}$, $CD = 15\,\mathrm{cm}$ и $DA = 8\,\mathrm{cm}$. Ако одредимо $C_1 \in AB$ тако да је $CC_1 \parallel AD$, тада ће $\triangle C_1BC$ имати странице дужине $C_1B = 10\,\mathrm{cm}$, $BC = 6\,\mathrm{cm}$, $CC_1 = 8\,\mathrm{cm}$, па је то на основу обрнуте Питагорине теореме правоугли троугао. Сада је јасно да је $\dfrac{h \cdot 10}{2} = \dfrac{8 \cdot 6}{2}$, тј. $h = 4,8\,\mathrm{cm}$, односно $P = \dfrac{25+15}{2} \cdot 4,8 = 96\,\mathrm{cm}^2$.



Сл. уз задатак 44



Сл. уз задатак 47

45. Како је $5 \cdot 3^{61} = 3 \cdot 5 \cdot (3^3)^{20} = 15 \cdot 27^{20}$ и $3 \cdot 5^{41} = 3 \cdot 5 \cdot (5^2)^{20} = 15 \cdot 25^{20}$, то је очигледно да је $5 \cdot 3^{61} = 15 \cdot 27^{20} > 15 \cdot 25^{20} = 3 \cdot 5^{41}$.

46. Дати разломак је облика $\dfrac{x}{x+2}$. Из услова задатка имамо да је $\dfrac{x-1}{x+2-1} = \dfrac{1}{2}$, а одавде је $x = 3$.

47. Очигледно је $ACMN$ трапез (MN средња линија троугла $A_1B_1C_1$ па је $MN \parallel A_1C_1$, тј. $MN \parallel AC$), слика. Према томе $AC = 12\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$ и $MN = 6\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$. Висина трапеза NN_1 је катета троугла AN_1N па је

$$NN_1 = \sqrt{10^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{82}.$$

Површина траженог пресека је

$$P = \frac{12\sqrt{2} + 6\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{82} = 9 \cdot 2\sqrt{41} = 18\sqrt{41}\,\mathrm{cm}^2.$$

48. Одмах се види да је $ab + ac + bc = \dfrac{abc}{2004}$. Дељењем са $abc > 0$ добијамо

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2004}.$$

49. Очигледно је $AD = BD$ (јер је $\triangle ADE \cong \triangle BDC$), па је $\triangle ABD$ једнакокрак. Из тога следи да је $\measuredangle EDA = \measuredangle ADO = \measuredangle ODB = \measuredangle BDC = 15^\circ$, па су троуглови ADE и ADO једнакокраки и подударни. Значи, $r = a$.

50. Важи

$$\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Применом ове једнакости дати збир је једнак

$$(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{p+1} - \sqrt{p}) = \sqrt{p+1} - 1.$$

Сада имамо $\sqrt{p+1} - 1 = n$, $n \in \mathbf{N}$. Одавде је $p + 1 = (n+1)^2$, тј. $p = n^2 + 2n$. Ако то запишемо у облику $p = n(n+2)$ онда ће p бити прост број једино када је $n = 1$, тј. $p = 3$.

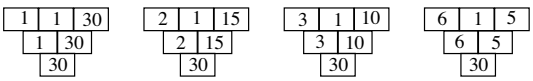
51. $O = 2 \cdot (12 + 8) + 4 \cdot 4 = 56\,\mathrm{cm}$; $\quad P = 8 \cdot 12 - 4 \cdot 4 = 80\,\mathrm{cm}^2$.

52. Ако је један од тих бројева трећина другог, онда је тај мањи број заправо четвртина збира. Значи један од тих бројева је 2004, а други 6012.

53. A може бити или 1 или 6, док је B свакако 9. Како је $1 + 11 + 911 + 911 < 2000$, то је очигледно $A = 6$.

54. То су ABC, ACD, ABE, BEC, BEF, EFC, FCH, EGF, FGC, GCH.

55. Како је $30 = 1 \cdot 30 = 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 6 \cdot 5$ то су могућа ова четири решења:



Сл. уз задатак 55

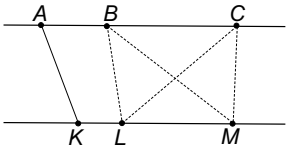
и слично с истим бројевима, а у другом распореду још одговарајућа четири решења.

56. Нека су α и β углови са паралелним крацима. Тада је $\alpha + \beta = 180^\circ$, тј. $\alpha + \alpha + \frac{1}{2}\alpha = 180^\circ$. Одавде је $\alpha = 72^\circ$, а његов комплемент има 18°.

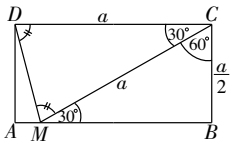
57. Тражени број је $16q + q = 17q$, па се најмањи тражени број добија за $q = 6$, тј. $17 \cdot 6 = 102$. Највећи тражени број се добија за $q = 15$, јер је 15 највећи остатак при дељењу са 16 – значи $17 \cdot 15 = 255$.

58. Ако је прве године ученик порастао 3 cm, тада је четврте порастао 9 cm, а друге и треће најмање 4 cm, односно 5 cm. То је укупно 21 cm, што је немогуће јер је укупно порастао 17 cm. Ако је прве године порастао 1 cm, тада је четврте године порастао 3 cm па није могао да укупно порасте 17 cm. Значи ученик је порастао прве године 2 cm, а четрврте 6 cm. Да би укупно порастао 17 cm недостаје још 9 cm. Из услова задатка закључујемо да је друге године порастао 4 cm, а треће 5 cm.

59. Задатак се може решити пребројавањем на следећи начин: ако је AK једна страница четвороугла, за наспрамну постоје четири могућности: BL, BM, CL, CM; ако је AL једна страница четвороугла, за наспрамну постоје две могућности MB и MC; за BK такође две: CL и CM и коначно за BL једна – CM.



Сл. уз задатак 59



Сл. уз задатак 62

60. Двоцифрени бројеви који су дељиви са 16 су $16, 32, 48, 64, 80$ и 96. Ако броју 16 прецртамо цифру 6 добијамо 1, ако у броју 32 прецртамо цифру 3 добијамо 2, ако у броју 64 прецртамо цифру 6 добијамо 4 и коначно ако у броју 96 прецртамо цифру 9 добијамо 6.

61. Са стоваришта је однето прво $\frac{3}{8} \cdot 304\,\mathrm{t} = 114\,\mathrm{t}$ робе, а затим још $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{5} \cdot 304\,\mathrm{t} = 152\,\mathrm{t}$ робе. На стоваришту је остало $38\,\mathrm{t}$ робе.

62. Троугао BCM је правоугли са оштрим угловима од 30° и 60°, слика. Како је $\triangle DMC$ једнакокраки са углом при врху од 30°, то је $\measuredangle CDM = 75^\circ$.

63. Како је $2004 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 167$, то троцифрени имениоци тих тражених разломака могу бити само $4 \cdot 167$ и $3 \cdot 167$ (јер је $6 \cdot 167 = 1002$). Према томе

$$\frac{17}{2004} = \frac{x}{4 \cdot 167} + \frac{y}{3 \cdot 167}, \quad x, y \in \mathbf{N},$$

па је $17 = 3x + 4y$. Како x мора бити непаран природан број и не може бити нити 1 нити већи или једнак 5, то је $x = 3$. Сада видимо да је $y = 2$.

64. Ако BB_1 продужимо преко B_1 до B_2 тако да је $BB_1 = B_1B_2$, четвороугао $ABCB_2$ је паралелограм. Троугао ABB_2 је лако конструисати јер је $\measuredangle BAB_2 = 120^\circ$, $AB = 4\,\mathrm{cm}$ и $BB_2 = 10\,\mathrm{cm}$. Тачку C конструисати тако да је $ABCB_2$ паралелограм.

65. Из $\mathrm{М} : \mathrm{А} = \mathrm{М} \cdot \mathrm{А}$ одмах закључујемо да је $A = 1$. Сада се наши услови своде на $\mathrm{М} = \mathrm{Т} - \mathrm{Е} = \mathrm{Т} : \mathrm{И} = \mathrm{К} - 1$. Како је $\mathrm{И} \neq \mathrm{М}$, $\mathrm{М} \neq 1$, $\mathrm{И} \neq 1$ и $\mathrm{Т} : \mathrm{И} = \mathrm{М}$ то је Т сложен број и $\mathrm{Т} \in \{6, 8\}$. Како је $\mathrm{Т} \neq 6$, јер би тада било $\mathrm{И} = 2$, $\mathrm{М} = 3$ и $\mathrm{Е} = 3$ или $\mathrm{И} = 3$, $\mathrm{М} = 2$ и $\mathrm{К} = 3$, то је $\mathrm{Т} = 8$. Сада је $\mathrm{М} = 2$, $\mathrm{И} = 4$, $\mathrm{К} = 3$ и $\mathrm{Е} = 6$, јер за $\mathrm{М} = 4$, $\mathrm{И} = 2$ је $\mathrm{Е} = 4$.

66. Ако ставимо да је $a + \frac{1}{a} = A$, тада је $a^2 + \frac{1}{a^2} = A^2 - 2$, па је

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) = A^3 - 2A = a^3 + \frac{1}{a^3} + a + \frac{1}{a}.$$

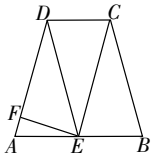
Значи, $a^3 + \frac{1}{a^3} = A(A^2 - 3)$. Како је $a + \frac{1}{a} = A > 2$, то је $A^2 - 3 > 1$, па је $a^3 + \frac{1}{a^3}$ сложен број.

67. Троуглови AFE и BCF су подударни и једнакокраки са углом при врху од 48°. Значи $\measuredangle EFA = \measuredangle BFC = 66^\circ$. Сада се лако израчунава $\measuredangle EFC = 168^\circ$.

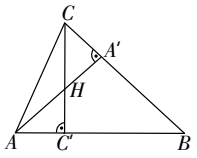
68. $2^{2004} = 2^4 \cdot 2^{2000} > 10 \cdot (2^{10})^{200} = 10 \cdot 1024^{200} > 10^{601}$. Дакле, број има бар 602 цифре, па с обзиром да имамо 10 различитих цифара бар једна мора да се јави 61 пут.

69. Ако уочимо тачку E на AB тако да је $AE = EB = DC$, тада добијамо два паралелограма $AECD$ и $EBCD$, па је $AD = EC = BC = ED = 5\,\mathrm{cm}$. Сада се лако

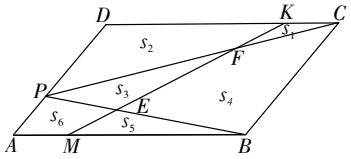
доказује да су троуглови AED, ECD и EBC једнакокраки и подударни (ССС). Углови тих троуглова су на основици по 75° и при врху 30°, па је висина EF троугла AED једнака $\frac{5}{2}$. Површина овог трапеза је $P = 3 \cdot \frac{5}{4} \cdot 5 = \frac{75}{4}\,\mathrm{cm}^2$.



Сл. уз задатак 69



Сл. уз задатак 73



Сл. уз задатак 75

70. Троцифрених бројева са траженом особином има $5 \cdot 9 \cdot 9 = 405$, а четвороцифрених $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 6561$. Укупно 6966.

71. Одговарајуће апотеме су $h_1 = 3\sqrt{17}$ и $h_2 = 4\sqrt{10}$, па је површина овог тела, тј. најмања количина лима $P = 48(\sqrt{17} + \sqrt{10})\,\mathrm{dm}^2$.

72. За сваки позитиван реалан број x важи $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$. У случају да тражени бројеви a, b, c постоје важило би $\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right) < 6$, што је немогуће.

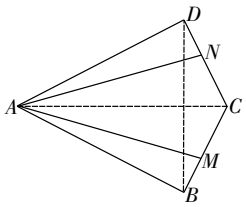
73. (а) Како су троуглови $AC'H$ и $CA'H$ слични, то ће важити $AH : CH = HC' : HA'$, слика. Ако искористимо оно што је дато, биће $AH = HC'\sqrt{2}$. Из овога закључујемо да је $\measuredangle C'AH = \measuredangle HCA' = \measuredangle ABC = 45^\circ$.
(б) Како је $BC' = CC' = 3HC'$ и $AC' = C'H$ то је $AB : CC' = 4C'H : 3C'H = 4 : 3$.

74. Ако са x означимо број ученика који уче енглески, тада је $20040 - x$ број ученика који уче немачки, па је $\frac{80}{100}(20040 - x) + \frac{20}{100}x = \frac{40}{100} \cdot 20040$, одакле се добија $x = 13360$.

75. Ако са P означимо површину целог паралелограма, а површине троуглова и четвороуглова означимо као на слици, очигледно је $S_2 + S_3 + S_6 = S_5 + S_4 + S_1 = \frac{1}{2}P$ и $S_3 + S_4 = \frac{1}{2}P$.
(а) $S_5 + S_4 + S_1 = S_3 + S_4$, тј. $S_5 + S_1 = S_3$, односно $P_{\triangle EPF} = P_{\triangle FKC} + P_{\triangle MBE}$.
(б) $S_2 + S_3 + S_6 = S_3 + S_4$, тј. $S_4 = S_2 + S_6$, односно $P_{BCFE} = P_{AMEP} + P_{PFKD}$.

76. Ако са x обележимо број листова у једној свесци, тада је $\frac{x}{4} + \frac{x}{9} = 26$, тј. $x = 72$. Број листова ће се смањити за $\frac{26}{144} = 0{,}1806 \approx 18\%$.

77. Како је $\triangle ABM \cong \triangle ADN$, јер је $\measuredangle ABM = \measuredangle ADN$, $\measuredangle BAM = \measuredangle DAN$ и $BM = DN$, то је онда $AB = AD$ (слика). Ово је довољно да се закључи да су правоугли троуглови ACD и ABC подударни и да су због тога углови CAD и CAB једнаки. Значи, AC је симетрала угла BAD и како је троугао BAD једнакокраки ($AB = AD$) то је $AC \perp BD$, што је и требало доказати.



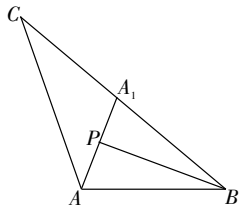
Сл. уз задатак 77

78. Ако је $x = \overline{abc}$ где је $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, то је према услову задатка

$$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 3 \cdot \overline{aaa},$$

тј. $222(a+b+c) = 3 \cdot 111 \cdot a$. Одавде је $a = 2b + 2c$, па су могућа решења:

$$a = 6,\ b = 2,\ c = 1; \quad a = 6,\ b = 1,\ c = 2;$$
$$a = 8,\ b = 3,\ c = 1; \quad a = 8,\ b = 1,\ c = 3.$$



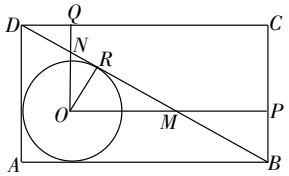
Сл. уз задатак 79

79. Како је $\measuredangle ABP = \measuredangle PBA_1$, $\measuredangle APB = \measuredangle BPA_1 = 90^\circ$ и BP заједничка страница троугла ABP и PBA_1 (слика), то је $\triangle ABP \cong \triangle PBA_1$, па је $AB = A_1B$, тј. $2AB = BC$. Сада закључујемо да су мерни бројеви дужина страница троугла ABC 1, 2 и 3 или 2, 3 и 4. Како је $1 + 2 = 3$, то је $AB = 2\,\mathrm{cm}$, $BC = 4\,\mathrm{cm}$ и $AC = 3\,\mathrm{cm}$.

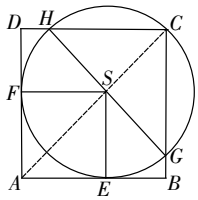
80. Не могу се добити сви једнаки бројеви, без обзира колико пута примењивали дозвољену операцију „увећавања два броја за по 1“. То је немогуће, јер увећавањем два броја за по један од почетног збира $1 + 2 + \cdots + 221 + 222 = 111 \cdot 223$ увек добијамо непаран број, а ако би у једном тренутку сви бројеви били једнаки њихов збир би био $222 \cdot A$, тј. паран број.

81. $1\underbrace{00\ldots0}_{2004}2\underbrace{00\ldots0}_{2004}1 = 10^{4010} + 2 \cdot 10^{2005} + 1 = \left(10^{2005}+1\right)^2 = \left(1\underbrace{00\ldots0}_{2004}1\right)^2.$
Тражени број је $1\underbrace{00\ldots0}_{2004}1$.

82. Нека је R тачка додира праве одређене са BD и кружне линије, а M и N тачке пресека BD са OP и OQ редом, слика. Тада је $\triangle ORM \cong \triangle MBP$ ($PB = OR = r$, $\measuredangle ORM = \measuredangle MPB = 90^\circ$ и $\measuredangle OMR = \measuredangle BMP$) и слично $\triangle ORN \cong \triangle NQD$. Значи, површина правоугаоника $OPCQ$ је једнака површини троугла BCD, а она је $1002\,\mathrm{cm}^2$.



Сл. уз задатак 82



Сл. уз задатак 84

83. Број који је збир 7 узастопних природних бројева је дељив са 7 јер:

$$a + (a+1) + \cdots + (a+6) = 7a + \frac{6 \cdot 7}{2} = 7(a+3).$$

Слично је и број који је једнак збиру 11, односно 13 узастопних природних бројева дељив са 11, односно 13. Дакле, тражимо број који је дељив са 7, 11 и 13, а да није непаран, јер би тада био збир два узастопна природна броја. Дакле, тражени број је $2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 2002$.

84. Нека је дат квадрат $ABCD$ и нека кружна линија додирује странице AB и AD у тачкама E и F редом, слика. Ако је S центар кружне линије, онда је очигледно да је $AESF$ квадрат (две суседне странице су једнаке и сви углови прави), па је $AS = 10\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$.

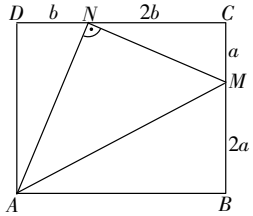
С друге стране, ако кружна линија сече стране квадрата BC и CD редом у тачкама G и H, троугао HGC је правоугли и HG је пречник тако да C припада кружној линији. Како

је $\measuredangle BAC = \measuredangle EAS = 45^\circ$, то тачке A, S и C припадају једној правој, па је дијагонала квадрата $AC = (10\sqrt{2}+10)\,\mathrm{cm}$, а површина $P = \frac{1}{2}\left(10(\sqrt{2}+1)\right)^2 = 50(3+2\sqrt{2})\,\mathrm{cm}^2$.

85. (а) Бранко и Ратко ће укупно уписати 2003 симбола ($+$ или $\cdot$), па како Бранко почиње игру, то ће он последњи уписати знак $+$ или $\cdot$. Бранко увек побеђује, јер ће на крају уписати $+$ ако је претходно добијени број (без последње јединице) био непаран или $\cdot$ ако је претходно добијени број био паран.
(б) Не. Увек побеђује први играч (при оптималној стратегији), јер он ставља последњи знак и тиме одређује парност, односно непарност целог броја.

86. Дато је да је Воја првог дана засадио једну садницу. Онда је другог дана засадио $1+1=2$, а трећег $2+2=4$ саднице. четвртог дана ја засадио $4+4=8$ садница, а петог 7 садница јер је $8+8=16$ и $1+6=7$. Шестог дана је засадио 5 садница, јер је $7+7=14$ и $1+4=5$. Седмог дана је засадио опет једну садницу (као првог дана) јер је $5+5=10$ и $1+0=1$. Сада је јасно да ће осмог дана засадити онолико садница колико је засадио другог дана итд. Према томе, за шест дана засади $1+2+4+8+7+5=27$ садница, а за 60 дана ће засадити свих 270 садница.

87. Према условима датим у задатку $\measuredangle ANM = 90^\circ$, па су онда углови $\measuredangle AND$ и $\measuredangle MNC$ комплементни. Дакле, $\measuredangle AND = \measuredangle NMC$ па важи: $\triangle AND \sim \triangle NMC$. Значи: $CM : CN = ND : DA$, тј. $a : 2b = b : 3a$, тј. $3a^2 = 2b^2$, односно $a : b = \sqrt{2} : \sqrt{3}$. Сада је $BC : AB = 3a : 3b$, тј. $BC : AB = \sqrt{2} : \sqrt{3}$.



Сл. уз задатак 87

88. Нека је тај троцифрен број $\overline{xyz}$. Из услова задатка имамо:

$$\overline{xyz} + 45 = \overline{xzy}, \quad \text{тј.} \quad 100x + 10y + z + 45 = 100x + 10z + y,$$

односно $y - z + 5 = 0$; и

$$\overline{xyz} - 270 = \overline{yxz}, \quad \text{тј.} \quad 100x + 10y + z - 270 = 100y + 10x + z,$$

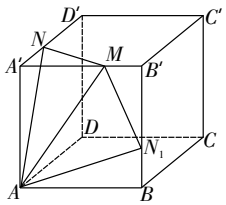
односно $x - y - 3 = 0$. Да видимо шта се дешава са разликом

$$\overline{xyz} - \overline{zyx} = 100x + 10y + z - 100z - 10y - x = 99(x - z).$$

Треба нам разлика $x - z$. Како је $x - z = (x - y) - (z - y) = 3 - 5 = -2$, то закључујемо да је $\overline{xyz} - \overline{zyx} = -198$, тј. да се заменом цифара стотина и јединица тај број повећава за 198.

89. Нека је A тражени број и B збир цифара броја A. Како се зна да A и B имају исти остатак при дељењу са 9, тј. да је $A-B$ дељив са 9, то је због $A-B = 2004B-B = 2003B$ и чињенице да је 2003 прост број, B дељиво са 9. Према томе, број A је најмањи од бројева облика $(9k)\cdot 2004$ чији је збир цифара $9k$.
За $k=1$ имамо $9\cdot 2004 = 18036$ и $1+8+3+6 = 18 > 9$, а за $k=2$ имамо $18\cdot 2004 = 36072$ и $3+6+0+7+2 = 18$. Дакле, тражени број је $A = 36072$.

90. Ако уочимо на ивици BB' тачку N_1 тако да је $BN_1 = A'N$ (слика), онда ће важити $\triangle ABN_1 \cong \triangle AA'N$ (јер је $AB = AA'$, $A'N = BN_1$, $\measuredangle AA'N = \measuredangle ABN_1 = 90^\circ$).



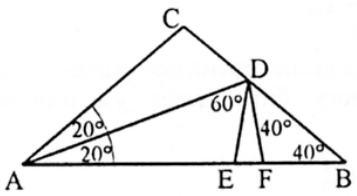
Сл. уз задатак 90

Зато је $AN_1 = AN$ и $\triangle A'NM \cong \triangle MN_1B'$ (јер је $\measuredangle NA'M = \measuredangle MB'N_1 = 90^\circ$, $B'M = A'N$ и $B'N_1 = A'M$) па је $MN_1 = MN$. Сада је очигледно да је $\triangle AMN \cong \triangle AMN_1$ (ССС) па важи

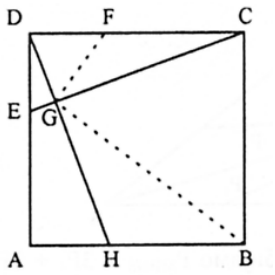
$$\measuredangle A'AM + \measuredangle A'AN + \measuredangle MAN = \measuredangle A'AM + \measuredangle BAN_1 + \measuredangle N_1AM = 90^\circ.$$

91. Тражени број не може бити облика pq, где су p и q прости бројеви, јер би тада имао укупно 4 делиоца. Такође, не може бити ни облика p^2q, јер би тада имао 6 делилаца. Повећањем степена са којим неки прост фактор учествује у разлагању датог броја, а такође повећањем броја његових простих фактора, укупан број делилаца се даље повећава. Према томе, тражени број мора бити облика p^n. Како тада он има $n+1$ делилац, то мора бити $n = 4$. Једини прост број чији је четврти степен троцифрен је број 5. Дакле, постоји само један број који задовољава услове задатка, а то је 625.

92. На страници AB уочимо тачке E и F такве да је $\measuredangle ADE = 60^\circ$ и $\measuredangle BDF = 40^\circ$ (слика). Тада је $\triangle ADC \cong \triangle ADE$ (заједничка страница AD и на њој једнаки налегли углови од 20° и 60°). Следи да су троуглови ADF, EFD и FBD једнакокраки са основицама (редом) DF, EF и BD. Због тога је $AF = AD$ и $CD = ED = FD = FB$, па је $AD + DC = AF + FB = AB$.

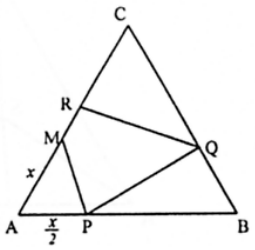


Сл. уз задатак 92



Сл. уз задатак 93

93. Из подударности троуглова DAH и CDE и услова $ED = DF$ следи да је $AH = DE = DF$ (слика), па је $HBCF$ правоугаоник. Дијагонала BF тог правоугаоника је пречник његове описане кружнице. Како је $\measuredangle HGC = 90^\circ$, то тачка G припада тој кружници, па је и $\measuredangle BGF = 90^\circ$.



Сл. уз задатак 94

94. Обележимо тражену дуж AM са x (слика). Тада је у троуглу APM, $AP = \dfrac{x}{2}$, па је $PB = 12 - \dfrac{x}{2}$. Из троугла PBQ је $BQ = \dfrac{1}{2}\left(12 - \dfrac{x}{2}\right) = 6 - \dfrac{x}{4}$, па је $QC = 12 - \left(6 - \dfrac{x}{4}\right) = 6 + \dfrac{x}{4}$. Из троугла QCR је $RC = 3 + \dfrac{x}{8}$. Из услова $M = R$ следи $AM + MC = 12$, односно $x + 3 + \dfrac{x}{8} = 12$, одакле се налази $x = 8\,\mathrm{cm}$.

95. Нека су дати природни бројеви a, b, c, d и e, и нека је

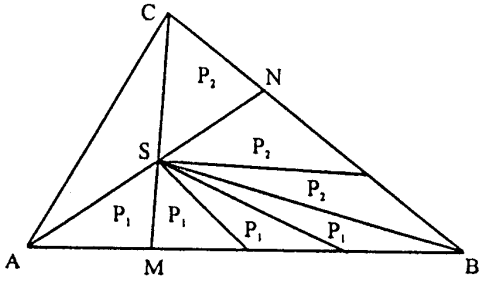
$$a+b=x_1,\quad a+c=x_2,\quad a+d=x_3,\quad a+e=x_4,\quad b+c=x_5,$$
$$b+d=x_6,\quad b+e=x_7,\quad c+d=x_8,\quad c+e=x_9,\quad d+e=x_{10}.$$

Нека је n најмањи од добијених збирова x_1, x_2, ... , x_{10} и претпоставимо да су они 10 узастопних природних бројева. Сабирањем претходних једнакости се добија

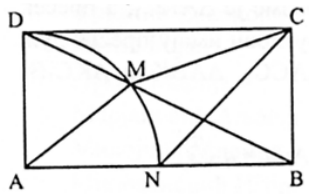
$$4(a+b+c+d+e) = x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = n + (n+1) + \cdots + (n+9) = 10n + 45.$$

Како је лева страна једнакости паран, а десна непаран број, то значи да добијени збирови не могу бити 10 узастопних природних бројева.

96. Нека је $P_{\triangle AMS} = P_1$ и $P_{\triangle CNS} = P_2$ (слика). Тада је $P_{\triangle ABN} = 4P_1 + 2P_3 = \frac{2}{3}\cdot 2004$, $2P_1 + P_2 = 668$. Слично је $P_{\triangle BCM} = 3P_1 + 3P_2 = \frac{3}{4}\cdot 2004$, па је $P_1 + P_2 = 501$. Сабирањем добијених једнакости следи да је $P_{MBNS} = 3P_1 + 2P_2 = 501 + 668 = 1169$.



Сл. уз задатак 96



Сл. уз задатак 99

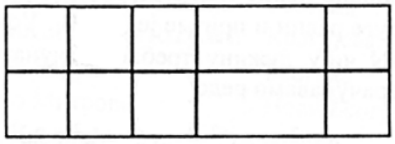
97. Како је $abc = 1$, то је

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right) &= abc + \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} + \frac{1}{abc}\\ &= 2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + a^2 + b^2 + c^2\\ &= \left(a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}\right) + \left(b^2 + 2 + \frac{1}{b^2}\right) + \left(c^2 + 2 + \frac{1}{c^2}\right) - 4\\ &= \left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 + \left(c+\frac{1}{c}\right)^2 - 4.\end{aligned}$$

98. Нека је констатовано да има k препуних и l осталих аутобуса; нека је у препуним аутобусима x, а у осталим y путника. Тада је $x > 50k$, $y \leqslant 50l$. Ако је $k = 0$ или $l = 0$, проценти поменути у формулацији задатка су међусобно једнаки (и једнаки 0, односно 100). У противном је $\frac{x}{k} > 50 \geqslant \frac{y}{l}$, одакле је $\frac{y}{x} < \frac{l}{k}$. Даље је $\frac{x+y}{x} < \frac{k+l}{k}$, односно $\frac{x}{x+y} > \frac{k}{k+l}$. Дакле, проценат путника у препуним аутобусима (број који је добио Раде) је већи од процента препуних аутобуса (броја који је добио Воја).

99. Нека је $\measuredangle DAM = x$ (слика). Тада је из једнакокраког троугла AMD, $\measuredangle AMD = 90^\circ - \frac{x}{2}$, а из, такође једнакокраког, троугла ANM је $\measuredangle MAN = 90^\circ - x$ и $\measuredangle AMN = 45^\circ + \frac{x}{2}$. Са обзиром да је $\measuredangle DMA + \measuredangle AMN + \measuredangle NMB = 180^\circ$, следи да је $\measuredangle NMB = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{x}{2}\right) - \left(45^\circ + \frac{x}{2}\right) = 45^\circ$. С друге стране, $\triangle NBC$ је једнакокраки и правоугли, па је $\measuredangle NCB = 45^\circ$. Дакле, $\measuredangle NMB = \measuredangle NCB$, па је четвороугао $NBCM$ тетивни. Зато је $\measuredangle BMC = \measuredangle BNC = 45^\circ$.

100. Из услова задатка следи да у једној колони може бити изабран само један квадрат. Како треба изабрати 2004 квадрата, то значи да треба изабрати 2004 колоне од могућих 2005, односно једну колону треба изоставити. Ако се изостави прва колона, онда постоје две могућности за избор квадрата из друге колоне, а тиме је одређен избор свих осталих. Још две могућности постоје ако се изостави последња колона. Међутим, ако се изостави једна од 2003 преостале колоне (између прве и последње), онда се квадрати у суседним колонама могу независно бирати, у свакој на по два начина. У том случају има 4 могућности. Према томе, укупно има $2 + 2 + 2003 \cdot 4 = 8016$ могућности.



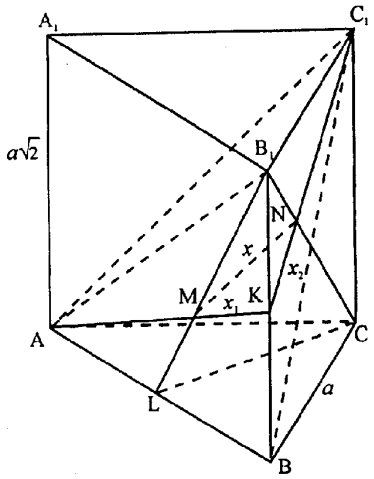
Сл. уз задатак 100

101. Нека су дате тачке A_1, A_2, ... , A_{2004} и нека из њих полази, редом, n_1, n_2, ... , n_{2004} дужи. Јасно је да бројеви n_1, n_2, ... , n_{2004} могу узимати вредности из скупа $\{0, 1, 2, \ldots, 2003\}$. Разликујемо два случаја.

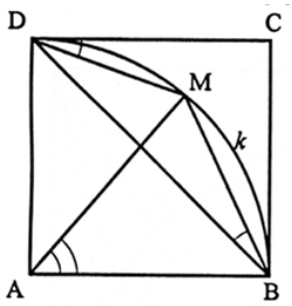
а) Ако не постоји тачка из које полази 0 дужи, онда бројеви n_1, n_2, ... , n_{2004} припадају скупу $\{1, 2, \ldots, 2003\}$, па на основу Дирихлеовог принципа постоје два од њих који су међусобно једнаки.

б) Ако постоји тачка из које полази 0 дужи, онда не постоји тачка из које полази 2003 дужи. Тада бројеви n_1, n_2, ... , n_{2004} припадају скупу $\{0, 1, \ldots, 2002\}$, па опет на основу Дирихлеовог принципа постоје два од њих који су међусобно једнаки.

102. Нека је K средиште ивице BB_1 и L средиште ивице AB. Пресек равни α и призме је $\triangle AKC_1$, а пресек равни β и призме је $\triangle LCB_1$ (слика). Уочени троуглови имају за пресек дуж MN чију дужину треба израчунати. Из троугла AA_1C_1 налазимо $AC_1^2 = AA_1^2 + A_1C_1^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$, дакле $AC_1 = a\sqrt{3}$. Тачка M је тежиште троугла ABB_1, па је $MK = \frac{1}{3}AK$. Слично, тачка N је тежиште троугла BC_1B_1, па је $KN = \frac{1}{3}KC_1$. Тако добијамо да је $\triangle MKN \sim \triangle AKC_1$ (са коефицијентом сличности $1 : 3$), па је $MN = \frac{1}{3}AC_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



Сл. уз задатак 102



Сл. уз задатак 104

103. Како је $(k^3)^2 + (2k^2)^3 = k^6 + 8k^6 = 9k^6 = (3k^3)^2$, то је, за сваки природан број k, тројка $(k^3, 2k^2, 3k^3)$ решење дате једначине.

104. У троуглу BDM је $\measuredangle DBM = 25°$, $\measuredangle BDM = 20°$, па је $\measuredangle BMD = 135°$ (слика). Посматрајмо кружницу k са центром A и полупречником AB. BD је тетива која одговара четвртини те кружнице, па је периферијски угао над том тетивом једнак $135°$. Дакле, тачка M припада кружници k. Следи да је $AM = AB = AD$. Троугао MAD је једнакокрак, при чему је угао на основици $\measuredangle ABM = 65°$. Према томе је и $\measuredangle AMB = 65°$ и $\measuredangle MAB = 180° - 2 \cdot 65° = 50°$.

105. Приметимо да ако за реалне бројеве x и y важи $xy = 1$, онда је

$$\frac{1}{1+x^{2004}} + \frac{1}{1+y^{2004}} = \frac{1+y^{2004}+1+x^{2004}}{(1+x^{2004})(1+y^{2004})}$$
$$= \frac{2+x^{2004}+y^{2004}}{1+x^{2004}+y^{2004}+x^{2004}y^{2004}} = \frac{2+x^{2004}+y^{2004}}{2+x^{2004}+y^{2004}} = 1.$$

Примењујући добијени резултат најпре на бројеве $x = a_1$, $y = a_{2004}$, затим на бројеве $x = a_2$, $y = a_{2003}$, $\ldots$, и, на крају, на бројеве $x = a_{1002}$, $y = a_{1003}$, добијамо да је тражени збир једнак $1 + 1 + \cdots + 1 = 1002$.

106. Приметимо прво да је дати израз увек паран јер има паран број непарних сабирака. Према томе, једини прост број који може бити вредност датог израза је 2.
За било којих 8 узастопних природних бројева важи:
$(n+8)^2 - (n+7)^2 - (n+6)^2 + (n+5)^2 - (n+4)^2 + (n+3)^2 + (n+2)^2 - (n+1)^2 = 0,$
па распоређујући знаке $+$ и $-$ на тај начин редом у блоковима од по 8 сабирака добијамо да је

$$\underbrace{2004^2 * 2003^2 * \ldots * 5^2}_{=0} + 4^2 - 3^2 - 2^2 - 1^2 = 2.$$

107. Претпоставимо да постоји такав број D. Пошто је $D = A^2$ и $A = 10a + 5$, $a \in \mathbf{N}$, из

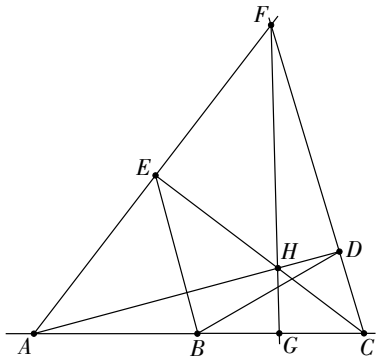
$$A^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a+1) + 25$$

следи да је цифра десетица броја D једнака 2. На основу следеће табеле

$a \equiv \cdot \pmod{10}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a(a+1) \equiv \cdot \pmod{10}$	0	2	6	2	0	0	2	6	2	0

закључујемо да је цифра стотина броја D: 0, 2 или 6, па према условима задатка то може бити једино цифра 6 (цифре 2 и 5 су већ употребљене, а 0 је искључена). Дакле, $D = 1000b + 625$, $b \in \mathbf{N}$, па $125 \mid D$. Пошто је $D = A^2$, то следи да $5^4 \mid D$, па цифра хиљада броја D мора бити или 0 или 5. Контрадикција.

108. На произвољној правој помоћу обележених тачака лењира обележимо тачке A и B, а затим тачке B и C (видети слику). Обележимо сада тачке B и D, тако да D буде ван уочене праве. Спојимо A и D. Лако се показује да је $AD \perp CD$. Обележимо сада тачке B и E тако да E не буде ни на уоченој правој ни на правој BD. Спојимо A и E и E и C. Тада је $AE \perp EC$. Нека је H тачка у пресеку правих AD и CE, а F тачка у пресеку правих AE и CD. Тада је H ортоцентар троугла ACF, па је права FH ортогонална на полазну праву.



Сл. уз задатак 108

109. Нека је $(m+1)^3 - m^3 = n^2$, где је m неки природан број. Тада је n^2, а отуда и n, непаран број. Дакле $(m+1)^3 - m^3 = (2p+1)^2$. То се даље може представити у облику

$$\begin{aligned} 3m^2 + 3m + 1 &= (2p+1)^2 \\ 4(3m^2 + 3m + 1) - 1 &= 4(2p+1)^2 - 1 \\ 3(4m^2 + 4m + 1) &= (2(2p+1) - 1)(2(2p+1) + 1) \\ 3(2m+1)^2 &= (4p+1)(4p+3). \end{aligned}$$

Како су бројеви $4p+1$ и $4p+3$ узајамно прости, а њихов производ једнак $3(2m+1)^2$, један од њих је потпун квадрат. То не може да буде $4p+3$, јер квадрат сваког непарног броја даје остатак 1 при дељењу са 4. Отуда је $4p+1 = (2t+1)^2$, односно

$$\begin{aligned} 4p + 1 &= 4t^2 + 4t + 1 \\ 2p + \frac{1}{2} &= 2t^2 + 2t + \frac{1}{2} \\ 2p + 1 &= t^2 + t^2 + 2t + 1 \\ 2p + 1 &= t^2 + (t+1)^2. \end{aligned}$$

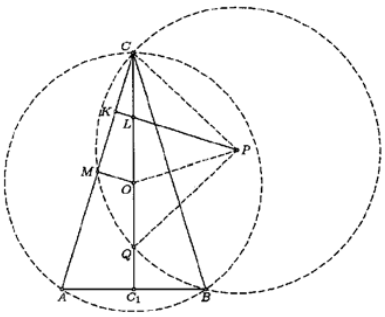
110. Неједнакост се може записати у еквивалентном облику

$$\frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} \leqslant \frac{\sqrt{2(x^2+y^2)}}{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Зато је довољно доказати следеће две неједнакости:

$$x + y \leqslant \sqrt{2(x^2+y^2)} \quad \text{и} \quad x^2 - xy + y^2 \geqslant \frac{x^2+y^2}{2},$$

а оне су обе једноставне. Једнакост важи ако и само ако је $x = y$.



Сл. уз задатак 111

111. Нека је P средиште кружнице кроз B, C и M, O средиште описане кружнице око $\triangle ABC$ и нека је K средиште дужи MC, а C_1 средиште дужи AB, слика. Означимо $KP \cap l = \{L\}$. Како су KP и OM нормални на AC, то је $KP \parallel OM$. Из $MK = KC$ следи $OL = CL$. С друге стране, $OP \perp BC$, па је $\measuredangle LOP = \measuredangle COP = 90^\circ - \measuredangle BCC_1$. Такође је $\measuredangle OLP = \measuredangle CLK = 90^\circ - \measuredangle ACC_1$. Како је $\triangle ABC$ једнакокрак и $\measuredangle BCC_1 = \measuredangle ACC_1$, то је $\measuredangle LOP = \measuredangle OLP$ и $LP = OP$. Из $CP = PQ$ добијамо да је $\measuredangle CLP = \measuredangle QOP$ и $CL = OQ$. Тако је $CL = LO = OQ$, па је $CO = \frac{2}{3}CQ$. Најзад, за полупречник R описаног круга троугла ABC добијамо $R = \frac{2}{3}m$.

112. Из $3x + 4y = m^2$ и $4x + 3y = n^2$ следи $7(x+y) = m^2 + n^2$, па $7 \mid m^2 + n^2$. Како су једини могући остаци квадрата природних бројева при дељењу са 7 једнаки 0, 1, 2 и 4, одатле лако следи да мора бити $7 \mid m$ и $7 \mid n$. То значи да $7^2 \mid m^2 + n^2$ и $x + y \equiv 0 \pmod 7$.

С друге стране, из $3x + 4y = m^2$ и $4x + 3y = n^2$ следи и $x - y = n^2 - m^2$, па је, на основу претходног, и $x - y \equiv 0 \pmod 7$. Сабирањем и одузимањем добијених конгруенција налазимо да $7 \mid 2x$ и $7 \mid 2y$, одакле $7 \mid x$ и $7 \mid y$.

113. Означимо са c, r и b бројеве црних, црвених и белих троуглова, респективно. Како је дати полигон подељен на $n-2$ троугла, то је

$$c+r+b=n-2.$$

С друге стране, свака страница полигона је страница тачног једног троугла који учествује у разлагању, па је

$$2c+r=n.$$

Одузимањем добијених релација налазимо да је $c-b=2$, што је и требало доказати.

2005. година

114. Тражена разлика је $4050 \cdot 6 - 5004 : 6$, па како је $4050 \cdot 6 = 24300$, а $5004 : 6 = 834$, то је вредност те разлике 23466.

115. $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 98\}$.

116. Сва тројица су на крају имала $36 : 3 = 12$ ораха. Значи, $B - 6 = 12$, $V + 6 - 4 = 12$ и $D + 4 = 12$, тј. на почетку Бранко је имао 18 ораха, Воја 10 ораха и Драган 8 ораха.

117. *Први начин.* Ако је мања страница (ширина) правоугаоника дужине a, онда је већа (дужина) дужине $2a$, па је страница осенченог квадрата дужине a. То значи да је она три пута мања од странице квадрата $ABCD$, која је очигледно $3a$. Обим квадрата $ABCD$ је $12a$ и три пута је већи од обима осенченог квадрата који је $4a$.
Други начин. Како је $2 \cdot (2a) + 2 \cdot a = 90\,\mathrm{mm}$, то је $a = 15\,\mathrm{mm}$, па је обим шрафираног квадрата $60\,\mathrm{mm}$. Обим квадрата $ABCD$ је $4 \cdot (15 + 30) = 180\,\mathrm{mm}$ и три пута је већи од обима осенченог квадрата.

118. *Први начин.* Четвороцифрених бројева има 9000, а непарних 4500. Како је сваки пети од њих дељив са 5, следи да тражених бројева има 900.
Други начин. То су они четвороцифрени бројеви којима је цифра јединица 5. Таквих бројева има $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

119. Бројеви дељиви са 9 имају збир цифара који је такође дељив са 9. Тражени скуп је: $\{144, 414, 441, 333, 234, 243, 324, 342, 423, 432\}$.

120. Из $\alpha + (\alpha - 2005') = 180^\circ$ добијамо $2\alpha = 180^\circ + 33^\circ 25'$, односно $\alpha = 106^\circ 42' 30''$.

121. Највећи могући број букета према услову задатка је НЗД$\,(18, 45, 72) = 9$. У сваком букету ће бити по две беле, пет жутих и осам црвених ружа и цена ће му бити 255 динара. *Напомена.* До цене букета може да се дође и ако се вредност свих ружа (2295) подели бројем букета (9).

122. *Први начин.* Ако су узастопни бројеви дужине страница правоугаоника, онда је осенчени квадрат површине $1\,\mathrm{cm}^2$, а површина квадрата $ABCD$ је $2025\,\mathrm{cm}^2$ и 2025 пута је већа од површине осенченог квадрата.
Други начин. $506 = 2 \cdot 11 \cdot 23$, па су странице правоугаоника $22\,\mathrm{cm}$ и $23\,\mathrm{cm}$. Значи, површина квадрата $ABCD$ је $2025\,\mathrm{cm}^2$ и 2025 пута је већа од површине осенченог квадрата која је $1\,\mathrm{cm}^2$.

123. Не постоје, јер збир свих бројева из скупа S је $\dfrac{2006 \cdot 2005}{2} = 1003 \cdot 2005$, дакле, непаран број.

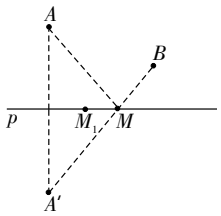
124. Лако се види да је $2\alpha_1 = 236^\circ$, тј. $\alpha_1 = 118^\circ$ и $\beta_1 = 102^\circ$. Одавде је $\alpha = 62^\circ$, $\beta = 78^\circ$ и $\gamma = 40^\circ$.

125. Нађимо тачку A' симетричну тачки A у односу на праву p (слика). Пресек дужи $A'B$ и праве p је тражена тачка M. Ако уочимо било коју другу тачку $M_1 \in p$, тада је $AM_1 + M_1B = A'M_1 + M_1B > A'B = A'M + MB = AM + MB$.

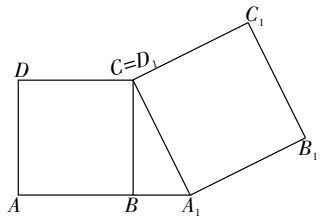
126. Очигледно је $-2005 < x - 1 < 2005$, тј. $-2004 < x < 2006$, па је скуп целобројних решења:

$$\{-2003, -2002, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, 2003, 2004, 2005\}.$$

Збир целобројних решења се своди на $2004 + 2005$ и једнак је 4009.



Сл. уз задатак 125



Сл. уз задатак 131

127. Ако уочимо праву паралелну са AB која садржи тачку C и тачку E (њен пресек са AD), тада је четвороугао $ABCE$ правоугаоник. Како је $AE = ED = BC = \frac{1}{2}AD$ и $CE \perp AD$, то су троуглови $\triangle ACE$ и $\triangle DCE$ подударни, па је $AC = CD$.

128. Лако се добија да је $b = -11$. Како је $a < b < c$ и $ac < 0$, следи да је $a < -11$ и $c > 0$. Једно решење је $a = -14$ и $c = 2$, а друго решење је $a = -28$ и $c = 1$.

129. $a^{2004} \cdot b^{2006} = 5^{2004} \cdot \left(-\dfrac{1}{5}\right)^{2006} = \dfrac{5^{2004}}{5^{2006}} = \dfrac{1}{25}$.

130. $a = \sqrt{6{,}25 - 2{,}25} = 2\,\mathrm{cm}$; $c = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}\,\mathrm{cm}$; $P = \frac{3\cdot 2}{2} = 3\,\mathrm{cm}^2$; $O = (5+\sqrt{13})\,\mathrm{cm}$.

131. Нека је квадрат $ABCD$ површине a^2 (слика). Продужимо AB преко B тако да је $BA_1 = \frac{1}{2}AB$. Тада је

$$A_1C = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a,$$

а површина квадрата $A_1B_1C_1D_1$ је $P_{A_1B_1C_1D_1} = \dfrac{5}{4}a^2 = \dfrac{5}{4}P_{ABCD}$.

132. Ако је $\alpha + \gamma = 118^\circ$, тада је $\alpha = \beta = 62^\circ$, а $\gamma = 56^\circ$. Одавде закључујемо да је $a > c$, па како је $\dfrac{a \cdot h_a}{2} = \dfrac{c \cdot h_c}{2} = P$, то је $h_a < h_c$, тј. висина која одговара основици је већа од висине која одговара краку.

133. Како је $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{13}{12} = \dfrac{65}{60}$, а $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{47}{60}$, и како је

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{65}{60} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{53}{60} > \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} > \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k}$$

за $m, n, k > 3$, то тражени бројеви не постоје.

134. Ако је површина почетне коцке $6a^2$, тада је после увећања сваке ивице за 20% површина новодобијене коцке $6 \cdot \left(\dfrac{6}{5}a\right)^2$. Према томе је: $6a^2 : 6 \cdot \left(\dfrac{6}{5}a\right)^2 = 100 : x$, тј. $x = 144$, па је површина новодобијене коцке за 44% већа од почетне.

135. Како је $\dfrac{17}{100}A = \dfrac{68}{100}B$, односно $A = 4B$, то је $5B = 2005$, тј. $B = 401$ и $A = 1604$.

136. Нека су B_1 и D_1 пројекције тачака B и D на раван α. Тада су $\triangle ABB_1$ и $\triangle CDD_1$ правоугли са катетама $BB_1 = DD_1 = 12\,\mathrm{cm}$. Како је $\measuredangle BAB_1 = 30^\circ$, то је хипотенуза $AB = 24\,\mathrm{cm}$. Из услова задатка видимо да је $CD = 24\,\mathrm{cm}$, па је $\triangle ABB_1 \cong \triangle CDD_1$, а онда је и $\measuredangle DCD_1 = 30^\circ$.

137. Како је $1 + 2 + \cdots + 62 = 1953$, а $1 + 2 + \cdots + 63 = 2016$, то је 2005 збир највише 62 различита природна броја и то на пример $2005 = (1 + 2 + 3 + \cdots + 60 + 61) + 114$.

138. Поделе $7+0+0$, $5+1+1$, $3+2+2$ и $3+3+1$ су могуће на три начина (свака), а поделе $6+1+0$, $5+2+0$, $4+3+0$ и $4+2+1$ су могуће на шест начина (свака). То је укупно $3\cdot 4+6\cdot 4=36$ различитих начина.

139. Ако замишљени број означимо са x, онда је $12x$ први производ, а $9x$ други производ. Њихова разлика је 270, тј. $12x-9x=270$. Одавде је $x=270:3$, тј. $x=90$.

140. Од датих картона можемо саставити четири правоугаоника (2×18, 3×12, 4×9 и 6×6).
(а) Највећи могући обим је $O=2(2+18)=40\,\mathrm{cm}$.
(б) Најмањи могући обим је $O=2(6+6)=24\,\mathrm{cm}$.

141. Површина фигуре је 33 квадратића.

142. Лако се види да 5 свезака и 5 оловака коштају 175 динара, а 2 оловке и 2 свеске 70 динара. Према томе, цена једне свеске је 30 динара, а једне оловке 5 динара. За 60 свезака и 41 оловку биће потребно 2005 динара, јер је $60\cdot 30+41\cdot 5=1800+205=2005$.

143. Како је $2005\cdot a-2004\cdot b=a+2004\cdot a-2004\cdot b=a+2004\cdot 2005$, то је најмања вредност датог израза $2006+2004\cdot 2005=4020026$.

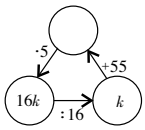
144. Ако са α означимо мањи од упоредних углова, тада је $(180^\circ-\alpha)-\alpha=\dfrac{\alpha}{2}$, тј. $\alpha=72^\circ$. Његов комплемент има 18° и једнак је $\dfrac{1}{4}\alpha(=72/4=18^\circ)$.

145. Лако се види да 5 свезака и 5 оловака коштају 175 динара, а 2 оловке и 2 свеске 70 динара. Према томе, цена једне свеске је 30 динара, а једне оловке 5 динара. Највише предмета се може купити ако се купе само оловке, тј. ако се купи $2005:5=401$ оловка.

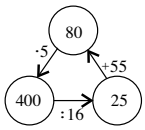
146. Дужи одређене овим тачкама су: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE и DE и има их 10, а троуглови са теменима у овим тачкама су: ABC, ABD, ABE, BCD, BCE, DCE, DCA, DEA, DEB и EAC и има их 10. Према томе, има исто толико дужи са крајевима у датим тачкама колико и троуглова са теменима у датим тачкама.

147. *Први начин.* Број ће бити дељив са 4 ако уместо ♣ ставимо једну од цифара из скупа $\{0,2,4,6,8\}$. Од добијених 5 бројева само су 3204 и 3264 дељиви са 3, па самим тим и са 12.
Други начин. Дати број ће бити дељив са 3 ако уместо ♣ ставимо једну од цифара из скупа $\{0,3,6,9\}$. Од добијених 5 бројева само су 3204 и 3264 дељиви са 4, па самим тим и са 12.

148. Стављајући k доле десно (слика 1), добијамо да је $(k+55)\cdot 5=16k$, тј. $k=25$. Решење је на слици 2. Напоменимо да се k може ставити у било који круг – једначине су различите, а резултат је исти.



Сл. 1 уз задатак 148



Сл. 2 уз задатак 148

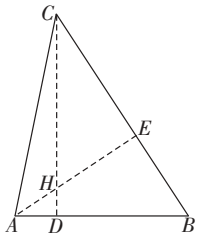
149. Одмах се види да је $-\dfrac{5}{15}<\dfrac{n+1}{15}<\dfrac{3}{15}$, односно да је $-5<n+1<3$. Тражено решење припада скупу $\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1\}$.

150. Лако се види да 5 свезака и 5 оловака коштају 175 динара, а 2 оловке и 2 свеске 70 динара. Према томе, цена једне свеске је 30 динара, а једне оловке 5 динара. Ако

са x означимо број свезака, тада је $30 \cdot x + (101 - x) \cdot 5 = 2005$. Одавде је $x = 60$, тј. купљено је 60 свезака и 41 оловка.

151. Како је $\measuredangle EAB = \measuredangle BCD$ (углови са нормалним крацима) и $AB = CH$ (по претпоставци), то су правоугли троуглови $\triangle ABE$ и $\triangle HCE$ подударни. Закључујемо да је $AE = EC$, а одатле и $\measuredangle EAC = \measuredangle ACE = 45°$.

152. (1) Из дељивости 135 и 30 са 5 и 135 и 252 са 9 закључујемо где се налазе 5 и 9. (2) Одмах закључујемо где се налази 3, а онда и 6 и 1. (3) Број 4 не може бити у истој колони са 3, јер је $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$, па су редом бројеви треће врсте $4, 2, 1$. (4) Сада лако закључујемо где се налазе 8 и 7.



Сл. уз задатак 151

9		5	135
			336
			8
252	48	30	

9	3	5	135
		6	336
		1	8
252	48	30	

9	3	5	135
		6	336
4	2	1	8
252	48	30	

9	3	5	135
7	8	6	336
4	2	1	8
252	48	30	

Сл. уз задатак 152

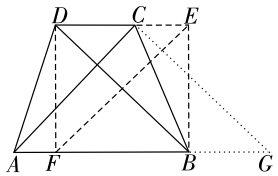
153. Ако квадрат, правим паралелним страницама, поделимо на $44 \cdot 44 = 1936$ малих квадрата странице 1 cm, онда, на основу Дирихлеовог принципа, бар две од датих 2005 тачака морају бити у истом (малом) квадрату. Растојање те две тачке је мање од дијагонале малог квадрата, која је мања од 2 cm због односа страница у троуглу.

154. Очигледно је $\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 1000 + \overline{abc} = \overline{abc} \cdot 1001$, па како је $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, то је и $\overline{abcabc}$ дељиво са 7, 11 и 13.

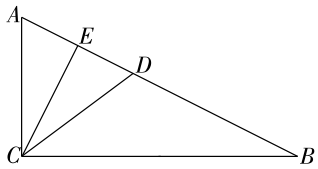
155. Како је $AC = BD$, то је $P = \dfrac{d^2}{2}$, тј. $d = 4\sqrt{2}\,\text{cm}$.

Први начин. Ако уочимо тачке E и F такве да је $DF \perp AB$ и $BE \perp DC$, тада је $DFBE$ квадрат јер је $FE = BD$, $FB \parallel DE$ и $FE \perp BD$, а страница овог квадрата, тј. висина трапеза је $DF = 4\,\text{cm}$.

Други начин. Ако је $CG \parallel BD$ и G на правој AB, троугао AGC је једнакокракоправоугли и висина му је једнака половини хипотенузе, тј. 4 cm.



Сл. уз задатак 155



Сл. уз задатак 157

156. Лако се види да 5 свезака и 5 оловака коштају 175 динара, а 2 оловке и 2 свеске 70 динара. Према томе, цена једне свеске је 30 динара, а једне оловке 5 динара. Ако са x означимо број свезака тада је $30x + (205 - x) \cdot 5 = 2005$, тј. $5x = 196$. Како је $x \in \mathbf{N}_0$, закључујемо да није могуће купити 205 предмета.

157. Ако уочимо E на AB тако да је $CE \perp AB$, тада је $AE = ED$, јер је $\triangle CDA$ једнакокрак. Сада је $AB = 5$, $CE = 2$ и $AE = ED = 1$ (слика). Према томе, $O_{\triangle BCD} = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} + 5 - 2 = 3(1 + \sqrt{5})$ и $P_{\triangle BCD} = 5 - 2 = 3$.

158. I случај. $p = q = 2$ и r – непаран: $r^2 = 1997$, што је немогуће . II случај. p, q, r – непарни: $(2k+1)^2 + (2l+1)^2 + (2m+1)^2 = 2005$, тј. $4(k^2 + k + l^2 + l + m^2 + m) = 2002$, што није могуће јер 2002 није дељиво са 4.

159. Решења прве неједначине су $y \geqslant -8$, а друге $y > -\dfrac{1}{5}$. Заједничка решења су $y > -\dfrac{1}{5}$, тј. $y \in \left(-\dfrac{1}{5}, +\infty\right)$.

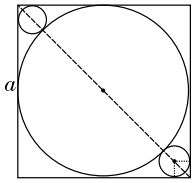
160. Лако се види да 5 свезака и 5 оловака коштају 175 динара, а 2 оловке и 2 свеске 70 динара. Према томе, цена једне свеске је 30 динара, а једне оловке 5 динара. Нека је набављено x оловака и y свезака. Тада је $5x + 30y = 2005$, тј. $x + 6y = 401$. Значи, $0 \leqslant 6y \leqslant 401$, односно, $0 \leqslant y \leqslant \frac{401}{6}$, па је могуће купити 0 или 1 или 2 или ... или 66 свезака и за остале динаре оловке. Према томе, има 67 начина да се за 2005 динара купе свеске и оловке.

161. Запремина квадра је $V = a^2H$, а запремина мањег дела је $V_1 = \dfrac{1}{2}a^2\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Запремина већег дела је $V_2 = a^2H - \dfrac{1}{2}a^2\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Како је $V_1 : V_2 = 1 : 2$, то је $H = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, па је $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

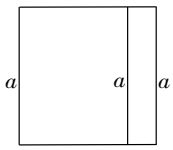
162. Ако је r полупречник малог круга (видети слику), тада је $2r\sqrt{2} + 2r + a = a\sqrt{2}$, па је

$$r = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{2(\sqrt{2}+1)} = \frac{a(3-2\sqrt{2})}{2}$$

и $P = r^2\pi = \dfrac{a^2(3-2\sqrt{2})^2}{4}\pi$.



Сл. уз задатак 162



Сл. уз задатак 166

163. Бројеви 7, 16, 25, 34, 43, 52, 59, 61, 68, 70, 77, 86 и 95 имају збир цифара дељив са 7, а између никоја два од њих нема 10 бројева. Према томе, најмањи број који је Милан записао је 96 јер су првих 10 узастопних бројева којима збир цифара није дељив са седам: 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104 и 105.

164. За првих 9 страна потребно је 9 цифара, а за наредних 90 страна 180 цифара. За преосталих 126 страна потребно је $126 \cdot 3 = 378$ цифара. Значи, за нумерацију 225 страна књиге потребно је 567 цифара.

165. Нека је x мањи од тих бројева. Тада је већи од њих $x + 1001$. Како је њихов збир 2005, то је $2x + 1001 = 2005$, односно $x = 502$. Већи од ових бројева је 1503.

166. Како је обим добијених правоугаоника за две дужине странице квадрата већи од квадрата, то је $a = 210 : 2 = 105\,\mathrm{cm}$ (слика). Како је површина мањег правоугаоника

4 пута мања од површине већег, то је једна његова страница 4 пута мања од странице већег (друге странице су им по 105 cm). Обим мањег правоугаомика је $O = 2(105+21) = 252$ cm.

167. На месту треће звездице (с лева на десно) мора да стоји цифра 6, јер је $9 \cdot 8 = \mathbf{72}$. Ако на место средње звездице ставимо цифру 7, добијамо $708 = 79 \cdot 8 + 76$. Ако на место средње звездице ставимо цифру 8, тада добијамо $788 = 89 \cdot 8 + 76$.

168. У горњем десном углу мора да се упише $10+5-4 = 11$, а у средини $11+7-10 = 5+7-4 = 8$. Онда добијамо да је збир по врстама, колонама и дијагоналама једнак 24. Дакле:

	4	
10		
5		7

	4	11
10		
5		7

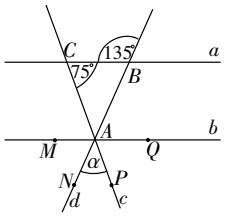
	4	11
10	8	
5		7

9	4	11
10	8	6
5	12	7

Сл. уз задатак 168

169. Уочимо тачке M, N, P и Q као на слици. Тада $\measuredangle MAN$ има $45°$, $\measuredangle PAQ$ има $75°$ и коначно тражени угао α има $60°$.

170. Нека су $a, b, c \in \mathbf{N}$ дужине ивица квадра. Тада је $12 \cdot b \cdot c = 960$ и $2(12b + 12c + bc) = 596$, значи $bc = 80$ и $b + c = 18$. Растављањем броја 80 на чиниоце и провером збира добија се $b = 10$ cm и $c = 8$ cm.



Сл. уз задатак 169

171. Број који је дељив са 36 мора да буде дељив са 4 и са 9. Ако је дељив са 4, а записује се само цифрама 7 и 4, он мора да се завршава са 44. Збир цифара тог броја треба да буде дељив са 9, па како су случајеви $8+1$ и $8+10$ немогући, остаје нам $8+19$, тј. $8+4+4+4+7$, па је тражени број 444744.

172. Пустимо да „тече време“ на пешчаном сату који мери 10 min. Када истекне 10 min, окренемо га и истовремено пустимо да „тече“ и други сат који мери 7 min. Када истекне 7 min, окренемо сат који мери 7 min. Када „истекне“ сат који мери 10 min, окренемо сат који мери 7 min, а на коме је „истекло“ 3 min. Када „истекне“ сат који мери 7 min, прошло је тачно 23 min.

173.

		$\frac{8}{10}$
$\frac{7}{10}$		
		$\frac{4}{10}$

		$\frac{8}{10}$
$\frac{7}{10}$	$\frac{5}{10}$	
		$\frac{4}{10}$

		$\frac{8}{10}$
$\frac{7}{10}$	$\frac{5}{10}$	
	$\frac{9}{10}$	$\frac{4}{10}$

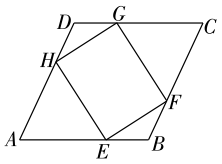
	$\frac{1}{10}$	$\frac{8}{10}$
$\frac{7}{10}$	$\frac{5}{10}$	
	$\frac{9}{10}$	$\frac{4}{10}$

$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{8}{10}$
$\frac{7}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{3}{10}$
$\frac{2}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{4}{10}$

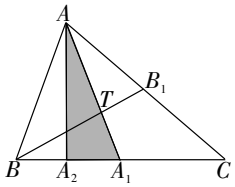
Сл. уз задатак 173

174. Како је $-3 < x < 3$, то се провером другог услова добија да је $x = 1$ или $x = 2$.

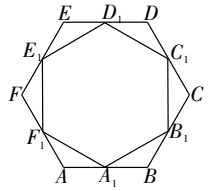
175. Лако се доказује да је $\triangle AEH \cong \triangle FCG$ и $\triangle EBF \cong \triangle HGD$, па је $EH = FG$ и $EF = HG$, па је четвороугао $EFGH$ паралелограм (слика). Нека је $\measuredangle BAD = \alpha$. Тада је $\measuredangle AEH = \dfrac{180^\circ - \alpha}{2}$ и $\measuredangle BEF = \dfrac{\alpha}{2}$, те је $\measuredangle HEF = 90^\circ$. Према томе, паралелограм $EFGH$ је правоугаоник.



Сл. уз задатак 175



Сл. уз задатак 178



Сл. уз задатак 179

176. Како је $7r < 47$, то је $r = 2$ или $r = 3$ или $r = 5$. Ако је $r = 2$, тада је $p + 5q = 33$, па како је p или $5q$ паран, то је једино могуће за $q = 2$ и $p = 23$. Ако је $r = 3$, тада је $p + 5q = 26$. Провером добијамо $p = 11$ и $q = 3$. Ако је $r = 5$, тада је $p + 5q = 12$. Провером добијамо решење $p = 2$ и $q = 2$.

177. Нека су x и y узајамно прости бројеви. Како су

$$\frac{x}{y} : \frac{11}{210} = \frac{210x}{11y} \quad \text{и} \quad \frac{x}{y} : \frac{11}{280} = \frac{280x}{11y}$$

природни бројеви, то $11 \mid x$, $y \mid 210$ и $y \mid 280$. Како тражимо најмањи могући разломак $\dfrac{x}{y}$, то ће x бити што је могуће мање, тј. $x = 11$, а y што је могуће веће, а то је $y = \text{НЗД}\,(210, 280) = 70$.

178. Нека је AA_2 висина која одговара страници a, а AA_1 њена тежишна дуж, B_1 средиште странице AC и T тежиште троугла ABC (слика). Прво можемо конструисати $\triangle AA_2A_1$ (познати су $\measuredangle AA_2A_1$, AA_2 и AA_1), а затим и $\triangle BA_1T$ (познати су $\measuredangle BA_1T$, A_1T и TB). Затим продужимо BA_1 преко A_1 тако да је $BA_1 = A_1C$. Спајањем A са тачкама B и C добијамо тражени $\triangle ABC$.

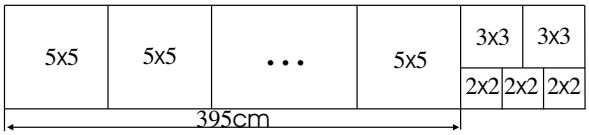
179. Сви троуглови AA_1F, BB_1A_1, CC_1B_1, DD_1C_1, EE_1D_1, FF_1E_1 су подударни, па је $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1E_1 = E_1F_1 = F_1A_1$ (слика). Како је A_1B_1 средња линија $\triangle ABC$, то је $A_1B_1 = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Осим тога, како је $\measuredangle FF_1E_1 = \measuredangle AF_1A_1 = 30^\circ$, то је $\measuredangle E_1F_1A_1 = 120^\circ$. Слично је и за остале углове. Дакле, $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ је правилан шестоугао чија је странице дужине $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Његова површина је $P = \dfrac{9a^2\sqrt{3}}{8}$.

180. Нека су p, q и r прости бројеви такви да је $p \leqslant q \leqslant r$. Како је $pqr = 47(p + q + r)$ и p, q и r су прости бројеви, то је $r = 47$. Тада је $pq = p + q + 47$, тј. $(p - 1)(q - 1) = 48$. Провером долазимо до јединог решења $p = 5$ и $q = 13$.

181. Нека је O пресек дијагонала. Троуглови AOD и BOC су правоугли, па је $2MO = AD$ и $2NO = BC$. Из троугла OMN је $MN \leqslant MO + NO$ (једнакост важи ако су тачке M, O и N колинеарне), па је $2MN \leqslant 2MO + 2NO = AD + BC$.

182. Тражених бројева са цифрама 1 и 2 „на почетку“ има $2 \cdot 8 \cdot 7 = 112$. Ако су цифре 1 и 2 „у средини“, таквих бројева има $7 \cdot 2 \cdot 7 = 98$ и са цифрама 1 и 2 на крају $7 \cdot 7 \cdot 2 = 98$. Дакле, тражених бројева има укупно 308.

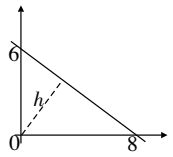
183. Најмање квадрата ће бити употребљено ако састављамо правоугаоник чија је једна страница 5 cm, а друга 401 cm и то као на слици. Дакле, биће потребно најмање 84 квадрата.



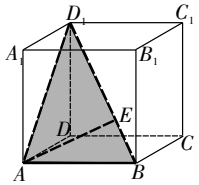
Сл. уз задатак 183

184. (а) Како је $3 = (2m+1)\cdot 4 + 6$, то је $m = -\dfrac{7}{8}$.

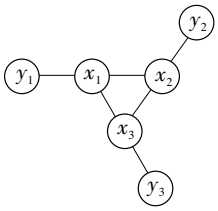
(б) Једначина праве је $y = -\dfrac{3}{4}x + 6$. Тражена удаљеност је једнака висини која одговара хипотенузи, тј. $\dfrac{h\cdot\sqrt{36+64}}{2} = \dfrac{6\cdot 8}{2}$, одакле је $h = 4{,}8$.



Сл. уз задатак 184



Сл. уз задатак 187



Сл. уз задатак 188

185. Нека су P, P_1 и P_2, затим s, s_1 и s_2 редом површине и полуобими троуглова ABC, ADC и DBC. Тада је $s_1 < s$ и $s_2 < 2$ и $P = sr$, $P_1 = s_1r_1$ и $P_2 = s_2r_2$. Како је $P = P_1 + P_2$, то је

$$r_1 + r_2 = \frac{P_1}{s_1} + \frac{P_2}{s_2} > \frac{P_1}{s} + \frac{P_2}{s} = \frac{P}{s} = r.$$

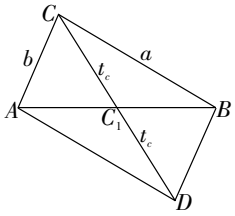
186. Лако се види да је $p(1+q+qr) = 5\cdot 401$. Ако је $p = 5$, тада је $q(1+r) = 400$, одакле се добија $q = 2$ и $r = 199$ или $q = 5$ и $r = 79$. Ако је $p = 401$, тада нема решења.

187. Нека ивица коцке има дужину a. Тада је (слика) $BD_1 = a\sqrt{3}$, $AD_1 = a\sqrt{2}$, $AE = 2005\,\mathrm{cm}$ и троугао ABD_1 је правоугли. Тада је $a\cdot a\sqrt{2} = 2005\cdot a\sqrt{3}$, тј. $a = 2005\sqrt{\frac{3}{2}}$. Површина и запремина су једнаке $P = 6a^2 = 9\cdot 2005^2\,\mathrm{cm}^2$ и $V = a^3 = 2005^3\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\,\mathrm{cm}^3$.

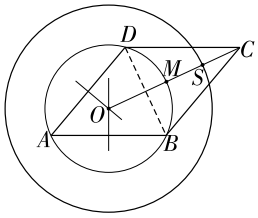
188. Нека је S збир бројева по сваком правцу (види слику). Тада је $S = y_1 + x_1 + x_2$, $S = y_2 + x_2 + x_3$ и $S = y_3 + x_3 + x_1$, па је $3S = (y_1 + y_2 + y_3 + x_1 + x_2 + x_3) + x_1 + x_2 + x_3$, тј. $3S = 21 + x_1 + x_2 + x_3$, па је $x_1 + x_2 + x_3 = 3(S - 7)$.

189. Нека је a цена пансиона у хотелу Славија, а b цена пансиона у хотелу Звезда пре прве промене цена. Цена пансиона после обе промене је $0{,}8\cdot 1{,}2a$ у хотелу Славија и $1{,}2\cdot 0{,}8b$ у хотелу Звезда. Како је $|0{,}8\cdot 1{,}2a - 1{,}2\cdot 0{,}8b| = 240$, то је $|a-b| = \dfrac{24}{0{,}96}$, односно $|a-b| = 250$. Према томе, разлика у цени пансиона пре прве промене је била 250 динара.

190. Нека је C_1 средиште странице AB (слика). Ако продужимо CC_1 преко C_1 тако да је $CC_1 = C_1D$, добијамо паралелограм $ADBC$. Сада је $CD < DA + AC$, тј. $2t_c < a + b$, односно $t_c < \dfrac{a+b}{2}$.
С друге стране је, из троуглова AC_1C и C_1BC, $t_c > b - \dfrac{c}{2}$ и $t_c > a - \dfrac{c}{2}$, па је $t_c > \dfrac{a+b-c}{2}$.



Сл. уз задатак 190



Сл. уз задатак 192

191. Како је $\overline{abc} - \overline{def} = 860$, то је $a = 9$, $d = 1$, $c = f$ и $b - e = 6$. Ако је $b = 6$ и $e = 0$, тада је $a+b+c+d+e+f = 16+2c$. Како је број $\overline{abcdef}$ дељив са 9, то је $16+2c$ дељиво са 9, па је $c = 1$ (јер је $c \in \{0, 1, \ldots, 9\}$). Решење у овом случају је 961101. Слично, ако је $b = 7$ и $e = 1$ решење је 970110 или 979119; ако је $b = 8$ и $e = 2$ решење је 988128 и ако је $b = 9$ и $e = 3$ решење је 997137.

192. Нека је $ABCD$ дати ромб. Конструишимо кружницу описану око $\triangle ABD$ (слика). Нека је M пресечна тачка кружнице и дужи OC, а S средина дужи MC. Кружница са центром O која садржи тачку S је тражена кружница. Има укупно четири решења.

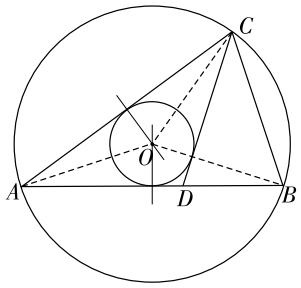
193. Четврта врста завршава се бројем $4n$. Како је 77 у петој врсти, то је $4n < 77$, односно $n \leqslant 19$. Седма врста се завршава бројем $7n$, па како је 127 у седмој врсти, то је $127 \leqslant 7n$, тј. $n > 18$. Према томе, $n = 19$. Сада знамо да последња врста почиње бројем $18m + 1$, а завршава бројем $19m$, па мора бити $18m + 1 \leqslant 307 \leqslant 19m$, тј. $m > 16$ и $m \leqslant 17$. Дакле, $m = 17$.

194. Како је $\dfrac{1}{\sqrt{12}-\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{12}+\sqrt{6}}{6}$, то је $\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{7}}{6} > \dfrac{1}{\sqrt{12}-\sqrt{6}}$, јер је $\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)^2 > \left(\sqrt{12}+\sqrt{6}\right)^2$, односно $\sqrt{77} > \sqrt{72}$.

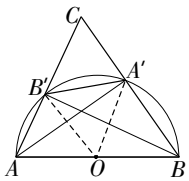
195. Одмах примећујемо да је $\dfrac{\alpha}{2} = \measuredangle OAC = \measuredangle ACO = \dfrac{\gamma}{4}$, тј. $\gamma = 2\alpha$ (слика). Сада је и

$$\beta = \measuredangle ABC = \measuredangle ABO + \measuredangle OBC = \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4}\gamma = \gamma,$$

па је $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ$, тј. $\alpha = 36^\circ$. Дакле, $\alpha = 36^\circ$, $\beta = 72^\circ$ и $\gamma = 72^\circ$.



Сл. уз задатак 195



Сл. уз задатак 197

196. Како су бар два од бројева a, b и c исте парности, рецимо a и b, то је број $b^c + a$ паран и прост. Значи, $b^c + a = 2$, па је $b = a = 1$. Према томе, $p = 1 + c$ и $r = c + 1$, па су два од бројева p, q и r међусобно једнака.

197. Како тачке A, B, A', B' припадају једној кружници чији је пречник страница AB, а центар средиште странице AB, то је $\measuredangle ABB' = \measuredangle AA'B' = 25^\circ$ (слика). Како је $\measuredangle CA'B' = 180^\circ - (90^\circ + 25^\circ) = 65^\circ$, то је и $\measuredangle A'B'C = 55^\circ$, јер је $\measuredangle A'CB' = \measuredangle BCA = 60^\circ$. С друге стране, $\triangle OA'B'$ је једнакокрак и

$$\measuredangle B'OA' = 180^\circ - (\measuredangle AOB' + \measuredangle BOA') = 180^\circ - (50^\circ + 70^\circ) = 60^\circ.$$

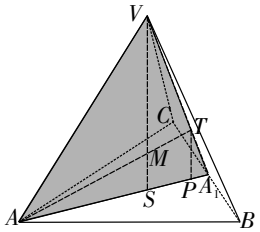
Значи, $\triangle OA'B'$ је једнакостраничан, па је $A'B' = 5\,\mathrm{cm}$.

198. Како страница квадрата чија је дијагонала мања од $1\,\mathrm{cm}$ мора бити мања од $\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{cm}$, то ћемо дати квадрат поделити на $44 \cdot 44 = 1936$ мањих подударних квадрата странице $\frac{31}{44}\,\mathrm{cm}$ ($\frac{31}{44} < \frac{\sqrt{2}}{2}$). Ако сада 2005 тачака на произвољан начин распоредимо у 1936 малих квадрата, тада ће постојати мали квадрат у коме се налазе бар две тачке, а њихово растојање је мање од дијагонале $d < \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 1\,\mathrm{cm}$.

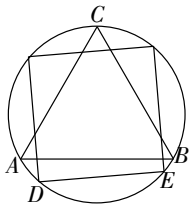
199. Дату једначину можемо записати у облику $5n + 401m = mn$, тј. $(m-5)(n-401) = 2005$. Ово је могуће за:

- $m - 5 = 1$ и $n - 401 = 2005$, тј. $m = 6$ и $n = 2406$;
- $m - 5 = 2005$ и $n - 401 = 1$, тј. $m = 2010$ и $n = 402$;
- $m - 5 = 401$ и $n - 401 = 5$, тј. $m = 406$ и $n = 406$;
- $m - 5 = 5$ и $n - 401 = 401$, тј. $m = 10$ и $n = 802$.

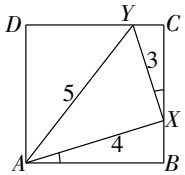
200. Ако је A_1 средиште ивице BC, тада T припада дужи VA_1 и S припада дужи AA_1 (јер је пирамида правилна), па се AT и VS секу. Обележимо пресечну тачку са M (слика). Нормала из тачке T на раван основе сече дуж AA_1 у тачки P. Очигледно је $\triangle A_1SV \sim \triangle A_1PT$, па је $A_1T : TV = 1 : 2 = A_1P : PS$. Како је S тежиште основе, ако је x дужина дужи A_1P, тада је $AS : SP = 6x : 2x$. Сада из сличности троуглова ASM и APT следи $AM : MT = AS : SP = 3 : 1$.



Сл. уз задатак 200



Сл. уз задатак 201



Сл. уз задатак 202

201. Темена A, B и C једнакостраничног троугла деле кружницу на три лука, сваки дужине $\frac{O}{3}$. На једном од та три лука морају се наћи два темена квадрата, на пример на луку $\overset{\frown}{AB}$ (слика). Дужина лука $\overset{\frown}{DE}$ је $\frac{O}{4}$, па је збир дужина лукова $\overset{\frown}{AD}$ и $\overset{\frown}{EB}$ једнак $\frac{O}{3} - \frac{O}{4} = \frac{O}{12}$, па бар један од њих има дужину не већу од $\frac{O}{24}$.

202. Нека је дужина странице квадрата a. Троугао AXY је правоугли и $\measuredangle AXY = 90^\circ$ (слика). Како је $\measuredangle CXY = \measuredangle XAB$ (углови са нормалним крацима), то је $\triangle CXY \sim \triangle BAX$, па је $CX : BA = XY : AX$, односно $CX = \dfrac{XY \cdot BA}{AX} = \dfrac{3a}{4}$. Непосредно следи да је $BX = \dfrac{a}{4}$. У правоуглом троуглу ABX је $a^2 + \left(\dfrac{a}{4}\right)^2 = 4^2$, па је $a = \dfrac{16\sqrt{17}}{17}$.

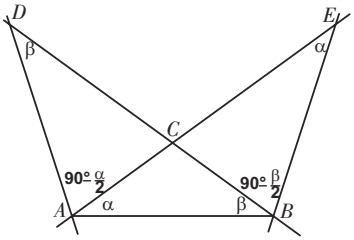
203. Ако са k означимо број неиздатих соба у току дана, тада је дневна зарада хотела

$$(40-k)(1000+k\cdot 50) - (40-k)\cdot 100 = 50(40-k)(18+k),$$

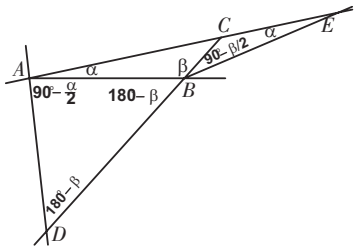
односно $50\big(841-(k-11)^2\big)$ динара. Зарада ће бити највећа ако је $k = 11$, а то значи да ће цена собе бити 1550 динара.

204. Разликујемо два случаја:
1° ако је $p = 2$, онда је $p^3 = 8$, па је $249 \cdot p^3 = 249 \cdot 8 = 1992$, што значи да је $q = 2005 - 1992 = 13$;
2° ако је $p \geqslant 3$, онда је p непаран број. Тада q мора бити паран, па је $q = 2$. Значи да је $249 \cdot p^3 = 2003$, па је $p^3 = \dfrac{2003}{249}$. Како 2003 није дељиво са 249, то p^3 није природан број. Једино решење је $p = 2$, $q = 13$.

205. (а) 1° $\alpha < 90^\circ$ и $\beta < 90^\circ$ (слика). Из троугла ABE је $2\alpha + 90^\circ + \dfrac{\beta}{2} = 180^\circ$, а из троугла ABD је $2\beta + 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2} = 180^\circ$, одакле је $\alpha = \beta = 36^\circ$, $\gamma = 108^\circ$.

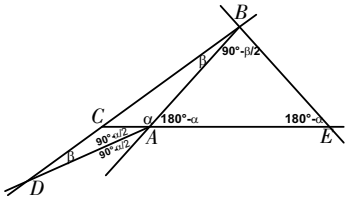


Сл. уз задатак 205а-1



Сл. уз задатак 205а-2

2° $\alpha < 90^\circ$ и $\beta > 90^\circ$ (слика). Из троугла ABD је $450^\circ - 2\beta - \dfrac{\alpha}{2} = 180^\circ$, а из троугла ABE је $2\alpha + 90^\circ + \dfrac{\beta}{2} = 180^\circ$, одакле је $\alpha = 12^\circ$, $\beta = 132^\circ$, $\gamma = 36^\circ$.
(б) $\alpha > 90^\circ$ (слика). Из троугла ABD је $2\beta + 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2} = 180^\circ$, а из троугла ABE је $450^\circ - 2\alpha - \dfrac{\beta}{2} = 180^\circ$, одакле је $\alpha = 132^\circ$, $\beta = 12^\circ$, $\gamma = 36^\circ$.

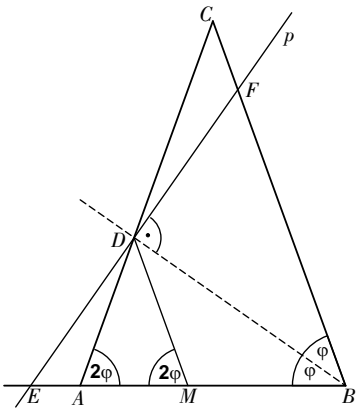


Сл. уз задатак 205б

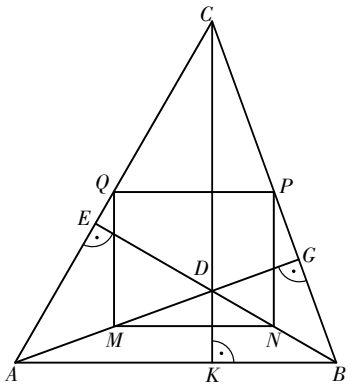
206. Ако са x означимо цену књиге у динарима, онда је Анка пре куповине имала x динара, Бранка $\dfrac{9}{5}x$ и Весна $2x$ динара. После куповине књиге Анка нема више новца, Бранки је остало $\dfrac{4}{5}x$, а Весни x динара. Како је то укупно $\dfrac{9}{5}x$, да би сви имали подједнако

новца, Бранка је морала дати Анки $\frac{1}{5}x$, а Весна $\frac{2}{5}x$, тј. дупло више од Бранке. Значи, Весна је Анки дала 200 динара.

207. Нека права p сече BC у тачки F и нека је $DM \parallel BC$ (слика). $\triangle BEF$ је једнакорак, јер је симетрала $\measuredangle EBF$ нормална на основицу EF. Закључујемо да је $ED = DF$. Како је $DM \parallel BC$, то је DM средња линија $\triangle BEF$, па је $EM = MB$. Тада је тежишна дуж DM правоуглог $\triangle BDE$ једнака половини дужи BE, тј. $DM = \frac{1}{2}BE$. Како је $\triangle AMD$ једнакокрак ($\measuredangle DAM = \measuredangle DMA = 2\varphi$), следи да је $DM = AD = \frac{1}{2}BE$, па је $BE = 2\,AD$.



Сл. уз задатак 207



Сл. уз задатак 209

208. Ако са x означимо збир свих додељених бројева, тада је збир било којих осам бројева додељених узастопним тачкама константан и једнак $x - 5 \cdot 1000$. Како је $108 = 13 \cdot 8 + 4$, на сличан начин закључујемо и да је збир било која четири броја додељена узастопним тачкама такође константан и једнак $100 : 5 = 200$ (јер пет „четворочланих блокова“ стаје у један „двадесеточлани блок“). Према томе, тачкама A_1, A_5, ... , A_{4n+1}, ... , A_{105} додељен је број 1; тачкама A_2, A_6, ... , A_{4n+2}, ... , A_{106} додељен је број 50; тачкама A_3, A_7, ... , A_{4n+3}, ... , A_{107} додељен је број 19 и коначно тачкама A_4, A_8, ... , A_{4n}, ... , A_{104}, A_{108} додељен је број $130 = 200 - (1 + 50 + 19)$.

209. Нека је K подножје висине из темена C датог троугла (слика). Дуж MN је средња линија троугла ABD, па је

$$MN = \frac{1}{2}AB \quad \text{и} \quad MN \parallel AB. \tag{1}$$

Дуж QP је средња линија троугла ABC, па је

$$QP = \frac{1}{2}AB \quad \text{и} \quad QP \parallel AB. \tag{2}$$

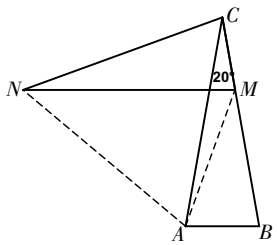
Из (1) и (2) следи да је $MNPQ$ паралелограм. Дуж NP је средња линија троугла BCD, па је $PN \parallel CD$. Како је $CD \perp AB$, односно MN, то је и $PN \perp MN$, тј. $MNPQ$ је правоугаоник.

210. Доказаћемо да је број $(n-3)(n-2)(n-1)(n+1)(n+2)(n+3) + 36$ квадрат природног броја за сваки природан број n. Заиста,

$$\begin{aligned}(n-3)(n-2)(n-1)(n+1)(n+2)(n+3) + 36 &= (n^2-9)(n^2-4)(n^2-1) + 36\\ &= n^2(n^4 - 14n^2 + 49) = (n(n^2-7))^2.\end{aligned}$$

211. Пошто су бројеви 3 и 8 узајамно прости, довољно је доказати да је број $a+b$ дељив са 3 и са 8. Из услова следи да ab при дељењу са 3 даје остатак 2, што је могуће једино ако један од бројева a и b има остатак 1, а други има остатак 2 при дељењу са 3. Како је збир остатака 3, број $a+b$ је дељив са 3. Слично, при дељењу са 8 број ab има остатак 7, што је могуће једино ако један од бројева a и b има остатак 1, а други 7 или ако један има остатак 3, а други 5. У оба случаја збир остатака је 8, па је број $a+b$ дељив са 8.

212. Скуп $A = \{00, 01, \ldots, 23\}$ садржи бројеве који одређују сате. Ако у сваком броју из скупа A цифре замене места, добијају се 24 броја, међу којима 16 њих који могу представљати секунде.
Скуп $B = \{00, 01, \ldots, 59\}$ садржи бројеве који одређују минуте и секунде. Ако у сваком броју из скупа B цифре замене места, добија се 60 бројева, међу којима има 36 њих који могу представљати минуте. На пример, од бројева 00, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 првих шест одређују број минута на дигиталном часовнику, а последња четири не одређују број минута. Ако у сваком броју из скупа B цифре замене места, добија се 60 бројева међу којима има 16 њих који могу представљати сате. Наведена тврђења се доказују непосредним пребројавањем. Како се сваки број сати може комбиновати са сваким бројем минута и сваким бројем секунди, то је на основу правила производа тражени број једнак $16 \cdot 36 \cdot 16 = 9216$.



Сл. уз задатак 213

213. Нека је N таква тачка да је $\triangle MCN \cong \triangle ABC$ (N је са исте стране праве BC са које је и тачка A) (слика). Тада је $\measuredangle NCA = \measuredangle NCM - \measuredangle ACM = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$ и како је $CN = CA$, троугао ACN је једнакостраничан, па је и $\measuredangle CNA = 60^\circ$. Следи да је $\measuredangle MNA = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$. Троугао AMN је једнакокрак, јер је $AN = MN$. Његов угао при врху N је $\measuredangle MNA = \measuredangle CNA - \measuredangle CNM = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$, па је угао на основици $\measuredangle NMA = 70^\circ$. Како је $\measuredangle CMN = 80^\circ$, то је $\measuredangle CMA = 70^\circ + 80^\circ = 150^\circ$, па је $\measuredangle AMB = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.

214. Како је $9999 = 9 \cdot 11 \cdot 101$, број јединица у запису траженог броја је дељив са 9 и 11. С друге стране, тражени број је облика

$$101 + 101 \cdot 10^4 + 101 \cdot 10^8 + \cdots$$

или

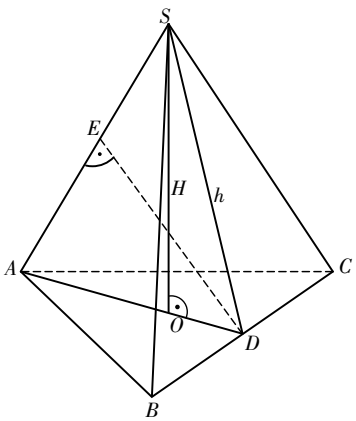
$$1 + 101 \cdot 10^2 + 101 \cdot 10^6 + \cdots,$$

у зависности од тога да ли је број јединица паран или непаран. У првом случају број је дељив са 101, а у другом при дељењу са 101 даје остатак 1. Дакле, број јединица у запису датог броја мора бити паран. Најмањи паран природан број који је дељив са 9 и 11 је 198. Тражени број у запису садржи 198 јединица и 197 нула, тј. има укупно 395 цифара.

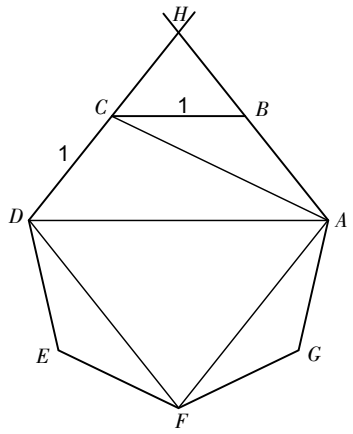
215. Троуглови AOS и ADE су слични јер је $\measuredangle AOS = \measuredangle DEA = 90^\circ$ (из услова задатка) и $\measuredangle OSA = \measuredangle ADE$ (као углови са нормалним крацима) (слика). Из уочене сличности поставимо пропорцију $AD : AS = AE : AO$, одакле делимичном заменом добијамо

$$a^2 = 2\,AE \cdot AS. \tag{1}$$

Даље, из услова задатка имамо $AE : ES = 9 : 8$ и $AS = AE + ES$, па је $ES = \frac{8}{9}AE$ и $AS = \frac{17}{9}AE$. Заменом у једнакости (1) добијамо $AE = \frac{9}{\sqrt{34}}\,\mathrm{dm}$ и $AS = \frac{17}{\sqrt{34}}\,\mathrm{dm}$. Из правоуглог троугла AOS је $OS^2 = AS^2 - AO^2$, где је $AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,\mathrm{dm}$. Даље добијамо $OS^2 = \frac{11}{2}\,\mathrm{dm}^2$. Применом Питагорине теореме на $\triangle ODS$ који је, такође, правоугли, важи да је $SD^2 = OD^2 + OS^2$, где је $OD = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{dm}$. Сада је висина бочне стране $SD = \frac{5}{2}\,\mathrm{dm}$, па заменом у формули $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3a \cdot SD}{2}$ добијамо да је површина правилне тростране пирамиде $P = \frac{9}{4}(\sqrt{3}+5)\,\mathrm{dm}^2$.



Сл. уз задатак 215



Сл. уз задатак 217

216. Сређивањем леве стране неједнакости добијамо

$$\begin{aligned}\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}-\frac{a}{c}\right| &= \frac{|a^2c+b^2a+c^2b-b^2c-c^2a-a^2b|}{abc}\\ &= \frac{|a^2c+b^2a+c^2b-b^2c-c^2a-a^2b+abc-abc|}{abc}\\ &= \frac{|(b-c)(c-a)(a-b)|}{abc}.\end{aligned}$$

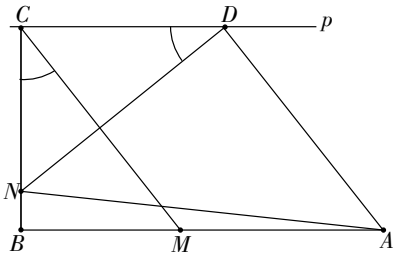
Како су a, b и c странице троугла, то је $|b-c| < a$, $|c-a| < b$ и $|a-b| < c$, па је

$$\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}-\frac{a}{c}\right| = \frac{|b-c|}{a} \cdot \frac{|c-a|}{b} \cdot \frac{|a-b|}{c} < 1.$$

217. Продужимо странице AB и DC до пресека у тачки H (слика). Како је $AHDF$ рмоб, јер је $AH \parallel DF$, $DH \parallel FA$ и $AF = DF$, и како је $AC = AF$, то је $AC = AH$. Из сличности троуглова HBC и HAD, имамо $\frac{BC}{AD} = \frac{BH}{AH}$, тј. $\frac{1}{AD} = \frac{AH-1}{AH} = \frac{AC-1}{AC}$, па је $\frac{1}{AD} + \frac{1}{AC} = 1$.

218. Нека је A једна плава тачка и B њој дијаметрално супротна тачка. Преостале тачке су крјаеви тетива које су нормалне на пречник AB. Ако је B плава тачка, тада једна од тих тетива има црвене крајеве, па је A средиште лука одређеног том тетивом. Ако је B црвена тачка, тада према услову задатка постоји тетива чији су крајеви плави. Како међу преосталим тачкама има мање црвених него плавих тачака, постоји и тетива са црвеним крајевима. И у овом случају тачка A је средиште лука одређеног том тетивом.

219. Означимо $CN = BM = x$ и $AM = BC = y$. Нека је p права паралелна са AB која садржи тачку C и D тачка те праве таква да је $AMCD$ паралелограм (слика). Правоугли троуглови MBC и NCD су подударни ($MB = NC = x$, $BC = CD = AM = y$), па је $\measuredangle BCM = \measuredangle CDN$. Како је $DC \perp BC$, одатле се лако изводи да је $DN \perp MC$. Како је $MC \parallel AD$, то је и $DN \perp AD$. При том је $DN = MC = AD$, тј. троугао NDA је једнакокраки и правоугли, па је $\measuredangle NAD = 45°$. Дакле, права AN сече праву AD под углом од $45°$, па значи да сече и њој паралелну праву CM такође под углом од $45°$.



Сл. уз задатак 219

220. Одредимо најпре колико има троуглова на које је подељен дати квадрат. Код сваког од темена тих троуглова које лежи унутар квадрата сустиче се неколико углова чији је збир $360°$, док се код сваког темена квадрата сустиче неколико углова чији је збир $90°$. Укупан збир тих углова је, дакле, $2005 \cdot 360° + 4 \cdot 90°$. Како је збир углова у сваком од троуглова $180°$, то је тражени број троуглова

$$\frac{2005 \cdot 360° + 4 \cdot 90°}{180°} = 4012.$$

Претпоставимо сада, супротно тврђењу, да је површина сваког од датих троуглова већа од $\frac{1}{1003}$. Онда би збир површина свих троуглова био већи од $4012 \cdot \frac{1}{1003} = 4$, дакле већи од површине датог квадрата, што је немогуће. Тиме је доказано да постоји троугао чија површина није већа од $\frac{1}{1003}$.

221. Једноставним трансформацијама се показује да је дата неједнакост еквивалентна свакој од следећих:

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2-1}{4} \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}{16},$$

$$3(a^2+b^2+c^2+d^2) - 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \leqslant 4,$$

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2 \leqslant 4. \tag{1}$$

Не ограничавајући општост, можемо претпоставити да је $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$. Користећи чињеницу да је $x^2 \leqslant x$ за $0 \leqslant x \leqslant 1$, добијамо да тада важи

$$\begin{aligned}(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2 \\ \leqslant (a-b)+(a-c)+(a-d)+(b-c)+(b-d)+(c-d) \\ = 3(a-d)+(b-c) \leqslant 4(a-d) \leqslant 4,\end{aligned}$$

јер је $b-c \leqslant a-d$ и $a-d \leqslant 1$. Тиме је неједнакост (1), а са њом и дата неједнакост, доказана. Једнакост важи ако и само ако су два од датих бројева a, b, c, d једнака 1, а друга два једнака 0.

222. Дата једначина може се написати у облику

$$2(x+y)^2 + (x-y)^2 = 664. \tag{1}$$

Бројеви $x+y$ и $x-y$ су исте парности. Из (1) следи да су оба парна.
Нека је $x+y=2m$ и $x-y=2t$, где су m и t цели бројеви. Тада се (1) може написати у облику

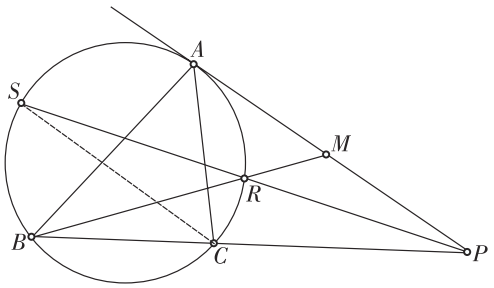
$$2m^2 + t^2 = 166, \tag{2}$$

одакле закључујемо да су t и t^2 парни бројеви, док је m непаран. (Ако су и t и m парни, онда бисмо са леве стране у (2) имали број дељив са 4, а са десне број који није дељив са 4.)
Нека је $t=2k$ и $m=2n+1$, где је k цео, а n ненегативан цео број. Из (2) тада следи да је

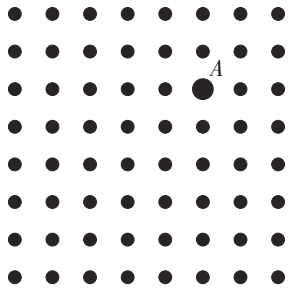
$$k^2 = 41 - 2n(n+1). \tag{3}$$

Дакле, $41-2n(n+1) \geqslant 0$. Та неједнакост је задовољена само за $n=0,1,2,3,4$. Међутим, само за $n=4$ је број на десној страни једначине (3) потпун квадрат, $k^2=1$. Дакле, $k=1$, $n=4$, $m=9$, $t=2$, $x=11$, $y=7$ или $k=-1$, $n=4$, $m=9$, $t=-2$, $x=7$, $y=11$. Непосредно се порверава да су парови $(x,y)=(11,7)$ и $(x,y)=(7,11)$ решења дате једначине.

223. Не умањујући општост, претпоставимо да тачка C припада дужи BP (слика). Имајући у виду потенцију тачке M у односу на кружницу, имамо да је $MA^2 = MR \cdot MB$, дакле и $MP^2 = MR \cdot MB$. Из последње једнакости закључујемо да су троуглови MRP и MPB слични. Из те сличности следи да је $\measuredangle MPR = \measuredangle MBP$. Како је и $\measuredangle PSC = \measuredangle MBP$ (периферијски углови над истим луком), то је и $\measuredangle MPR = \measuredangle PSC$, одакле следи тврђење.



Сл. уз задатак 223



Сл. уз задатак 224

224. (а) Такве тачке су темена једног квадрата и његов центар (пресек дијагонала).

(б) Посматрајмо квадрат 7×7 издељен на јединичне квадрате и 64 тачке које су темена тих квадрата (слика). На слици се могу уочити $\binom{8}{2}\binom{8}{2} = 784$ правоугаоника са страницама на линијама мреже. Сваки од тих правоугаоника одређује 4 различита правоугла троугла (са теменима у три темена правоугаоника). Различити правоугаоници одређују различите троуглове. На тај начин добија се $784\cdot4 = 3136 > 2005$ различитих правоуглих троуглова са теменима у датим тачкама. (Јасно је да има и других правоуглих троуглова који нису обухваћени овим поступком.)

225. Дата једнакост еквивалентна је са

$$9(11a+b)=(a+b+c)(abc-1),$$

где су a,b,c једноцифрени позитивни бројеви. Лева страна претходне једнакости је дељива са 9, па је таква и десна. При том, бар један од чинилаца на десној страни мора бити дељив са 9. Заиста, ако је само $a+b+c\equiv 0 \pmod 3$ и $abc-1\equiv 0 \pmod 3$, онда је $a\equiv b\equiv c\equiv 1 \pmod 3$ и $11a+b\equiv 0 \pmod 3$, па је лева страна дељива са 27. Закључујемо да је $a+b+c\equiv 0 \pmod 9$ или $abc-1\equiv 0 \pmod 9$.
(1) Ако је $abc-1\equiv 0 \pmod 9$, онда је $11a+b=(a+b+c)k$, где је k цео број и $1<k\leqslant 10$. Дакле, треба да испитамо случајеве $k=2,3,4,5,6,7,8,9,10$. Ако је $k=2,4,5,6,8,9,10$, онда број $9k+1=abc$ има прост делитељ већи од 9, што је немогуће. Преостаје да размотримо случајеве $k=3$ и $k=7$.
Ако је $k=3$, онда је $8a=2b+3c$ и $abc=28$. Јасно је да је c паран број, $c=2c_1$, и важи $4a=b+3c_1$ и $abc_1=14$. Лако се види да су b и c_1 непарни, па постоје две могућности: $a=2,b=7,c_1=1$ и $a=2,b=1,c_1=7$. Ни у једном од ова два случаја не постоји решење.
Ако је $k=7$, онда је $4a=6b+7c$ и $abc=64$. Јасно је да је c паран број, $c=2c_1$, и важи $2a=3b+7c_1$ и $abc_1=32$. Лако се види да b и c_1 морају бити парни бројеви. Међутим, то је немогуће, јер то повлачи да је $a>9$. Дакле, ни у овом случају нема решења.
(2) Размотримо случај кад је $a+b+c\equiv 0 \pmod 9$, тј. $a+b+c=9l$, где је l природан број.
Ако је $l\geqslant 2$, онда је $a+b+c\geqslant 18$, $\max\{a,b,c\}\geqslant 6$ и лако се види да је $abc\geqslant 72$ и $abc(a+b+c)>1000$, па је случај $l\geqslant 2$ немогућ.
Ако је $l=1$, имамо $11a+b=abc-1$, тј.

$$11a+b+1=abc\geqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=27.$$

Сада постоје две могућности: $a=1$ и $a=2$.
Ако је $a=2$, онда је $b(2c-1)=23$, па не постоји решење.
Ако је $a=1$, тада је $b+c=8$ и $11+b=bc-1$ или $b+(c-1)=7$ и $b(c-1)=12$, дакле могућа решења су $(a,b,c)=(1,3,5)$ и $(a,b,c)=(1,4,4)$. Лако се проверава да троцифрени бројеви 135 и 144 задовољавају услове задатка.

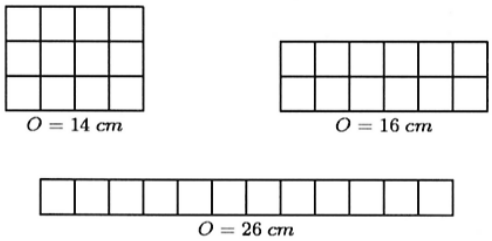
2006. година

226. Како је $27 \cdot 10^6 = 27\,000\,000$ и $3 \cdot 10^7 = 30\,000\,000$, то је $3 \cdot 10^7$ веће од $27 \cdot 10^6$.

227. Површина дате фигуре P једнака је збиру површина квадрата странице $4\,\mathrm{m}$ и правоугаоника страница $3\,\mathrm{m}$ и $10\,\mathrm{m}$, (или збиру површина правоугаоника страница $4\,\mathrm{m}$ и $7\,\mathrm{m}$ и правоугаоника страница $3\,\mathrm{m}$ и $6\,\mathrm{m}$), то јест $P = 46\,\mathrm{m}^2$.

228. Како је $1+2+3+\cdots+2006 = (1+2006)+(2+2005)+\cdots+(1003+1004) = 1003 \cdot 2007$, то је тражени збир $2\,013\,021$.

229. Могуће је направити следећа три правоугаоника:



Сл. уз задатак 229

Најмањи обим има први правоугаоник.

230. Да би тражени број био непаран, цифра јединица мора да буде 1 или 3. Највећи такав број је онај коме је прва цифра (цифра стотина хиљада) највећа, па су све остале цифре 0. Због тога, највећи тражени шестоцифрен број је $300\,001$.

231. Скуп X који задовољава услов задатка може бити $\varnothing$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{2,5\}$, $\{3,4\}$, $\{3,5\}$, $\{4,5\}$, $\{2,3,4\}$, $\{2,3,5\}$, $\{2,4,5\}$, $\{3,4,5\}$ или $\{2,3,4,5\}$.

232. Како је $\alpha = 180^\circ - \beta$, то је $180^\circ - 2\beta = 48^\circ$. Следи да је $\beta = 66^\circ$, па је њему комплементан угао од 24°.

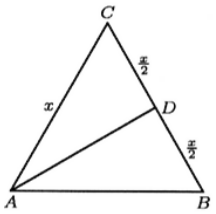
233. Како је 520 дељив са 4 а није са 3, мора $\overline{17a}$ бити дељив са 3. Следи да $a \in \{1,4,7\}$.

234. Ако дужину дужи QB обележимо са x, онда ће дужина дужи AP бити $2x$, а дужина дужи PQ ће бити $4x$. Како је $7x = 28\,\mathrm{cm}$, следи да је $x = 4\,\mathrm{cm}$. Према томе, дужине дужи AP, PQ и QB су $8\,\mathrm{cm}$, $16\,\mathrm{cm}$ и $4\,\mathrm{cm}$. Како су M и D средишта дужи AP и QB, то је дуж MD једнака збиру дужи MP, PQ и QD, па је њена дужина $22\,\mathrm{cm}$.

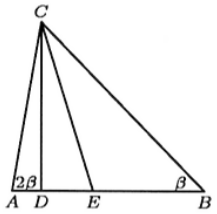
235. Како је $D(21,24,27) = 3$, дужина ивица исечених коцки је $3\,\mathrm{cm}$, а има укупно $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$ коцке. Коцки које немају ниједну обојену страну ('унутрашње коцке') има $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$, са две обојене стране ('ивичне коцке') има $5 \cdot 4 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 4 = 72$, а са три обојене стране ('темене коцке') има 8. Према томе, коцки које имају само једну обојену страну има $504 - (210 + 72 + 8) = 214$.

236. Нека је цифра десетица траженог броја x, а цифра јединица y. Из $\overline{xy} = 4(x+y)$ добија се $10x + y = 4x + 4y$, односно $2x = y$. Решења су 12, 24, 36 и 48.

237. Како троуглови ABD и ADC имају заједничку страницу AD и једнаке странице BD и DC, то је основица AB за $1\,\mathrm{cm}$ дужа од крака AC (слика). Ако је x дужина (у cm) крака AC, обим трогла ABC је $3x+1$, па је $x=8$. Према томе, дужина основице AB је $9\,\mathrm{cm}$.



Сл. уз задатак 237



Сл. уз задатак 239

238. Обележимо са n природан број који задовољава услов задатка, а са q количник који се добија при дељењу n са 6. Тада је $n=6q+q$, тј. $n=7q$. Мора бити $q<6$, јер је q истовремено и остатак при дељењу природног броја са 6. Такође је $q>0$, јер је n природан број. Према томе, $n\in\{7,14,21,28,35\}$. Тражени збир је 105.

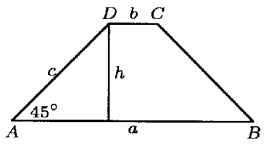
239. Нека је тачка D подножје висине из темена C, тачка E пресек симетрале $\measuredangle ACB$ и странице AB, а $\measuredangle ABC=\beta$ (слика). Тада је $\measuredangle BAC=2\beta$, а $\measuredangle ECB=\frac{1}{2}(180^\circ-2\beta-\beta)=90^\circ-\frac{3}{2}\beta$. Из правоуглог троугла BCD добијамо да је $\measuredangle DCB=90^\circ-\beta$, па је $\measuredangle DCB$ већи од $\measuredangle ECB$ за $\frac{1}{2}\beta$. Према томе, $\measuredangle DCE=\frac{1}{2}\beta=\frac{1}{2}(\measuredangle BAC-\measuredangle ABC)$.

240. За пешачење у једном смеру потребно му је $7:2=3\frac{1}{2}$ сати, што значи да му за јахање у једном смеру треба $5\frac{1}{4}-3\frac{1}{2}=1\frac{3}{4}$ сати. Да је јахао у оба смера требало би му $2\cdot 1\frac{3}{4}=3\frac{1}{2}$ сати.

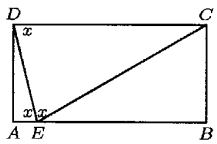
241. Како је $\sqrt{7}<3$, то је $7-\sqrt{7}>7-3=4$. Следи да је $\sqrt{7-\sqrt{7}}>2$.

242. Како је $8^{2n+1}\cdot 16^n=(2\cdot 4)^{2n+1}\cdot 4^{2n}=2^{2n+1}\cdot 4^{4n+1}2\cdot 4^n\cdot 4^{4n+1}=2\cdot 4^{5n+1}$, следи да је вредност датог израза једнака 2.

243. Нека су a и b дужине основица, c дужина крака, а h дужина висине (све у cm) датог трапеза (слика). Из $h\,\dfrac{a+b}{2}=32$ следи да је $a+b=32:\sqrt{2}=16\sqrt{2}$. Како је оштар угао трапеза 45°, то је $c=h\sqrt{2}=4$. Према томе, обим датог трапеза је $8(2\sqrt{2}+1)\,\mathrm{cm}$.



Сл. уз задатак 243



Сл. уз задатак 245

244. Ако су x и y цифре јединица датих бројева, из услова задатка добијамо да је $\overline{6x}\cdot\overline{6y}=\overline{x6}\cdot\overline{y6}$. Из једнакости $(60+x)(60+y)=(10x+6)(10y+6)$ следи $3600+xy=100xy+36$, односно $xy=36$. Како су x и y цифре, оне могу бити једино 4 и 9, па су тражени бројеви 64 и 69.

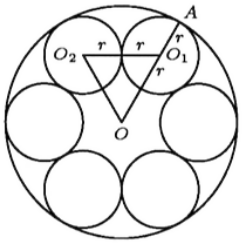
245. Како је $\measuredangle DEC = \measuredangle AED = \measuredangle EDC$, следи да је $CE = CD$, односно $CE = AB$ (слика). У правоуглом троуглу EBC хипотенуза EC два пута је већа од катете BC. Према томе, $\measuredangle CEB = 30^\circ$, што значи да је $\measuredangle AED = \measuredangle DEC = 75^\circ$.

246. Како је квадрат било ког реалног броја ненегативан број, добијамо да је $4x^2 - 4x + 3 = (2x-1)^2 + 2 \geqslant 2 > 0$.

247. Нека су дужине катета a и b (у cm). По услову задатка је $a + b = 22$ и $ab = (a-4)(b+2)$. Из друге једначине добија се $2a - 4b = 8$, тј. $a - 2b = 4$. Решавањем система једначина $a + b = 22$, $a - 2b = 4$ добијамо $a = 16$, $b = 6$.

248. Множењем датих једнакости добијамо $(xy)\cdot(yz)\cdot(zx) = 20\cdot 35\cdot 28$ тј. $(xyz)^2 = 140^2$. Следи да је $xyz = 140$ или $xyz = -140$. Решења су $x = 4$, $y = 5$, $z = 7$, односно $x = -4$, $y = -5$, $z = -7$.

249. Нека је O центар велике кружнице, O_1 и O_2 центри две суседне мале кружнице k_1 и k_2 и нека је A тачка додира велике кружнице и кружнице k_1 (слика). Тада је OA полупречник велике кружнице који садржи тачку O_1. Како је $OO_1 = OO_2 = R - r$ и $\measuredangle O_1OO_2 = \frac{1}{6}360^\circ = 60^\circ$, то је троугао OO_1O_2 једнакостраничан. Због тога је $OO_1 = O_1O_2$, то јест $R - r = 2r$. Следи да је $R = 3r$.



Сл. уз задатак 249

250. Означимо са a и b две различите цифре које се појављују у четвороцифреном броју, с тим што ћемо са a означити цифру на првом месту. Сваки број који задовољава услове задатка припада једном од следећих седам типова: $aaab$, $aaba$, $abaa$, $aabb$, $abab$, $abba$, $abbb$. Сваки тип садржи $9\cdot 9$ бројева. Наиме, цифра a се може изабрати на 9 начина (различита од 0), а цифра b такође на 9 начина (различита од a). Према томе, има укупно $7\cdot 9\cdot 9 = 567$ четвороцифрених бројева са тачно две различите цифре.

251. Највећи такав број је 976 320, а најмањи 203 679. Њихова разлика је $976\,320 - 203\,679 = 772\,641$.

252. Решења ове неједначине су сви природни бројеви већи од 2006 и мањи од 8008, тј. $x \in \{2007, 2008, \ldots, 8007\}$. Тражених решења има $8007 - 2006 = 6001$.

253. Преклопљени део је, очигледно, квадрат странице 3 cm. Обим добијене фигуре (у cm) је $15 + 2\cdot 3 + 12 + 2\cdot 12 + 3 = 60$.

254. Ако дужину краће странице правоугаоника означимо са x (у cm), онда је дужина дуже странице тог правоугаоника једнака $4x$. Како је његов обим 20 cm, следи да је $2\cdot(4x + x) = 20$, односно $x = 2$. Дужина странице квадрата је $4x$, тј. 8 cm, а његова површина 64 cm^2.

255. За нумерацију првих 100 страна употребљено је 20 седмица, и то за нумерацију следећих страна: 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 87 и 97. Слично, за нумерацију наредних 200 страна употребљено је још 40 седмица, тако да је остало 17 седмица. Значи да књига има 378 страна, односно 189 листова.

256. Провером за $x \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ добијају се два решења: $x = 6$, $y = 5$ и $x = 9$, $y = 2$.

257. Како је по услову задатка $A = \{500, 501, \ldots, 2005\}$ и $B = \{1000, 1002, \ldots, 2006\}$, добијамо да је $A \setminus B = \{500, 501, \ldots, 999, 1001, 1003, \ldots, 2005\}$ и $B \setminus A = \{2006\}$. Следи да је $A \star B = \{500, 501, \ldots, 999, 1001, 1003, \ldots, 2005, 2006\}$.

258. Означимо већи угао са α, а мањи са β. Како је $\frac{8}{9}$ правог угла $80°$, а $\frac{1}{4}$ правог угла $22°30'$, то је $\alpha = \beta + 22°30'$, а $\alpha + \beta = 80°$. Одатле следи да је $2\beta + 22°30' = 80°$, па је $2\beta = 57°30'$. Коначно, добијамо да је $\beta = 28°45'$, а $\alpha = 51°15'$.

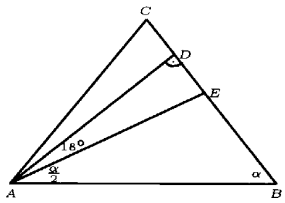
259. Множењем два двоцифрена броја добија се број који може да има или 3 или 4 цифре, јер је $10 \cdot 10 = 100$, а $99 \cdot 99 = 9801$. Како је $7777 = 7 \cdot 11 \cdot 101$, а 101 је прост број, следи да производ два двоцифрена броја не може бити 7777. С обзиром да је $777 = 3 \cdot 7 \cdot 37$, једини двоцифрени бројеви који задовољавају услове задатка су 21 и 37.

260. Сем 2. јануара који је био петак, у години је било још 52 петка, што значи да је та година имала $2 + 7 \cdot 52 = 366$ дана, тј. да је била преступна. У таквој години, између 1. јануара и 1. априла има тачно $30 + 29 + 31 = 90$ дана, што значи да је 1. април 92. дан у години. Како је $92 = 7 \cdot 13 + 1$, а 1. јануар је био четвртак, следи да је 1. април био такође четвртак.

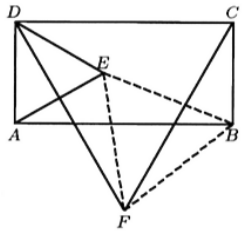
261. Како је $\frac{21}{37} = 0,\overline{567}$, а $2006 = 3 \cdot 668 + 2$, на 2006-ом месту иза децималне запете налази се цифра 6.

262. Нека је ученик требало да сабере бројеве x и y. По услову задатка је $x + y = 62{,}5876$. Како се померањем децималне запете за два места удесно број повећа 100 пута, то је $x + 100y = 295$. Даље добијамо да је $99y = 295 - 62{,}5876$, па је $y = 2{,}3476$, а $x = 60{,}24$.

263. Нека су D и E тачке у којима висина из темена A, односно симетрала угла код темена A секу крак BC. Угао на основици обележимо са α (слика). Како је AE симетрала угла код темена A, то је $\measuredangle BAE = \frac{\alpha}{2}$, па је $\measuredangle BAD = \frac{\alpha}{2} + 18°$. Троугао ABD је правоугли, па је $\measuredangle BAD + \measuredangle ABD = 90°$, тј. $\frac{\alpha}{2} + 18° + \alpha = 90°$. Следи да је $\frac{3}{2}\alpha = 72°$, односно $\alpha = 48°$.



Сл. уз задатак 263



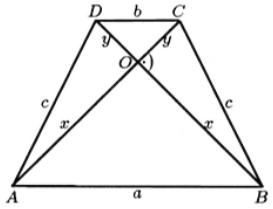
Сл. уз задатак 264

264. Како је $\measuredangle BCF = 90° - \measuredangle FCD = 30°$ и $\measuredangle EDF = \measuredangle EDA - \measuredangle FDA = 60° - (90° - \measuredangle CDF) = 30°$ (слика), то су ова два угла једнака. Такође је $BC = AD = ED$ и $CF = DF$, па на основу става СУС следи да је $\triangle BCF \cong \triangle EDF$. Одатле је $FB = FE$. Како је и $\measuredangle CFB = \measuredangle DFE$, добијамо да је $\measuredangle EFB = \measuredangle DFC = 60°$. Према томе, $\triangle BEF$ је једнакокраки са углом између кракова од $60°$, па је једнакостраничан.

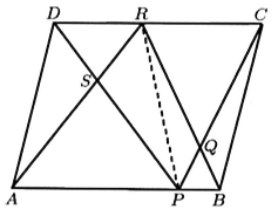
265. Сабирајући 5 сабирака из скупа $\{-1, 0, 1\}$ могуће је добити 11 збирова, и то: $-5, -4, \ldots, 4, 5$. Како врста, колона и дијагонала у таблици има 12, по Дирихлеовом принципу бар два збира морају бити једнака.

266. Из $\frac{a+b}{b} = 2 - \sqrt{2}$ следи да је $\frac{a}{b} + 1 = 2 - \sqrt{2}$, тј. $\frac{a}{b} = 1 - \sqrt{2}$. Одатле је $\frac{b}{a} = \frac{1}{1-\sqrt{2}} = \frac{1}{1-\sqrt{2}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = -(1+\sqrt{2})$. Како је $\frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, вредност датог израза је $(1-\sqrt{2}) + (-1-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$.

267. Нека је тачка O пресек дијагонала датог трапеза и нека су x и y дужине дужи AO и CO (слика). Тада су и дужине дужи BO и DO такође x и y. Како су троуглови ABO, CDO и BCO правоугли, користећи Питагорину теорему добијамо да је $a^2 = 2x^2$, $b^2 = 2y^2$ и $c^2 = x^2 + y^2$. Одатле следи да је $2c^2 = a^2 + b^2$, па је $c = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.



Сл. уз задатак 267



Сл. уз задатак 269

268. Како је $a = 2^{2003} \cdot (2^2 - 2 + 1) = 3 \cdot 2^{2003}$, $b = 2^{2004} \cdot (1 - 2 + 2^2) = 3 \cdot 2^{2004} = 6 \cdot 2^{2003}$ и $c = 3\sqrt{3} \cdot 2^{2003}$, узимајући да је $2^{2003} = A$, добијамо да је $a^2 = 9A^2$, $b^2 = 36A^2$ и $c^2 = 27A^2$. Следи да је $a^2 + c^2 = b^2$.

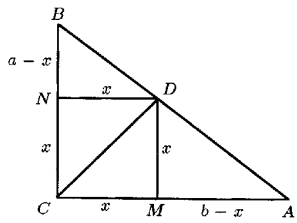
269. У трапезу $APRD$ троуглови APR и APD имају једнаке површине, што значи да и троуглови PRS и ASD имају једнаке површине (слика). На исти начин се показује да и троуглови PQR и BCQ имају једнаке површине. Према томе, површина четвороугла $PQRS$ је једнака збиру површина троуглова ASD и BCQ.

270. Претпоставимо супротно, тј. да је у свакој групи производ бројева мањи од 72. Тада би производ бројева у свакој од група био мањи или једнак 71, па би производ свих бројева био мањи или једнак 71^3, односно 357911. Међутим, производ бројева од 1 до 9 је 362880. Према томе, дата претпоставка није тачна, односно постоји група у којој производ бројева није мањи од 72.

271. Како је $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = a^2$, следи да је $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = a^2 - 2$. Даље је $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)^2 = (a^2-2)^2$, па је $x^4 + \dfrac{1}{x^4} = (a^2-2)^2 - 2$, тј. $x^4 + \dfrac{1}{x^4} = a^4 - 4a^2 + 2$.

272. Множењем почетне једнакости са $1000(x+y+z)$ добијамо да је $1000 = \overline{xyz} \cdot (x + y + z)$. Како је $x+y+z \leqslant 27$, могућа су следећа представљања броја 1000 као производа два броја: $500 \cdot 2$, $250 \cdot 4$, $200 \cdot 5$, $125 \cdot 8$, $100 \cdot 10$, $50 \cdot 20$ и $40 \cdot 25$. Провером налазимо да је једино решење задатка: $x = 1$, $y = 2$, $z = 5$.

273. Обележимо са M и N подножја нормала из тачке D на катете AC и BC. Како дуж CD полови прав угао ACB, следи да су троуглови CMD и CND једнакокрако правоугли, па је четвороугао $MDNC$ квадрат. Обележимо дужину његове странице са x. Како је површина троугла ABC једнака збиру површина троуглова CDB и ADC, добијамо да је $\dfrac{ab}{2} = \dfrac{ax}{2} + \dfrac{bx}{2}$. Одатле следи да је $x = \dfrac{ab}{a+b}$. Како је CD дијагонала квадрата $MDNC$, то је њена дужина $x\sqrt{2}$, тј. $\dfrac{ab}{a+b}\sqrt{2}$.



Сл. уз задатак 273

274. За $x < 1$ дата једначина је еквивалентна са $1-x+2-x = a$. Следи да је $x = \dfrac{3-a}{2}$, па једначина има највише једно решење без обзира на a. Слично, за $x \geqslant 2$ дата једначина је еквивалентна са $x-1+x-2 = a$, па је $x = \dfrac{a+3}{2}$. Опет, без обзира на a једначина има највише једно решење. За $1 \leqslant x < 2$ дата једначина је еквивалентна са $x-1+2-x = a$, односно са $a = 1$, па ако је $a \neq 1$ нема решења, а ако је $a = 1$ има бесконачно много решења. На основу сва три случаја закључујемо да дата једначина за $a \neq 1$ има највише два решења, док за $a = 1$ има бесконачно много решења.

275. Растојања од пресека дијагонала до ивица квадра једнака су половинама дужина дијагонала страна квадра. Означимо дужине ивица квадра са a, b и c (у cm) тако да је $a^2 + b^2 = 14^2$, $b^2 + c^2 = 16^2$ и $a^2 + c^2 = 18^2$. Из прве две једнакости добијамо да је $a^2 + c^2 + 2b^2 = 14^2 + 16^2 = 452$, па користећи и трећу једнакост израчунавамо да је $2b^2 = 452 - 18^2$. Следи да је $b^2 = 64$. Даље се лако добија да је $a^2 = 132$ и $c^2 = 192$, па је $a = 2\sqrt{33}$, $b = 8$ и $c = 8\sqrt{3}$. Запремина квадра (у cm^3) је $V = abc = 384\sqrt{11}$.

276. Дељењем броја 2030 редом једноцифреним бројевима 1, 2, ... , 9 добија се да је 2030 дељив само бројевима 1, 2, 5, и 7, тј. да је $2030 = 2030 \cdot 1 = 1015 \cdot 2 = 406 \cdot 5 = 290 \cdot 7$. Решења су 406 и 290.

277. Површина дате фигуре једнака је површини осам малих квадрата, па је површина малог квадрата $25\,\mathrm{mm}^2$, а дужина његове странице $5\,\mathrm{mm}$. Обим дате фигуре (у mm) је $16 \cdot 5 = 80$.

278. Погледајмо спискове са именима такмичара. Укупно се на сва три списка налази 90 имена. Од тог броја 23 имена су само на једном од тих спискова, а 23 се налазе на по два списка. Како је $23 + 2 \cdot 23 = 69$, на списковима остаје укупно 21 име, при чему су то уствари 7 имена која се налазе на сва три списка. Према томе, 7 ученика је учествовало на сва три такмичења.

279. Број који је при дељењу са 11 дао резултат 21 је 231. Када уклонимо цифру 1 која је дописана, остаје број 23. Слично, из $13 \cdot 23 = 299$ закључујемо да је пре дописивања цифре 9 био број 29. Дакле, почетни број је 29.

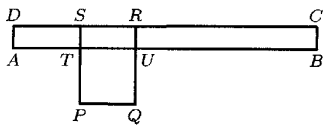
280. Ако на највећу коцку ставимо средњу коцку, тада је површина насталог тела једнака збиру површина тих коцки умањеном за двоструку површину једне стране средње коцке. Како је $6 \cdot 3^2 + 6 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2^2 = 70$, та површина је $70\,\mathrm{cm}^2$. Ако сад мању коцку прислонимо уз обе коцке, површина новог тела је најмања могућа и једнака је збиру површина првоформираног тела и најмање коцке, умањеном за четвороструку површину једне стране најмање коцке. Та површина (у cm^2) је $70 + 6 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1^2 = 72$.

281. Ако је x број белих, тада је $\dfrac{7}{8}x$ број црвених ружа. Из услова задатка добијамо једначину $\dfrac{7}{8}x + 7 = x - 7$, чије је решење број 112. Дакле, белих ружа има 112, а црвених $\dfrac{7}{8} \cdot 112$, односно 98.

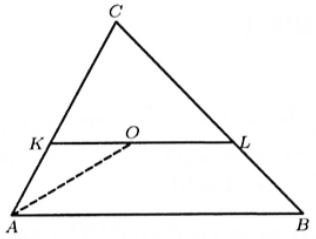
282. Од 5 узастопних природних бројева бар један мора бити дељив са 2, бар један са 3 и бар један са 5, па производ тих 5 бројева мора бити дељив и са 10 и са 3. Због тога, цифра јединица мора бити 0, а ако цифру стотина обележимо са a, збир $9 + 5 + a + 4 + 0$ мора бити дељив са 3. Следи да је a из скупа $\{0, 3, 6, 9\}$. Провером за свако a из овог скупа следи да је једино за $a = 0$ добијени број производ 5 узастопних природних бројева и то $95040 = 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12$.

283. Из $E \subset B$ следи да је $a = 1$. Из $B \subset A$ закључујемо да је или $c = 4$ или $d = 4$. Не може бити $c = 4$, јер и c и 4 припадају скупу C, па је $d = 4$. Даље, из $D \subset A$ следи да је $c = 3$. Коначно, из $C \subset A$ закључујемо да је $b = 2$.

284. Како је површина правоугаоника $TURS$ једнака $\frac{2}{7}$ површине правоугаоника $PQRS$, следи да је површина квадрата $PQUT$ једнака $\frac{5}{7}$ површине правоугаоника $PQRS$, па је површина правоугаоника $PQRS$ једнака $35\,\mathrm{cm}^2$ (слика). Одатле следи да је површина правоугаоника $TURS$ једнака $10\,\mathrm{cm}^2$. Како је то $\frac{2}{11}$ површине правоугаоника $ABCD$, добијамо да је површина правоугаоника $ABCD$ једнака $55\,\mathrm{cm}^2$.



Сл. уз задатак 284



Сл. уз задатак 287

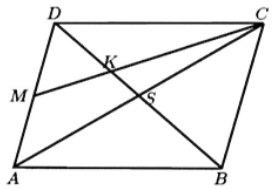
285. Добијени низ је 2357111317192329 и он садржи 16 цифара, тако да након брисања 9 цифара остаје седмоцифрен број. Како је цифра 9 на петом месту гледано са десне стране, она не може бити прва цифра траженог броја, већ испред ње треба узети две цифре. Тражени број ће бити највећи ако за те две цифре узмемо седмице. Дакле, брисањем цифара 2, 3, 5, 1, 1, 1, 3, 1, 1 остаје број 7792329 који је највећи могућ.

286. Нека су x и y поменути бројеви. Тада је $\frac{7}{9}x - \frac{7}{9}y = \frac{7}{9}(x-y) = \frac{3}{7}$, па је $x - y = \frac{27}{49}$. Следи да је $\frac{3}{4}y - \frac{3}{4}x = -\frac{3}{4}(x-y) = -\frac{81}{196}$.

287. Тачка O је центар кружнице уписане у троугао ABC, па је AO симетрала угла BAC (слика). Због тога је $\measuredangle KAO = \measuredangle OAB$. Како је $KO \parallel AB$, следи да је $\measuredangle OAB = \measuredangle AOK$, па је $\measuredangle KAO = \measuredangle AOK$. Троугао AOK је једнакокраки, па је $KA = KO$. Аналогно се добија да је $LB = LO$. Ако је $O_{\triangle ABC}$ обим троугла ABC, онда је $O_{\triangle ABC} = AB + BC + CA = AB + BL + LC + CK + KA = AB + (OL + LC + CK + KO) = c + s$.

288. Како су све цифре којима се записује тражени број парне, следи да ће и тај број бити паран. Да би био дељив са 18 потребно је још да буде дељив са 9, односно да му збир цифара буде дељив са 9. Најмањи такав збир, узимајући у обзир да су све цифре парне, јесте 18. Тражени број ће бити најмањи ако му је прва цифра 2, тако да збир осталих цифара треба да буде 16. Најмање цифара чији је збир 16 се користи ако 16 представимо као збир $6 + 6 + 2 + 2$. Тражени број је $20\ldots02266$, где у запису има 2001 нула.

289. Обележимо тачку пресека дијагонала паралелограма са S (слика). Како је S средиште обе дијагонале, следи да је тачка K тежиште троугла ACD, па је $3KD = 3 \cdot \frac{2}{3}SD = 2SD = BD$.

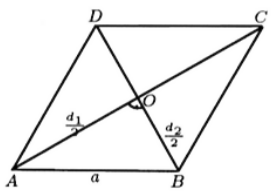


Сл. уз задатак 289

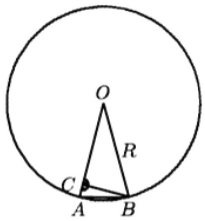
290. Запремина сока од боровнице је два пута већа од запремине сока од рибизле, па је мерни број укупне запремине сока дељив са три. Укупна запремина балона је $7\,\ell$, а како је 74 број који при дељењу са три даје остатак 2, празан је онај балон чији мерни број запремине при дељењу са три такође даје остатак 2. Једини такав балон је онај чија је запремина $14\,\ell$, па је он празан. Следи да је укупна запремина сокова $60\,\ell$, тако да је запремина сока од рибизле $20\,\ell$. Тим соком напуњени су балони од 7 и $13\,\ell$. Балони од 9, 15 и $16\,\ell$ напуњени су соком од боровнице.

291. Из једнакости $\dfrac{a^2}{a+3} = \dfrac{a^2-9}{a+3} + \dfrac{9}{a+3} = a - 3 + \dfrac{9}{a+3}$ следи да је $\dfrac{a^2}{a+3}$ цео број једино ако је $\dfrac{9}{a+3}$ цео број, односно ако $a+3 \in \{-9, -3, -1, 1, 3, 9\}$. Тражени скуп је $\{-12, -6, -4, -2, 0, 6\}$.

292. Нека је тачка O пресек дијагонала датог ромба $ABCD$ (слика). Обележимо са a, d_1 и d_2 дужине (у cm) странице и дијагонала ромба. Обим ромба је 36 cm, па је $a = 9$. Дијагонале ромба се полове и нормалне су једна на другу, па применом Питагорине теореме на троугао ABO добијамо да је $(\dfrac{d_1}{2})^2 + (\dfrac{d_2}{2})^2 = a^2$, тј. $d_1^2 + d_2^2 = 324$. На основу услова $d_1 + d_2 = 20$ имамо да је $400 = (d_1 + d_2)^2 = d_1^2 + d_2^2 + 2d_1d_2 = 324 + 2d_1d_2$, што значи да је $d_1d_2 = 38$. Према томе, површина датог ромба је $19\,\mathrm{cm}^2$.



Сл. уз задатак 292



Сл. уз задатак 294

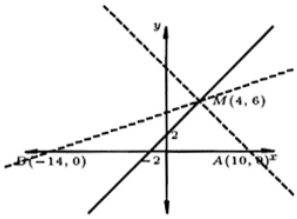
293. Из једнакости $\sqrt{\overline{ab}} = a + \sqrt{b}$ добијамо да је $10a + b = (a + \sqrt{b})^2 = a^2 + 2a\sqrt{b} + b$, односно $10a = a^2 + 2a\sqrt{b}$. Како је $a \neq 0$, следи да је $a = 10 - 2\sqrt{b}$. То значи да је $\sqrt{b}$ цео број, па b може бити само 0, 1, 4 или 9. Налажењем одговарајуће вредности за a и провером датог услова добијамо да су тражени бројеви: 49, 64 и 81.

294. Нека је O центар датог круга, ABO карактеристични троугао правилног дванаестоугла, а BC висина тог троугла. Како је $\angle AOB = 30^\circ$, следи да је $|BC| = \dfrac{R}{2}$, $|OC| = R\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $|AC| = R - R\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Применом Питагорине теореме на троугао ABC добијамо да је тражена дужина странице правилног дванаестоугла $|AB| = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

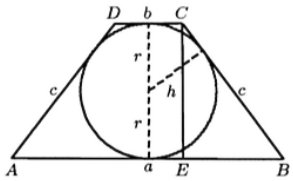
295. Тражени бројеви су облика $\overline{abcba}$. Тих бројева има колико и троцифрених бројева $\overline{abc}$, тј. $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

296. Нека је година рођења те особе $\overline{abcd}$. По услову задатка је $\overline{abcd} + a + b + c + d = 2006$, тј. $1001a + 101b + 11c + 2d = 2006$. Мора бити $a = 1$ или $a = 2$. Ако је $a = 1$, онда је $101b + 11c + 2d = 1005$. Одавде је $b = 9$, па је $11c + 2d = 96$. Провером се добија $c = 8$, $d = 4$. Дакле, једно решење је 1984. Ако је $a = 2$, онда је $101b + 11c + 2d = 4$. Следи да је $b = 0$, $c = 0$ и $d = 2$. Друго решење је 2002.

297. Тачка $M(4,6)$ припада и графику функције $y = x + 2$ и графику функције $y = kx + n$, па је она теме троугла који граде ти графици и x оса (слика). Онда је дужина висине троугла из темена M једнака 6. Како је површина троугла 36, следи да је дужина одговарајуће странице 12. Један крај те странице је у тачки $(-2,0)$, па ће други бити или у $A(10,0)$ или у $B(-14,0)$. График функције $y = kx + n$ садржи или тачке M и A, или M и B. У првом случају из система $6 = 4k + n$ и $0 = 10k + n$, добија се $k = -1$ и $n = 10$. У другом случају из система $6 = 4k + n$ и $0 = -14k + n$, добија се $k = 1/3$ и $n = 14/3$.



Сл. уз задатак 297

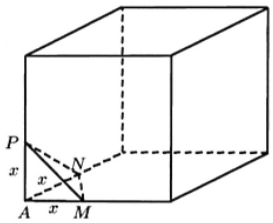


Сл. уз задатак 298

298. Нека су дужине (у cm) крака, висине, веће и мање основице трапеза $ABCD$ и полупречника круга редом c, h, a, b и r (слика). Како је $h = 2r = 4$, а површина (у cm^2) $P = 20$, из формуле $P = \dfrac{a+b}{2}h$ добијамо да је $a + b = 10$. Због једнакости тангентних дужи је $c = \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2}$, па је $c = 5$. Нека је CE висина датог трапеза. Како је $BE = \dfrac{a-b}{2}$, из правоуглог троугла BCE добијамо да је $\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 = 5^2 - 4^2$, па је $a - b = 6$. Даље лако следи $a = 8$, $b = 2$.

299. Из услова $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 0$ следи $\dfrac{ab+bc+ca}{abc} = 0$, односно $ab + bc + ca = 0$. Због тога је $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) = a^2+b^2+c^2$. Како су a, b и c различити од 0, следи $a^2 + b^2 + c^2 > 0$. Према томе, $a + b + c \neq 0$.

300. Обележимо са x дужине (у cm) дужи које раван одсеца од ивица коцке (слика). Како је мањи део на који раван дели коцку тространа пирамида, његова запремина је $\dfrac{x^3}{6}$. Запремина већег дела се добија када се од запремине коцке одузме запремина мањег дела и једнака је $125 - \dfrac{x^3}{6}$. По услову задатка је $(125 - \dfrac{x^3}{6}) : \dfrac{x^3}{6} = 371 : 4$, одакле следи да је $4 \cdot (125 - \dfrac{x^3}{6}) = 371 \cdot \dfrac{x^3}{6}$. Даље је $\dfrac{375}{6} \cdot x^3 = 500$, па је $x^3 = 8$, односно $x = 2$. Већи и мањи део коцке имају заједничку страну (део равни који пресеца коцку), па ће разлика површина тих делова (у cm^2) бити $(3 \cdot 25 + 3 \cdot (25 - \dfrac{2 \cdot 2}{2})) - 3 \cdot \dfrac{2 \cdot 2}{2} = 138$.

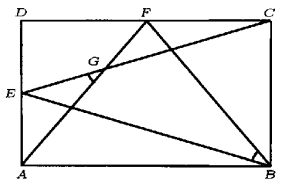


Сл. уз задатак 300

301. Није могуће. Постоји врста у којој се налази број 7 и врста у којој се не налази број 7. У првој врсти је производ бројева дељив са 7, а у другој није, па ти производи не могу бити једнаки.

302. Нека је x цена карте (у динарима) без попуста. Путник је очигледно карту резервисао или 7 или 14 или 30 дана пре путовања. Претпоставимо да је то учинио 7 дана пре путовања. Тада је $0,9 \cdot x = 21\ 000$, па је $x = \dfrac{70\ 000}{3}$. Да је резервисао 6 дана пре путовања платио би је 25 200 динара и то би била цена карте без попуста, тј. x. Контрадикција. Ако је путник резервисао карту 14 дана пре путовања, тада је $0{,}75 \cdot x = 21\,000$, па је $x = 28\,000$. Да је резервисао дан касније, морао би да плати $0{,}9 \cdot x$, а то је 25 200 динара, што је тачно 4 200 динара више. Према томе, путник је карту резервисао 14 дана пре путовања. Што се тиче трећег случаја, сличним резоновањем као у првом случају добија се да је и он неодговарајући.

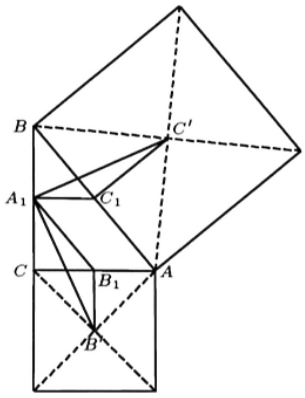
303. Како је $\triangle ABE \cong \triangle DCE$ (једнаке по две странице и углови између њих), следи да је $\measuredangle ABE = \measuredangle DCE$. Слично, $\triangle BCF \cong \triangle ADF$ (такође једнаке по две странице и углови између њих), па је $FB = FA$. Одатле следи да је $\measuredangle ABF = \measuredangle BAF$. Како је $\measuredangle BAF = \measuredangle AFD$ (углови са паралелним крацима), добијамо да је $\measuredangle ABF = \measuredangle AFD$. На основу свега овога и чињенице да је спољашњи угао једнак збиру два несуседна унутрашња угла троугла добијамо да је $\measuredangle EBF = \measuredangle ABF - \measuredangle ABE = \measuredangle AFD - \measuredangle DCE = \measuredangle FGC = \measuredangle EGA$.



Сл. уз задатак 303

304. У пуном миксеру укупна количина чоколаде је 3,5 пута већа од количине беле чоколаде. Због тога ће црне чоколаде бити $\dfrac{5}{7}$, а беле $\dfrac{2}{7}$ од пуног миксера. За то је потребно да славина за црну чоколаду буде отворена $\dfrac{5}{7} \cdot 23$ минута, а за белу $\dfrac{2}{7} \cdot 17$ минута. Пошто је $\dfrac{5}{7} \cdot 23 - \dfrac{2}{7} \cdot 17 = \dfrac{81}{7}$, славину за белу чоколаду треба отворити $11\dfrac{4}{7}$ минута након отварања славине за црну чоколаду.

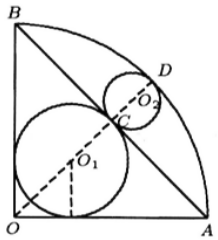
305. Нека су B_1 и B' средиште катете AC и пресек дијагонала квадрата чија је страница та катета, а C_1 и C' средиште хипотенузе AB и пресек дијагонала квадрата чија је страница та хипотенуза (слика). Како је A_1C_1 средња линија троугла ABC, следи да је $A_1C_1 = \dfrac{CA}{2}$, па је $A_1C_1 = B'B_1$. Слично се добија да је $C_1C' = B_1A_1$. Како је још и $\measuredangle A_1C_1B = \measuredangle CB_1A_1$ (углови са паралелним крацима), односно $\measuredangle A_1C_1C' = \measuredangle B'B_1A_1$, следи да је $\triangle A_1C_1C' \cong \triangle B'B_1A_1$. Одавде добијамо да је $A_1C' = A_1B'$, па важи тврђење задатка.



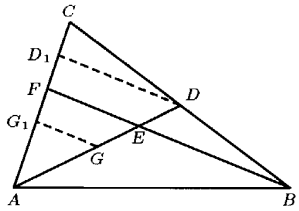
Сл. уз задатак 305

306. Обележимо са x прву цифру траженог, односно последњу цифру новог броја. Како је нови број пет пута већи од траженог, он је дељив са 5, па следи да је $x = 0$ или $x = 5$. Не може бити $x = 0$ јер је x прва цифра траженог броја, а не може ни $x = 5$ јер би тада нови број имао цифру више него тражени број. Следи да не постоји број са траженим својством.

307. Центри O, O_1 и O_2 кругова k, k_1 и k_2 су колинеарне тачке (слика). Нека су C и D додирне тачке кругова k_1 и k_2, односно k_2 и k и нека су r_1 и r_2 дужине полупречника (у cm) кругова k_1 и k_2. Како је $OC = \dfrac{AB}{2} = 5\sqrt{2}$, $OO_1 = r_1\sqrt{2}$ и $O_1C = r_1$, следи да је $r_1\sqrt{2} + r_1 = 5\sqrt{2}$. Из ове једнакости добијамо да је $r_1 = \dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = 5\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = 5(2-\sqrt{2})$. Слично, из $OD = 10$, $OC = 5\sqrt{2}$ и $CD = 2r_2$, следи да је $5\sqrt{2} + 2r_2 = 10$, односно $2r_2 = 5(2-\sqrt{2})$. Према томе, $r_1 : r_2 = 2$.



Сл. уз задатак 307



Сл. уз задатак 310

308. За $p = 2$ је $p^2+11 = 15$, а делиоци броја 15 су 1, 3, 5 и 15. За $p = 3$ је $p^2+11 = 20$, а делилаца броја 20 има шест и то су : 1, 2, 4, 5, 10 и 20. Ако је $p > 3$, онда је p облика $6k \pm 1$, $k \in \mathbf{N}$, па је $p^2 + 11 = (6k \pm 1)^2 + 11 = 36k^2 \pm 12k + 12 = 12 \cdot (3k^2 \pm k + 1)$. Дакле, $12 \mid p^2 + 11$ и $p^2 + 11 > 12$. Како број 12 има шест делилаца, следи да број $p^2 + 11$ има више од 6 делилаца јер је међу делиоцима бар још и сам број $p^2 + 11$. Једино решење је $p = 3$.

309. Бројеви 1, 2 и 3 имају једноцифрене квадрате који заузимају прва 3 места у датом низу цифара. Бројеви од 4 до 9 (укупно 6 бројева) имају двоцифрене квадрате који заузимају следећих 12 места у датом низу цифара. Бројеви од 10 до 31 (укупно 22 броја) имају троцифрене квадрате који заузимају наредних 66 места у датом низу цифара. Бројеви од 32 до 99 (укупно 68 бројева) имају четвороцифрене квадрате који заузимају следећих 272 места у датом низу цифара. Бројеви од 100 до 316 (укупно 217 бројева) имају петоцифрене квадрате који заузимају још 1085 места у датом низу цифара. Дакле, цифра јединица квадрата броја 316 се налази на 1438. месту у низу. Квадрати следећа 94 броја (од 317 до 410) су шестоцифрени бројеви, па заузимају још 564 места у датом низу, што значи да је цифра јединица квадрата броја 410 на 2002. месту у датом низу цифара. Како је $411^2 = 168921$, то ће 2006. цифра у датом низу бити 9.

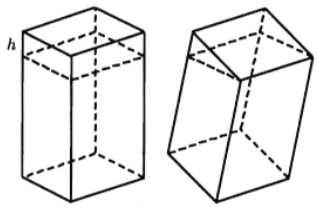
310. Нека су D_1, G и G_1 редом средишта дужи FC, AD и AD_1 (слика). Тада је E средиште дужи GD, па су DD_1, GG_1 и EF средње линије троуглова FBC, ADD_1 и трапеза DD_1G_1G. Због тога је $CD_1 = D_1F = FG_1$ и $D_1G_1 = G_1A$. Према томе, $AF : FC = 3 : 2$.

311. Ако је $a + b + c = 2k$, онда је $a + b + d = 8k$, $a + c + d = 8k$ и $b + c + d = 6k$. Тада је $3(a + b + c + d) = 24k$, тј. $a + b + c + d = 8k$, па је $a = 2k$, $b = 0$, $c = 0$ и $d = 6k$. Како су a, b, c и d цифре и $d = 3a$, следи да су решења бројеви 1003, 2006 и 3009.

312. (а) Сваки природан број n може се представити у облику $7k + r$, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, а $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Како је $n^3 = 7(49k^3 + 21k^2r + 3kr^2) + r^3$, следи да је остатак при дељењу n^3 са 7 исти као остатак при дељењу r^3 са 7. Како $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ могући остаци при дељењу куба природног броја са 7 су 0, 1 и 6.

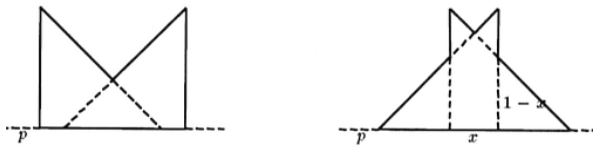
(б) Из $2^3 \equiv 1 \pmod 7$ следи да је $(2^3)^{668} \equiv 1 \pmod 7$. Како је $2^{2006} = 4 \cdot (2^3)^{668}$ добијамо да је $2^{2006} \equiv 4 \pmod 7$. Дакле, 2^{2006} при дељењу са 7 даје остатак 4. Користећи резултат под (а) добијамо да остатак при дељењу $x^3 + y^3$ са 7 може бити 0, 1, 2, 5 или 6. Према томе, не постоје тражени бројеви.

313. Нека је висина празног дела суда пре нагињања h. Запремина воде у суду пре и после нагињања је једнака, па је и запремина празног дела суда пре и после нагињања једнака. Пре нагињања та запремина је $4^2 \cdot h$. После нагињања запремина празног дела суда је облика тростране призме чија је висина $4\,\mathrm{cm}$, а основа правоугли троугао. Дужина његове катете је $4\,\mathrm{cm}$, а угао између те катете и хипотенузе је 30°. Због тога је дужина друге катете $\frac{4\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{cm}$. Запремина празног дела суда после нагињања је $\frac{4^3\sqrt{3}}{6}\,\mathrm{cm}^3$. Изједначавањем запремина празног дела суда пре и после нагињања добијамо да је $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{cm}$.



Сл. уз задатак 313

314. Обележимо дате бројеве са $a_1, a_2, \ldots, a_{50}$. Претпоставимо супротно тврђењу задатка да је збир било која три броја мањи од 6. Тада је $(a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + \ldots + (a_{46} + a_{47} + a_{48}) < 16 \cdot 6$, па је $a_{49} + a_{50} > 4$. Слично се добија да је $a_{48} + a_{50} > 4$ и $a_{48} + a_{49} > 4$. Одатле следи да је $2(a_{48} + a_{49} + a_{50}) > 12$, односно $a_{48} + a_{49} + a_{50} > 6$. Ово је контрадикција са уведеном претпоставком, па следи да постоје три броја чији збир није мањи од 6.



Сл. уз задатак 315

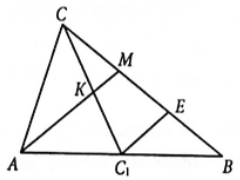
315. Посматраћемо два случаја. Прво, пресек може бити једнакокракоправоугли троугао (слика лево). Очигледно да је површина пресека максимална када се катете полазних троуглова поклопе, тј. када је хипотенуза троугла који је пресек полазних троуглова дужине $1\,\mathrm{cm}$. Та површина је $\frac{1}{4}\,\mathrm{cm}^2$. Друго, пресек може бити петоугао (слика десно). Ако са x обележимо дужину странице петоугла (у cm) која припада правој p, онда је $0 < x < 1$ и површина тог петоугла је једнака збиру површина правоугаоника са страницама x и $1 - x$ и једнакокракоправоуглог троугла са хипотенузом x. Дакле, површина тог петоугла је

$$x \cdot (1 - x) + \frac{1}{4}x^2 = -\frac{3}{4}x^2 + x = \frac{1}{3} - \frac{3}{4}\left(x - \frac{2}{3}\right)^2.$$

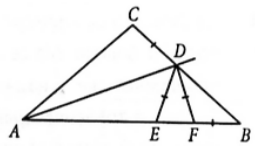
Максимум ове функције је $\frac{1}{3}$ и постиже се за $x = \frac{2}{3}$. Како је у првом случају максимална површина пресека $\frac{1}{4}$, а у другом $\frac{1}{3}$, следи да је максимална површина пресека који се може добити померањем полазних троуглова по правој p једнака $\frac{1}{3}\,\mathrm{cm}^2$.

316. Број $\overline{cba} \in \{5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^3\} = \{125, 216, 343, 512, 729\}$, па је $\overline{abc} \in \{521, 612, 343, 215, 927\}$. Како су бројеви 612, 343, 215 и 927 сложени јер су дељиви, редом, са 2, 7, 5 и 9, једини кандидат је број 521. Он није дељив са 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 и 23 (проверити!), па је једино решење задатка $\overline{abc} = 521$, $\overline{cba} = 125 = 5^3$.

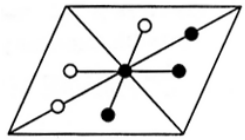
317. Нека је C_1E средња линија троугла ABM (слика). Тада је $BE = ME$. Како је $KM \parallel C_1E$ и K средиште дужи CC_1, следи да је KM средња линија троугла C_1EC, па је $CM = ME$. Према томе, $CM : MB = 1 : 2$.



Сл. уз задатак 317



Сл. уз задатак 319



Сл. уз задатак 320

318. Прва и трећа свећа су се изједначиле по дужини пошто је прва горела 2 сата, а трећа 1 сат. Прва свећа, дакле, гори два пута спорије од треће, па ће цела изгорети за 16 сати. Прва свећа ће за 4 сата изгорети четвртину своје дужине. За то време друга ће горети три сата и такође изгорети четвртину своје дужине. Тада ће се ове две свеће изједначити по дужини.

319. Нека су E и F тачке на страници AB такве да је $\measuredangle ADE = 60^\circ$ и $\measuredangle BDF = 40^\circ$ (слика). Из подударности троуглова ACD и AED следи да је (1) $DC = DE$. Троуглови DEF, FBD и ADF, су једнакокраки, па је (2) $DE = DF = FB$ и (3) $AD = AF$. Из (1) и (2) следи (4) $DC = FB$, па из (3) и (4) добијамо $AB = AF + FB = AD + DC$.

320. Јелена води игру ка сигурној победи користећи чињеницу да је паралелограм централно симетрична фигура, са центром симетрије у пресеку дијагонала. Она прво нацрта круг чији је центар у пресеку дијагонала паралелограма. Затим ма где Радован нацрта свој круг, Јелена нацрта круг који је Радовановом кругу симетричан у односу на пресечну тачку дијагонала. На слици су Јеленини кругови осенчени. На тај начин Јелена ће увек моћи да нацрта круг после Радована, а самим тим и побеђује у игри.

321. *Прво решење.* Ако су p, q, r непарни бројеви, онда је број $pqr+pq+qr+rp+p+q+r$ непаран, па не може бити једнак 2006. Дакле, бар један од бројева p, q и r је паран, дакле једнак 2. Нека је $r = 2$. Тада једначина постаје $3pq + 3p + 3q = 2004$, односно $pq + p + q = 668$. Опет је један од бројева p и q паран, јер би у супротном $pq + p + q$ био непаран. Следи, на пример, $q = 2$, па је $3p = 666$, одноно $p = 222$, што није прост број. Дакле, такви бројеви не постоје.

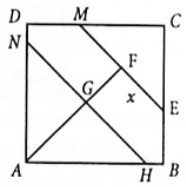
Друго решење.

$$\begin{aligned} pqr + pq + qr + rp + p + q + r = 2006 \\ \iff pqr + pq + qr + rp + p + q + r + 1 = 2007 \\ \iff (p+1)(q+1)(r+1) = 3 \cdot 3 \cdot 223. \end{aligned}$$

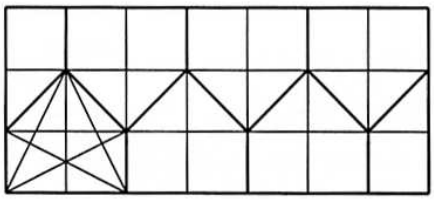
Не смањујући општост, претпоставимо да је $p \leqslant q \leqslant r$. Тада је $p + 1 = 3$, $q + 1 = 3$, $r + 1 = 223$, па је $p = 2$, $q = 2$, $r = 222$. Дакле, r није прост, па такви бројеви не постоје.

322. Означимо дужину дужи FE са x (слика). Троугао MCE је правоугли једнакокраки, па је и $CF = x$. Из $P_{\triangle MCE} = \frac{1}{5}P_{ABCD}$ следи $x^2 = \frac{1}{5}a^2$, односно $x = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. Троуглови AHG и MCE су подударни, па је $AH = 2x = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$ и $AG = CE = x\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{10}}{5}$. Сада је $EF+FG+GH = CF+FG+GA = d = a\sqrt{2}$. Даље је $HB = a-2x = a-\frac{2a\sqrt{5}}{5}$ и $BE = a - x\sqrt{2} = a - \frac{a\sqrt{10}}{5}$, па је

$$O = EF + FG + GH + HB + BE = a\left(2+\sqrt{2}-\frac{2}{5}\sqrt{5}-\frac{1}{5}\sqrt{10}\right).$$



Сл. уз задатак 322



Сл. уз задатак 325

323.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1\cdot 6\cdot 11}+\frac{1}{6\cdot 11\cdot 16}+\cdots+\frac{1}{1996\cdot 2001\cdot 2006}\\
&\quad=\frac{1}{10}\cdot\frac{11-1}{1\cdot 6\cdot 11}+\frac{1}{10}\cdot\frac{16-6}{6\cdot 11\cdot 16}+\cdots+\frac{1}{10}\cdot\frac{2006-1996}{1996\cdot 2001\cdot 2006}\\
&=\frac{1}{10}\left(\frac{1}{1\cdot 6}-\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{6\cdot 11}-\frac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\frac{1}{1996\cdot 2001}-\frac{1}{2001\cdot 2006}\right)\\
&\quad=\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2001\cdot 2006}\right)=\frac{1003\cdot 667-1}{10\cdot 2001\cdot 2006}=\frac{669000}{10\cdot 2001\cdot 2006}=\frac{11150}{667\cdot 1003}.
\end{aligned}$$

Сада је јасно да $q = 667\cdot 1003$ није дељив бројем 2006.

324. Претпоставимо да тврђење задатка није тачно. Тада постоји број n, такав да је после n бацања кошаркаш имао мање од 80%, а после $n+1$ бацања више од 80% погодака. Ако је k број погодака у тих n бацања, онда је $\frac{k}{n} < \frac{4}{5} < \frac{k+1}{n+1}$. Из ових неједнакости следи да је $5k < 4n$ и $5k < 4n < 5k+1$. Ово је немогуће јер не постоји природан број између два суседна природна броја. Дакле, добили смо контрадикцију са уведеном претпоставком, па следи да је у неком тренутку кошаркаш имао успешност тачно 80%.

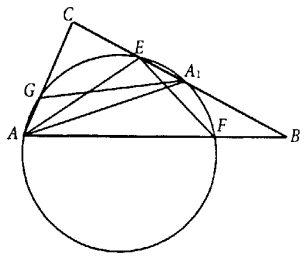
325. Дати правоугаоник поделимо на 8 делова као на слици (6 „кућица“ и две „полукућице“). Растојање било које две тачке унутар једног дела мање је од $\sqrt{5}$, тј. од „дијагонале“ тог дела (може бити једнако $\sqrt{5}$ само у случају да је једна од тачака на рубу датог правоугаоника, што је искључено условом задатка). На основу Дирихлеовог принципа, постоји део у којем су бар две тачке. Те две тачке су међусобно удаљене мање од $\sqrt{5}$.

326. Сваки петоцифрени палиндром може се написати у облику

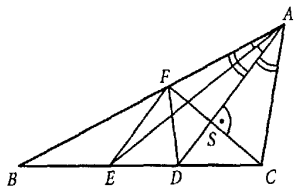
$$\overline{abcba} = 10001a + 1010b + 100c = 101(99a + 10b + c) + 2a - c.$$

Дакле, $2a - c$ мора бити дељив са 101, а како су a и c једноцифрени бројеви, мора бити $2a - c = 0$, тј. $c = 2a$. Највеће цифре за које то важи су $a = 4$, $c = 8$. За b узимамо највећу цифру, тј. $b = 9$. Тражени број је 49894.

327. Како је $\measuredangle FAA_1 = \measuredangle FEA_1$ (периферијски углови над истим луком) и $\measuredangle ABA_1 = \measuredangle FBE$, следи да је $\triangle ABA_1 \sim \triangle EBF$ (слика). Одатле је $BF = \dfrac{BA_1}{AB} BE$. Слично, из $\triangle AEC \sim \triangle A_1GC$ следи да је $CG = \dfrac{A_1C}{AC} CE$. Како је $A_1C = A_1B$ и $\dfrac{CE}{BE} = \dfrac{AC}{AB}$ (AE је симетрала угла ABC), следи да је $BF = CG$.



Сл. уз задатак 327



Сл. уз задатак 330

328. Означимо дате бројеве са a, b и c. Према условима задатка је

$$(1) \qquad abc = 1 \qquad \text{и} \qquad (2) \qquad a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Из (2), користећи (1), добијамо да је $a + b + c > ab + bc + ca$, одакле је $a + b + c - ab - bc - ca + abc - 1 > 0$, тј. $(a - 1)(b - 1)(c - 1) > 0$. Последња неједнакост важи само ако је тачно један чинилац на левој страни позитиван или су сва три позитивна. Други случај није могућ, јер је $a > 1$, $b > 1$, $c > 1$ супротно услову (1), па остаје први случај, тј. тачно један од бројева a, b, c је већи од 1.

329. Нека је укупан број екипа n; тада је укупан број бодова које су освојиле екипе $n(n - 1)$. Како је $n(n - 1) \geqslant 7 + 5 + 3$, следи да је $n \geqslant 5$. Екипа које су се пласирале иза трећег места има $n - 3$, и свака од њих је освојила мање од 5 бодова, па је $n(n - 1) \leqslant 15 + 5(n - 3)$, дакле, $n < 6$. Из свега овога следи да је $n = 5$. Укупан број бодова је 20, па су четврто и петопласирана екипа освојиле 3, односно 2 бода.

330. Нека је F тачка странице AB таква да је $\measuredangle ACF = 60^\circ$ (слика). Троугао AFC је једнакостраничан (сви углови су му од 60°). Зато је симетрала AD нормална на FC. Нека је S тачка пресека AD и FC. Како је D на симетрали дужи FC, то је $DF = DC = DE$. Следи да је EC пречник полукружнице која пролази кроз тачку F, па је $\measuredangle EFC$ прав. Даље је $\measuredangle FEA = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ - 15^\circ = 15^\circ$, па је троугао EFA једнакокрак. Следи да је $FA = FE$, па је и $FC = FE$. Дакле, $\triangle EFC$ је једнакокрако-правоугли троугао, па је $\measuredangle DCF = 45^\circ$, одакле је $\measuredangle BCA = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$.

331. Број $n^2 + 2006n$ је свакако већи од n^2, па ако је он једнак квадрату природног броја, мора бити облика $(n+k)^2$ за неко природно k. Из једнакости

$$n^2 + 2006n = (n+k)^2 = n^2 + 2nk + k^2 \tag{1}$$

добијамо да је $k^2 = n(2006-2k)$, па мора бити $2006-2k \geqslant 0$, односно $k \leqslant 1003$. Највећа могућа вредност за k је, дакле, 1003, али она очигледно не задовољава услов (1). За $k = 1002$ се добија $n = 501 \cdot 1002$ који задовољава услове задатка и највећи је број са том особином.

332. *Прво решење.* Нека је $\triangle ABB'$ симетричан троуглу ABC у односу на праву AB, а $\triangle AC'C$ симетричан троуглу ABC у односу на праву AC (нацртати слику!). Тада је $\triangle AB'C'$ једнакостраничан (јер је једнакокрак, крака једнаког b, са углом при врху једнаким $3 \cdot 20^\circ = 60^\circ$). Означимо са D и E пресеке дужи $B'C'$ са крацима AB и AC датог троугла. Ако означимо $BD = x$ и $DE = y$, из сличности $\triangle B'BD \sim \triangle ABC$ добијамо $x : a = a : b$, одакле $x = \dfrac{a^2}{b}$. С друге стране, на основу Талесове теореме добијамо да је $y : a = (b-x) : b$, одакле $y = \dfrac{a}{b}\left(b - \dfrac{a^2}{b}\right) = \dfrac{a(b^2-a^2)}{b^2}$. Најзад, из $b = B'C' = DE + 2 \cdot B'D = y + 2a$, заменом налазимо $b = \dfrac{a(b^2-a^2)}{b^2} + 2a$, одакле сређивањем следи тражена релација $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

Друго решење. На основу синусне теореме важи

$$\frac{a}{\sin 20^\circ} = \frac{b}{\sin 80^\circ} = \frac{b}{\cos 10^\circ},$$

односно $a \cos 10^\circ = b \sin 20^\circ = 2b \sin 10^\circ \cos 10^\circ$, па је $a = 2b \sin 10^\circ$, тј. $\sin 10^\circ = \dfrac{a}{2b}$. С друге стране је

$$\frac{1}{2} = \sin 30^\circ = \sin(3 \cdot 10^\circ) = 3 \sin 10^\circ - 4 \sin^3 10^\circ,$$

па замењујући претходно добијени израз за $\sin 10^\circ$ налазимо да је $\dfrac{1}{2} = 3 \cdot \dfrac{a}{2b} - 4 \cdot \dfrac{a^3}{8b^3}$, одакле лако следи тражена релација $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

333. Означимо са a и b дужине страница „великог“ правоугаоника, а са $a_1, a_2, \ldots, a_7$, односно $b_1, b_2, \ldots, b_7$ дужине страница малих правоугаоника који се налазе „на дијагонали“ великог. Тада је обим великог правоугаоника

$$2(a+b) = 2[(a_1 + \cdots + a_7) + (b_1 + \cdots + b_7)] = 2(a_1 + b_1) + \cdots + 2(a_7 + b_7),$$

тј. једнак је збиру обима малих правоугаоника „на дијагонали“. Како су ти обими, по претпоставци, цели бројеви, то је и обим великог правоугаоника цео број.

334. Размотримо следеће случајеве: 1° n је производ два различита непарна делиоца, већа од 1. Оба та делиоца, као и двојка, садржани су међу чиниоцима $2, 3, \ldots, n-1$ броја $(n-1)!$, те њихов производ $2n$ дели $(n-1)!$.

2° n је квадрат непарног броја $m > 1$. Тада се међу бројевима $2, 3, \ldots, n-1$ налазе свакако бројеви m и $2m$, па и тада $2n \mid (n-1)!$.

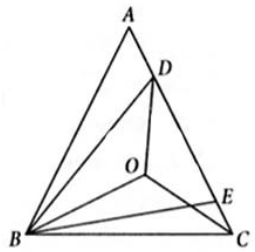
3° n је облика $2^k m$, где је m непаран број и $k \geqslant 1$. Број m је свакако садржан међу бројевима $2, 3, \ldots, n-1$. Остаје да се докаже да је производ тих бројева дељив са 2^{k+1}. „Најгори“ је случај када је $m = 1$, $n = 2^k$, $k > 2$. Међу наведеним бројевима је $n/2 - 1 = 2^{k-1} - 1$ парних, што значи да им је производ дељив са 2^{k+1}, јер је $2^{k-1} - 1 > k + 1$, сем у случају $k = 3$; но, и тада $2^4 \mid 7!$ (проверити!).

335. Покажимо најпре да тачка D припада дужи AE. У супротном би тачка E припадала дужи AD, па би следило $\measuredangle ACB + \measuredangle CBD = \measuredangle BDE = \measuredangle EDB < \measuredangle ABC$, што није тачно. Дакле, важи A–D–E (слика). Зато је

$$\begin{aligned}\measuredangle DBC &= \measuredangle DBE + \measuredangle EBC = \measuredangle EDB + \measuredangle EBC\\ &= \measuredangle BAC + \measuredangle ABD + \measuredangle EBC = \measuredangle BAC + 2\measuredangle EBC\\ &= 180^\circ - 2\measuredangle ABC + 2\measuredangle EBC = 180^\circ - 2(\measuredangle DBC + \measuredangle ABD) + 2\measuredangle EBC\\ &= 180^\circ - 2(\measuredangle DBE + \measuredangle EBC) + 2\measuredangle EBC = 180^\circ - 2\measuredangle DBC,\end{aligned}$$

дакле, $\measuredangle DBC = 60^\circ$. Тачка O је центар круга уписаног у троугао DBC, па је

$$\begin{aligned}\measuredangle COD &= 180^\circ - (\measuredangle OCD + \measuredangle ODC)\\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(\measuredangle BDC + \measuredangle DCB)\\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \measuredangle DBC)\\ &= 90^\circ + \frac{1}{2}\measuredangle DBC = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ.\end{aligned}$$



Сл. уз задатак 335

336. *Прво решење.* Најмањи савршени број је 6 и он задовољава услове задатка. Претпоставимо да је $n > 6$ и да су $n-1$ и $n+1$ прости бројеви. Тада мора да важи $n = 6k$ за неки природан број $k > 1$. То значи да су 1, k, $2k$, $3k$ и $6k$ различити делиоци броја n, па је збир свих његових делилаца већи или једнак од

$$1 + k + 2k + 3k + 6k = 12k + 1 = 2n + 1 > 2n$$

и број n није савршен. Дакле, $n = 6$ је једини број који задовољава услове задатка.

Друго решење. Према Еуклид-Ојлеровој теореми[1] сваки паран савршени број n може се приказати у облику

$$n = 2^{p-1}(2^p - 1),$$

где су p и $2^p - 1$ прости бројеви. Ако је $p = 2$, добија се први савршени број 6 који, очигледно, задовољава услове задатка. Ако је p непаран, онда је $2^p \equiv 2 \pmod 3$ и $2^{p-1} \equiv 1 \pmod 3$, па је $n - 1 \equiv 0 \pmod 3$, и број $n - 1$ не може да буде прост. Дакле, број 6 је једино решење задатка.

337. За $n = 2$ фигура се може покрити на начин приказан на слици 1, и у том случају тражени највећи број је 6.

Сл. уз задатак 337

[1] Видети, на пример, В. Мићић, З. Каделбург, Д. Ђукић: *Увод у теорију бројева*, Материјали за младе математичаре 15, Друштво математичара Србије, Београд 2013.

За $n > 2$ исецимо фигуру на четири подударна дела дуж линија између n-те и $(n+1)$-е врсте и између n-те и $(n+1)$-е колоне. Обојимо те делове на шаховски начин, као што је приказано на слици 2 за $n = 5$ и на слици 3 за $n = 4$. Свака домина покрива једно бело и једно црно поље. Тада највећи број домина које се могу сместити на једном делу фигуре није већи од броја белих поља (број белих поља је мањи од броја црних). На сваком од четири дела (без крајњег горњег и крајњег десног) домине се могу поставити на следећи начин тако да покривају сва бела поља: поставити вертикално домине на две најниже врсте, полазећи од леве ивице фигуре, све док је то могуће, и хоризонталне домине на остале врсте, полазећи од леве ивице, све док је то могуће.
Ако је n непарно, $n = 2k - 1$, на сваком делу има

$$2((k-1) + (k-2) + \cdots + 2 + 1) = k(k-1)$$

белих поља, па је то и највећи број домина које се могу поставити на тај део. При томе, према начину постављања који смо описали, гранична поља (којима се делови покривају) остала су непокривена. Зато је највећи број домина које се могу поставити на фигуру једнак $4k(k-1)+4$ (четири домине су на граничним пољима којима се додирују делови). Дакле, у овом случају, тражени највећи број домина је

$$4k(k-1) + 4 = 4k^2 - 4k + 4 = (2k-1)^2 + 3 = n^2 + 3.$$

За $n = 2k$ имамо $(2k-1)+(2k-3)+\cdots+3+1 = k^2$ белих поља. Слично као у претходном случају добијамо да је сада тражени највећи број домина једнак

$$4k^2 + 4 = (2k)^2 + 4 = n^2 + 4.$$

2007. година

338. а) 693; б) 541; в) 200.

339. $8 \cdot 7 + 8 : 2 = 56 + 4 = 60$.

340. Постоје три решења: $\mathrm{III} + \mathrm{V} + \mathrm{VI} = \mathrm{XIV}$, $\mathrm{II} + \mathrm{VI} + \mathrm{VI} = \mathrm{XIV}$, $\mathrm{II} + \mathrm{V} + \mathrm{VII} = \mathrm{XIV}$.

341. а) $555 + 222 = 522 + 255 = 552 + 225 + 525 + 252 = 777$.

б) $555 - 222 = 255 - 222 = 33$.

342. Софија је замислила број 522, јер је $600 - 148 + 70 = 452 + 70 = 522$.

343. Резултат је 2 450 444.

344. За 8 година.

345. Како је $2007 : 3 = 669$, а $2007 : 9 = 223$, следи да су странице сваког од тих правоугаоника дужине 669 cm и 223 cm. Према томе, обим једног од њих је 1784 cm.

346. Нека је x број ученика које треба преместити из прве у другу школу. Након премештања тих ученика у другој школи би било $946 + x$ ученика, што значи да их је пре премештања у првој школи било $946 + 2x$. Следи да је $2x = 512$, тј. $x = 256$.

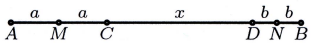
347. Број a је тим већи што су остала два сабирка мања. Због тога, највећа вредност броја a је 7999 када су остала два броја 1000 и 1001.

348. Како је $4536 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 7$, а $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 80$, то је тражени количник 80.

349. Нека је мера мањег угла α. Како је $2007' = 33°27'$, следи да је мера већег угла $\alpha + 33°27'$. Користећи услов комплементности добијамо да је $2\alpha + 33°27' = 90°$, па је $2\alpha = 56°33'$. Следи да је мера мањег угла $28°16'30''$, а мера већег угла $61°43'30''$.

350. Да би број био дељив са 15 он мора бити дељив и са 3 и са 5. Како је број дељив са 5 ако му је цифра јединица 0 или 5, а дељив са 3 ако му је збир цифара дељив са 3, тражени бројеви су: 3150, 6150, 9150, 1155, 4155 и 7155.

351. Нека је распоред тачака A, B, C и D као на слици. Средишта дужи AC и DB означимо са M и N, а дужине дужи MC, CD и DN обележимо редом са a, x и b. Тада су и дужине дужи AM и NB редом a и b. Према условима задатка следи да је $2a + x + 2b = 60\,\mathrm{cm}$, а $a + x + b = 45\,\mathrm{cm}$. Одатле је $a + b = 15\,\mathrm{cm}$, а $x = 30\,\mathrm{cm}$.



Сл. уз зад. 351

352. Унија скупова A и B садржи 17 елемената, а пресек 5 елемената, тако да ће сваки од скупова $A \setminus B$ и $B \setminus A$ садржати по 6 елемената и то $A \setminus B = \{10, 11, 12, 14, 15, 16\}$, а $B \setminus A = \{3, 4, 5, 6, 8, 9\}$. Према томе, $A = \{1, 2, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$, а $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 13, 17\}$.

353. Вредност израза је -9.

354. Прва неједначина је еквивалентна са неједначином $x \geqslant -6$, а друга са $x < -3$. Према томе, заједничка целобројна решења датих неједначина су -6, -5 и -4, а збир тих решења је -15.

355. Углови AMP и MBN, односно MAP и BMN су једнаки као углови са паралелним крацима. Такође је $AM = MB$ јер је M средиште дужи AB. На основу другог става подударности (УСУ) следи да су троуглови AMP и MBN подударни.

356. Како је $a = (1-2)+(3-4)+(5-6)+\cdots+(2005-2006) = (-1)\cdot 1003 = -1003$, а $b = (1-3)+(5-7)+(9-11)+\cdots+(2005-2007) = (-2)\cdot 502 = -1004$, то је $a > b$.

357. Нека је $\measuredangle ABC = \alpha$. Тада важи да је и $\measuredangle BAC = \alpha$ и $\measuredangle BDE = \alpha$ јер су троуглови ABC и BDE једнакокраки. Како је збир унутрашњих углова у четвороуглу $ABDF$ једнак $360°$, то је $3\alpha + 144° = 360°$, односно $\alpha = 72°$. Следи да су и у троуглу ABC и у троуглу BDE мере углова $72°$, $72°$ и $36°$.

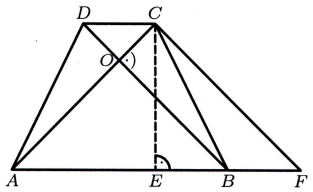
358. Дата једначина еквивалентна је једначини $3^8 + 3^8 - 5\cdot 3^8 = x\cdot 3^8$. Следи да је $x = -3$.

359. Како је $-5\sqrt{2} = -\sqrt{50}$, $4\sqrt{3} = \sqrt{48}$, $-3\sqrt{5} = -\sqrt{45}$ и $2\sqrt{6} = \sqrt{24}$, то је распоред датих бројева од већег ка мањем следећи: $4\sqrt{3}$, $2\sqrt{6}$, $-3\sqrt{5}$, $-5\sqrt{2}$.

360. У троуглу ABC важи да је $AB^2 + BC^2 = AC^2$, па је $\alpha = 90°$. У троуглу ACD дужина катете AD једнака је половини дужине хипотенузе. Следи да је наспрам те катете угао од $30°$, тј. $\beta = 30°$. Према томе, $\alpha + \beta = 120°$.

361. Како је $45^{10} = 3^{10}\cdot 15^{10} = 9^5\cdot 15^{10}$ и $15^{15} = 15^5\cdot 15^{10}$, то је 15^{15} већи број од броја 45^{10}.

362. Нека је O пресек дијагонала датог трапеза, CE висина, а F тачка у којој права кроз C паралелна дијагонали BD сече праву којој припадају тачке A и B. Четвороугао $BFCD$ је паралелограм, па је $BF = DC$ и $FC = BD$. Код једнакокраког трапеза дужине дијагонала су једнаке, па је троугао ACF једнакокраки. Како су ACF и AOB углови са паралелним крацима, они су једнаки, па је троугао ACF и правоугли. Следи да је $AF = 2\cdot CE = 10\,\text{cm}$. Како је $AB + CD = AB + BF = AF$, то је $AB + CD = 10\,\text{cm}$. Површина трапеза $ABCD$ једнака је $\dfrac{AB+CD}{2}\cdot CE$, тј. $25\,\text{cm}^2$.



Сл. уз зад. 362

363. Нека је дужина правоугаоника a, а ширина b. Тада је дужина новог правоугаоника $(1+\frac{p}{100})a$, а ширина $(1-\frac{p}{100})b$. Како је површина новог правоугаоника мања за 16% у односу на површину првобитног правоугаоника, добијамо да је $(1+\frac{p}{100})a\cdot(1-\frac{p}{100})b = 0,84\cdot ab$. Одатле следи да је $1-(\frac{p}{100})^2 = 0,84$, тј. $p = 40$.

364. Дата неједначина еквивалентна је неједначини $x\cdot(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-1) \geqslant -\frac{2}{3}$, тј. неједначини $x\cdot(-\frac{2}{3}) \geqslant -\frac{2}{3}$. Следи да је $x \leqslant 1$, па $x \in (-\infty, 1]$.

365. Обележимо са F тачку пресека дужи AE и BC. Површине троуглова AFC, ABF, ADB, FBE и BDE су једнаке јер ови троуглови имају једнаку по једну страницу и одговарајућу висину. Следи да је површина троугла ADE два пута већа од површине троугла ABC и износи $64\,\text{cm}^2$.

366. Јасно је да је $x \neq 0$ јер именилац разломка не може бити 0. Ако је $x < 0$, дата једначина еквивалентна је једначини $x - x = \dfrac{x}{-x}$, тј. $0 = -1$, па у овом случају нема

решења. Ако је $x > 0$, дата једначина еквивалентна је једначини $x + x = \frac{x}{x}$, односно $x = \frac{1}{2}$, па је то и решење полазне једначине.

367. Дате праве одређују једну раван. Уколико дате тачке не припадају истој правој, оне такође одређују једну раван. Свака права са сваком тачком одређује по једну раван, што значи још највише 6 равни. Укупно то је највише 8 равни.

368. а) $438 + 163 = 601$; б) $908 - 159 = 749$; в) $60 : 5 + 5 \cdot 3 = 27$; г) $85 + 15 : 5 = 88$.

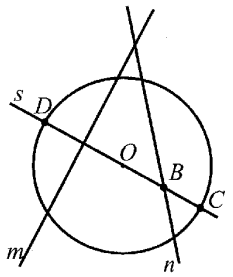
369. В. слику. г) Дуж OC је полупречник круга.

370. Симонидина мајка ће за три године имати 30 година, а Симонида 10. Симонида сада има $10 - 3 = 7$ година.

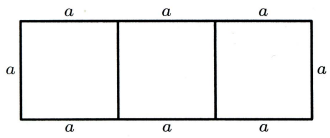
371. а) Пренос утакмице је трајао 1 час и 45 минута.

б) Како је емисија о рибама трајала 55 минута, то је пренос трајао дуже 50 минута.

372. Највећи троцифрени број чији је збир цифара 12 је 930, а најмањи троцифрени број чији је збир цифара 21 је 399. Разлика ових бројева је $930 - 399 = 531$.



Сл. уз зад. 369



Сл. уз зад. 375

373. а) Највећи могући такав број је 6644322. б) Најмањи могући такав број је 6364422.

374. Може. То се дешава када једна свешчица има 40 страница, а осталих пет свешчица по 44 странице.

375. Ако дужину странице квадрата обележимо са a, онда је обим квадрата $4a$, а обим правоугаоника је $8a$, слика. Према томе, обим правоугаоника је два пута већи од обима једног од квадрата.

376. Љиља и Биља заједно имају 62 динара више од Маше и Таше заједно. Како Љиља има 70 динара више од Маше, то Таша има 8 динара више од Биље.

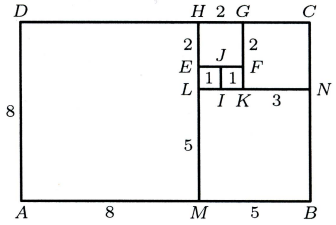
377. Има их једнако, по десет. То су: 112, 121, 211, 220, 202, 130, 103, 310, 301 и 400, односно 1114, 1141, 1411, 4111, 1122, 1212, 1221, 2112, 2121 и 2211.

378. То су: 147, 174, 417, 471, 714 и 741.

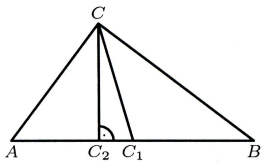
379. Како је $(3x^\circ + 1^\circ) + (x^\circ + 7^\circ) = 180^\circ$, то је $4x^\circ = 172^\circ$, односно $x = 43$. Следи да су на слици углови од 130° и 50°.

380. Како енглески језик учи $\frac{4}{5}$ свих ученика, то остатак, односно $\frac{1}{5}$ свих ученика учи само француски. Број ученика који уче оба језика добијамо када од броја свих који уче француски одузмемо број оних који уче само тај језик. Како је $\frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{11}{20}$, следи да $\frac{11}{20}$ свих ученика учи оба језика.

381. Обележимо сва темена свих квадрата, као на слици. Обим квадрата $EFGH$ је 8 cm, па је дужина његове странице 2 cm. Квадрати $LIJE$ и $IKFJ$ имају странице једнаке дужине, по 1 cm. Даље, дужина странице квадрата $KNCG$ је 3 cm, дужина странице квадрата $MBNL$ је 5 cm, а дужина странице квадрата $AMHD$ је 8 cm. Према томе, дужине страница правоугаоника $ABCD$ су 13 cm и 8 cm, па је његова површина 104 cm^2.



Сл. уз зад. 381



Сл. уз зад. 389

382. Из једнакости $\frac{2}{9} = \frac{2 \cdot 223}{9 \cdot 223} = \frac{446}{2007}$ следи да је $\frac{2}{9} < \frac{447}{2007}$. Како је $\frac{447}{2007} = \frac{149}{669}$ и $\frac{149}{669} < \frac{150}{669} < \frac{150}{666}$ и $\frac{150}{666} = \frac{25}{111}$, то је $\frac{447}{2007} < \frac{25}{111}$. Решење је: $\frac{2}{9}, \frac{447}{2007}, \frac{25}{111}$.

383. Дата неједначина је еквивалентна са $-6 < x - 1 < 6$, односно са $-5 < x < 7$. Према томе, целобројна решења неједначине су -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6, а њихов збир је 11.

384. Из чињенице да се симетрале углова BAC и ABC секу под углом од $124°$ следи да је $\frac{1}{2} \cdot \measuredangle BAC + \frac{1}{2} \cdot \measuredangle ABC + 124° = 180°$. Одатле добијамо да је $\measuredangle BAC + \measuredangle ABC = 112°$, па је $\measuredangle ACB = 68°$.

385. Нека је на почетку у кеси било x кликера. Аца је додао $x + 1$ кликер, што значи да је након тога у кеси било $2x + 1$ кликера. Затим је Веса додао $2(2x + 1) + 3$ кликера, тј. $4x + 5$ кликера, што значи да је након тога у кеси било $6x + 6$ кликера. Последњи је пришао Веса и додао $3(6x + 6) + 5$ кликера, односно $18x + 23$ кликера. Према томе, на крају је у кеси било $24x + 29$ кликера. Како је $24x + 29 = 149$, то је $x = 5$.

386. Троугао CBE је једнакокрако правоугли, па је $BC = EB$. Нека је $\measuredangle ABC = \alpha$. Тада је $\measuredangle BCA = 90° - \alpha$. Како је $\measuredangle ABC + 90° + \measuredangle EBD = 180°$, то је $\measuredangle EBD = 90° - \measuredangle ABC$, тј. $\measuredangle EBD = 90° - \alpha$. Одатле добијамо да је $\measuredangle DEB = \alpha$. На основу свега овога следи да је $\measuredangle ABC = \measuredangle DEB$ и $\measuredangle BCA = \measuredangle EBD$. На основу другог става подударности (УСУ) следи да је $\triangle ABC \cong \triangle DEB$.

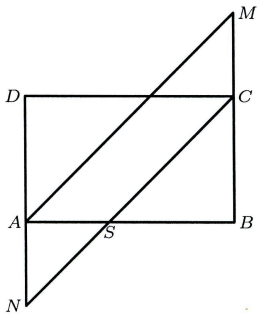
387. Распоредимо ученике у 366 група, при чему истој групи припадају они ученици који славе рођендан истог датума. Како је $800 = 366 \cdot 2 + 68$, бар једна група садржи бар 3 ученика. Они имају рођендан истог датума.

388. $\sqrt{(\sqrt{5} - 5)^2} - (\sqrt{5} - 5) = |\sqrt{5} - 5| - (\sqrt{5} - 5) = 5 - \sqrt{5} - \sqrt{5} + 5 = 10 - 2\sqrt{5}$.

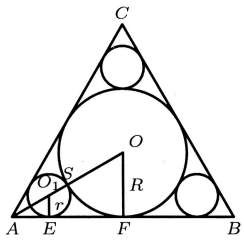
389. Примењујући Питагорину теорему на правоугли троугао ABC добијамо да је $AB^2 = AC^2 + BC^2$, па је дужина хипотенузе AB једнака 50 cm (слика). Дужина тежишне дужи која одговара хипотенузи једнака је половини дужине хипотенузе, па је дужина дужи CC_1 једнака 25 cm. Површина правоуглог троугла једнака је половини производа дужина катета, односно половини производа дужина хипотенузе и одговарајуће висине. Одавде добијамо да је дужина дужи CC_2 једнака $\frac{30 \cdot 40}{50}$ cm, тј. 24 cm. Коначно, примењујући

Питагорину теорему на правоугли троугао C_1CC_2 добијамо да је $C_1C_2^2 = C_1C^2 - CC_2^2$, па је дужина дужи C_1C_2 једнака $7\,\mathrm{cm}$.

390. Нека је тачка S пресек дужи AB и CN. Како је $\measuredangle BCS = 45^\circ$, а троуглови BCS и ANS су правоугли, то је $\measuredangle CSB = 45^\circ$ и $\measuredangle ASN = \measuredangle ANS = 45^\circ$ (слика). Следи да су троуглови BCS и ANS и једнакокраки, па је $BS = BC = 3\,\mathrm{cm}$, а $AN = AS = 2\,\mathrm{cm}$. Како је и $\measuredangle BAM = 45^\circ$, он је једнак са $\measuredangle BSC$, па је $NC \parallel AM$. Такође је $NA \parallel CM$, па је четвороугао $ANCM$ паралелограм. Његова површина је производ дужина странице AN и одговарајуће висине AB, те је према томе једнака $10\,\mathrm{cm}^2$.



Сл. уз зад. 390



Сл. уз зад. 394

391. Број је дељив са 15 ако је дељив и са 5 и са 3. Да би био дељив са 5, тражени број се мора завршавати нулом, а да би био дељив са 3, збир цифара му мора бити дељив са 3. Због тога се у декадном запису тог броја мора појавити тачно k четворки, где је k број дељив са 3. Како тражимо најмањи природан број са задатом особином, то је $k = 3$. Тражени број је 4440.

392. Најмањи природан број који се може добити је 1, на пример на следећи начин: $(1-2-3+4)+(5-6-7+8)+\cdots+(2001-2002-2003+2004)-2005+2006$.

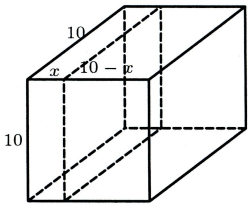
393. Решење дате једначине је $x = \dfrac{8-14k}{3}$. То решење је веће од -2 ако је $\dfrac{8-14k}{3} > -2$, тј. ако је $k < 1$. Према томе, $k \in (-\infty, 1)$.

394. Нека су тачка O и R центар и дужина полупречника круга k, а тачка O_1 и r центар и дужина полупречника једног од три подударна уписана круга (слика). Нека је, даље, S додирна тачка та два круга, а F и E тачке у којима их страница AB додирује. Како су троуглови AFO и AEO_1 правоугли, а $\measuredangle FAO = 30^\circ$, то је $AO = 2R$ и $AO_1 = 2r$. Следи да је $AS = AO - OS = R$, а такође и $AS = AO_1 + O_1S = 3r$. Према томе, $R = 3r$. Површина круга k је $R^2\pi$, односно $9r^2\pi$, а збир површина три уписана круга је $3r^2\pi$. Тражени однос је $3:1$.

395. Дата неједначина еквивалентна је са $2 - a < x < 2 + a$. Ако је $a \leqslant 1$, број 2 је једино решење неједначине. Ако је $1 < a \leqslant 2$, решења неједначине су 1, 2 и 3. Ако је $a > 2$, неједначина има пет или више решења. Следи да не постоји позитиван реалан број a за који дата неједначина има тачно 4 решења у скупу целих бројева. Према томе, тражени скуп вредности је празан.

396. Нека дата раван дели ивице коцке које сече на делове дужине x и $10 - x$ (у cm), слика. Тада су површине квадара (у cm^2) на које је подељена коцка $2 \cdot 100 + 4 \cdot 10x$ и $2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 \cdot (10 - x)$, односно $200 + 40x$ и $600 - 40x$. Однос тих површина је $2:3$,

па из једначине $3 \cdot (200 + 40x) = 2 \cdot (600 - 40x)$ добијамо да је $x = 3$. Запремине датих квадара су $3 \cdot 10 \cdot 10\,\mathrm{cm}^3$ и $7 \cdot 10 \cdot 10\,\mathrm{cm}^3$. Следи да је однос тих запремина $3 : 7$.



Сл. уз зад. 396

397. Могуће је да два темена троугла припадају истој страници квадрата или да свако теме троугла припада различитој страници квадрата. У првом случају, на 4 начина бирамо страницу квадрата којој припадају два темена троугла, на 3 начина бирамо две од три тачке са изабране странице и на 9 начина бирамо треће теме троугла од тачака које припадају осталим страницама квадрата. Следи да је, у овом случају, датим тачкама одређено $4 \cdot 3 \cdot 9$ троуглова, тј. 108 троуглова.

У другом случају, на 4 начина бирамо три од четири странице квадрата којима припада по једно теме троугла, а на $3{\cdot}3{\cdot}3$ начина са сваке од изабраних страница квадрата по једну од три дате тачке. Следи да је, у овом случају, датим тачкама одређено $4{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}3$ троуглова, тј. 108 троуглова. Према томе, укупно је датим тачкама одређено 216 троуглова.

398. Има их 15. То су: ABG, BGC, CGF, AGF, AFE, EFD, CFD, CDE, ADE, ACF, ABC, ABF, BCF, ACE и ACD.

399. Могуће је да Воја, Раде и Зоран добију редом кликера: 1, 1, 5 или 1, 2, 4 или 1, 3, 3 или 1, 4, 2 или 1, 5, 1 или 2, 1, 4 или 2, 2, 3 или 2, 3, 2 или 2, 4, 1 или 3, 1, 3 или 3, 2, 2 или 3, 3, 1 или 4, 1, 2 или 4, 2, 1 или 5, 1, 1. То је укупно 15 начина.

400. Нека је ширина стазе x, а дужина тражене странице y (све у m). Пешак који обиђе целу стазу идући спољном ивицом те стазе уствари пређе за $8x$ m дужи пут него пешак који обиђе целу стазу идући унутрашњом ивицом те стазе. Следи да је $x = 2$. Одатле добијамо да је површина стазе (у m^2) $4{\cdot}2{\cdot}2{+}2{\cdot}2{\cdot}16{+}2{\cdot}2{\cdot}y$. Према томе, $80{+}4{\cdot}y = 176$, па је $y = 24$.

401. Да је и број фазана и број јаребица порастао 3 пута, било би их укупно $3 \cdot 565$, односно 1695. Како је број јаребица порастао 5 пута, а не 3 пута, то разлика $2007 - 1695$ представља 2 пута увећан почетни број јаребица. Према томе, на почетку је у шуми било 156 јаребица и 409 фазана.

402. Како је Б различито од Л и разлика између Б и Л не може бити већа од 1, то је Б = 6. Због преношења 1 при сабирању са цифре јединица хиљада на цифру десетица хиљада, добијамо да је О = 9 и А = 0. Како нема преношења при сабирању са цифре десетица на цифру стотина, то је 2В = 10 + Ј, па је В = 7 или В = 8. Не може бити В = 8 јер би било Ј = 6, а та цифра је већ искоришћена. Према томе, В = 7, Ј = 4. Како је К + Ц = 10 и У + 1 = К, то користећи преостале цифре добијамо да је К = 2, Ц = 8 и У = 1. Након замене дата једнакост гласи: $712 + 59708 = 60420$.

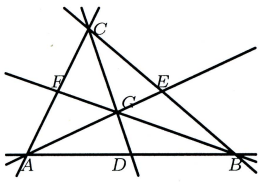
403. Како је $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$, а $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$, то је $\frac{5}{10} < \frac{a}{10} < \frac{15}{20}$, па је $a = 6$ или $a = 7$. Заменом ових вредности у једнакост $\frac{a}{10} + \frac{b}{15} = \frac{5}{6}$ добијамо да је једино решење задатка: $a = 7$, $b = 2$.

404. Како је $10\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{dm}$, то је укупно исечено 1 000 000 коцкица. Да би се поплочала стаза ширине 1 m потребно је поређати једну поред друге 10 коцкица. То значи да је по дужини поређано једна поред друге 100 000 коцкица. Та стаза је дугачка 100 000 dm, односно 10 km. Пешак би ту стазу прешао за 2 сата.

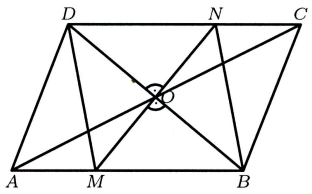
405. Бројеви $2p$, $4r$ и 2006 су парни, па је паран и број $3q$. Онда је и q паран број. Једини паран прост број је 2, па је $q = 2$. Следи да је $2p + 4r = 2000$, односно $p + 2r = 1000$. Како су $2r$ и 1000 парни бројеви, то је и p паран број, па је $p = 2$. Следи да је $r = 499$. Након провере да је 499 прост број закључујемо да је јединствено решење задатка: $p = 2$, $q = 2$, $r = 499$.

406. Остаци при дељењу бројева 287 и 431 природним бројем n су редом 1 и 2, па следи да n дели бројеве 286 и 429. Како је $286 = 2 \cdot 11 \cdot 13$, а $429 = 3 \cdot 11 \cdot 13$, то је могуће да је $n = 11$ или $n = 13$ или $n = 143$. Провером утврђујемо да се при дељењу броја 231 бројем $n + 1$ добија остатак 3 једино за $n = 11$.

407. Једно решење је дато на слици.



Сл. уз зад. 407



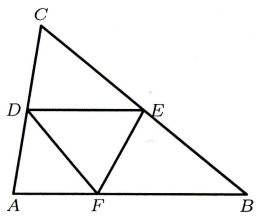
Сл. уз зад. 409

408. Из друге једнакости добијамо да је $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{9}$. Користећи прву једнакост добијамо да је $a = 3$, $b = 27$.

409. Углови OBM и ODN су углови са паралелним крацима, па су једнаки (слика). Тачка O је средиште дијагонале BD, па је $OB = OD$. Како је још $\measuredangle BOM = \measuredangle DON = 90^\circ$, то је по другом ставу подударности троуглова (УСУ) $\triangle MBO \cong \triangle NDO$. Следи да је $MB = ND$. Ове дужи су и паралелне, па следи да је четвороугао $MBND$ паралелограм. Његове дијагонале су међусобно нормалне, па је он ромб.

410. Прости бројеви већи од 3 су непарни, па су a и b непарни бројеви. Њихов збир $a + b$ и њихова разлика $a - b$ су парни бројеви, па је производ $(a + b) \cdot (a - b)$ дељив са 4. При дељењу са 3 бројеви a и b могу имати остатак 1 или 2. Ако имају исти остатак, онда је разлика $a - b$ дељива са 3, а ако имају различит остатак, онда је збир $a + b$ дељив са 3. У сваком случају производ $(a + b) \cdot (a - b)$ је дељив са 3. Како је дељив и са 3 и са 4, дељив је са 12.

411. Нека је F тачка пресека симетрала углова ADE и BED (слика). Како је DE средња линија троугла ABC, то је она паралелна са страницом AB. Одатле следи да је $\measuredangle FDE = \measuredangle AFD$, па је $\measuredangle AFD = \measuredangle ADF$. Троугао AFD је једнакокрак, па је $AF = AD$. Тачка D је средиште странице AC, па је $AF = \dfrac{AC}{2}$. Аналогно добијамо да је $BF = \dfrac{BC}{2}$. Следи да је $AB = \dfrac{AC + BC}{2}$.

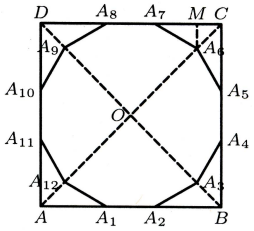


Сл. уз зад. 411

412. Нека је a дужина основице, а b дужина крака (све у cm) троугла који испуњава услове задатка. Како је $a + 2b$ непаран број, то је a непаран број. Збир дужина две странице у троуглу је већи од дужине треће странице, па мора бити $a < 2b$. Како је $a + 2b = 2005$, то је $a < 1003$, па a може бити било који елемент скупа $\{1, 3, \ldots, 1001\}$. Према томе, број троуглова који испуњавају услове задатка је 501.

413. Из $\sqrt{17} > 4$ и $\sqrt{37} > 6$ следи $\sqrt{\sqrt{17}+\sqrt{37}} > \sqrt{10}$. Како је $\sqrt{10} > 3$ и $\sqrt{2} > 1$, то је $\sqrt{5+\sqrt{\sqrt{17}+\sqrt{37}}+\sqrt{2}} > \sqrt{5+3+1}$, па следи тражена неједнакост.

414. Обележимо темена дванаестоугла словима $A_1, A_2, \ldots A_{12}$, а темена квадрата словима A, B, C и D (као на слици). Нека је дужина странице дванаестоугла једнака x (у cm). Обележимо са M подножје нормале из A_6 на страницу квадрата CD. У правоуглом троуглу A_6MA_7 угао A_6A_7M једнак је $30°$ као спољашњи угао правилног дванаестоугла. Због тога је $A_6M = \frac{x}{2}$, а $A_7M = \frac{\sqrt{3}}{2}x$. Троугао A_6CM је једнакокрако правоугли, па је $MC = \frac{x}{2}$. Како је $A_8D = A_7C$, то је $CD = x + 2\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{x}{2})$. Следи да је $x\cdot(2+\sqrt{3}) = 10$, па је $x = 10\cdot(2-\sqrt{3})$.



Сл. уз зад. 414

415. Пођимо од очигледне неједнакости $3^2 > 2^3$. Степеновањем добијамо да је $3^{2000} > 2^{3000}$. Следи да је $3^{2007} > 3^7\cdot 2^{3000}$, па је $3^{2007} - 2^{3000} > (3^7-1)\cdot 2^{3000}$. Како је $3^7 - 1 > 2007$, то је $(3^7-1)\cdot 2^{3000} > 2007\cdot 2^{2007}$. Према томе, $3^{2007} - 2^{3000} > 2007\cdot 2^{2007}$.

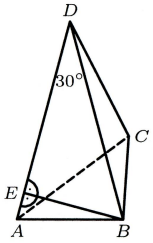
416. Претпоставимо да постоји такав троугао. Ако са P означимо његову површину (у cm^2), онда користећи формулу за површину троугла добијамо да су дужине страница (у cm) тог троугла $\frac{2P}{1}$, $\frac{2P}{2}$ и $\frac{2P}{3}$. Како је $\frac{2P}{1} > \frac{2P}{2} + \frac{2P}{3}$, то је дужина једне странице тог троугла већа од збира дужина друге две странице. То је немогуће, па следи да такав троугао не постоји.

417. Такви четвороцифрени бројеви могу да буду записани са две цифре које се појављују по два пута или са три цифре од којих се једна појављује два пута, а остале две по једном. У првом случају, на три начина бирамо које две цифре се појављују по два пута у запису броја. Нека су то на пример неке цифре a и b. Бројеви записани помоћу њих су: $aabb$, $abab$, $abba$, $baba$, $baab$ и $bbaa$. Према томе, у том случају има $3\cdot 6$, односно 18 бројева. У другом случају, на три начина бирамо цифру која се у запису броја појављује два пута, на четири начина бирамо место на коме је једна од цифара које се у том запису појављују једном, а на три начина бирамо место на коме је друга од цифара које се у том запису појављују једном. У том случају има $3\cdot 4\cdot 3$, односно 36 бројева. Укупно има 54 броја са датом особином.

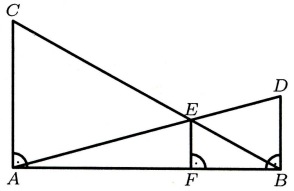
418. Како је $2007^{2005} - 2007 = 2007\cdot(2007^{2004}-1) = 9\cdot 223\cdot(2007^{2004}-1)$, то је дати број дељив са 9. Број 2007^4 се завршава цифром 1, па следи да се и број 2007^{2004} завршава цифром 1. Због тога је $2007^{2004} - 1$ дељив са 10, па је и $2007^{2005} - 2007$ дељив са 10. Како је дати број дељив и са 9 и са 10, он је дељив са 90.

419. Обележимо темена основе пирамиде са A, B и C, а врх са D (слика). Нека је тачка E подножје висине из темена B бочне стране ABD. У правоуглом троуглу EBD угао EDB једнак је $30°$, па је дужина катете BE једнака половини дужине хипотенузе BD и износи 4 cm. Површина бочне стране пирамиде је $16\,\mathrm{cm}^2$. Примењујући Питагорину теорему на троугао EBD добијамо да је дужина дужи ED једнака $4\sqrt{3}$ cm. Онда је дужина дужи AE једнака $8 - 4\sqrt{3}$ cm. Примењујући Питагорину теорему на троугао ABE добијамо да је дужина основне ивице AB дате пирамиде једнака $8\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm. Основа пи-

рамиде је једнакостранични троугао, па је површина те основе једнака $\frac{(8\sqrt{2-\sqrt{3}})^2\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{cm}^2$, тј. $32\sqrt{3}-48\,\mathrm{cm}^2$. Површина пирамиде је $32\sqrt{3}-48\,\mathrm{cm}^2+3\cdot 16\,\mathrm{cm}^2$, односно $32\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$.



Сл. уз зад. 419



Сл. уз зад. 421

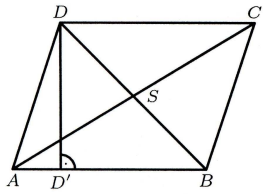
420. Како је $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\cdots+2004\cdot 2006=(2-1)\cdot(2+1)+(3-1)\cdot(3+1)+(4-1)\cdot(4+1)+\cdots+(2005-1)\cdot(2005+1)=2^2-1+3^2-1+4^2-1+\cdots+2005^2-1=1^2+2^2+3^2+\cdots+2005^2-2005$, то је тражена разлика једнака 2005.

421. Нека је тачка F подножје нормале из тачке E на дуж AB. Троуглови AFE и ABD су правоугли и имају заједнички угао FAE, па су слични. Следи да је $FE:BD=AF:AB$. Троуглови FBE и ABC су правоугли и имају заједнички угао FBE, па су и они слични. Следи да је $FE:AC=FB:AB$. Из ових једнакости добијамо да је $\frac{FE}{BD}+\frac{FE}{AC}=\frac{AF+FB}{AB}$, односно $FE\cdot(\frac{1}{BD}+\frac{1}{AC})=1$. Према томе, дужина дужи FE, а самим тим и тражено растојање је $2\,\mathrm{cm}$.

422. Цифру десетица хиљада петоцифреног броја са датим својством можемо изабрати на 5 начина, цифру јединица хиљада на 4 начина, цифру стотина на 3 начина, цифру десетица на 2 начина и цифру јединица на 1 начин, одакле следи да таквих петоцифрених бројева има 120. Како су код сваког од њих све цифре различите, то се у запису свих 120 бројева свака од цифара 1, 2, 3, 4 и 5 појављује по 120 пута, и то по 24 пута на сваком месту у запису петоцифреног броја. Следи да је збир свих петоцифрених бројева са датим својством једнак $(1+2+3+4+5)\cdot 24\cdot(10000+1000+100+10+1)$, тј. 3999960.

423. Број који је дељив и са 5 и са 7 и са 11, дељив је са 385. Како при дељењу броја 7002000 бројем 385 добијамо количник 18187 и остатак 5, то ће тражени седмоцифрени бројеви бити $385\cdot 18188$ и $385\cdot 18189$, односно 7002380 и 7002765.

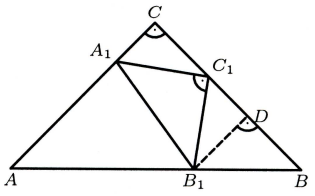
424. Ако је S тачка пресека дијагонала, онда је S средиште сваке од дијагонала, па је $AS=SC=3\,\mathrm{cm}$. Прво се конструише правоугли троугао BDD'. Након тога, одреди се средиште S дужи BD. Затим се конструише круг са центром у S и полупречником дужине $3\,\mathrm{cm}$. У пресеку круга са правом која садржи тачке B и D' добија се тачка A. Тачка C се добија у пресеку круга и праве која садржи тачке A и S.



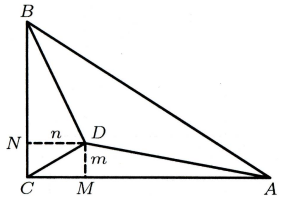
Сл. уз зад. 424

425. На тестирању је учествовало 30 дечака и 270 девојчица. Сви ученици су укупно освојили $300\cdot 84$, односно 25200 бодова, док су девојчице укупно освојиле $270\cdot 83$, односно 22410 бодова. Следи да су дечаци укупно освојили 2790 бодова. Како је учествовало 30 дечака, сваки од њих је освојио по 93 бода.

426. Нека је тачка D подножје нормале из тачке B_1 на страницу BC (слика). Како је $\measuredangle B_1C_1D = 180^\circ - (\measuredangle A_1C_1B_1 + \measuredangle A_1C_1C) = 90^\circ - \measuredangle A_1C_1C = \measuredangle C_1A_1C$ и $\measuredangle C_1DB_1 = \measuredangle A_1CC_1 = 90^\circ$, то је и $\measuredangle C_1B_1D = \measuredangle A_1C_1C$. Како је и $C_1B_1 = A_1C_1$, то на основу другог става подударности (УСУ) следи да је $\triangle C_1B_1D \cong \triangle A_1C_1C$. Одатле добијамо да је $C_1D = A_1C$ и $DB_1 = CC_1$. Троугао B_1BD је једнакокракоправоугли, па је $DB_1 = DB$. Одатле добијамо да је $DB = CC_1$. Следи да је $CB = 2 \cdot CC_1 + C_1D$. Како је $CB = AC = AA_1 + A_1C$ и $A_1C = C_1D$, то је $AA_1 = 2 \cdot CC_1$.



Сл. уз зад. 426



Сл. уз зад. 429

427. Прости бројеви се могу завршавати цифром 1, 2, 3, 5, 7 или 9. Како се од простих бројева цифром 2 завршава само број 2, а цифром 5 само број 5, то се бар 2005 од датих простих бројева завршавају неком од цифара 1, 3, 7 или 9. Како имамо бар 2005 бројева, а 4 могућности за цифру којом се завршавају ти бројеви, по Дирихлеовом принципу бар 502 од тих бројева се завршавају истом цифром.

428. Како је $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab = \frac{a^2 + b^2 - (ab)^2}{ab} = \frac{a^2 + b^2 - (a-b)^2}{ab} = \frac{2ab}{ab} = 2$, то је вредност датог израза увек константна, па не зависи ни од a ни од b.

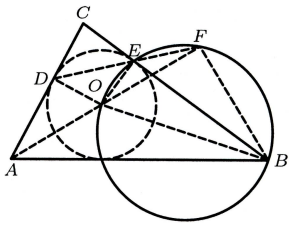
429. Нека су тачке M и N подножја нормала из тачке D на катете AC и BC (слика). Означимо са a, b, c, m и n дужине (у cm) дужи BC, AC, AB, DM и DN редом. Како су површине троуглова ACD и BCD једнаке четвртини површине троугла ABC, то је $\frac{mb}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{ab}{2}$ и $\frac{na}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{ab}{2}$. Следи да је $m = \frac{a}{4}$ и $n = \frac{b}{4}$. Из правоуглог троугла CMD добијамо да је $m^2 + n^2 = CD^2$, односно $(\frac{a}{4})^2 + (\frac{b}{4})^2 = 25$. Следи да је $a^2 + b^2 = 400$, па је $c^2 = 20^2$. Према томе, дужина хипотенузе AB је 20 cm.

430. Нека је разлика сваког броја и његовог претходника једнака d. Други и трећи број у низу имају исту цифру десетица, па следи да је d једноцифрен број. Како је први број у низу једноцифрен, а други двоцифрен, то је $B = 1$. Даље следи да је $C = 2$ и $F = 3$. Други број у низу је 12, а пети 33. Како је $12 + 3d = 33$, то је $d = 7$. Ћирило је на табли написао бројеве: 5, 12, 19, 26, 33.

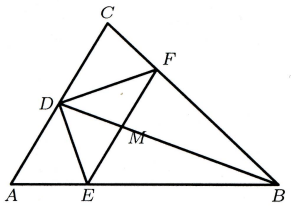
431. Како је $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, то се бројеви облика 2^n редом завршавају цифром 2, 4, 8, 6, 2, ... Слично, бројеви облика 3^{n+3}, односно $27 \cdot 3^n$ се редом завршавају цифром 1, 3, 9, 7, 1, ... Због тога се збир $2^n + 3^{n+3}$ завршава или цифром 3 или цифром 7. Како се квадрат природног броја никад не завршава неком од те две цифре, то следи да тражени број n не постоји.

432. Нека је $\measuredangle BAC = \alpha$, а $\measuredangle ABC = \beta$ (слика). Тада је $\measuredangle ACB = 180^\circ - \alpha - \beta$. Дужи CD и CE су тангентне дужи из исте тачке, па су једнаке. Троугао DEC је једнакокрак, па је $\measuredangle CDE = \frac{1}{2}(180^\circ - (180^\circ - \alpha - \beta)) = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Угао CDE је спољашњи угао троугла AFD, па је $\measuredangle FAD + \measuredangle AFD = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Како је AO симетрала $\measuredangle BAC$, то је $\measuredangle FAD = \frac{\alpha}{2}$,

па следи да је $\measuredangle AFD = \dfrac{\beta}{2}$. Полуправа BO је симетрала $\measuredangle ABC$, па је $\measuredangle OBE = \dfrac{\beta}{2}$. Како је $\measuredangle OFE = \measuredangle AFD = \measuredangle OBE$, то се око четвороугла $OBFE$ може описати круг. Углови OEB и OFB су периферијски углови тог круга над истом тетивом OB, па су једнаки. Како је $\measuredangle OEB = 90^\circ$, то је и $\measuredangle AFB = \measuredangle OFB = 90^\circ$.



Сл. уз зад. 432



Сл. уз зад. 434

433. Ако је $|x-2| < 0{,}04$, онда је $1{,}96 < x < 2{,}04$. Тада је $-1{,}1584 < x^2 - 5 < -0{,}8384$, па је $A = 1{,}1584$.

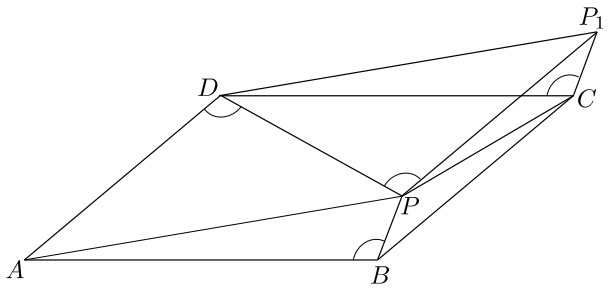
434. У троуглу ADB дуж DE је симетрала угла ADB, па је $AE : EB = AD : BD$. Слично, у троуглу BCD је $CF : FB = DC : BD$. Како је $AD = DC$, то је $AE : EB = CF : FB$. На основу обрнуте Талесове теореме добијамо да је $AC \parallel EF$. Следи да је $\triangle ADB \sim \triangle EMB$ и $\triangle DBC \sim \triangle MBF$. Одатле је $AD : EM = DB : MB$ и $DC : MF = DB : MB$. Према томе, $AD : EM = DC : MF$, па је $EM = MF$.

435. За $n = 1$ и $n = 2$ бројеви датог облика су 18 и 45. Њихов највећи заједнички делилац је 9, па следи да највећи заједнички делилац свих бројева датог облика може бити или 1 или 3 или 9. Како је $4^1 \equiv 4 \pmod 9$, $4^2 \equiv 7 \pmod 9$, $4^3 \equiv 1 \pmod 9$, то закључујемо да је $4^{3k+l} \equiv 4^l \pmod 9$, где $k \in \mathbf{N}$, а $l \in \{0, 1, 2\}$. Сваки природан број већи од 2 може се представити у облику $3k$, $3k+1$ или $3k+2$, где је k природан број. Ако је $n = 3k$, онда је $4^{3k} + 15 \cdot 3k - 1 \equiv 1 + 0 - 1 \equiv 0 \pmod 9$. Ако је $n = 3k+1$, онда је $4^{3k+1} + 15 \cdot (3k+1) - 1 \equiv 4 + 6 - 1 \equiv 0 \pmod 9$. Ако је $n = 3k+2$, онда је $4^{3k+2} + 15 \cdot (3k+2) - 1 \equiv 7 + 3 - 1 \equiv 0 \pmod 9$. У сваком случају, сви бројеви облика $4^n + 15n - 1$ су дељиви са 9, па је управо број 9 њихов највећи заједнички делилац.

436. Обележимо дужине ивица квадра са x, y и z, тако да је $x \leqslant y \leqslant z$. Тада важи да је $2(xy + xz + yz) = 4(x + y + z)$, односно $xy + xz + yz = 2(x + y + z)$. Како је $xy + xz + yz \geqslant xy + xz + x^2 = x(x + y + z)$, то је $x \leqslant 2$. Ако је $x = 1$, онда је $y + z + yz = 2(1 + y + z)$, односно $yz - y - z = 2$. Одатле је $y(z-1) - (z-1) = 3$, па је $(y-1)(z-1) = 3$. Како је $y \leqslant z$, то је $y - 1 = 1$ и $z - 1 = 3$, па је $y = 2$ и $z = 4$. Ако је $x = 2$, онда је $2y + 2z + yz = 2(2 + y + z)$, односно $yz = 4$. Како је $2 \leqslant y \leqslant z$, то је $y = 2$ и $z = 2$. Према томе, решења су $x = 1$, $y = 2$, $z = 4$ и $x = 2$, $y = 2$, $z = 2$.

437. Након првог потеза Раша сигурно даје Гаши део чоколаде правоугаоног облика. Гаша треба да пресече чоколаду тако да део који да Раши буде квадратног облика. Раша је опет принуђен да након свог потеза да Гаши део правоугаоног облика, итд. Према томе, Гаша никад неће добити део чоколаде квадратног облика, а он увек даје Раши део квадратног облика, па ће овом стратегијом Гаша сигурно победити.

438. Конструишимо троугао DCP_1 (слика) тако да је $DP_1 \parallel AP$ и $DP_1 = AP$. Тада је $\triangle ABP \cong \triangle DCP_1$, јер је $AB = DC$, $AP = DP_1$ и $\measuredangle BAP = \measuredangle CDP_1$. Одмах следи да је $\measuredangle DCP_1 = \measuredangle ABP$. Како је $PP_1 \parallel AD$, јер је APP_1D паралелограм, то је



Сл. уз зад. 438

$\measuredangle ADP = \measuredangle DPP_1$. Тада је $\measuredangle DPP_1 = \measuredangle DCP_1$, па је четвороугао $DPCP_1$ тетиван. Сада је $\measuredangle DAP = \measuredangle DPP_1 = \measuredangle DCP = 30^\circ$.

439. Направимо произвољну групу од 1003 члана. Једна од 1004 преостале особе познаје све чланове те групе. Нека је то особа x_1. Укључимо особу x_1 у ту групу уместо неке од чланова те групе. Сада међу преостале 1004 особе опет постоји особа, означимо је са x_2 која познаје све чланове те групе. Укључимо и њу у групу уместо једне од особа изузев особе x_1. На овај начин може се формирати група од 1003 особе $x_1, x_2, \ldots, x_{1003}$ које се све међусобно познају. Сада постоји особа x_{1004} која није у групи и познаје све особе из те групе. У групи $x_1, x_2, \ldots, x_{1003}, x_{1004}$ сви познају једни друге. Од преостале 1003 особе се може формирати једна група чије ће све чланове познавати нека особа ван те групе, то јест нека од особа $x_1, x_2, \ldots, x_{1004}$, рецимо особа x. Та особа x познаје заправо све присутне особе.

440. Нека је

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{(x+1)^2+y^2+1} + \frac{2}{(y+1)^2+z^2+1} + \frac{2}{(z+1)^2+x^2+1} \\ &= \frac{2}{x^2+y^2+2x+2} + \frac{2}{y^2+z^2+2y+2} + \frac{2}{z^2+x^2+2z+2}. \end{aligned}$$

Како је $x^2+y^2 \geqslant 2xy$, $y^2+z^2 \geqslant 2yz$ и $z^2+x^2 \geqslant 2zx$, то је

$$A \leqslant \frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{yz+y+1} + \frac{1}{zx+z+1}.$$

Како је $\dfrac{1}{xy+x+1} \cdot \dfrac{z}{z} = \dfrac{z}{1+xz+z}$ и $\dfrac{1}{yz+y+1} \cdot \dfrac{xz}{zx} = \dfrac{zx}{zx+1+z}$, то је

$$A \leqslant \frac{z}{1+xz+z} + \frac{zx}{zx+1+z} + \frac{1}{zx+z+1} = 1.$$

Једнакост важи за $x^2+y^2 = 2xy$, $y^2+z^2 = 2yz$, $z^2+x^2 = 2xz$, тј. за $x = y$, $y = z$ и $z = x$ односно за $x = y = z$.

441. Почетна позиција дата је на слици 1 ($a, b, c, d, e, f, g, h, j \in \{-1, 1\}$). Први корак је на слици 2.

a	b	c
d	e	f
g	h	j

Сл. 1 уз зад. 441

bd	aec	bf
aeg	$dbhf$	cej
dh	gej	hf

Сл. 2 уз зад. 441

Други корак је дат на слици 3, тј. (јер је $1^2 = (-1)^2 = 1$ и $x^3 = x$ за $x \in \{-1, 1\}$) на слици 4.

a^2e^2gc	$d^2b^3f^2h$	e^2c^2aj
$b^2d^3h^2f$	$a^2e^4g^2j^2c^2$	$b^2f^3h^2d$
ae^2g^2j	$d^2h^3f^2b$	ge^2j^2c

Сл. 3 уз зад. 441

gc	bh	aj
df	1	fd
aj	bh	gc

Сл. 4 уз зад. 441

Трећи корак је као на слици 5, тј. 6.

$bhdf$	$acgj$	$bhdf$
$acgj$	$(bhdf)^2$	$acgj$
$bhdf$	$acgj$	$bhdf$

Сл. 5 уз зад. 441

$bhdf$	$acgj$	$bhdf$
$acgj$	1	$acgj$
$bhdf$	$acgj$	$bhdf$

Сл. 6 уз зад. 441

Последњи, четврти корак, дат је на слици 7, тј. 8.

$(acgj)^2$	$(bhdf)^2$	$(acgj)^2$
$(bhdf)^2$	1	$(bhdf)^2$
$(acgj)^2$	$(bhdf)^2$	$(acgj)^2$

Сл. 7 уз зад. 441

1	1	1
1	1	1
1	1	1

Сл. 8 уз зад. 441

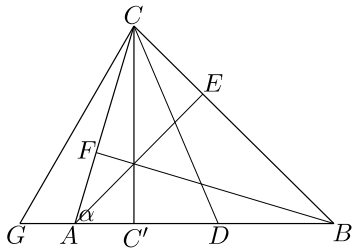
442. Како је $n!$ за $n \geqslant 9$ дељиво са $3^3 = 27$, то треба проверити дељивост са 3^3 збира $1!+2!+3!+\cdots+8!$. Из $1!+2!+3!+\cdots+8! = 9+4!\cdot(1+5+5\cdot 6)+7!\cdot(1+8)$ добијамо $1!+2!+3!+\cdots+8! \equiv 9 \pmod{27}$, па значи за $n \geqslant 8$ број $1!+2!+\cdots+n!$ није дељив са $27 = 3^3$ (а дељив је са $9 = 3^2$).
Непосредно се проверава да је $1 \equiv 1 \pmod{27}$, $1+2! \equiv 3 \pmod{27}$, $1+2!+3! \equiv 9 \pmod{27}$, $1+2!+3!+4! \equiv 6 \pmod{27}$, $1+2!+3!+4!+5! \equiv 18 \pmod{27}$, $1+2!+3!+4!+5!+6! \equiv 9 \pmod{27}$. Како је $1+2!+3!+4!+5!+6!+7! = 81\cdot 73$, тј. $3^4 \mid (1+2!+3!+4!+5!+6!+7!)$, то је $k = 4$ највећи број за који $3^k \mid (1!+2!+\cdots+n!)$ и то за $n = 7$.

443. Како је $AE \leqslant \sqrt{3}$, $BF \leqslant \sqrt{3}$ и $CD \leqslant \sqrt{3}$, то је $h_a \leqslant \sqrt{3}$, $h_b \leqslant \sqrt{3}$ и $h_c \leqslant \sqrt{3}$. Бар један од углова α, β или γ је већи или једнак од $60°$. Нека је рецимо $\alpha \geqslant 60°$.
(1) Ако је $\alpha = 60°$, тада је $AC = \dfrac{2}{\sqrt{3}} h_c \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3} = 2$, па је

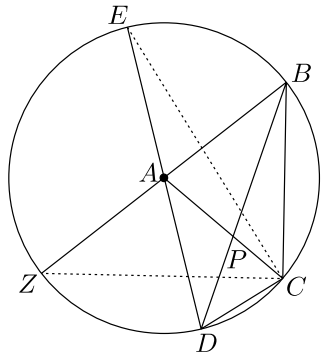
$$P_{\triangle ABC} = \frac{b \cdot h_b}{2} \leqslant \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

(2) Ако је $\alpha > 60°$, тада на правој AC постоји тачка G таква да је $\measuredangle BGC = 60°$ (слика), па је тада $GC = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \leqslant h_c \leqslant 2$ и $AC < GC \leqslant 2$. Сада се одмах добија

$$P_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot h_b}{2} \leqslant \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$



Сл. уз зад. 443



Сл. уз зад. 445

444. Како је $x^2+ax+a^2-6 = (x+\frac{a}{2})^2+\frac{3}{4}(a^2-8)$, то за $a^2 > 8$ једначина $x^2+ax+a^2-6 = 0$ нема решења. Претпоставимо да је $a^2 \leqslant 8$. Тада је $a^3 \leqslant 8a$, јер је $a > 0$ по претпоставци. Како је $a^3 = 6a + b$, то је $6a + 6 \leqslant 8a$, односно $a \geqslant 3$ и $a^2 \geqslant 9$, што је контрадикција. Дакле, ни у овом случају дата једначина нема решења.

445. На правим DA и BA изабрати редом тачке E и Z тако да је $AC = AE = AZ$ (слика). Како је $\measuredangle DEC = \dfrac{\measuredangle DAC}{2} = 18° = \measuredangle CBD$, то је четвороугао $DEBC$ тетиван. Слично, четвороугао $CBZD$ је тетиван, јер је $\measuredangle AZC = \dfrac{\measuredangle BAC}{2} = 36° = \measuredangle BDC$. Према томе, петоугао $BCDZE$ је уписан у кружницу $k(A, AC)$. Из тога следи да је $AC = AD$ и $\measuredangle ACD = \measuredangle ADC = \dfrac{180° - 36°}{2} = 72°$, што повлачи да је $\measuredangle ADP = 36°$ и $\measuredangle APD = 108°$.

446. Како је $50 = 4 \cdot 12 + 2$, то постоји најмање 13 тачака обојених истом бојом.
Пронађимо максималан број једнакокраких троуглова чија су темена неке три од датих n тачака. Издвајањем неке две од тих n тачака, можемо добити највише 2 једнакокрака троугла којима изабране две тачке одређују основицу. Зато је тражени максималан број једнакокраких троуглова $\dfrac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n(n-1)$. Када од укупног броја троуглова одузмемо максималан број једнакокраких троуглова, добијамо минималан број разностраничних троуглова, и он износи

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} - n(n-1) = \frac{n(n-1)(n-8)}{6}, \quad n > 8.$$

За $n = 13$ добијамо $\dfrac{13 \cdot 12 \cdot 5}{6} = 130$, па дакле постоји најмање 130 разностраничних троуглова чија су темена обојена истом бојом.

447. Претпоставимо супротно од оног што се тврди у задатку, тј. да је p прост број и да је $m = 7p + 3^p - 4$ квадрат целог броја. За $p = 2$ је $m = 19$, а за $p = 3$ је $m = 44$, што нису потпуни квадрати. Претпоставимо зато да је $p > 3$ и нека је $m = n^2$ за неко $n \in \mathbf{Z}$. Искористимо „малу“ Фермаову теорему[1] према којој је $3^p \equiv 3 \pmod{p}$, па добијамо да је

$$m = 7p + 3^p - 4 \equiv 0 + 3 - 4 = -1 \pmod{p}.$$

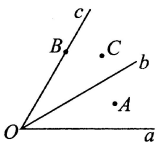
Ако је $p = 4k + 3$, $k \in \mathbf{Z}$, тада је, опет по „малој“ Фермаовој теореми, $-1 \equiv m^{2k+1} = n^{4k+2} = n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, што је контрадикција, јер је $p > 3$.
Претпоставимо да је $p \equiv 1 \pmod{4}$. Тада је $m \equiv 3 - 1 = 2 \pmod{4}$, што је опет контрадикција, јер ниједан квадрат природног броја не даје остатак 2 по модулу 4.
Дакле, ни за један прост број p, m није квадрат природног броја.

[1] Видети, на пример, В. Мићић, З. Каделбург, Д. Ђукић: *Увод у теорију бројева*, Материјали за младе математичаре 15, Друштво математичара Србије, Београд 2013.

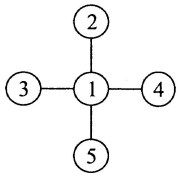
2008. година

448. а) 798, б) 448, в) 86.

449. В. слику.



Сл. уз зад. 449



Сл. уз зад. 451

450. $x - 348 = 485$, па је $x = 833$.

451. Збир 8 од бројева 1, 2, 3, 4 и 5 можемо добити на два начина: $1+2+5$ и $1+3+4$. Како је број 1 у оба збира, закључујемо да се он мора наћи и у водоравном и у усправном правцу (слика).

452. а) $39 = 33 + 3 + 3$, б) $33 \cdot 3 \cdot 3 = 297$.

453. а) 5 994, б) 1 570.

454. Највећи паран петоцифрени број написан датим цифрама је 54 312, а највећи непаран четвороцифрени број написан датим цифрама је 9 867. Збир ових бројева је $54312+9867 = 64179$.

455. Једна страница правоугаоника је $28\,\text{cm} - 4\,\text{cm} = 24\,\text{cm}$, а друга $28\,\text{cm} - 19\,\text{cm} = 9\,\text{cm}$. Обим троугла је $O = 2a + 2b = 48 + 18 = 64\,\text{cm}$.

456. Најмањи број дељив и са 5 и са 9 је $5 \cdot 9 = 45$, а како је $10 \cdot 45 = 450$, $11 \cdot 45 = 495$, $12 \cdot 45 = 540$, $13 \cdot 45 = 585$, $14 \cdot 45 = 630$, то је тражени број 585.

457. Да би тражени збир био највећи, бројеви које је Ана замислила морају бити највећи могући. Највећи могући четвороцифрени број је 9 999, а како је разлика 9 863, то је троцифрени број 136. Дакле, тражени збир је $9999 + 136 = 10135$.

458. Најмањи непаран четвороцифрени број је 1 001, а највећи је 9 999. Како је $1001 = 7{\cdot}11{\cdot}13$, а $9999 = 3{\cdot}3{\cdot}11{\cdot}101$, то је $D(1001, 9999) = 11$.

2	1	2	4
3	5	1	15
3	3	2	18
8	9	5	

Сл. уз зад. 461

459. Нека је $\alpha > \beta$. Како је $\alpha + \beta = 90^\circ$ и $\beta = \dfrac{2}{3}\alpha$, то је $\alpha = 54^\circ$ и $\beta = 36^\circ$.

460. У школи ради $((17 + 20) - 5) + 3 = 35$ наставника.

461. Једно решење је дато на слици.

462. Бака Мица има 13 пута више меда, 7 пута више уља, 5 пута више шећера и 4 пута више брашна него што је потребно за 25 медењака. Дакле она може да направи 4 пута више медењака (јер брашна има релативно најмање), тј. може да направи 100 медењака.

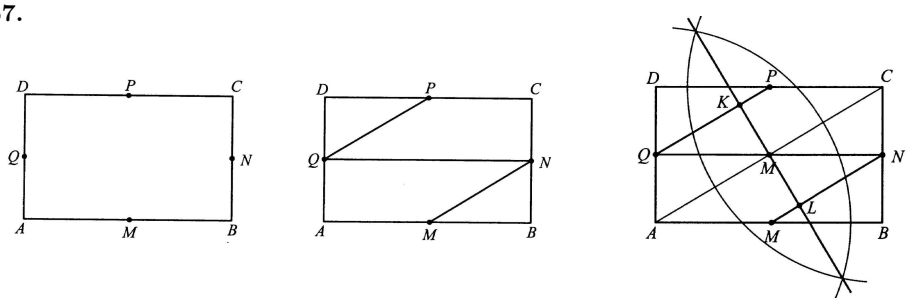
463. $x = -2008$, па је вредност израза 8032.

464. $\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}=180^\circ-124^\circ=56^\circ$, па је $\gamma=68^\circ$.

465. $7-5<x<7+5$, односно $2<x<12$. Ако је $x\in\{3,4\}$ онда је $\alpha<\beta<\gamma$. Ако је $x=5$ онда је $\alpha=\beta<\gamma$. Ако је $x=6$ онда је $\beta<\alpha<\gamma$. Ако је $x=7$ онда је $\beta<\alpha=\gamma$. Ако је $x\in\{8,9,10,11\}$ онда је $\beta<\gamma<\alpha$.

466. $-\dfrac{6}{23}<\dfrac{x}{4}<-\dfrac{5}{23}$. Доводећи их на исте имениоце имамо $-\dfrac{24}{92}<\dfrac{23x}{92}<-\dfrac{20}{92}$, односно, $-24<23x<-20$, па је $x=-1$. Дакле, тражени разломак је $-\dfrac{1}{4}$.

467.



Сл. уз задатак 467

468. Како је $x=\sqrt{2+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{3}{2}$, то је вредност израза $8x^3-4x^2=18$.

469. Како је $D_n=\dfrac{5}{2}n$, то је $n=8$ и $S_n=1\ 080^\circ$.

470. $x=2007$.

471. Катета мањег правоуглог троугла је 10. Хипотенуза већег правоуглог троугла је 20. $O=40+10\sqrt{2}$. $P=150$.

472. $a\sqrt{3}+b=\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}+3=\left|1-\sqrt{3}\right|+3=\sqrt{3}-1+3=\sqrt{3}+2$, па је $a=1$, $b=2$.

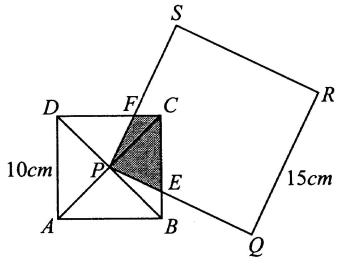
473. Решење прве једначине је $x=\dfrac{3}{10}$, па заменом вредности за x у другој једначини добијамо $k=\dfrac{9}{5}$.

474. Површина призме је $P=10B$. Висина призме је $H=2\sqrt{B}$, па је $V=B\cdot H=2B\sqrt{B}$.

475. $y<-\dfrac{12}{11}$.

476. Три тачке одређују највише 1 раван, а три паралелне праве највише 3 равни. Свака тачка и свака права одређују највише једну раван, а укупно $3\cdot 3=9$ равни. Према томе, на овим елементима, највише је одређено $1+3+9=13$ равни.

477. $\triangle PCF\cong\triangle PBE$ (УСУ), па је површина осенченог дела једнака четвртини површине квадрата, односно $25\,\mathrm{cm}^2$.



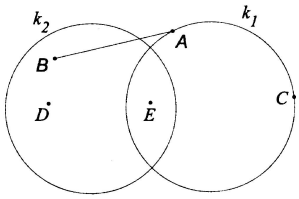
Сл. уз зад. 477

478. а) 54, б) 52, в) 180, г) 18.

479. Како је $* + 7 = 20$, то је непознати број 13. Резултат који је Ана требало да добије је $13 \cdot 7 = 91$.

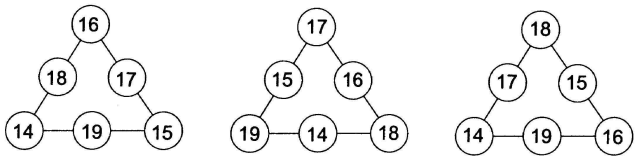
480. Крушку је могао да засади или Влада или Јова. Како то није урадио Влада, онда је крушку засадио Јова. Ако Влада није засадио крушку, а вишњу није могао по претпоставци, онда је засадио јабуку. Дакле, вишњу је засадио Коста.

481.



Сл. уз зад. 481

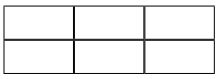
482. Има више решења, а три карактеристична су дата на слици.



Сл. уз зад. 482

483. $1 + 2 + 345 \cdot 6 - 7 \cdot 8 - 9 = 2008$.

484. а) $O = 2 \cdot 2 + 12 \cdot 3 = 40\,\text{cm}$.

б)  $O = 6 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 24\,\text{cm}$.

485.

год. рођења	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
збир цифара	3	4	5	6	7	8	9
год. девојчице	7	6	5	4	3	2	1

Девојчица је рођена 2003. године.

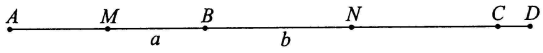
486. Марко је 100 бомбона купио за $(100 : 5) \cdot 2 = 40$ динара, а за њих је добио $(100 : 2) \cdot 1 = 50$ динара. Дакле, Марко је зарадио 10 динара.

487. Како у три корпе има укупно $12 + 14 + 22 = 48$ јабука, то значи да ће у свакој корпи после тражена 3 пребацивања бити по 16 јабука. За показана 3 пребацивања ученик добија:

I корпа	II корпа	III корпа	Начин пребацивања
12	14	22	Почетне количине
12	28	8	из III у II
24	16	8	из II у I
16	16	16	из I у III

488. Број $9 \cdot 9 = 81$ завршава се цифром 1. Број $9 \cdot 9 \cdot 9$ завршава се цифром 9, а број $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ цифром 1, итд. Дакле, сви производи са непарним бројем деветки завршавају

се цифром 9, а са парним бројем деветки цифром 1. То значи да се тражени производ завршава цифром 9.



Сл. уз зад. 489

489. Означимо $MB = a$ и $BN = b$. Сада је $MN = a + b = 1{,}5\,\mathrm{dm} = 15\,\mathrm{cm}$. Како је $AB = 2a$ и $BC = 2b$, то је $AC = 2a + 2b = 2 \cdot (a + b) = 30\,\mathrm{cm}$. Дакле, $CD = AD - AC = 2\,\mathrm{cm}$.

490. Пуж A прелази дужину од $1\,\mathrm{m}$ за 10 минута и притом се одмара $4 \cdot 1{,}5 = 6$ минута. Дакле, пуж A ће на циљ стићи за 16 минута. Пуж B прелази дужину од $1\,\mathrm{m}$ за $5 \cdot 3 = 15$ минута и притом се одмара $4 \cdot 0{,}5 = 2$ минута. Дакле, пуж B ће стићи на циљ за 17 минута. Пуж A стиже први на циљ.

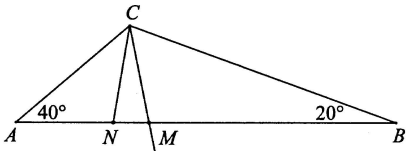
491. Са непарне стране је употребљено $5 \cdot 1 + 45 \cdot 2 + 35 \cdot 3 = 5 + 90 + 105 = 200$ цифара, а са парне стране $4 \cdot 1 + 45 \cdot 2 + 8 \cdot 3 = 4 + 90 + 24 = 118$ цифара. Дакле за нумерацију свих кућа у тој улици, употребљено је 318 цифара.

492. Из $\alpha + \beta = 180^\circ$ и $\frac{2}{5}\alpha + \beta = 90^\circ$, одмах видимо да је $\frac{3}{5}\alpha = 90^\circ$, тј. $\alpha = 150^\circ$ и $\beta = 30^\circ$. Сада је $\alpha - \beta = 120^\circ$.

493. $x = -2$ и $y = -3$. Сада је $|x - 1| - |y - 2| = -2$.

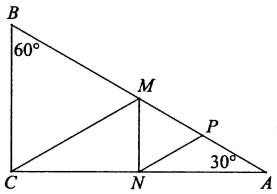
494. Ако тај број означимо са x онда је $x - 9 = -603$, односно $x = -594$. Милован би добио $-594 : 9 = -66$.

495. Нека је $N \in AB$ и $BN = BC$. $\triangle BCN$ је једнакокрак, па је $\measuredangle BNC = 80^\circ$. CM је симетрала $\measuredangle ACB$, па је $\measuredangle ACM = 60^\circ$, а одатле је $\measuredangle AMC = 80^\circ$. Дакле, $\triangle NCM$ је једнакокрак и $NC = CM$. Угао BNC је спољашњи угао $\triangle ANC$, одакле је $\measuredangle ACN = \measuredangle BNC - \measuredangle CAN = 40^\circ$. Дакле, $\triangle ANC$ је једнакокрак па је $AN = NC$. Значи $CM = CN = AN = AB - BN = AB - BC = 10\,\mathrm{cm}$.

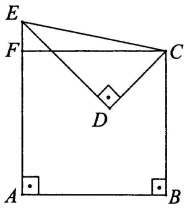


Сл. уз зад. 495

496. Одмах закључујемо да је $\measuredangle ABC = 60^\circ$ и $\measuredangle CAB = 30^\circ$ (слика). Како је $AB = 16\,\mathrm{cm}$ то је $BM = MA = 8\,\mathrm{cm}$. Даље је $MN = 4\,\mathrm{cm}$ као средња линија троугла и слично $PA = NP = 4\,\mathrm{cm}$. Дакле, $BCMNPA = 8 + 8 + 4 + 4 + 4 = 28\,\mathrm{cm}$.



Сл. уз зад. 496



Сл. уз зад. 499

497. Како је $2b+2$ паран број, то следи да су a и c непарни. То значи да је b паран број. Како је $a+1=2b+2=3c+3$, то је $a>b>c$. За најмању вредност производа треба изабрати да су a, b и c што мањи природни бројеви. Нека је $c=3$, тада је $a=11$ и $b=5$. Како је b паран број, то не задовољава постављене услове. Нека је $c=5$, тада је $a=17$ и $b=8$, па је најмањи производ $a\cdot b\cdot c=5\cdot 8\cdot 17=680$.

498. $\dfrac{27}{64}$.

499. Како је $EC=10\,\mathrm{cm}$ и ако на AE изаберемо тачку F тако да је $AF=BC$, тада је $ABCF$ правоугаоник, а CEF правоугли троугао (слика). Одавде закључујемо да је $AB=CF=\sqrt{10^2-6^2}=8\,\mathrm{cm}$. Дакле, $O_{ABCDE}=8+7+6+8+13=42\,\mathrm{cm}$.

500. Из $\sqrt{2}\cdot x-\sqrt{2}\cdot y=\sqrt{18}$ следи да је $x-y=3$. Сада је

$$\frac{\sqrt{3}\cdot x}{3}-\frac{y}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\cdot x}{3}-\frac{\sqrt{3}\cdot y}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(x-y)=\sqrt{3}.$$

501. Означимо страницу шестоугла $ABCDEF$ са a. Површина четвороугла $MNPQ$ једнака је половини површине правилног шестоугла чија су темена средишта страница шестоугла $ABCDEF$. Означимо страницу тог шестоугла са b. Тада је $b=QP=\dfrac{1}{2}AE=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (AE је краћа дијагонала правилног шестоугла). Дакле, тражени однос је

$$P_{ABCDEF}:P_{MNPQ}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}:\frac{3b^2\sqrt{3}}{4}=a^2:\frac{3a^2}{8}=8:3.$$

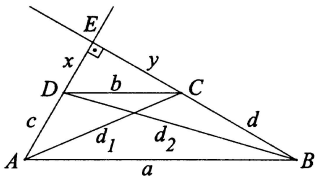
502. Како је $252=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7$, видимо да цифре тог троцифреног броја могу бити 4, 9 и 7 или 6, 6 и 7. Како су сви троцифрени прости бројеви непарни, то су решења неки од бројева 479, 497, 749, 947 или 667. Како $7\mid 497$, $7\mid 749$ и $23\mid 667$ то су тражени прости бројеви 479 и 947.

503. $\dfrac{1}{4}<\dfrac{2-x}{7}<\dfrac{11}{12}$; $\dfrac{21}{84}<\dfrac{12(2-x)}{84}<\dfrac{77}{84}$; $21<12(2-x)<77$.
Како $x\in\mathbf{Z}$, то и $2-x\in\mathbf{Z}$, па је $2-x\in\{2,3,4,5,6\}$, тј. $x\in\{0,-1,-2,-3,-4\}$. Дакле, 5 целих бројева задовољава услове задатка.

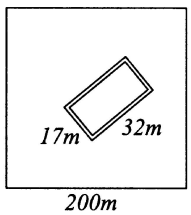
504. Нека је $ab:bc:ca=2:3:5$, тј. $\dfrac{ab}{2}=\dfrac{bc}{3}=\dfrac{ca}{5}$. Сада је $\dfrac{a}{2}=\dfrac{c}{3}$ и $\dfrac{b}{3}=\dfrac{a}{5}$, односно $\dfrac{a}{10}=\dfrac{c}{15}$ и $\dfrac{a}{10}=\dfrac{b}{6}$. Коначно $\dfrac{a}{10}=\dfrac{b}{6}=\dfrac{c}{15}$, односно $a:b:c=10:6:15$.

505. Полазна једначина се може записати у облику $x^2+\sqrt{3}=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}$, тј. $x^2+\sqrt{3}=1+\sqrt{3}$, одакле је $x^2=1$, тј. $x=1$ или $x=-1$.

506. Нека су дате ознаке као на слици. Тада је $a^2=(c+x)^2+(d+y)^2$ и $b^2=x^2+y^2$, тј. $a^2+b^2=(c+x)^2+(d+y)^2+x^2+y^2$. Слично је и $d_1^2=(c+x)^2+y^2$ и $d_2^2=x^2+(d+y)^2$, тј. $d_1^2+d_2^2=(c+x)^2+(d+y)^2+x^2+y^2$, одакле долазимо до тврђења задатка.



Сл. уз зад. 506



Сл. уз зад. 509

507. Милена ће за подскупове $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,5\}$, ... редом записивати на табли 2, 3, 5, ... Како је $S = \{8,\ 5,\ 1,\ 13,\ 3,\ 21,\ 2\}$, сваки број ће се налазити на табли онолико пута колико има елемената пре њега (ако их посматрамо у растућем поретку), тј.

$$1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 13 \cdot 5 + 21 \cdot 6 = 246.$$

508. Урош је поклонио $4260 + 456 = 4716$ књига, а Јанош је поклонио $12502 - (4716 + 4260) = 3526$ књига.

509. Површина терена је $P_1 = 200 \cdot 200 = 40000\,\mathrm{m}^2$. Површина коју заузима базен са стазом је $P_2 = 32 \cdot 17 = 544\,\mathrm{m}^2$. Травњака око базена има $P = P_1 - P_2 = 39456\,\mathrm{m}^2$, што је $394\,\mathrm{a}\,56\,\mathrm{m}^2$, слика.

510. $A = 7,\ B = 6,\ C = 4,\ D = 1.$

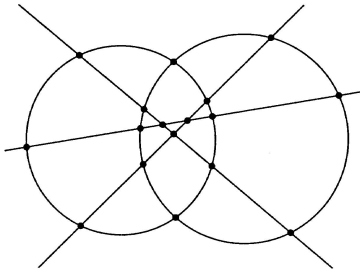
511. Како је $2008 = 1 \cdot 2008 = 2 \cdot 1004 = 4 \cdot 502 = 8 \cdot 251$, задатак има два решења. Ако су дужине страница $1\,\mathrm{cm}$ и $2008\,\mathrm{cm}$, решење је $O = 2 \cdot (1 + 2008) = 4018\,\mathrm{cm}$, а ако су дужине страница $8\,\mathrm{cm}$ и $251\,\mathrm{cm}$, решење је $O = 2 \cdot (8 + 251) = 518\,\mathrm{cm}$.

512. *Први начин.* На сваком спрату живи $48 : 4 = 12$ станара. Како је на једном спрату два стана у непарним и два стана у парним улазима, то 4 станара живи у становима у непарним улазима на једном спрату, а 8 станара у становима у парним улазима на једном спрату. Значи, у једном стану у непарним улазима живе два станара, а у једном стану у парним улазима живе четири станара.

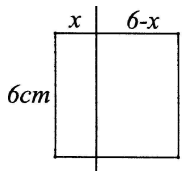
Други начин. У укупно 8 станова у непарним улазима живи дупло мање станара него у 8 станова у парним улазима. Значи, у становима у непарним улазима живи $48 : 3 = 16$ станара, а у сваком таквом стану живи по два станара. У становима у парним улазима живи по 4 станара.

513. $1 : \left(\dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{10}\right) = 1 : \dfrac{1}{2} = 2.$

514. Пресечних тачака има 17 (слика).



Сл. уз зад. 514



Сл. уз зад. 516

515. Како је $M = \{2,3,5,7,11\}$ то су тражени бројеви $6 = 2 \cdot 3$, $10 = 2 \cdot 5$, $14 = 2 \cdot 7$, $22 = 2 \cdot 11$, $15 = 3 \cdot 5$, $21 = 3 \cdot 7$, $33 = 3 \cdot 11$, $35 = 5 \cdot 7$, $55 = 5 \cdot 11$ и $77 = 7 \cdot 11$.

516. Како је $2 \cdot (6 - x) = 2 \cdot x + 5$, то је $x = \dfrac{7}{4}$ (слика). Мањи правоугаоник има површину $P_1 = \dfrac{7}{4} \cdot 6 = \dfrac{21}{2}\,\mathrm{cm}^2$, а већи правоугаоник $P_2 = \dfrac{17}{4} \cdot 6 = \dfrac{51}{2}\,\mathrm{cm}^2$.

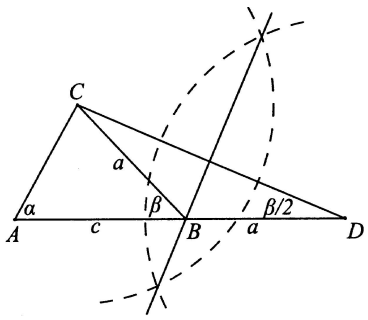
517. Ако $\dfrac{1}{2}\,\mathrm{kg}$ сребра и $\dfrac{1}{3}\,\mathrm{kg}$ злата кошта $750\,000$ динара, онда дупло већа количина, тј. $1\,\mathrm{kg}$ сребра и $\dfrac{2}{3}\,\mathrm{kg}$ злата кошта $1\,500\,000$ динара. Ако од овога одузмемо $1\,\mathrm{kg}$ сребра и

$\frac{1}{2}$ kg злата добијамо да $\frac{1}{6}$ kg злата кошта 250 000 динара, одакле 1 kg злата кошта 1 500 000 динара. Сада једноставно добијамо да 1 kg сребра кошта 500 000 динара. Дакле, 1 kg сребра и 2 kg злата коштају 3 500 000 динара.

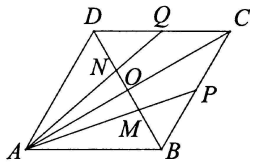
518. Како је $\frac{a}{b} = \frac{1}{20}$, то је $a = \frac{b}{20}$. Полазни израз постоје $\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{b} + 2 \cdot \frac{a}{b} + 4{,}5b - 4{,}5b$, одакле је вредност полазног израза $\frac{1}{8}$.

519. Ако је $x = 0,\overline{abab\ldots}$, тада је $100x = ab,\overline{abab\ldots}$. Из ове две једнакости добијамо да је $99x = \overline{ab}$, односно $x = \frac{\overline{ab}}{99} = \frac{10a+b}{9 \cdot 11}$. Како је збир бројиоца и имениоца несводљивог разломка 17, то мора да $9 \mid 10a + b$ или $11 \mid 10a + b$. Ако $11 \mid 10a + b$ онда је $10a + b = 11 \cdot (17 - 9) = 88$, одакле је $a = b = 8$. Међутим, како је $a \neq b$, ово не може бити решење. Ако $9 \mid 10a + b$, онда је $10a + b = 9 \cdot (17 - 11) = 54$, одакле је $a = 5$ и $b = 4$.

520. Нека је дат троугао ABC. Продужимо страницу AB преко темена B за дужину a и добијамо тачку D ($|AD| = a + c$). Троугао CBD је једнакокрак и угао β је његов спољашњи угао, па је $\measuredangle BDC = \frac{\beta}{2}$. Такође, теме B, врх тог троугла, налази се на симетрали странице CD. Дакле, прво конструишемо троугао ADC чија је страница $a + c$ и углови α и $\frac{\beta}{2}$, чиме добијамо темена A и C, а у пресеку симетрале дужи CD и AD добијамо и теме B.



Сл. уз зад. 520



Сл. уз зад. 522

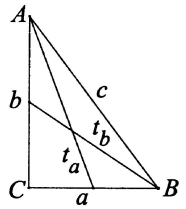
521. $4p \cdot (66q + r) = 2008$; $p \cdot (66q + r) = 502 = 2 \cdot 251$. Како је $66q + r > 2$, то је $p = 2$ и $66q + r = 251$. Из $66q < 251$, имамо $q < 4$. За $q = 2$ је $r = 119 = 7 \cdot 17$ па ово не може бити решење, а за $q = 3$ је $r = 53$ што је и решење задатка.

522. Троугао ABD је једнакостраничан ($\measuredangle BAD = 60^\circ$ и $BA = AD$) па је $BD = 12\,\text{cm}$ (слика). Означимо пресечну тачку дијагонала са O. Тада је $BO = 6\,\text{cm}$. Тачка M је тежиште троугла ABC (пресек тежишних дужи AP и BO). Како тежиште дели тежишну дуж у односу $2 : 1$, то је $OM = \frac{1}{3}BO = 2\,\text{cm}$. Аналогно, N је тежиште троугла ACD, и $NO = 2\,\text{cm}$. Дакле, $MN = MO + NO = 4\,\text{cm}$.

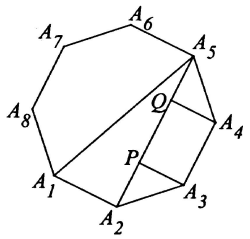
523. Важи $44 < \sqrt{2008} < 45$, па је $\sqrt{\left(\sqrt{2008} - 45\right)^2} = \left|\sqrt{2008} - 45\right| = 45 - \sqrt{2008}$ и $\sqrt{\left(44 - \sqrt{2008}\right)^2} = \left|44 - \sqrt{2008}\right| = \sqrt{2008} - 44$.

Сада је $\sqrt{\left(\sqrt{2008} - 45\right)^2} + \sqrt{\left(44 - \sqrt{2008}\right)^2} = 1$.

524. Како је $b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=t_a^2=52$ и $\left(\frac{b}{2}\right)^2+a^2=t_a^2=73$, то је $\left(b^2+\frac{a^2}{4}\right)+\left(\frac{b^2}{4}+a^2\right)=125$, одакле је $\frac{5}{4}\left(a^2+b^2\right)=125$, тј. $\frac{5}{4}c^2=125$ (слика). Дакле $c=10\,\mathrm{cm}$.



Сл. уз зад. 524



Сл. уз зад. 525

525. Четвороугао $A_2A_3A_4A_5$ је једнакокраки трапез. Нека су P и Q подножја нормала из тачака A_3 и A_4, редом, на A_2A_5 (слика). Како је A_3A_4QP правоугаоник, то је $PQ=8\,\mathrm{cm}$. Како је $\measuredangle A_2A_3A_4=135^\circ$, то је $\measuredangle A_2A_3P=45^\circ$, па је троугао A_2A_3P једнакокрако-правоугли и његова хипотенуза је $8\,\mathrm{cm}$. Одатле добијамо да је $PA_2=4\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$. Сада је $A_2A_5=8\cdot(1+\sqrt{2})\,\mathrm{cm}$ и $\measuredangle A_1A_2A_5=90^\circ$, па је тражена површина $32\cdot(1+\sqrt{2})\,\mathrm{cm}^2$.

526. У датом изразу има 502 разлике квадрата

$$\left(1004^2-1003^2\right)+\left(1002^2-1001^2\right)+\ldots+\left(4^2-3^2\right)+\left(2^2-1^2\right).$$

Када раставимо сваку од ових разлика квадрата на чиниоце, један чинилац ће бити 1, па добијамо следећи збир од 502 сабирка $2007+2003+\ldots+7+3$. Ако групишемо први и последњи сабирак, други и претпоследњи, ..., имамо да је тражени збир $251\cdot 2010$. Како $8\mid 2008$, а $8\nmid 2010$, закључујемо да дати израз није дељив са 2008.

527. Број је „симпатичан“ ако је барем једна његова цифра парна. Шестоцифрени бројеви који нису „симпатични“ у свом запису имају само непарне цифре, а њих је укупно $5^6=15625$. Како шестоцифрених бројева има 900 000, то „симпатичних“ има $900\,000-15\,625=884\,375$.

528. За $x\geqslant 0$, добијамо $|x-|x-|x|||=|x-|x-x||=|x|=x$, па је $x=2008$ једно решење.

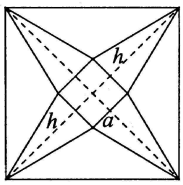
За $x<0$, добијамо $|x-|x-|x|||=|x-|x+x||=|x+2x|=-3x$, па је $x=-\frac{2008}{3}$ још једно решење једначине.

529. Како је $\frac{3}{4}x+12=0$ за $x=-16$ то су координате тачке $A(-16,0)$. Слично, за $-\frac{4}{3}x+12=0$ добијамо $x=9$, па су координате тачке $B(9,0)$. Из $\frac{3}{4}x+12=-\frac{4}{3}x+12$ добијамо $x=0$, па је $C(0,12)$.

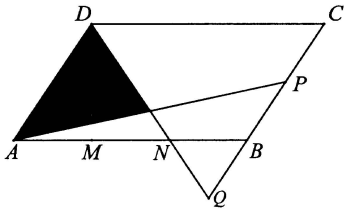
а) Дужине страница овог троугла су $a=15$, $b=20$ и $c=25$, а како је $c^2=a^2+b^2$, то је троугао ABC правоугли.

б) $O_{ABC}=60$, $P_{ABC}=150$.

530. Страница квадрата је $5\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$, а његова дијагонала $10\,\mathrm{cm}$, слика. Сада је $10=a+2h$ и како је $h=2a$, добијамо да је $a=2\,\mathrm{cm}$ и $h=4\,\mathrm{cm}$. Површина пирамиде је $P=2^2+4\cdot\frac{4\cdot 2}{2}=20\,\mathrm{cm}^2$ што је 40% од површине квадрата.



Сл. уз зад. 530



Сл. уз зад. 532

531. Укупан број коцки је n^3 ($n \in \mathbf{N}$), па како је $\frac{13}{72}$ црвених и $\frac{25}{48}$ белих, то n^3 мора бити дељиво са 72 и 48. Како је $72 = 3^2 \cdot 2^3$ и $48 = 3 \cdot 2^4$ то је $n^3 = 3^3 \cdot 2^6 \cdot k^3$. Како је $\frac{13}{72} = \frac{312 \cdot k^3}{12^3 k^3}$ од укупног броја црвених, а $\frac{25}{48} = \frac{900 \cdot k^3}{12^3 k^3}$ белих, то је плавих $\frac{516 \cdot k^3}{12^3 k^3}$. Међутим, плавих је мање од 1000 па је $k = 1$. Број плавих коцки је 516, а укупно их је $12^3 = 1728$.

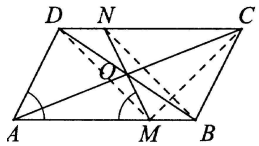
532. Продужавајући BC и DN тако да се одговарајуће праве секу у тачки Q, непосредно се види да је $\triangle AND \sim \triangle BNQ$ па је сада $BQ = \frac{1}{2}AD$ (слика). Како је $PQ = AD$, то је $AQPD$ паралелограм чију једну четвртину чини осенчени део. Како је $P_{ABCD} = P_{AQPD}$ (једнаке су им страница и одговарајућа висина), то осенчени део чини $\frac{1}{4}$ површине паралелограма $ABCD$.

533. Означимо број година које је Марко напунио 2000-те године са $2x$. Онда је сестра напунила x година, а мајка $4x$. Сада имамо да су године рођења Марка $2000-2x$, сестре $2000-x$ и мајке $2000-4x$. Дакле, имамо једначину

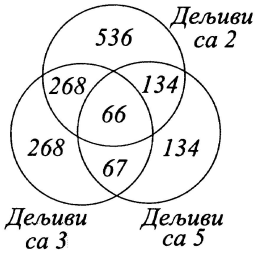
$$(2000-x)+(2000-2x)+(2000-4x)=5923,$$

одакле је $x = 11$. Дакле Марко је 2000-те напунио 22 године, а 2008. године је напунио 30 година.

534. Нека је N пресек праве MO и странице CD (слика). Очигледно је $\triangle AMO \cong \triangle CNO$ ($AO = OC$, $\measuredangle MAC = \measuredangle ACN$, $\measuredangle AOM = \measuredangle CON$) па је $AM = NC$. Како је $\measuredangle MAD = \measuredangle AMN$, то је $AMND$ једнакокраки трапез па је $AD = MN$. Сада је $\triangle AMD \cong \triangle NCM$ ($AM = NC$, $AD = MC$, $\measuredangle DAM = \measuredangle AMN = \measuredangle MNC$), а одатле је $MC = MD$.



Сл. уз зад. 534

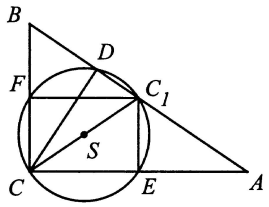


Сл. уз зад. 535

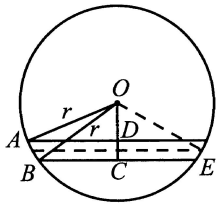
535. Одредимо колико има бројева од 1 до 2008 који су дељиви барем једним од бројева 2, 3 и 5. Са дијаграма видимо да таквих бројева има 1473. Дакле, сложених бројева мањих од 2008 има најмање 1470 (одузели смо просте бројеве 2, 3 и 5), а простих највише 538 што доказује тврђење задатка.

536. Нека је C_1 средиште хипотенузе AB (слика). Четвороугао EC_1FC је правоугаоник па тачке E, C_1, F и C припадају кружници описаној око тог правоугаоника. Средиште кружнице је тачка S и при томе је $CS = SC_1$.

Како је $\measuredangle CDC_1 = 90°$, то је троугао CDC_1 правоугли па је центар описане кружнице око овог троугла средиште његове хипотенузе, дакле тачка S, таква да је $CS = SC_1$. Следи да се описане кружнице око правоугаоника EC_1FC и тоугла CDC_1 поклапају, а одатле следи тврђење задатка.



Сл. уз зад. 536



Сл. уз зад. 539

537. Како је $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$, $a_5 = -1$, $a_6 = -1$, $a_7 = 1$, $a_8 = -1$, $a_9 = -1$, $a_{10} = 1$, $a_{11} = -1$, $a_{12} = -1$, $a_{13} = 1$, $a_{14} = -1$, $a_{15} = -1$, $a_{16} = 1$, $a_{17} = -1$, $a_{18} = -1$, $a_{19} = 1$, $a_{20} = -1$, то закључујемо да ће се бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_{15}$ понављати (у блоковима по 15), а како се у том првом блоку блок 1, -1, -1 понавља пет пута, то закључујемо да је

$$a_{3k+1} = 1, \quad a_{3k+2} = -1, \quad a_{3k+3} = -1$$

за било које $k \in \mathbf{N}_0$. Како је $2008 = 3 \cdot 669 + 1$, то је $a_{2008} = 1$. Тражени збир је $670 \cdot 1 + 669 \cdot (-1) + 669 \cdot (-1) = -668$.

538. Како је $x^4 - 2x^2 + 1 + y^{2008} = 1$, односно $\left(x^2-1\right)^2 + \left(y^2\right)^{1004} = 1$, то је $\left(x^2-1\right)^2 = 1$ и $\left(y^2\right)^{1004} = 0$ или $\left(x^2-1\right)^2 = 0$ и $\left(y^2\right)^{1004} = 1$. Дакле, једина целобројна решења су: $(x, y) \in \{(0,0), (1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)\}$.

539. Означимо $OD = x$ и $OC = y$ (слика). По услову задатка је $y - x = 2\,\mathrm{cm}$. Из $\triangle ODA$ имамо једнакост $r^2 = x^2 + 36$, а из $\triangle OCB$ имамо једнакост $r^2 = y^2 + 16$. Изједначавајући десне стране ових једнакости имамо $y^2 - x^2 = 20$, одакле је $x + y = 10$. Из једначина $x + y = 10$ и $x - y = 2$ добијамо $x = 4$ и $y = 6$ и да је полупречник круга $r = \sqrt{52}\,\mathrm{cm}$.

(i) Ако су дате тетиве са исте стране центра кружнице, тражена тетива ће бити на удаљености $\dfrac{x+y}{2} = 5\,\mathrm{cm}$. Ако са d означимо њену дужину, имамо да је

$$r^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2,$$

одакле добијамо $d = 6\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$.

(ii) Ако су дате тетиве са разних стране центра кружнице, тражена тетива ће бити на удаљености $\dfrac{y-x}{2} = 1\,\mathrm{cm}$. Ако са d означимо њену дужину, имамо да је

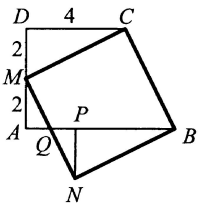
$$r^2 = \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2,$$

одакле добијамо $d = 2\sqrt{51}\,\mathrm{cm}$.

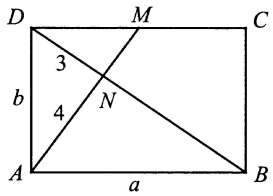
540. Ако је $a \leqslant x < b$, тада је $x \in [a, b)$. Ако посматрамо низ интервала $[2, 4)$, $[4, 16)$, $[16, 256)$ и $[256, 2008]$, тада притиском на типку „корен“ број из једног интервала прелази

у интервал лево, односно први у интервал $(1, 2)$. Тада бројеви из другог и четвртог интервала (из $[4, 16)$ и $[256, 2008]$) ће после парног броја употребе типке „корен“ бити у интервалу $(1, 2)$. Значи, тражених природних бројева има $12 + 1753 = 1765$.

541. Како је $P_{ABCD} = 20$, то тражени квадрат треба да има страницу дужине $2\sqrt{5}$. Даље је $CB = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$. Нека је M средиште дужи AD, па је $CM = 2\sqrt{5}$ и $\angle BCM = 90°$, јер је $\angle DMC = \angle ABC$ (углови са нормалним крацима).
Одредимо N тако да је $MN \perp MC$ и $BN \perp BC$, P је пресек AB и MN и Q подножје нормале из N на AB (слика). Непосредно се види да је $\triangle MDC \cong \triangle NQB$ и како је онда $NQ = 2$, да је $\triangle APM \cong \triangle QPN$. Дакле, трапез треба резати на два правоугла троугла и један трапез и то тако да прво режемо од C нормално на BC до AD, а затим од M паралелно са BC до AB.



Сл. уз зад. 541



Сл. уз зад. 543

542. Број је дељив са 3 ако и само ако је збир његових цифара дељив са 3. Ако на произвољан начин фиксирамо првих 2007 цифара, онда ћемо последњу цифру бирати тако да допуњује остатак збира цифара до дељивости са 3. Како свака класа има тачно по три елемента ($\{1, 4, 7\}$, $\{2, 5, 8\}$, $\{0, 6, 9\}$), то тражених бројева има $3 \cdot 8 \cdot 9^{2\ 006}$.

543. Троуглови ABN и MDN су слични (сви унутрашњи углови су једнаки) и $k = \dfrac{1}{2}$ (слика). Одатле следи да је $MN = 2\,\mathrm{cm}$ и $NB = 6\,\mathrm{cm}$. Уведимо ознаке $AD = b$ и $AB = a$.
Из $\triangle ABD$ имамо $b^2 + a^2 = 81$, тј. $b^2 = 81 - a^2$. $(*)$
Из $\triangle AMD$ имамо $b^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = 36$, тј. $b^2 = 36 - \dfrac{a^2}{4}$. $(**)$
Изједначавајући десне стране једнакости $(*)$ и $(**)$ израчунавамо да је $a = 2\sqrt{15}\,\mathrm{cm}$, а заменом вредности за a у једној од једначина добијамо $b = \sqrt{21}\,\mathrm{cm}$. Дакле, површина правоугаоника је $P = 6\sqrt{35}\,\mathrm{cm}^2$.

544. Разликујемо случајеве:
(i) $c \geqslant 0$. Полазне једначине постају $|a-b|+c = 19$ и $ab-c = -97$. Сабирањем једначина имамо $|a - b| + ab = -78$.

(i.1) Ако је $a - b \geqslant 0$, имамо да је $a - b + ab = -78$, одакле је

$$a(b + 1) - (b + 1) = -79, \quad \text{тј.} \quad (a - 1)(b + 1) = -79.$$

Вредности за a и b које испуњавају последњу једнакост и услов $a - b \geqslant 0$ су $(a, b) \in \{(80, -2), (2, -80)\}$. У оба случаја не постоји $c \geqslant 0$ за које важе обе полазне једначине па у овом случају полазни систем нема решења.

(i.2) Аналогно претходном, за $a - b < 0$ добијамо $(a + 1)(b - 1) = -79$. Вредности за a и b које испуњавају последњу једнакост и услов $a - b < 0$ су $(a, b) \in \{(-80, 2), (-2, 80)\}$. У оба случаја не постоји $c \geqslant 0$ за које важе обе полазне једначине па и у овом случају полазни систем нема решења.

(ii) $c < 0$. Полазне једначине постају $|a-b|+c = 19$ и $ab+c = -97$. Одузимањем друге од прве имамо $|a-b| - ab = 116$.

(ii.1) Ако је $a-b \geqslant 0$, имамо да је $a-b-ab = 116$, одакле је $(a+1)(1-b) = 117$. Вредности за a, b и c које задовољавају последњу једнакост и $a-b \geqslant 0$ су $(a,b,c) \in \{(116,0,-97), (0,-116,-97), (38,-2,-21), (2,-38,-21), (12,-8,-1), (8,-12,-1)\}$.

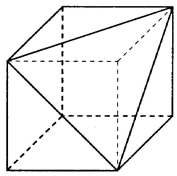
(ii.2) Ако је $a-b < 0$, имамо да је $b-a-ab = 116$, одакле је $(1-a)(b+1) = 117$. Вредности за a, b и c које задовољавају последњу једнакост и $a-b < 0$ су $(a,b,c) \in \{(0,116,-97), (-116,0,-97), (-2,38,-21), (-38,2,-21), (-8,12,-1), (-12,8,-1)\}$.

545. Како је $\left(x^5-x\right) - \left(y^5-y\right) - 5\left(x^3-x\right) = 2008$, то је за дељивост леве стране са 5 довољно доказати да је x^5-x (односно y^5-y) дељиво са 5. Међутим, $x^5 \equiv x \pmod 5$ је очигледно. Значи лева страна је дељива са 5 за свако целобројно x и y и $2008 \equiv 3 \pmod 5$, па не постоје целобројне вредности за x и y тако да важи почетна једнакост.

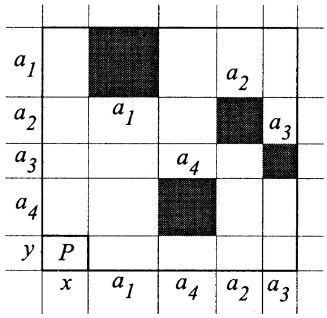
Напомена. Задатак се може слично урадити и посматрајући дељивост са 3.

546. Тело чија је мрежа дата је коцка од које је одсечена тространа призма чија је основа једнакокрако-правоугли троугао, чији је крак дужине a, и висина a (слика). Дакле, запремину добијамо када од запремине коцке одузмемо запремину пирамиде,

$$V = a^3 - \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot a = a^3 - \frac{a^3}{6} = \frac{5}{6}a^3.$$



Сл. уз зад. 546



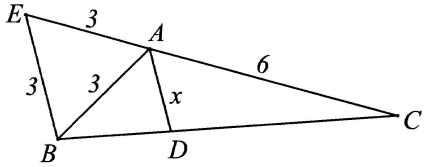
Сл. уз зад. 547

547. Ако се у једној „врсти“ или једној „колони“ налазе два квадрата, онда су они очигледно подударни. Дакле, ако има тачно четири квадрата дужина страница a_1, a_2, a_3 и a_4 и у свакој „врсти“ или свакој „колони“ је тачно по један (види слику), онда су странице правоугаоника P дужина

$$y = a - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = x.$$

Дакле, уочени правоугаоник је квадрат, пети, што је контрадикција. Значи, како има тачно четири квадрата онда барем два морају бити у истој „врсти“ или „колони“ па су онда барем два подударна.

548. Означимо са x дужину дужи AD. Нека је E тачка на продужетку дужи AC, таква да је $AE = 3$. Троугао ABE је једнакостраничан, па је $BE = 3$. Како је $\measuredangle DAB = \measuredangle ABE = 60^\circ$, то је $BE \parallel DA$, па су троуглови ADC и EBC слични. Следи да је $\frac{x}{3} = \frac{6}{9}$, одакле је $x = 2$.



Сл. уз зад. 548

549. За $n = 8$ добијамо број 201, коме је сума цифара 3. Доказаћемо да је ово тражена минимална сума цифара. Важи

$$3n^2 + n + 1 = 2n^2 + n(n+1) + 1 \equiv 1 \pmod 2,$$

па су сви бројеви датог облика непарни. Зато је немогуће да бројеви имају суму цифара 1, као ни да буду облика $2 \cdot 10^m$. Према томе, треба испитати да ли једначина

$$3n^2 + n + 1 = 10^m + 1$$

има решења у скупу природних бројева.
Трансформацијом добијамо $n(3n+1) = 10^m = 1 \cdot 10^m = 2^m \cdot 5^m$. Како су бројеви n и $3n+1$ узајамно прости, имамо два случаја ($n < 3n+1$): 1° $n = 1$, $3n+1 = 10^m$ или 2° $n = 2^m$, $3n+1 = 5^m$.
Први случај је немогућ, док за други случај добијамо $3n+1 = 3 \cdot 2^m + 1 = 5^m$. За $m = 1$ и $m = 2$ не добијамо једнакости ($3 \cdot 2 + 1 \neq 5$, односно $3 \cdot 4 + 1 \neq 25$), па имамо следећу процену

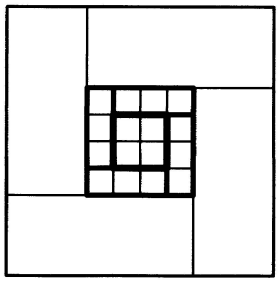
$$5^m = 5^2 \cdot 5^{m-2} > 24 \cdot 5^{m-2} > 3 \cdot 2^3 \cdot 2^{m-2} = 3 \cdot 2^{m+1} > 3 \cdot 2^m + 1,$$

па дата једначина нема решења у скупу природних бројева. Како за $n = 1$, односно $n = 2$ добијамо бројеве са збиром цифара 5, односно 6, закључујемо да је најмања сума цифара једнака 3.

550. (а) Обојимо поља квадрата 100×100 бојама 1, 2, 3 као на слици а). После одсецања квадрата 2×2, у преосталом делу биће 3333 квадрата боје 1, 3331 квадрат боје 2 и 3332 квадрата боје 3. Како сваки правоугаоник 1×3 покрива по једно поље сваке боје, поплочавање је немогуће.

1	3		· · ·	1	3	2	1
2	1	3	· · ·		1	3	2
	2	1	· · ·			1	3
			· · ·				1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
			· · ·		2	1	3
1			· · ·			2	1

Сл. уз зад. 550 (а)



Сл. уз зад. 550 (б)

(б) После исецања централног квадрата 2×2, уоквиримо рупу са 4 правоугаоника, као на слици б). Остатак се може разложити на 4 правоугаоника 48×52. Како $3 \mid 48$, поплочавање је могуће.

551. Сабирањем датих једнакости добија се $xy + zt = x + y + z + t$, па је $xy - x - y + 1 + zt - z - t + 1 = 2$. Тада је $x(y-1) - (y-1) + z(t-1) - (t-1) = 2$, тј. $(x-1)(y-1) + (z-1)(t-1) = 2$. Како је $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$, $z \geqslant 1$, $t \geqslant 1$ то је

$$x - 1 \geqslant 0, \quad y - 1 \geqslant 0, \quad z - 1 \geqslant 0, \quad t - 1 \geqslant 0,$$

па су могући следећи случајеви:
1° $(x-1)(y-1)=0$ и $(z-1)(t-1)=2$,
2° $(x-1)(y-1)=1=(z-1)(t-1)$ и
3° $(x-1)(y-1)=2$ и $(z-1)(t-1)=0$.
Ако је $(x-1)(y-1)=0$, онда је $x=1$ или $y=1$, а из $(z-1)(t-1)=2$ следи да је $z=2$ и $t=3$ или $z=3$ и $t=2$. Како је $zt=6=x+y$, то су могућа решења $(1,5,2,3)$, $(1,5,3,2)$, $(5,1,2,3)$, $(5,1,3,2)$.
Ако је $x-1=y-1=z-1=t-1=1$, једино решење је $x=y=z=t=2$, тј. решење је $(2,2,2,2)$.
У трећем случају разматрање је аналогно првом и добијамо решења $(2,3,1,5)$, $(2,3,5,1)$, $(3,2,1,5)$, $(3,2,5,1)$.
Провера показује да су наведених 9 тројки заиста решења датог система.

552. Доказаћемо да је тражени збир највећи ако имамо домине са паровима бројева $(1,2)$, $(3,4)$, $\ldots$, $(2007,2008)$. Претпоставимо да на две домине имамо парове (a,b) и (c,d) и да важи распоред $a>b$ и $c>d$. Не умањујући општост, претпоставимо да је a највећи међу бројевима a, b, c, d. Уколико извршимо замену бројева, имамо домине са паровима (a,c) и (b,d). Ако се збир свих реципрочних вредности повећава, тада важи неједнакост

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}<\frac{1}{ac}+\frac{1}{bd}.$$

Сређивањем добијамо $ab+cd-ac-bd>0$, односно $(a-d)(b-c)<0$. Како је $a>d$, следи да b мора бити мање од c.

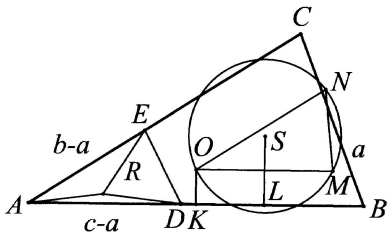
Понављањем овог поступка добијамо да је збир $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_{1004}}$ највећи када су бројеви на доминама узастопни и једнаки $(1,2)$, $(3,4)$, $\ldots$, $(2007,2008)$. Зато је

$$\begin{aligned}\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_{1004}} &\leqslant \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2007\cdot 2008}\\ &=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2007}-\frac{1}{2008}\right)\\ &=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2008}\right)-2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2008}\right)\\ &=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2008}\right)-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1004}\right)\\ &=\frac{1}{1005}+\frac{1}{1006}+\cdots+\frac{1}{2008}.\end{aligned}$$

553. *Прво решење.* Нека су K и L подножја нормала из тачке O (центра описаног круга око троугла ABC) и тачке S (центра уписаног круга у троугао ABC) на страницу AB (слика). Нека су $OM \parallel AB$ и $ON \parallel AC$ тетиве круга $k(S,SO)$. Тада је $OM=2KL$. Како је $KL=KB-LB$, то је

$$KL=\frac{c}{2}-\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)=\frac{b-a}{2},$$

па је $OM=b-a$. Аналогно се доказује да је $ON=c-a$.



Сл. уз зад. 553

Како је $AD = c - a$ и $AE = b - a$ и како је $\measuredangle BAC = \measuredangle MON$ (као углови са паралелним крацима), то је $\triangle ADE \cong \triangle OMN$, јер је $AD = ON = c - a$, $\measuredangle BAC = \measuredangle MON$ и $AE = OM = b - a$ (СУС). Из подударности троуглова ADE и OMN следи и да су полупречници кругова који су око њих описани једнаки, тј. $OS = R$.

Друго решење (скица). Према познатој Ојлеровој релацији, за растојање центара описаног и уписаног круга троугла важи

$$OS^2 = R(R - 2r),$$

где су R и r полупречници тих кругова. При том се између вредности тих полупречника може извести следећа веза

$$r = R(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1),$$

па се уврштавањем у претходну релацију добија да је

$$OS^2 = R^2(3 - 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)).$$

С друге стране, ако са ρ означимо полупречник описаног круга троугла ADE, на основу синусне теореме важи $\rho = \dfrac{DE}{2\sin\alpha}$, а из косинусне теореме следи да је $DE^2 = (c-a)^2 + (b-a)^2 - 2(b-a)(c-a)\cos\alpha$. Комбиновањем ових релација, после сређивања се добија да је

$$\rho^2 = R^2(3 - 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)).$$

Тиме је доказано да важи $\rho = OS$.

554. Због

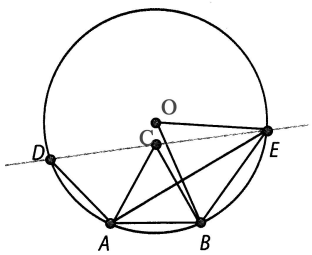
$$\begin{aligned} 400 = 20^2 &= (a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 300 \end{aligned}$$

важи $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 100$, па је

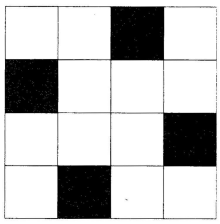
$$\begin{aligned} &(a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2 \\ &\qquad = 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \\ &\qquad = 300 - 300 = 0. \end{aligned}$$

Одавде следи да је $a = b = c = d$, па из $a+b+c+d = 20$ добијамо да је $a = b = c = d = 5$.

555. Како је $AD = AC$, троугао CDA је једнакокрак (слика). Ако означимо $\measuredangle ADC = \measuredangle ACD = \alpha$ и $\measuredangle BCE = \beta$, тада је $\alpha + \beta = 120°$. У тетивном четвороуглу $ABED$ је $\measuredangle ABE = 180° - \alpha$, па је $\measuredangle CBE = 120° - \alpha = \beta$. Дакле, и троугао CBE је једнакокрак, па је четвороугао $ABEC$ делтоид. Следи да је AE симетрала угла BAC, па је $\measuredangle EAB = 30°$ и одговарајући централни угао $\measuredangle EOB = 60°$ (O је центар кружнице k). Зато је $\triangle OBE$ једнакостраничан и $BE = 1$, па је у једнакокраком троуглу CBE и $CE = BE = 1$.



Сл. уз зад. 555



Сл. уз зад. 557

556. Дата једначина се може написати у облику $\dfrac{4}{r+1} = \dfrac{p-q}{q}$, односно

$$4q = (p-q)(r+1).$$

Размотримо следеће случајеве.
1° $q = 2$. Једначина постаје $8 = (p-2)(r+1)$ и лако је видети да је задовољена (уз услов да су p и r прости бројеви) само за $p = 3$ и $q = 7$, тј. тројка $(3, 2, 7)$ је решење задатка.
2° q је непаран прост број. Тада су једине могућности (а) $p - q = 2$, $r + 1 = 2q$ и (б) $p - q = 4$, $r + 1 = q$ (у осталим случајевима не могу се добити прости p и r).
(а) За $q = 3$ добија се решење $(5, 3, 5)$. Ако је $q > 3$, онда је $q \equiv \pm 1 \pmod 3$. У случају $q \equiv 1 \pmod 3$ је $p \equiv 0 \pmod 3$, а у случају $q \equiv -1 \pmod 3$ је $r \equiv 0 \pmod 3$, па више решења нема.
(б) У овом случају је једина могућност $r = 2$, $q = 3$, што даје још једно решење $(7, 3, 2)$.
Сва решења задатка су тројке $(3, 2, 7)$, $(5, 3, 5)$ и $(7, 3, 2)$.

557. Број поља која могу да промене боју у једном потезу је највише 5. Дакле, број потребних потеза је најмање 4. Уочимо фигуру на слици на којој су четири поља маркирана. Јасно је да, полазећи од „беле табле“, применом 4 дозвољена потеза на означена поља, можемо таблу превести у „црну“. Такође, како узастопна примена два потеза на исто поље ништа не мења, и за свако парно $n \geqslant 4$ може се добити „црна“ табла.
Докажимо да се ни за једно непарно n постављени циљ не може постићи. Посматрајмо поново поља означена на слици. У било ком потезу (без обзира на које поље га примењујемо) мења се боја тачно једног од та четири означена поља. Дакле, у сваком потезу мења се парност броја црних поља међу та 4 означена. Како је у почетку тај број био 0, он ће у сваком случају после непарног броја потеза бити непаран, дакле не може бити једнак 4, што би морало бити ако је читава табла „црна“. Тиме је наведено тврђење доказано.

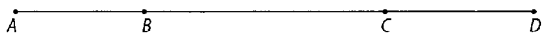
2009. година

558. а) 857; б) 693; в) 37.

559. а) $7\boxed{+}2\boxed{=}39\boxed{-}30$; б) $30\boxed{+}40\boxed{=}70\boxed{-}0$; $30\boxed{+}40\boxed{-}70\boxed{=}0$.

560. Мирјана има $485 : 5 = 17$ салвета, а Славица $17 + 5 = 22$.

561. Како је $BD = 16\,\text{cm}$, то је $AB = AD - BD = 4\,\text{cm}$. Дуж AC је једнака збиру дужи AB и BC, па је $BC = AC - AB = 11\,\text{cm}$.



Сл. уз зад. 561

562. У односу на пре две године, за три године и Ненад и његов син ће имати 5 година више. Значи, укупан број година ће се повећати за 10, па ће заједно имати 50 година.

563. Највећи број који задовољава дате услове је 8 877 550, а најмањи 3 003 558.

564. $(46238 - 9393) : 5 = 36845 : 5 = 7369$.

565. Нека је у квадратићу лево од бројева 1477 и 2306 број a, а десно број b.

	528			a	1477	2306	b	

Тада је по услову задатка $a + 1477 + 2306 = 1477 + 2306 + b$, одакле закључујемо да је $a = b$. Посматрајмо сада бројеве лево и десно од a и 1477. Као и раније закључујемо да су ти бројеви једнаки.

	528		2306	a	1477	2306	a	

Дакле, у датој траци сви бројеви између којих су друга два поља су једнаки, па траку треба попунити овако

2306	528	1477	2306	528	1477	2306	528	1477

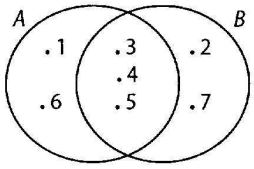
566. Као цифра јединица у једној стотини цифра 4 се употреби 10 пута, а у 9 стотина укупно 90 пута. Као цифра десетица цифра 4 се у једној стотини употреби 10 пута, а у 9 стотина 90 пута. Као цифра стотина цифра 4 се употреби 100 пута. Дакле, цифра 4 се укупно употреби 280 пута.

567. Ако повећамо дужину једног пара наспрамних страница за по неки број, а дужине другог пара наспрамних страница смањимо за по исти тај број, обим се неће променити, па је и обим квадрата $2\,\text{m} = 20\,\text{dm}$. Одатле имамо да су странице квадрата по $5\,\text{dm}$. Странице правоугаоника су за $10\,\text{cm} = 1\,\text{dm}$ мање, односно веће, па су оне $4\,\text{dm}$ и $6\,\text{dm}$.

568. Осенчена је $\frac{1}{2}$ квадрата, $\frac{1}{3}$ правоугаоника и $\frac{1}{3}$ круга.

569. Најмањи петоцифрени број коме су све цифре различите је 10234. Међутим, овај број није дељив ни са 3 ни са 4. Први већи број који је дељив са 4 је 10236 (двоцифрени завршетак дељив са 4), а како је он дељив и са 3, то је он и решење задатка.

570. Пресеку скупова припадају елементи 3, 4 и 5. Како само скупу A припадају елементи 1 и 6, то само скупу B припадају елементи 2 и 7. Дакле, $A = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ и $B = \{2, 3, 4, 5, 7\}$.



Сл. уз зад. 570

571. Како је угао од своје трећине већи за 32°, то су две трећине тог угла 32°, а једна трећина 16°. Како је трећина угла 16°, цео угао је 48° а комплемент тог угла је угао од 42°.

572. Раставимо бројеве на производ 3 различита једноцифрена броја: $20 = 1 \cdot 4 \cdot 5$, $108 = 2 \cdot 6 \cdot 9 = 3 \cdot 4 \cdot 9$, $168 = 4 \cdot 6 \cdot 7 = 3 \cdot 7 \cdot 8$, $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ и $80 = 2 \cdot 5 \cdot 8$. Број 7 треба уписати у трећи ред и прву колону, пошто је чинилац бројева 168 и 42. Слично уписујемо и бројеве 5, 9 и 8 (види прву слику), а онда уписујемо и преостале бројеве:

	5		20
		9	108
7	8		168
42	80	108	

	5		20
	2	9	108
7	8	3	168
42	80	108	

1	5	4	20
6	2	9	108
7	8	3	168
42	80	108	

573. $x = -2$, $y = -3$, $|x - 1| - |y - 2| = -2$.

574. $|(-2009 : 49 + 2009 : 41 - 2009 : 7) : 9| = |(-41 + 49 - 287) : 9| = |-31| = 31$.

575. Троугао BCD је једнакокрак и $\measuredangle BCD = \measuredangle BCA + \measuredangle ACD = 130°$, па је $\measuredangle CBD = \measuredangle CDB = 25°$. сада је $\measuredangle ABD = \measuredangle ABC - \measuredangle CBD = 60° - 25° = 35°$.

576. Бројеви које је Весна записала су: 2008, 2006, ... , 6, 4, 2 (укупно 1004 позитивна цела броја), 0, −2, −4, −6, ... , −2006, −2008 (укупно 1004 негативна цела броја и нула). Како је сваком позитивном целом броју записан и њему супротан број, тражени збир је 0.

577. Срећко за 6 сати очистио укупно

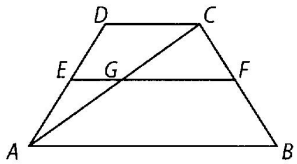
$$3 \cdot (3 \cdot 2{,}5) + 1{,}4 \cdot 12 + 2 \cdot (3{,}5 \cdot 3) = 60{,}3\,\mathrm{m}^2.$$

Дакле, остало му је да очисти још $80 - 60{,}3 = 19{,}7\,\mathrm{m}^2$.

578. $AD = \sqrt{AE^2 + ED^2} = 2\sqrt{2}$ и $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = 2\sqrt{3}$, па је $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 4$. $MQ = \sqrt{MR^2 + RQ^2} = \sqrt{10}$ и $MP = \sqrt{MQ^2 + QP^2} = \sqrt{19}$, па је $MN = \sqrt{MP^2 + PN^2} = \sqrt{20}$. Како је $\sqrt{16} < \sqrt{20}$, то је $4 < \sqrt{20}$, тј. $AB < MN$.

579. $2008^1 = 2008$, $2008^2 = \ldots 4$, $2008^3 = \ldots 2$, $2008^4 = \ldots 6$, $2008^5 = \ldots 8$, ... Дакле, период понављања последње цифре у степену броја 2008 је 4 и то ако степен има остатак 1, последња цифра је 8. Како 2009 при дељењу са 4 даје остатак 1, последња цифра траженог степена је 8.

580. Како је EF средња линија трапеза $ABCD$, то је EG средња линија троугла ADC и GF је средња линија троугла ABC. Закључујемо да је $DC = 2\,EG = 4\,\mathrm{cm}$ и $AB = 2\,GF = 10\,\mathrm{cm}$, па је $P_{\triangle ACD} : P_{\triangle ABC} = 2 : 5$ јер су висине тих троуглова једнаке.



Сл. уз зад. 580

581. а) $\sqrt{3+\frac{1}{16}}-\sqrt{2-\frac{7}{16}}=\sqrt{\frac{49}{16}}-\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{7}{4}-\frac{5}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.
б) $\sqrt{1{,}69-0{,}25}-\sqrt{6{,}25-5{,}76}=\sqrt{1{,}44}-\sqrt{0{,}49}=0{,}5$.

582. Славина A за 1 сат напуни $\frac{1}{12}$, а славина B $\frac{1}{15}$ базена. Одводна цев за 1 сат испразни $\frac{1}{10}$ базена. Дакле, за један сат напуниће се $\frac{1}{12}+\frac{1}{15}-\frac{1}{10}=\frac{1}{20}$ базена. Цео базен ће се напунити за 20 сати.

583. Три паралелне праве одређују највише 3 равни. По једна од 3 паралелне праве и по једна од 5 тачака одређују највише 15 равни. Пет тачака од којих су 3 колинеарне одређују највише 5 равни (у случају када су праве које одређују по једна од 3 колинеарне и по једна од две две преостале тачке мимоилазне). Дакле, постоји највише 23 равни.

584. $9(n-3)^2-\left(\frac{n(n-3)}{2}\right)^2=0$. Извлачењем испред заграде имамо да је $(n-3)^2\cdot\left(9-\frac{n^2}{4}\right)=0$. Сада је $(n-3)^2=0$ или $9-\frac{n^2}{4}=0$. Решење прве једначине је $n=3$ (троугао), тј. $d_n=D_n=0$. Решење друге једначине је $n=6$ (шестоугао), тј. $d_n=3$, $D_n=9$.

585. $x\geqslant\frac{3}{14}$.

586. $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=5\,\mathrm{cm}$, MC је хипотенуза правоуглог троугла MCC_1. CC_1 је тежишна дуж правоуглог троугла ABC и једнака је половини хипотенузе AB, тј. $CC_1=5/2\,\mathrm{cm}$. Сада је

$$MC=\sqrt{MC_1^2+CC_1^2}=\sqrt{25+\frac{25}{4}}=\frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

587. Најмањи број ће бити онај који има најмање цифара, а то значи када у збиру употребимо што више пута цифру 9. Како је први мањи број од 2009 који је дељив са 9, број 2007, у том збиру се цифра 9 јавља 223 пута. Дакле, тражени број је $2\underbrace{99\ldots9}_{223}$.

588. а) $131+622$ и $132+621$.
б) Како при одузимању цифре јединица једну десетицу преводимо у јединице, цифре десетица се заправо разликују за 7, па су сва могућа решења: 492 и 329, 482 и 319, 472 и 309.

589. Нека могућа решења су $5\cdot(5\cdot5-5)$, $(5\cdot5-5)\cdot5$ или $(5+5)\cdot(5+5)$.

590. Збир три иста једноцифрена броја, означена са A, завршава се цифром 1. Како збир три једноцифрена броја може да буде најмање 3, а највише 27, то су могуће вредности овог збира 11 и 21. Како 11 не може да се подели са 3, то је тражени збир 21, а вредност слова A је 7.

591. а) 6 правих: $p(A,B)$, $p(A,D)$, $p(A,E)$, $p(B,D)$, $p(B,E)$, $p(C,D)$.
б) 10 дужи: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE.

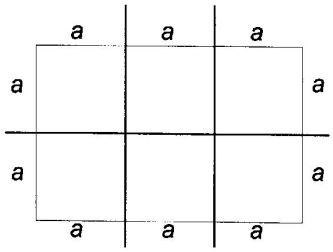
592. Од 1. јануара до 7. марта прође укупно 65 дана. Дакле, часовник ће каснити $65:5=13$ пута по 6 секунди, што је укупно 78 секунди. Часовник ће у подне 7. марта показивати 11 часова 58 минута и 42 секунде.

593. 2.

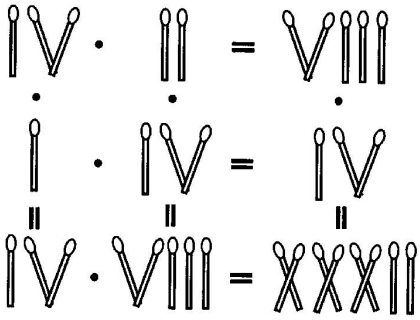
594. Како при било ком сабирању два броја од 1 до 4 нема прелаза преко десетице, то 3 можемо добити као $1+2$, а 7 као $3+4$. Одатле су могућа два решења: $4312+3421$, $4321+3412$.

595. Поделом помоћу 3 праве на 6 квадрата добијамо фигуру као на слици. Одавде видимо да је обим правоугаоника једнак збиру 10 страница квадрата. Дакле, $10 \cdot a = 120$, тј. $a = 12\,\mathrm{cm}$. Обим квадрата је $4 \cdot a = 48\,\mathrm{cm}$.

596. а) 8, б) 12, в) 6, г) 1.



Сл. уз зад. 595



Сл. уз зад. 597

597. Види слику.

598. Највећи двоцифрени прост број облика $2n + 1$, при чему је и n прост број, јесте 83 (јер је $2 \cdot 41 + 1 = 83$). Значи, бројеви n могу бити: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41. Бројеви који се завршавају са 7 не испуњавају услов да је и $2n + 1$ прост. Провером закључујемо да услове задатка испуњава 7 парова: 2 и 5, 3 и 7, 5 и 11, 11 и 23, 23 и 47, 29 и 59, 41 и 83.

599. Како Пеца целу пицу поједе за 15 минута, то значи да за 1 минут поједе $1/15$ пице. Неца и Пеца заједно поједу пицу за 6 минута, што значи да за 1 минут поједу $1/6$ пице. Неца за 1 минут поједе $\frac{1}{6} - \frac{1}{15} = \frac{1}{10}$ пице. Дакле, Неца целу пицу поједе за 10 минута.

600. Како је $2009 = 7 \cdot 7 \cdot 41$, то је збир тих простих бројева $7 + 7 + 41 = 55$.

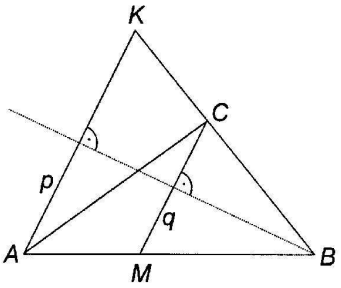
601. $\alpha = \beta$ (унакрсни углови); $\beta = \gamma$ (углови са паралелним крацима). Сада је $\alpha + \beta + \gamma = 2009'$, $3\alpha = 2009'$, одакле је $\alpha = 669'40'' = 11°9'40''$.

602. Означимо „снагу“ миша са m. Тада мачка има „снагу“ $6m$, Жућа $5 \cdot 6m = 30m$, унука $4 \cdot 30m = 120m$, баба $3 \cdot 120 = 360m$ и деда $2 \cdot 360m = 720m$. Дакле, њихова укупна „снага“ је $1237m$, па треба позвати 1237 мишева.

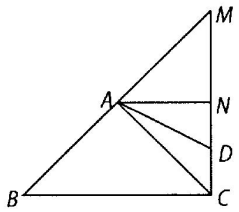
603. Важи $-\frac{1}{2} < a < -\frac{5}{12}$, тј. $-\frac{6}{12} < a < -\frac{5}{12}$ $(*)$. Проширивањем са 2 добијамо $-\frac{12}{24} < a < -\frac{10}{24}$, па је $-\frac{11}{24}$ једно решење. Проширивањем неједнакости $(*)$ за 3 добијамо решење $-\frac{17}{36}$, а проширивањем са 4 и решење $-\frac{23}{48}$.

604. Нека права p садржи тачку A и нормална је на симетралу s угла ABC и нека права q садржи тачку C и нормална је на симетралу s (слика). Како права p сече праву BC у тачки K, то је троугао ABK једнакокрак и $AB = BK$. Слично, права q сече праву AB у тачки M, па је троугао BMC једнакокрак и $MB = BC$. Следи да је $AB = BK = BC + CK = MB + CK = 13\,\mathrm{cm}$.

605. Двоцифрени бројеви чији је производ цифара 42 пишу се цифрама 6 и 7 и има их два: 67 и 76. Троцифрени бројеви чији је производ цифара 42 пише се цифрама 1, 6,



Сл. уз зад. 604



Сл. уз зад. 611

7 или 2, 3, 7 и има их 12: 167, 176, 617, 671, 716, 761, 237, 273, 327, 372, 723, 732. Четвороцифрени бројеви чији је производ цифара 42 пишу се цифрама 1, 1, 6, 7 или 1, 2, 3, 7 и има их 12: 1167, 1176, 1617, 1671, 1716, 1761, 1237, 1273, 1327, 1372, 1723, 1732. Дакле, укупно 26 бројева.

606. За трећу страницу троугла c важи $2009 - 2008 < c < 2009 + 2008$, односно $1 < c < 4017$. Најмањи обим је $O = 4019\,\mathrm{cm}$ за $c = 2\,\mathrm{cm}$, а највећи обим је $O = 8033\,\mathrm{cm}$ за $c = 4016\,\mathrm{cm}$.

607. Могуће вредности збира три броја из скупа $\{1, 0, 1\}$ су од -3 до 3, тј. то је укупно 7 различитих вредности. Како у табелу морамо да упишемо 8 различитих вредности, закључујемо да је бројеве немогуће уписати на тражени начин.

608. $\dfrac{(8^5)^{4n}}{(32^{3n})^4} = \dfrac{8^{20n}}{32^{12n}} = \dfrac{(2^3)^{20n}}{(2^5)^{12n}} = \dfrac{2^{60n}}{2^{60n}} = 1.$

609. $\sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2} + 2\sqrt{3} = |x+1| - |x-1| + 2\sqrt{3}$. Заменом вредности за x имамо $|2-\sqrt{3}+1| - |2-\sqrt{3}-1| + 2\sqrt{3} = |3-\sqrt{3}| - |1-\sqrt{3}| + 2\sqrt{3} = 3 - \sqrt{3} - (\sqrt{3}-1) + 2\sqrt{3} = 4$.

610. Површина једнакостраничног троугла је $P_t = 9\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$. Полупречник уписаног круга у овај троугао је $r = \sqrt{3}\,\mathrm{cm}$. Дијагонала квадрата једнака је пречнику круга, $d = 2\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$. Површина квадрата ће бити $P_k = 6\,\mathrm{cm}^2$. Да бисмо одредили који део површине заузима површина квадрата, поделићемо површину троугла површином квадрата и добијамо $2\sqrt{3}/9$.

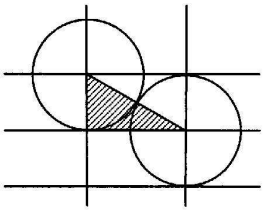
611. Означимо пресечну тачку правих AB и CD са M, а подножје нормале из A на CD са N (слика). $\triangle BCM$ је једнакокрако правоугли, па је $MC = 4\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$ и $BM = 8\,\mathrm{cm}$. Како је $AB = 4\,\mathrm{cm}$, тачка A је средиште хипотенузе и $AN = 2\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$ (средња линија $\triangle BCM$). Сада је N средиште дужи MC, и $NC = 2\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$. Из правоуглог троугла AND рачунамо да је $AD = \sqrt{10}\,\mathrm{cm}$. Сада је $O_{ABCD} = (4 + 5\sqrt{2} + \sqrt{10})\,\mathrm{cm}$. Површину рачунамо као $P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ACD} = 8\,\mathrm{cm}^2 + 2\,\mathrm{cm}^2 = 10\,\mathrm{cm}^2$.

612. Ако је на почетку у реду о коме је реч село n гледалаца, онда је првом „попуном“ у ред село још $n-1$, другом попуном још $2n-2$ и трећом „попуном“ још $4n-4$ гледалаца, тако да је $n + (n-1) + (2n-2) + (4n-4) = 2009$, одакле је $n = 252$.

613. За $x > 0$ имамо $\Big|x + \big|2x + |4x|\big|\Big| = |x + 6x| = 7x = 2009$, одакле је $x = 287$. За $x < 0$ имамо $\Big|x + \big|2x + |4x|\big|\Big| = |x - 2x| = -x = 2009$, одакле је $x = -2009$.

614. Мора бити $b \neq 0$ (као именилац разломка) и $a \neq 0$ (јер је производ различит од 0). Дакле, $c = 0$ и $\dfrac{a(-b)}{b} > 0$, одакле је $-a > 0$, тј. $a < 0$. Одавде је $b > 0$.

615. Очигледно да је растојање између хоризонталних правих 10 cm. Растојање између вертикалних правих добијамо применом Питагорине теореме на шрафирани троугао са слике чија је хипотенуза 20 cm и једна катета 10 cm, па је тражено растојање $10\sqrt{3}$ cm.



Сл. уз зад. 615

616. Како је

$$6^{2n+2} - 2^{n+3} \cdot 3^{n+2} + 36 = 36(6^{2n} - 2^{n+1} \cdot 3^n + 1) = 36(6^{2n} - 2 \cdot 6^n + 1) = 36(6^n - 1)^2,$$

и како је $6^n - 1$ дељиво са 5, следи да је дати број дељив са $36 \cdot 25 = 900$.

617. Нека је a основна ивица, а H висина призме. Тада је основна ивица нове призме $3a$, а висина $\left(1 - \dfrac{p}{100}\right)H$. Како је запремина нове призме већа за $p\%$ у односу на првобитну, добијамо да је

$$6\,\frac{(3a)^2\sqrt{3}}{4}\left(1 - \frac{p}{100}\right)H = .\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot 6\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\,H.$$

Следи да је $9\left(1 - \dfrac{p}{100}\right) = 1 + \dfrac{p}{100}$, па је $p = 80$. Површина омотача нове призме је $0{,}6(6aH)$, што значи да се површина омотача смањила за 40%.

618. $6027 \cdot (287 - 2009 : 7) = 0$

619. Прва цифра четворооцифреног броја мора бити 1, да би збир био 2009, па је и последња цифра 1. Последња цифра троцифреног броја мора бити 8, а самим тим и прва. Како се збир броја 8 и неког броја завршава са 0, тај број мора бити 2 или 1 (ако постоји пренос при претходном сабирању). Дакле, могући четвороцифрени бројеви су 1221 или 1111. Ако је четвороцифрени број 1221, тада је $2009 - 1221 = 788$, а ово не може бити тражени троцифрени број. Ако је четвороцифрени број 1111, тада је тражени троцифрени број $2009 - 1111 = 898$, што јесте решење.

620. Ако је била једна бубамара са 7 тачкица, тада је укупан број тачкица на бубамарама са 4 тачкице 83, што је немогуће. Ако је било две бубамаре са 7 тачкица, тада је укупан број тачкица на бубамарама са 4 тачкице 76, што је могуће. Најмање је могло да буде две бубамаре са 7 тачкица.

621. Ако је површина најмањег квадрата $4\,\text{cm}^2$, онда је његова страница 2 cm. Страница квадрата 3 је два пута већа од странице квадарата 1 и она је 4 cm. Страница квадрата 4 једнака је збиру дужина страница квадрата 3 и 2 и она је 6 cm. Страница квадрата 5 једнака је збиру страница квадрата 1, 2 и 4 и она је 10 cm. Дакле, ширина правоугаоника једнака је страници квадрата 5, а дужина је једнака збиру дужина страница квадрата 4 и 5, а то је 16 cm. Обим правоугаоника је 52 cm.

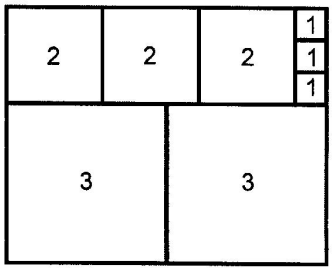
622. Нека је $a = 5$ cm и $b = 10$ cm. Како је збир свих ивица $4 \cdot (a + b + c)$, имамо да је $4 \cdot (a + b + c) = 140$. Одавде добијамо да је $c = 20$ cm. Како је $P = 2 \cdot (ab + bc + ac)$, то је $P = 700\,\text{cm}^2$.

623. Прва, односно последња цифра умањеника може бити 3 или 2 да би разлика била 2009. Ако је она 3, онда последња, а самим тим и прва, цифра умањиоца мора бити 4. Међутим, тада разлика не може бити 2009. Дакле, умањеник почиње и завршава се цифром 2, тј. $2{**}2 - {***} = 2009$.

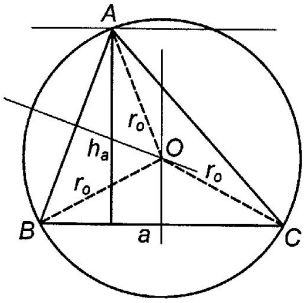
Сада прва и последња цифра умањиоца морају бити 3. Да би разлика неког броја и броја 3 била 0, тај број мора бити 3 или 4 (због претходног одузимања). Ако је умањеник 2442, умањилац је тада 433 што није тражено решење. Ако је умањилац 2332, умањилац је тада 323 што јесте тражено решење. Дакле, решење је $2332 - 323 = 2009$.

624. $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) : \frac{1}{6027} = 2009.$

625. Обим квадрата 1 је 2 cm, па је његова страница 0,5 cm (слика). Страница квадрата 2 је три пута већа од странице квадрата 1, па је она 1,5 cm. Две странице квадрата 3 имају исту дужину као збир три странице квадрата 2 и једне страница квадрата 1, па је страница квадрата 3 једнака 2,5 cm. Дакле, дужина правоугаоника је 5 cm, а ширина 4 cm. Површина правоугаоника је 20 cm^2.



Сл. уз зад. 625



Сл. уз зад. 629

626. Збир бројева B, C, F и G је једнак збиру бројева E, F, G и H. Означимо број B са x. Слово E ће имати вредност $x+\frac{1}{12}$. Слично одређујемо и вредност слова D. Разлика збира бројева B, C, F, G и збира бројева C, D, G, H је $\frac{1}{2}$, па је $D = x+\frac{1}{4}$. Знамо да је збир бројева A, B, C и D једнак збиру бројева E, F, G и H, $x+\frac{1}{3}+1+x+\frac{1}{4} = x+\frac{1}{12}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$. Из једначине добијамо $x = \frac{1}{4}$. На крају, $B = \frac{1}{4}$, $D = \frac{1}{2}$, $E = \frac{1}{3}$.

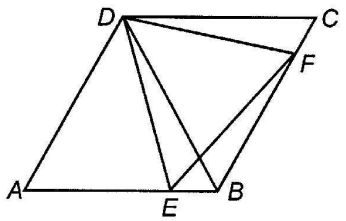
627. Велика казаљка за 1 минут опише угао од $6°$, мала $0{,}5°$. Дакле, сваког минута угао између мале и велике казаљке се смањи за $5{,}5°$. Ако са x означимо број тражених минута, треба да решимо једначину $180° - 5{,}5° \cdot x = 70°$. Решење једначине је $x = 20$, па је тражено решење 20 минута.

628. Растављања броја 2009 су $2009 = 49 \cdot 41 = 7 \cdot 287 = 1 \cdot 2009$. Како ниједан од бројева 7 и 287 није квадрат неког целог броја, добијамо да је $x^2 = 49$ и $|y| = 41$ или $x^2 = 1$ и $|y| = 2009$. Дакле, сва решења су:
$(x, y) \in \{(7, 41), (7, -41), (-7, 41), (-7, -41), (1, 2009), (1, -2009), (-1, 2009), (-1, -2009)\}$.

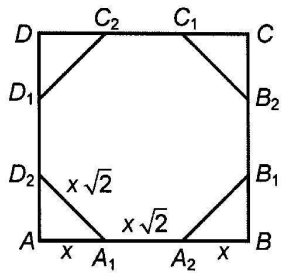
629. Нека је O центар описане кружнице (слика). Троугао BCO је једнакокрак и познате су нам све његове странице, па га можемо конструисати. Тачка A се налази на правој која је паралелна правој на којој је страница a и на растојању h_a од ње и налази се на удаљености r_o од тачке O. Теме A је одређено пресеком поменуте праве и кружнице.

630. Ако је x мушкараца у браку, онда је и x жена у браку, па на острву живи $\frac{4x}{3}$ мушкараца и $\frac{3x}{2}$ жена. Острво има укупно $\frac{17x}{6}$ становника. У браку је $2x$ становника, а $\frac{5x}{6}$ становника није, а то је $\frac{5}{17}$ становника.

631. Како је $\measuredangle BAD = 60^\circ$ и $AB = AD$, то је $\triangle ADB$ једнакостраничан и $\measuredangle ADB = 60^\circ$ (слика). Аналогно је и $\measuredangle DBC = 60^\circ$. Сада је $\triangle ADE \cong \triangle BDF$ ($AD = BD$, $AE = BF$, $\measuredangle DAB = \measuredangle DBC$), па је $DE = DF$ и $\measuredangle ADE = \measuredangle BDF$. Како је $DE = DF$ и $\measuredangle EDF = \measuredangle EDB + \measuredangle BDF = \measuredangle EDB + \measuredangle ADE = \measuredangle ADB = 60^\circ$, то је троугао DEF једнакостраничан.



Сл. уз зад. 631



Сл. уз зад. 636

632. Да би збир 3 броја био паран, сва три морају бити парна или један паран, а два непарна. У сваком случају један од ова 3 броја је паран. Збир преостала 2 броја је непаран, а то је могуће само ако је 1 паран, а 1 непаран. Дакле, и од преостала 2 броја један је сигурно паран. Како су сада 2 броја сигурно парна, а сваки паран број је дељив са 2, то је производ ових 5 бројева дељив са 4.

633. $4^9 + 6^{10} + 3^{20} = (2^2)^9 + 2^{10} \cdot 3^{10} + (3^{10})^2 = (2^9)^2 + 2 \cdot 2^9 \cdot 3^{10} + (3^{10})^2 = (2^9 + 3^{10})^2$.

634. Обим правоуглог троугла је $O = a+b+c = 36\,\mathrm{cm}$. Како је $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{7}{5}$, то додавањем броја 1 левој и десној страни добијамо $\dfrac{a+b+c}{c} = \dfrac{12}{5}$. Заменом $a+b+c = 36$ у претходну једнакост добијамо $\dfrac{36}{c} = \dfrac{12}{5}$, одакле је $c = 15$. Сада из $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{7}{5}$ закључујемо да је $a + b = 21$, а $a^2 + 2ab + b^2 = 441$. На основу Питагорине теореме је $a^2 + b^2 = 225$, па заменом у претходну једнакост добијамо $ab = 108$. Како је $P = \dfrac{ab}{2}$, то је тражена површина $54\,\mathrm{cm}^2$.

635. За $n = 1$ је $m = 58$, за $n = 2$ је $m = 59$, за $n = 3$ је $m = 63$, па n није 1, 2 или 3. За n =4 је $m = 81 = 9^2$. Како је за $n > 4$ цифра јединица броја m једнака 7, само број 4 испуњава услове задатка.

636. Троуглови које смо одсекли су једнакокрако правоугли (слика). Означимо катету тог троугла са x. Питагорином теоремом добијамо да је страница осмоугла $x\sqrt{2}$. Како је страница a квадрата састављена од две катете троугла и једне странице осмоугла, то је $a = 2x + x\sqrt{2}$. Сада је $x = \dfrac{10}{2+\sqrt{2}} = 5(2-\sqrt{2})\,\mathrm{cm}$.

Површину осмоугла добијамо када од површине квадрата одузмемо површине троуглова које смо одрезали, па је

$$P = P_k - 4 \cdot P_t = 100 - 4\,\frac{25(2-\sqrt{2})^2}{2} = 200(\sqrt{2}-1)\,\mathrm{cm}^2.$$

637. Једна цифра је 5, а друга мора бити дељива са 3 (дакле, 3, 6 или 9).
1) Ако је једна цифра 5, друга дељива са 3, а трећа није дељива ни са 3 ни са 5, укупан број могућности је $6 \cdot 3 \cdot 5 = 90$ (3 цифре на 3 позиције можемо распоредити на 6 начина, 3 цифре су дељиве са 3 и 5 цифара није дељиво ни са 3 ни са 5).
2) Ако је једна цифра 5, а свака од две преостале цифре је дељива са 3, укупан број могућности је $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ (цифру 5 можемо распоредити на 3 начина и за сваку од преостале 3 цифре имамо 3 могућности).
3) Ако су 2 цифре 5, а трећа дељива са 3, укупан број могућности је $3 \cdot 3 = 9$ (цифру дељиву са 3 можемо распоредити и одабрати на по 3 начина).
Дакле укупан број могућности је $90 + 27 + 9 = 126$.

638. $A + \overline{AB} + \overline{ABC} + \overline{ABCD} = 1111 \cdot A + 111 \cdot B + 11 \cdot C + D = 2009$. Одавде је $A = 1$. Сада је $111 \cdot B + 11 \cdot C + D = 898$. Како је $11 \cdot C + D \leqslant 107$, то је $791 \leqslant 111 \cdot B \leqslant 898$, па је $B = 8$. Сада је $11 \cdot C + D = 10$. Одавде је једино могуће да је $C = 0$, али је тада $D = 10$ (што је немогуће јер је D цифра) па дати ребус нема решења.

639. Основна ивица пирамиде је дијагонала стране коцке и једнака је $a\sqrt{2}$, а бочна ивица пирамиде је половина дијагонале коцке, тј. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Сада Питагорином теоремом добијамо да је висина коцке $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. Дакле,

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a^3}{12}.$$

640. Посматрајмо једнакост $(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c) = (a^3-a)+(b^3-b)+(c^3-c)$. Сваки од сабирака можемо записати у облику, на пример, $a^3-a = (a-1)a(a+1)$. Производ три узастопна природна броја је увек дељив са 6, па је и збир три сабирка на десној страни једнакости дељив са 6. Доказали смо да је разлика дељива са 6, а како је умањилац, по претпоставци, дељив са 6, то је и умањеник $a^3 + b^3 + c^3$ дељив са 6, што је и требало доказати.

641. Једна цифра мора бити 5, а производ друге две мора бити дељив са 4. Могућа су три случаја: а) ако су две цифре парне, онда таквих бројева има $3 \cdot 4 \cdot 4$ (цифру 5 можемо распоредити на 3 начина, а на свако од преостала два места можемо записати било коју од цифара 2, 4, 6, 8); б) ако је једна од преостале две цифре дељива са 4, а друга непарна и различита од 5, онда таквих бројева има $6 \cdot 2 \cdot 4$; в) ако је једна цифра 5, а друга дељива са 4 таквих има $3 \cdot 2$. Дакле, тражених бројева има 102.

642. Како је $P_{\triangle ABD} = P_{\triangle ABM} = P_{\triangle BCD}$ и $P_{\triangle APD} = P_{\triangle ABD} - P_{\triangle ABP} = P_{\triangle ABM} - P_{\triangle ABP} = P_{\triangle BMP}$, то је $P_{\triangle ABP} = P_{\triangle ABD} - P_{\triangle APD} = P_{\triangle BCD} - P_{\triangle BMP} = P_{\triangle MDP} + P_{\triangle BCM}$.

643. Како је $2009 = 1 \cdot 7 \cdot 287 = 1 \cdot 41 \cdot 49 = 1 \cdot 1 \cdot 2009 = 7 \cdot 7 \cdot 41$, то је

$$\begin{aligned} 2009 &= 1 \cdot 7 \cdot 287 = (-7) \cdot (-1) \cdot 287 = (-287) \cdot (-1) \cdot 7 = (-287) \cdot (-7) \cdot 1 \\ &= 1 \cdot 41 \cdot 49 = (-41) \cdot (-1) \cdot 49 = (-49) \cdot (-1) \cdot 41 = (-49) \cdot (-41) \cdot 1 \\ &= (-2009) \cdot (-1) \cdot 1 = (-41) \cdot (-7) \cdot 7. \end{aligned}$$

Дакле, укупно има 10 тражених разлагања.

644. Ако су 2 темена плаве боје, а једно црвене, таквих троуглова има $6 \cdot 5 = 30$, а ако су 2 темена црвене боје, а једно плаве, таквих троуглова има $10 \cdot 4 = 40$. Дакле, укупан број тражених троуглова је 70.

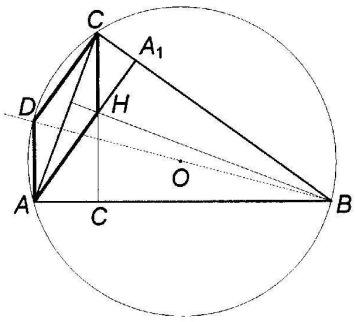
645. Означимо суму новца коју је Вера уложила са x. Камата коју је добила на 25 000 динара је $25000 \cdot p\%$. Камата коју је добила на преостали износ је $(x - 25000) \cdot (p + 2)\%$.

Како је укупна камата $x \cdot (p+2)\%$, суму коју је Вера уложила добијамо решавањем једначине

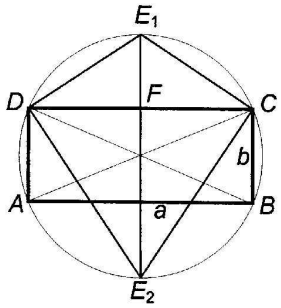
$$25000 \cdot p\% + (x - 25000) \cdot (p+2)\% = x \cdot (p+2)\%,$$

одакле је $x = 31\,250$ динара.

646. Нека је C_1 подножје нормале из темена C на страницу AB, а A_1 подножје нормале из темена A на страницу BC (слика). Како је око троугла DAB описана иста кружница као око троугла ABC и O је средиште странице DB, то је троугао DAB правоугли и $\measuredangle DAB = \measuredangle CC_1B = 90^\circ$, одакле следи да је $DA \parallel CH$. Из истог разлога је и $\measuredangle DCB = \measuredangle AA_1B = 90^\circ$, одакле је $DC \parallel AH$. Сада имамо да су наспрамне странице четвороугла $AHCD$ паралелне, па је овај четвороугао паралелограм.



Сл. уз зад. 646



Сл. уз зад. 649

647. Збир 3 узастопна цела броја је облика $(n-1)+n+(n+1) = 3n$. Дакле, „леп“ број је облика $3n$ и при томе је n непаран број. Посматрајмо 2 „лепа“ броја $3n$ и $3m$.
а) Збир ових бројева је $3n+3m = 3(n+m)$. Како су n и m непарни бројеви, њихов збир је паран, па је и $3(n+m)$ паран број. Због тога збир два лепа броја није леп број.
б) Производ ових бројева је $3n \cdot 3m = 9nm$. Он је непаран и може се записати у облику $9nm = (3nm-1) + 3nm + (3nm+1)$ па јесте леп број.

648. $(2a+3b) \cdot (3a = 2b) = 6(a^2+b^2) + 13ab$. Како је први сабирак дељив са 13, а у другом сабирку је један чинилац број 13, то је и цео збир дељив са 13.

649. Површина правоугаоника $ABCD$ је ab. Разликујемо два положаја тачке E (E_1 и E_2, слика).

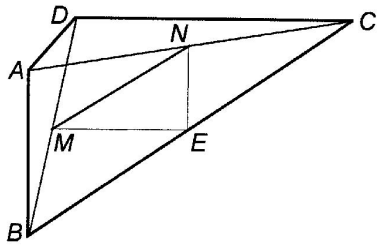
i) Висина троугла CDE_1 је $E_F = 1 - \dfrac{b}{2}$, па је његова површина $ab = \dfrac{1}{2}a\left(1 - \dfrac{b}{2}\right)$, одакле добијамо да је $b = \dfrac{2}{5}$.

ii) Висина троугла CDE_2 је $E_2F = 1 + \dfrac{b}{2}$, па је његова површина $ab = \dfrac{1}{2}a\left(1 + \dfrac{b}{2}\right)$, одакле добијамо да је $b = \dfrac{2}{3}$.

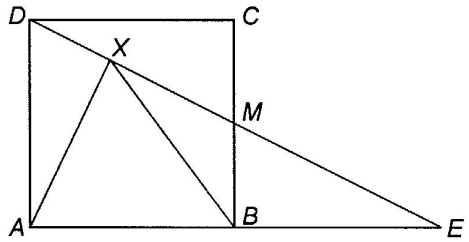
650. $\sqrt{x} = \sqrt{2009} - \sqrt{y}$. Квадрирањем ове једнакости добијамо $2\sqrt{2009y} = 2009 + y - x$. $2 \cdot 7\sqrt{41y}$ је, дакле, природан број, па је $y = 41k^2$ за неко цело k. Сада је $\sqrt{x} = \sqrt{41 \cdot 7^2} - k\sqrt{41}$, тј. $\sqrt{x} = (7-k)\sqrt{41}$. Заменом могућих вредности $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 7\}$ добијамо тражена решења: $(x, y) \in \{(2009, 0), (1476, 41), (1025, 164), (656, 369), (369, 656), (164, 1025), (41, 1476), (0, 2009)\}$.

651. Нека је E средиште странице BC, M средиште дијагонале BD и N средиште дијагонале AC (слика). ME је средња линија троугла BCD па је $ME \parallel CD$ и $ME =$

$\frac{1}{2}CD = 4\,\text{cm}$. Аналогно је NE средња линија троугла ABC па је $NE \parallel AB$ и $NE = 3\,\text{cm}$. Како је $AB \perp CD$, то је и $NE \perp EM$, па је троугао MEN правоугли. Применом Питагорине теореме добијамо да је $MN = 5\,\text{cm}$.



Сл. уз зад. 651



Сл. уз зад. 656

652. Претпоставимо да је $a > b > c > d$. Тада су све разлике које је Воја направио $a-b$, $a-c$, $a-d$, $b-c$, $b-d$, $c-d$. Како је $(a-b)+(b-c)+(c-d) = a-d$, то бар једна разлика мора да буде једнака збиру неке три. Како од понуђених разлика ниједна не може да се представи као збир 3 неке друге, то је Вера у праву и Воја је погрешио у рачуну.

653. Почетну једнакост можемо трансформисати у облик

$$\left(\frac{a^2}{4} - ab + b^2\right) + \left(\frac{a^2}{4} - ac + c^2\right) + \left(\frac{a^2}{4} - ad + d^2\right) + \frac{a^2}{4} = 0,$$

$$\left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - d\right)^2 + \frac{a^2}{4} = 0.$$

Како су сви сабирци ненегативни, збир је нула само ако је сваки сабирак једнак нули, одакле добијамо $a = b = c = d = 0$.

654. Уочимо дијагонални пресек пирамиде и део овог пресека који се налази у горњој коцки (два једнакокрака троугла). Означимо основицу већег троугла са d, а мањег са d_1. Висина већег троугла је $\frac{3}{2}a$, а мањег $\frac{a}{2}$. Применом сличности на ова два троугла имамо да је $d_1 = \frac{d}{3}$. Запремина пирамиде је $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{d \cdot d}{2} \cdot \frac{3}{2}a = \frac{a^3}{2}$. Запремина дела пирамиде у горњој коцки је

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{d_1 \cdot d_1}{2} \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{3} \cdot \frac{d \cdot d}{18} \cdot \frac{1}{2}a = \frac{a^3}{54}.$$

Однос запремина је $V_1 : V = 1 : 27$.

655. Једно решење је $x = 1$. Ако је $x < 1$, тада је $x^{2009} < 1$, па је и $kx^{2009} + 1 < k + 1$, за свако k, односно $\frac{kx^{2009}+1}{k+1} < 1$. Како чланова облика $\frac{kx^{2009}+1}{k+1}$ има тачно n, њихов збир ће увек бити мањи од n, па у случају $x < 1$ задатак нема решења. Аналогно, у случају $x > 1$ је $x^{2009} > 1$, па је за свако k испуњено $\frac{kx^{2009}+1}{k+1} > 1$. Како оваквих чланова има n, њихов збир ће увек бити већи од n, па задатак ни у овом случају нема решења. Дакле, једино решење је $x = 1$.

656. Нека је E пресечна тачка правих DM и AB (слика). Троуглови DMC и BME су подударни (УСУ) па је $BE = a$. XB је тежишна дуж која одговара хипотенузи

правоуглог троугла AEX, па је $AB = XB = a$. Троуглови ADX и DMC су слични (сви углови су им једнаки), па имамо да је $AX : AD = DC : DM$. Како је $AD = DC = a$ и $DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, добијамо да је $AX = \frac{2\sqrt{5}}{5}\,a$. Дакле, тражени обим је

$$O = 2a + \frac{2\sqrt{5}}{5}\,a = 2a\Big(1 + \frac{\sqrt{5}}{5}\Big).$$

657. Нека је $A = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2007}{2008}$. Како је $\frac{n}{n+1} > \frac{n}{n+2}$, за свако n, то је $A > \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2007}{2009} = \frac{1}{2009}$, тј. $A > \frac{1}{2009}$.
Како је $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$, то је

$$A < \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2008}{2009} = \frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2008}{2009}\cdot\frac{1}{2009} = \frac{1}{A}\cdot\frac{1}{2009}.$$

Сада је $A^2 < \frac{1}{2009}$, тј. $A < \sqrt{\frac{1}{2009}}$, што је и требало доказати.

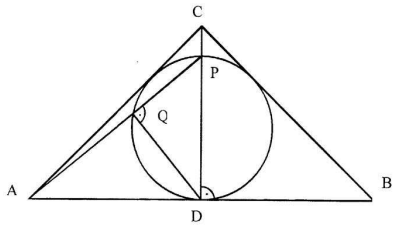
658. Нека је $a^2 + 2nb^2 = c^2$, $c \in \mathbf{N}$. Тада је $c^2 - a^2 = 2nb^2$ и закључујемо да је $c > a$ и да су c и a исте парности. Како је $nb^2 = \frac{c^2 - a^2}{2}$, то је

$$a^2 + nb^2 = a^2 + \frac{c^2 - a^2}{2} = \frac{a^2 + c^2}{2} = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-a}{2}\right)^2.$$

Како су a и c исте парности, то су бројеви $a + c$ и $c - a$ парни, па су $\frac{a+c}{2}$ и $\frac{c-a}{2}$ природни бројеви и следи тврђење задатка.

659. Потребно је наћи однос $PQ : QA$. Како је $\measuredangle QPD = \measuredangle DPA$, правоугли троуглови QPD и DPA су слични и добијамо однос $PQ : QD = PD : AD$ (слика). Аналогно, из сличности троуглова QDA и DPA следи однос $DQ : QA = PD : AD$. Множењем ових односа добијамо

$$\frac{PQ}{QA} = \frac{PQ}{QD}\cdot\frac{DQ}{QA} = \left(\frac{PD}{AD}\right)^2.$$



Сл. уз зад. 659

Означимо страницу једнакокрако-правоуглог троугла ABC са a. Тада је $AD = a\sqrt{2}/2$ и $PD = 2r$, где је r полупречник уписане кружнице. Из формуле $2S_{ABC} = r(a + b + c)$ добијамо $r = \frac{a^2}{a + a + a\sqrt{2}} = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}$. Коначно, тражени однос је једнак

$$\frac{PQ}{QA} = \left(\frac{\frac{2a}{2+\sqrt{2}}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}+1}\right)^2 = 4(\sqrt{2}-1)^2 = 4(3 - 2\sqrt{2}).$$

660. Обојимо таблу шаховски црно-бело. Онда ниједан жетон не мења боју при померању на дијагонално поље. Докажимо да на свакој од боја остају бар 2 жетона. Нумеришимо вертикале бројевима од 1 до n. У сваком кораку жетон који се налази на црном пољу на вертикали пређе на црно поље вертикале са парним редним бројем. Такође важи и

обрнуто. Како се на почетку жетони налазе на црним пољима и парних и непарних вертикала, то ће у сваком кораку бити бар 2 заузета црна поља. Слично се добија да ће у сваком кораку бити заузета бар два бела поља, па су у сваком тренутку заузета бар 4 поља табле. Докажимо да је ову вредност могуће постићи. Померајмо жетоне у сваком кораку ка угаоној подтабли 2×2 (произвољно изабраној). Ако се неки жетон већ налази у њој, ми га можемо оставити у њој одговарајућим дијагоналним померањем. Самим тим после коначно много корака само 4 поља табле ће бити заузета.

661. *Прво решење.* Број је дељив са 11 ако и само ако је разлика суме цифара на парним и непарним позицијама дељива са 11. Доказаћемо општије тврђење: ако се у запису $(2n+1)$-цифреног броја појављују само ненула цифре a и b, тада је могуће изостављањем само једне цифре добити $2n$-цифрени број, код којег је сума цифара на парним позицијама једнака суми цифара на непарним позицијама. Уколико је полазни број облика $\overline{abab\ldots baba}$, тада брисањем средње цифре добијамо симетричан број, за који важи да је сума цифара на парним позицијама једнака суми цифара на непарним позицијама. У осталим случајевима, полазни $(2n+1)$-цифрени број садржи бар један пар суседних цифара које су једнаке. Сада бришемо све парове суседних цифара које су једнаке aa или bb, док не добијемо број са непарним бројем цифара код којег су сваке две узастопне цифре различите. Овај случај смо већ решили, па можемо одредити цифру чијим избацивањем добијамо број који има једнаку суму цифара на парним и непарним позицијама. Када вратимо неки пар узастопних једнаких цифара aa, збир цифара и на парним и на непарним позицијама се увећава за a, односно збирови цифара на парним и непарним позицијама остају једнаки. Када вратимо све парове једнаких цифара, суме цифара на парним и непарним позицијама у $2n$-цифреном броју су једнаке, чиме смо комплетно решили задатак.

Друго решење. Задатак је могуће решити применом математичке индукције. За $n = 1$, лако проверавамо све случајеве. Када су сваке две узастопне цифре различите, тражену цифру налазимо као у претходном решењу. У другом случају, постоје две суседне једнаке цифре у $(2n+1)$-цифреном броју. Када их избацимо, на основу индуктивне претпосатвке налазимо цифру коју можемо избацити из $(2n-1)$-цифреног броја, тако да имамо једнак збир цифара на парним и непарним позицијама. Враћањем две једнаке цифре, завршавамо задатак као у претходном решењу.

662. Услов $\overline{AB} \mid \overline{A0B}$ је еквивалентан услову $10A + B \mid (10(10A + B) - (100A + B))$, односно $10A + B \mid 9B$. За $B = 0$, цифра A може бити произвољна и различита од нуле ($10A$ се садржи у нули). Непосредно се проверава да за $B \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}$ не постоји A које задовољава услов задатка. На пример, за $B = 4$, $10A + 4$ се не садржи у 36 ни за једну цифру A; слично се проверава за остале вредности цифре B. Дакле, тражени двоцифрени бројеви су: 10, 15, 18, 20, 30, 40, 45, 50, 60, 70, 80 и 90.

663. Нека је S тражени подскуп са 1005 бројева. Приметимо да за сваки број n осим 2009 и 1005, постоје тачно два броја који у збиру са n дају 2009 или 2010. Поређајмо бројеве од 1 до 2009 на следећи начин

$$2009, 1, 2008, 2, 2007, 3, \ldots, 1007, 1003, 1006, 1004, 1005.$$

Збир свака два узастопна броја у низу је једнак 2009 или 2010. Према томе, никоја два узастопна броја не могу да буду у S. Како је $|S| = 1005$, следи да 2009 мора припадати скупу S. Аналогно показујемо да бројеви 2008, 2007, ... , 1006, 1005 морају припадати S, па је подскуп S јединствено одређен, $S = \{2009, 2008, 2007, \ldots, 1006, 1005\}$.

664. Нека је $\measuredangle ADB = \alpha$, $\measuredangle CDB = \beta$. Тада је $\measuredangle CBD = 2\alpha$, $\measuredangle ABD = 2\beta$. Опишимо кружницу $k(B, BA)$, која ће садржати темена A и C и продужимо дијагоналу BD преко

темена B. Права која садржи дијагоналу BD сече кружницу у тачкама E и P (слика). $\measuredangle APE$ је периферијски угао над тетивом AE, па је $\measuredangle APE = \beta$. Аналогно је $\measuredangle CPE = \alpha$. Закључујемо да је четвороугао $APCD$ паралелограм. Зато дијагонала PD полови дијагоналу AC. Сада имамо да је троугао ABC једнакокрак и да дијагонала BD полови страницу AC, па је BD симетрала угла ABC. Због тога је $2\alpha = 2\beta$, односно $\alpha = \beta$ и $\measuredangle AEB = \measuredangle CEB = 90°$. Како у четвороуглу $ABCD$ важи $AB = BC$, једна дијагонала полови другу и дијагонале се секу под правим углом, то је овај четвороугао делтоид.

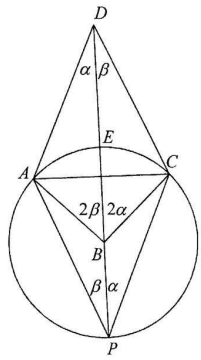
665. Из услова задатка следи да су бројеви x, y, z већи од 1. Доказаћемо неједнакост

$$\frac{1}{x^3+2} < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^2+1}.$$

Сређивањем добијамо еквивалентне неједнакости:

$$2(x^3+2) - 3(x^2+1) > 0,$$
$$2(x^3-1) - 3(x^2-1) > 0,$$
$$2(x-1)(x^2+x+1) - 3(x-1)(x+1) > 0,$$
$$(x-1)(2x^2-x-1) > 0.$$

Како је $x - 1 > 0$ и $2x^2 = x^2 + x^2 > x + 1$, неједнакост је доказана.



Сл. уз зад. 664

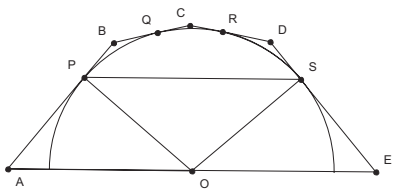
Слично добијамо

$$\frac{1}{y^3+2} < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{y^2+1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{z^3+2} < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{z^2+1}.$$

Сабирањем доказаних неједнакости и коришћењем датог услова добијамо тражену неједнакост

$$\frac{1}{x^3+2} + \frac{1}{y^3+2} + \frac{1}{z^3+2} < \frac{2}{3}\left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1}\right) = \frac{1}{3}.$$

666. Нека је O центар круга k. Тада је $BP = BQ$, $CQ = CR$ и $DR = DS$ (тангентне дужи на круг k). Користећи услов $AB + CD = BC + DE$ добијамо да је $AP + BP + CR + DR = BQ + CQ + DS + ES$, а одатле $AP = ES$. Троуглови $\triangle APO$ и $\triangle ESO$ су подударни, јер $AP = ES$, $\measuredangle APO = \measuredangle ESO = 90°$ и $PO = SO$ (полупречници круга k). Одавде је $\measuredangle PAO = \measuredangle SEO$. Из једнакокраког троугла $\triangle POS$ добијамо $\measuredangle OPS = \measuredangle OSP$.



Сл. уз зад. 666

Зато је,

$$\measuredangle APS = \measuredangle APO + \measuredangle OPS = 90° + \measuredangle OPS = 90° + \measuredangle OSP = \measuredangle PSE.$$

Сада из четвороугла $APSE$ закључујемо да је

$$2\measuredangle EAP + 2\measuredangle APS = \measuredangle EAP + \measuredangle APS + \measuredangle PSE + \measuredangle SEA = 360°.$$

Дакле, $\measuredangle EAP + \measuredangle APS = 180°$, па је четвороугао $APSE$ једнакокраки трапез, одакле је коначно $AB \parallel PS$.

667. Напишимо једначину у облику $2^a \cdot 3^b = (c-3)(c+3)$. Ако је $b = 0$, лако се налази да мора бити $a = 4$ и $c = 5$. Ако је $b > 0$ добијамо да $3 \mid c^2$, тј. $9 \mid c^2$ и $9 \mid 2^a \cdot 3^b$ одакле је

очигледно $b > 1$. Нека је $c = 3y$. Заменом у једначину добијамо $(y-1)(y+1) = 2^a \cdot 3^{b-2}$. Ако је $a = 0$, опет се лако закључује да мора бити $b = 3$ и $c = 6$. Ако је $a \geq 1$, тада су $y-1$ и $y+1$ парни бројеви па $4 \mid 2^a \cdot 3^{b-2}$, одакле је $a \geq 2$. Дакле, решавамо једначину

$$\frac{y-1}{2} \cdot \frac{y+1}{2} = 2^{a-2} \cdot 3^{b-2}.$$

Како су $\frac{y-1}{2}$ и $\frac{y+1}{2}$ узастопни бројеви, они су узајамно прости па су степени бројева 2 и 3. Нека је $m = a-2$ и $n = b-2$. Остаје да размотримо два случаја.

1° $\frac{y-1}{2} = 2^m$ и $\frac{y+1}{2} = 3^n$. Тада је $2^m - 3^n = 1$ и, јасно, $m > n$. Ако је $n = 0$, добијамо $m = 1$ и $a = 3$, $b = 2$ и $c = 9$. Ако је $n > 0$, посматрајући претходну једнакост по $\pmod 3$ закључујемо да је m паран број. Нека је $m = 2t$ и опет користећи разлику квадрата добијамо $(2^t-1)(2^t+1) = 3^n$. Имамо да је $(2^t+1)-(2^t-1) = 2$ па мора бити $2^t - 1 = 1$ и $2^t + 1 = 3^n$. Одавде је $t = 1$, $m = 2$, $n = 1$ и $a = 4$, $b = 3$ и $c = 21$.

2° $\frac{y-1}{2} = 3^n$ и $\frac{y+1}{2} = 2^m$. Тада је $3^n - 2^m = 1$ и, јасно, $m > 0$. Ако је $m = 1$, налазимо да је $n = 1$ и $a = 3$, $b = 3$ и $c = 15$. Ако је $m > 1$, посматрајући претходну једнакост по $\pmod 4$ закључујемо да је n паран број. Нека је $n = 2t$ и опет користећи разлику квадрата добијамо $(3^t-1)(3^t+1) = 2^m$. Имамо да је $(3^t+1)-(3^t-1) = 2$ па мора бити $3^t - 1 = 2$ и $3^t + 1 = 2^{b-1}$. Одавде је $t = 1$, $n = 2$, $m = 3$ и $a = 5$, $b = 4$, $c = 51$.

Провером утврђујемо да су сва решења дате једначине $(a,b,c) \in \{(4,0,5), (0,3,6), (3,2,9), (4,3,21), (3,3,15), (5,4,51)\}$.

668. Претпоставимо, супротно тврђењу задатка, да је

$$(1-x)y < \frac{1}{4}, \quad (1-y)z < \frac{1}{4}, \quad (1-z)x < \frac{1}{4}.$$

Сабирајући ове три неједнакости добијамо

$$(*) \qquad (1-x)y + (1-y)z + (1-z)x < \frac{3}{4}$$

Множећи ове три неједнакости (јер су све стране позитивне) добијамо

$$xyz(1-x)(1-y)(1-z) < \frac{1}{64}$$

и користећи услов задатка

$$xyz < \frac{1}{8} \quad \text{и} \quad (1-x)(1-y)(1-z) < \frac{1}{8}.$$

Развијајући израз на левој страни последње неједнакости добијамо

$$1 - (x+y+z) + xy + yz + zx < xyz + \frac{1}{8} < \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

Ово је еквивалентно са

$$-(x+y+z) + xy + yz + zx < -\frac{3}{4},$$

тј.

$$(1-x)y + (1-y)z + (1-z)x = x + y + z - (xy + yz + zx) > \frac{3}{4}.$$

Последња неједнакост је у контрадикцији са $(*)$ па је наша претпоставка погрешна и тврђење је доказано.

669. Сваки пар црвених тачака налази се на највише две јединичне кружнице са центрима у плавим тачкама. Како n црвених тачака формира $\frac{n(n-1)}{2}$ парова, то број плавих тачака није већи од двоструког броја парова црвених тачака, тј. од $n(n-1)$. Дакле,

укупан број тачака није већи од $n + n(n-1) = n^2$. Како је $44^2 < 2009$, n мора бити бар 45.

Конструисаћемо конфигурацију тачака која одговара условима задатка и садржи тачно 45 црвених тачака. Распоредимо 45 различитих црвених тачака на дуж дужине 1 и конструишимо међусобне пресечне тачке јединичних кружница са центрима у црвеним тачкама. Обојмо све те тачке сем њих 16 ($45^2 - 2009$) у плаво. Све конструисане тачке су различите, јер би у противном неке 3 јединичне кружнице имале заједничку тачку, у којој би пак постојала јединична кружница која би секла почетну дуж у три различите тачке, што је немогуће.

Дакле, највећи могући број плавих тачака је $2009 - 45 = 1964$.

2010. година

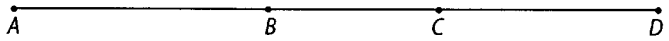
670. Парни бројеви седме стотине у табели су: 606, 610, 644, 688, 700, 674, 622, 630 и 672.

671. а) четири; б) двеста четрдесет два; в) деветсто.

672. 411, 414, 417, 441, 444, 447.

673. 723 се смањи за 396, 732 се смањи за 360, а 273 се смањи за 36. Дакле, највише ће се смањити број 723.

674. Има више начина за решавање задатка. Један начин је следећи:

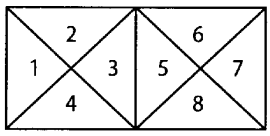


Како је $AC = 25\,\mathrm{cm}$ и $BC = 8\,\mathrm{cm}$, то је $AB = 17\,\mathrm{cm}$. Дужина дужи AD једнака је збиру дужина дужи AB и BD, па је $AD = 38\,\mathrm{cm}$.

675. 35246 се смањује за 990, 42385 се повећа за 9999, 45263 се повећа за 9000, 75234 се смањи за 999. Дакле, највише ће се повећати број 42385.

676. Тражени број добијамо тако што 88888 најпре увећамо за 8620 и добијамо број 97508, а затим овај број умањимо за 17200 и добијемо тражени број 80308.

677. Ако означимо „мале“ троуглове на слици бројевима од 1 до 8, онда можемо уочити 8 „малих“ троуглова, 8 „средњих“ (12,43,14,23,56,78,58,67) и 2 „велика“ (2356, 3458). Дакле, укупно их је 18.



Сл. уз зад. 677

+	4080	7665	6665
2335	**6415**	10000	9000
900	4980	**8565**	7565
2335	**6415**	10000	**9000**

Сл. уз зад. 679

678. Мали квадрат има страницу дужине $2\,\mathrm{cm}$, па је дужина назначене изломљене линије $12 \cdot 2\,\mathrm{cm} = 24\,\mathrm{cm}$.

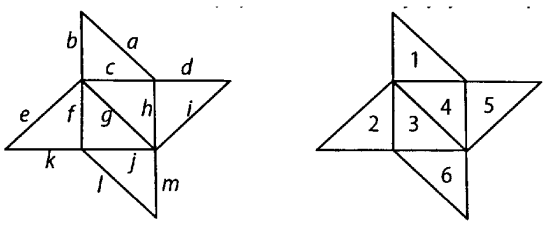
679. В. слику.

680. $4 + 6 + 8 + 9 + 10 + 12 + 14 + 15 + 16 + 18 = 112$.

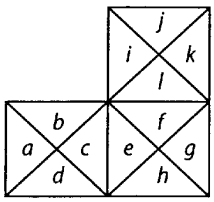
681. $x = 45$, $y = 54$ и $x = 54$, $y = 45$.

682. Ако кроз дату тачку M и центар круга S нацртамо праву a, онда нацртана права сече дати круг $k(S, r)$ у тачкама A и B. Најкраће растојање тачке M од круга је дужина дужи MA, а најдуже дужина дужи MB. Како је AB пречник круга, то је $AB = MB - MA = 8\,\mathrm{cm}$, па је полупречник круга једнак $4\,\mathrm{cm}$.

683. Можемо уочити 13 „малих“ дужи (означене словима на првој слици) и 4 „велике“ дужи (cd, kj, bf, hm) што је укупно 17 дужи. Такође ту је и 6 „малих“ троуглова (означени бројевима на другој слици) и 2 „велика“ троугла (23, 45), што је укупно 8 троуглова.



Сл. уз зад. 683



Сл. уз зад. 687

684. $2009 \cdot 6890 = 13842010$.

685. $a = -11$, $b = -2$, $c = 9$, $d = -11$, $e = -15$.

686. *Први начин.* Како је $a = b - 2$ и $c = b - 1$, то је $a < c < b$, па је $\alpha < \gamma < \beta$.
Други начин. Како је $a = b - 2$ и $c = b - 1$, то је $b - 2 + b + b - 1 = 72$, тј. $b = 25$. Сада је $a = 23$ и $c = 24$, па је $a < c < b$, а онда и $\alpha < \gamma < \beta$.

687. Ако означимо „мале“ троуглове словима (као на слици), онда можемо уочити 12 „малих“ троуглова, 12 „средњих“ (ab, cd, ad, bc, ef, gh, eh, fg, ij, kl, il, jk), 4 „велика“ ($bcef$, $dceh$, $efli$, $gflk$) и 1 „супер“ троугао ($dcehgflk$). Дакле, укупно их је 29.

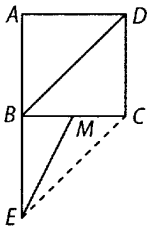
688. Како је $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$ и како су мајка и ћерка рођене у истом веку, то је једино могуће да мајка има 67 година, а ћерка $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ година.

689. Нека је пресек праве CP и дужи AB тачка D. $\measuredangle APD$ је спољашњи угао троугла APC па је $\measuredangle APD = \measuredangle ACP + \measuredangle CAP$ и $\measuredangle APD > \measuredangle ACP$. Аналогно је и $\measuredangle BPD > \measuredangle BCP$. Сада је $\measuredangle ACB = \measuredangle ACP + \measuredangle PCB < \measuredangle APD + \measuredangle DPB = \measuredangle APB$, одакле следи тврђење.

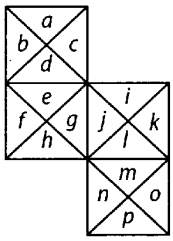
690. а) 6; б) $\sqrt{3}$.

691. Ако са D означимо подножје хипотенузине висине, где је AB хипотенуза, а са E и F подножја нормала из D на катете AC и CB, тада је $CD = 12\,\mathrm{cm}$, $AD = 9\,\mathrm{cm}$, $BD = 16\,\mathrm{cm}$, $DF = 9{,}6\,\mathrm{cm}$ и $DE = 7{,}2\,\mathrm{cm}$.

692. а) Дужина изломљене линије $ABDCME$ је $10 + 10\sqrt{2} + 10 + 5 + 5\sqrt{5} = 5(5 + 2\sqrt{2} + \sqrt{5})\,\mathrm{cm}$. б) $P = 150\,\mathrm{cm}^2$; $O = 10(4 + \sqrt{2})\,\mathrm{cm}$.



Сл. уз зад. 692



Сл. уз зад. 693

693. Ако означимо „мале“ троуглове словима као на слици, онда можемо уочити 16 „малих“ троуглова, 16 „средњих“ (ab, cd, ad, bc, ef, gh, eg, fh, ij, kl, ik, jl, mo, np, mn, op), 6 „великих“ ($bdef$, $cdeg$, $hgjl$, $egji$, $klmo$, $jlmn$) и 2 „супер“ троугла ($bdefghjl$, $egjiklmo$). Дакле, укупно их је 40.

694. Потпуни квадрати који су чиниоци броја 45 су 1 и 9. Како је $45 = 5 \cdot 9 = 1 \cdot 45$ то $45 - n$ мора бити једнако 5 или 45. Дакле, $n = 40$ или $n = 0$.

695. Ако је n број страница многоугла, тада је број његових дијагонала $\frac{n(n-3)}{2}$. Сада је $\frac{n(n-3)}{2} = 5n$, па је $n = 13$.

696. Како су било која три темена коцке неколинеарне тачке, то ће било које две тачке одређивати једну праву. Према томе укупан број правих је 28.

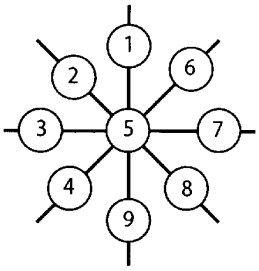
697. Непосредно закључујемо да је П = 1 и А = 9. Сада В може да буде 5, 6, 7 или 8, а у тим случајевима добијамо да одговарајуће вредности за С су 0, 2, 4 или 6. Дакле, сва решења су: $95 + 95 = 190$, $96 + 96 = 192$, $97 + 97 = 194$, $98 + 98 = 196$.

698. Како је $(x-5)^2 > 0$ за $x \neq 5$, то из скупа решења неједначине $2x - 4 > 0$ треба изоставити број 5. Решење неједначине $2x - 4 > 0$ је $x > 2$, па је решење полазне неједначине $x \in (2, 5) \cup (5, \infty)$

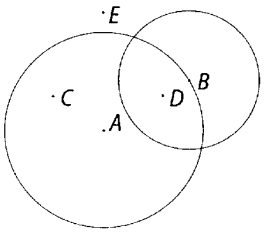
699. Ако са C означимо средиште дужи AB, тада је $CD = 12\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$ (висина једнакостраничног троугла) и $EC = 12\,\mathrm{cm}$. Применом Питагорине теореме на троугао CDE добијамо да је $DE = 24\,\mathrm{cm}$.

700. а) Четири стотине деведесет (и) девет. б) две стотине (и) два.

701. Једно решење је дато на слици.



Сл. уз зад. 701



Сл. уз зад. 702

702. Једно решење је дато на слици.

703. Троцифрени бројеви који се добијају су: 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608 и 609. а) $609 + 69 = 678$; б) Разлика је увек иста и износи 540.

704. Авион је полетео из Москве у 09.20 часова по београдском времену. Како се времена разликују за 2 сата, по московском времену је било 11.20 часова.

705. Има 100 таквих бројева.

706. Страница квадрата је дужине 502 cm, а обим почетног правоугаоника је 1912 cm.

707. а) 5434; б) 1434.

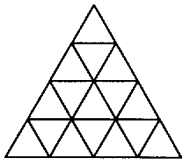
708. Ако са P, D и T обележимо број особа које живе на првом, другом и трећем спрату, редом, тада је: $P + D = 22$, $D + T = 20$. Закључујемо да је $P + D + D + T = 42$, а како је $P + T = D$, то је $3D = 42$. Значи, $D = 14$, $P = 8$ и $T = 6$.

709. Збир бројева у осенченим пољима из прве врсте мора бити једнак збиру осенчених бројева из друге колоне (в. прву слику), па је у средини број 25. Радећи на сличан начин добијамо попуњену табелу као на другој слици.

26	x	28
	29	

26	**21**	28
27	**25**	**23**
22	29	**24**

Сл. уз зад. 709



Сл. уз зад. 719

710. Најмањи број је 10 050, а највећи број је 98 490.

711. $\frac{61}{2010} = \frac{305}{10050}$, $\frac{5}{149} = \frac{305}{9089}$. Како је $\frac{305}{10050} < \frac{305}{9089}$, то је $\frac{61}{2010} < \frac{5}{149}$.

712. Нека је и са леве и са десне стране броја 2009 дописана цифра a. Да би тражени шестоцифрени број $\overline{a2009a}$ био дељив са 12, он мора бити дељив са 3 и 4. Због дељивости са 4, његов двоцифрени завршетак може бити само 92 или 96, па у обзир долазе бројеви 220092 и 620096. Број 620096 има збир цифара $6+2+9+6=23$ и није дељив са 3 па није решење задатка. Како је збир цифара броја 22092 једнак $2+2+9+2=15$, дакле дељив са 3 то је овај број једино решење.

713. Скуп S_1 има 1 елемент, S_2 два елемента, S_3 три елемента, ... , скуп S_{10} има 10 елемената. Како је $1+2+\cdots+9=45$, то унија скупова S_1, ... S_9 садржи бројеве $1, 2 \ldots, 45$, па је $S_{10} = \{46, 47 \ldots, 55\}$. Збир елемената скупа S_{10} је 505.

714. Угао између сатне и минутне казаљке у 8.00 часова је $120°$. Минутна казаљка се креће 12 пута брже од сатне. Од 8.00 до 8.10 часова минутна казаљка се помери за угао од $60°$, док се сатна помери за 12 пута мањи угао, тј. за $60° : 12 = 5°$. Дакле, угао између сатне и минутне казаљке биће $120° + 60° - 5° = 175°$.

715. Како је a цео број који је делилац бројева -6 и -10, то је $a \in \{1, -1, 2, -2\}$. У случајевима када је $a = 1$ или $a = -1$, добијамо да је $b \cdot c = 60$, што је нетачно. У случају када је $a = 2$ имамо да је $b = -3$, $c = -5$ и $a \cdot b \cdot c = 30$ што је једно решење задатка. У случају када је $a = -2$, имамо да је $b = 3$, $c = 5$ и $a \cdot b \cdot c = -30$ што је друго решење задатка.

716. Угао EBC је једнак $90° - 60° = 30°$. Странице троугла и квадрата су једнаке па је на основу тога троугао EBC једнакокрак ($EB = BC$). Углови на основици EC су по $75°$. $\triangle EBC \cong \triangle EAD$, па је $\measuredangle DEA = 75°$. Дакле, $\measuredangle DEC = 360° - 60° - 2 \cdot 75° = 150°$.

717. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{n} = \frac{41}{42} + \frac{1}{n}$. Како је $\frac{41}{42} < 1$ и $\frac{1}{n} < 1$, то је једина могућност $\frac{41}{42} + \frac{1}{n} = 1$. Одавде је $n = 42$.

718. Од дужи BC, CD и BD најдужа је BD јер је наспрам највећег угла троугла BCD. У троуглу EDB највећа је дуж EB јер је наспрам највећег угла, па је и $EB > DB$. У троуглу ABE највећа је дуж AE јер је наспрам највећег угла, па је и $AE > EB$, одакле закључујемо да је најдужа дуж AE.

719. Не може. Дати једнакостранични троугао можемо поделити на 16 једнакостраничних троуглова странице 1 cm (слика). 16 тачака можемо распоредити у сваки од ових троуглова, док последњу тачку ма где ставили, биће на у једном од 16 троуглова и на растојању мањем од 1 cm од тачке из тог троугла.

720. Нека је $x = 0{,}\overline{1}$. Тада је $10x = 1{,}\overline{1}$. Одузимањем ове две једначине имамо да је $9x = 1$ одакле је $x = \frac{1}{9}$. Сада је $\sqrt{0{,}\overline{1}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ рационалан број.

721. $DE = \sqrt{EC^2 - DC^2} = 4\,\text{cm}$, $BC = \sqrt{EB^2 + EC^2} = 13\,\text{cm}$, $AB = \sqrt{EB^2 - AE^2} = 9{,}6\,\text{cm}$. Дакле, обим трапеза је $36{,}8\,\text{cm}$ и површина $70{,}56\,\text{cm}^2$.

722. $5^3 < 2^7$, $(5^3)^{287} < (2^7)^{287}$, $5^{861} < 2^{2009} < 2^{2010}$, одакле следи да је већи број 2^{2010}.

723. Означимо дечаке са A, B, C и D. Дечак A може да добије само оловке дечака B, C и D. Ако добије оловку дечака B, остала тројица могу на 3 различита начина да распореде оловке. На исти начин се врши расподела ако дечак A узме оловке дечака C или D, па је укупан број начина 9.

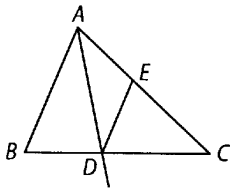
724. Троуглови ADE и DEB имају једнаке висине које одговарају страници AD, односно DB, а како су им и површине једнаке, то је $AD = DB$. Дакле, $AD : DB = 1 : 1$. Троуглови EBC и AEB имају једнаке висине које одговарају страници EC, односно AE, а како им се површине односе као $1 : 2$, то је $EC : AE = 1 : 2$.

725. $\big||x| + 1\big| + \big| = 2010$, $\big||x| + 1\big| = 2008$, $|x| = 2007$, $x = 2007$ или $x = -2007$.

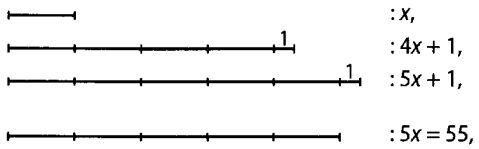
726. $B : M = \sqrt{3} : 2$, па је $M = 72\,\text{cm}^2$. Основна ивица призме је $12\,\text{cm}$, па заменом у формулу за M налазимо да је $H = 2\,\text{cm}$. Запремина призме је $72\sqrt{3}\,\text{cm}^3$.

727. Осам тачака од којих нема четири копланарне одређује 56 равни. Темена коцке формирају 12 четворки копланарних тачака. Свака од ових четворки одређује по 1 раван. Како смо код 56 равни рачунали да свака онаква четворка одређује 4 равни, потребно је од тог броја одузети по 3 равни за сваку четворку копланарних тачака. Дакле, одређено је 20 равни.

728. Ако је E тачка странице AC таква да је $DE \parallel AB$, онда је троугао ADE једнакокрак, а троуглови ABC и EDC су слични (слика). Ако је $|AE| = |ED| = x$, онда је $(15 - x) : 15 = x : 10$. Добијамо $x = 6\,\text{cm}$, па је $|AD| < |AE| + |ED| = 12\,\text{cm}$.



Сл. уз зад. 728



Сл. уз зад. 730

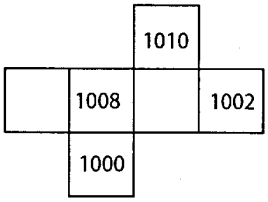
729. Нека је x сума новца која се дели. Први из групе добија $10 + \frac{1}{10}(x - 10)$ динара. Након прве поделе остало је $\frac{9}{10}x - 9$ динара. Други из групе добија $\frac{9}{100}x + \frac{171}{10}$ динара. Како су суме које добијају сви једнаке, то је $\frac{9}{10}x - 9 = \frac{9}{100}x + \frac{171}{10}$, одакле имамо да је $x = 810$ динара. Заменом у једном од два израза за прву или другу особу добијамо да једна особа добија 90 динара, па закључујемо да је било 9 особа.

730. Ако мањи број представимо помоћју дужи x (прва дуж на слици), онда већи број представља друга дуж $(4x+1)$, а њихов збир трећа дуж $(5x+1)$. Збир умањен за остатак 1 је последња дуж, па је $5x = 55$, $x = 55 : 5 = 11$. Мањи број је 11 а већи 45.

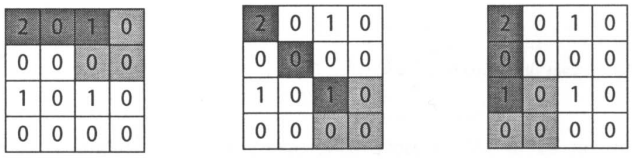
731. Посматрамо редом цифре јединица. Ако је цифра јединица једнака 0 или 1, тражени двоцифрени бројеви не постоје. Ако је цифра јединица једнака 2, постоји један двоцифрен

број (12). Ако је цифра јединица једнака 3, постоје два броја (13, 23). ... Ако је цифра јединица једнака 9, постоје осам бројева (19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89). Према томе, тражених бројева има $1+2+3+4+5+6+7+8=36$.

732. Бројеви 1008 и 1010 су фиксирани као на слици. На преостала два места можемо уписати бројеве 1004 и 1006.



Сл. уз зад. 732



Сл. уз зад. 733

733. Број 2010 се може прочитати на 9 начина и то показано, на пример, као на слици.

$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$

Сл. уз зад. 735

734. Обим осенченог правоугаоника је једнак разлици збира датих обима 4 означена правоугаоника и обима почетног квадрата то јест $O=(8+18+10+24)-4\cdot 10=20$, $O=20\,\mathrm{cm}$.

735. В. слику.

736. Угао суплементан углу α је $180^\circ-\alpha$. Једначина која се добија је $\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{4}+\frac{\alpha}{8}-180^\circ-\alpha$ Сређивањем добијамо $\frac{7\alpha}{8}+\alpha=180^\circ$, односно $\alpha=96^\circ$.

737. Број је дељив са 9 ако и само ако је његов збир цифара дељив са 9. Највећи шестоцифрени број који је дељив са 9 тражимо у облику $\overline{98765a}$, одакле следи да је $a=1$, јер је $9+8+7+6+5+1=36$. Најмањи шестоцифрени број који је дељив са 9 тражимо у облику $\overline{10234x}$, где је x нека од цифара 5, 6, 7, 8 или 9. Решење је $x=8$.

738. Обим осенченог правоугаоника је једнак разлици збира датих обима 4 означена правоугаоника и обима почетног квадрата то јест $O=(8{,}6+22{,}2+6{,}4+18{,}6)-4\cdot 10=15{,}8$; $O=15{,}8\,\mathrm{cm}$.

739. Како је $10=2\cdot 5\cdot 1\cdot 1$, то су цифре тражених бројева управо 1, 1, 2 и 5. Бројеви који су мањи од 2009 могу почињати само цифром 1 и то су 1125, 1152, 1215, 1251, 1512, 1521.

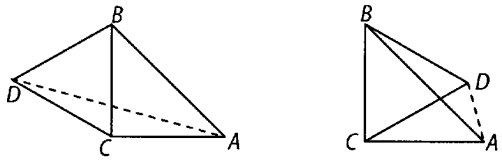
740. Сређивањем добијамо $\frac{-2}{-3}+\frac{-\frac{1}{3}}{-2}=\frac{5}{6}$.

741. Углови од 45° и 75° се могу конструисати: 45° се добија конструкцијом симетрале правог угла, док се 75° добија конструкцијом симетрале угла од 30° и одузимањем од правог угла. Нека је D подножје нормале из темена C. Правоугли троуглови ACD и BCD се могу конструисати, пошто имају познату хипотенузу и још један угао.

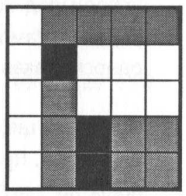
742. Како 18 дели $\overline{991a}+\overline{b234}$, цифра a мора бити парна. Следи да 9 дели суму цифара $9+9+1+a+b+2+3+4=28+a+b$. Сада добијамо да је $a+b=8$ или $a+b=17$. Решења су следећи парови бројева $(0,8)$, $(2,6)$, $(4,4)$, $(6,2)$, $(8,9)$ и $(9,8)$.

743. Троугао ACD је једнакокрак, због $AC=CB=CD$. Темена A и D могу бити са исте или различитих страна праве BC.

1) Темена A и D су са различитих страна праве BC (прва слика). Угао ACD је једнак $90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$, па је $\measuredangle CAD = \measuredangle CDA = 15^\circ$. Зато је $\measuredangle ADB = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$.
2) Темена A и D су са исте стране праве BC (друга слика). Угао ACD је једнак $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, па је $\measuredangle CAD = \measuredangle CDA = 75^\circ$. Зато је $\measuredangle ADB = 60^\circ + 75^\circ = 135^\circ$.



Сл. уз зад. 743



Сл. уз зад. 744

744. Правоугаоници чија је једна страница једнака 1, имају димензије 1×1, 1×2, 1×3, 1×4 и 1×5. Правоугаоници чија је мања страница једнака 2 имају димензије 2×2 и 2×3. Тих седам правоугаоника са површинама 1, 2, 3, 4, 5, 4 и 6 имају укупну површину 25. Један могући распоред тих правоугаоника је на слици.

745. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{82}{9} + 2 = \dfrac{100}{9} = \left(\dfrac{10}{3}\right)^2$. Зато је $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{10}{3}$. Слично, из $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2 = \left(\dfrac{8}{3}\right)^2$ следи $x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{8}{3}$. Сабирањем последње две једнакости је $2x = \dfrac{10}{3} + \dfrac{8}{3} = 6$, па је $x = 3$.

746. Нека је растојање суседних типки $x = 12\,\mathrm{mm}$. Из Питагорине теореме растојање између бројева 0 и 1 је једнако $\sqrt{x^2+(3x)^2} = x\sqrt{10}$. Растојање између типки 1 и 1 је једнако 0, док је растојање имеђу типки 1 и 3 је једнако $2x$. Користећи симетрију добијамо да је најкраћа црта која је „повучена прстом“ дужине $x\sqrt{10}+0+2x+x\sqrt{10}+x\sqrt{10}+x+x\sqrt{2}+x\sqrt{5}+x\sqrt{5}$, односно $3x\sqrt{10}+2x\sqrt{5}+x\sqrt{2}+3x$. Сада процењујемо

$$12(3\sqrt{10}+2\sqrt{5}+\sqrt{2}+3) > 12(3\cdot3+2\cdot2{,}2+1{,}4+3) = 12\cdot17{,}8 = 213{,}6,$$

па је најкраћа црта дужа од $210\,\mathrm{mm}$.

747. Због симетрије осенчени део је ромб, који има висину $5\,\mathrm{cm}$. Нека је страница паралелограма једнака a. Из Питагорине теореме добијамо $(12-a)^2+5^2=a^2$, односно $a = \dfrac{169}{24}$. Сада је површина осенченог дела управо једнака $a\cdot h = \dfrac{169}{24}\cdot5$, $P = \dfrac{845}{24}\,\mathrm{cm}^2$.

748. Укупан број дијагонала n-тоугла једнак је $\dfrac{n(n-3)}{2}$. Из услова задатака добијамо једнакост $\dfrac{n(n-3)}{2} = n + 2010$. Сређивањем се добија $n(n-5) = 4020 = 2\cdot2\cdot3\cdot5\cdot67$. Бројеви n и $n-5$ дају исти остатак при дељењу са 5, па је производ дељив са 25 или није дељив са 5. Производ $2\cdot2\cdot3\cdot5\cdot67$ је дељив само са 5, па једначина $n(n-5)=4020$ нема целобројно решење, односно такав многоугао не постоји.

749. Последња цифара броја 44^n је 4 или 6, зависно од того да ли је n непарно или парно. Према томе последња цифра броја 44^{43} је 4, а последња цифра броја 44^{44} је 6. Како је

$$\frac{44^{44}}{2} = 44^{43}\cdot\frac{44}{2} = 44^{43}\cdot22$$

и последња цифра броја 44^{43} је 4, последња цифра датог броја је 8.

750. Нека су x и y природни бројеви такви да је $xy = 2(x+y)$. Пребацивањем сабирака на леву страну и додавањем 4 добијамо $xy - 2x - 2y + 4 = 4$, односно $(x-2)(y-2) = 4$. Како је $4 = 4 \cdot 1 = 2 \cdot 2$, онда је једно решење $x - 2 = 4$ и $y - 2 = 1$, $x = 6$ и $y = 3$, а друго решење је $x - 2 = 2$ и $y - 2 = 2$, $x = 4$ и $y = 4$. Задатак има два решења, а тражени бројеви су 6 и 3 или 4 и 4.

751. Нека је страница мањих квадрата x, тада је страница већег квадрата $2x$. Због симетрије и Питагорине теореме добијамо $(4x)^2 + (2x)^2 = 2^2$, односно $20x^2 = 4$, па је $x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Површина круга је $1^2\pi$, док је површина квадрата једнака $8x^2 + (2x)^2 = 12x^2 = \dfrac{12}{5}$. Површина дела круга који је ван уцртаних 9 квадрата је $\pi - \dfrac{12}{5}$.

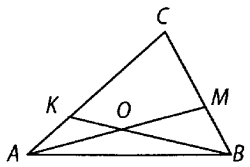
752. Једначина праве која садржи координатни почетак и тачку $A(32, 76)$ је $y = \dfrac{76}{32}x = \dfrac{19}{8}x$. Целобројне тачке на дужи AO имају x координату између 0 и 32. Из горњег услова x мора бити дељиво са 8. Према томе, једине целобројне тачке имају x координате 8, 16, 24 и 32, односно то су тачке $(8, 19)$, $(16, 38)$, $(24, 57)$, $(32, 76)$.

753. Нека је P средиште дужи MN. Због симетрије тачка P се налази на дијагонали основе BD. Угао између равни MND_1 и ABC је управо $\measuredangle DPD_1 = 45°$. Зато је $DP = DD_1 = 10$. Из једнакокрако-правоуглог троугла BMN добијамо да је $BP = PN = PM = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$, где је $BN = BM = x$. Сада је $BD = 10'ko2 = DP + PB = 10 + \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ и коначно $BN = x = (20 - 10\sqrt{2})\,\mathrm{cm}$.

754. Сећи сваки пут четвороугао на два четвороугла. После пет сечења добијамо шест четвороуглова који имају 24 темена. Сечењем правоугаоника на два троугла и после троугла на два троугла, добијамо шест троуглова који имају 18 темена.

755. Како је $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, то је $\{p, q, r, s + t\} = \{2, 3, 5, 67\}$. Како $s + t$ не може бити 2 или 3 јер не постоје прости бројеви s и t чији је збир 2 или 3, то је $s + t = 5$ или $s + t = 67$. Ако је $s + t = 5$ тада су s и t бројеви 2 и 3, а p, q, r узимају вредности из скупа $\{2, 3, 67\}$. У случају $s + t = 67$ нема решења јер ако је један број 2 други је 65, који није прост, а ако су s и t неки други прости бројеви они су непарни, па њихов збир мора бити паран број. Дакле, решења су: $(p, q, r, s, t) \in \{(2, 3, 67, 2, 3),\ (2, 67, 3, 2, 3),\ (3, 2, 67, 2, 3),\ (3, 67, 2, 2, 3),\ (67, 2, 3, 2, 3),\ (67, 3, 2, 2, 3),\ (2, 3, 67, 3, 2),\ (2, 67, 3, 3, 2),\ (3, 2, 67, 3, 2),\ (3, 67, 2, 3, 2),\ (67, 2, 3, 3, 2),\ (67, 3, 2, 3, 2)\}$.

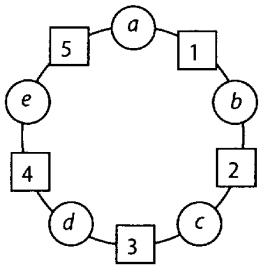
756. Нека се дужи AM и BK секу у тачки O. Ако се ове дужи полове, онда је $\triangle ABO \cong \triangle MKO$ ($AO = OM$, $BO = OK$, $\measuredangle AOB = \measuredangle MOK$, слика) па је $AB = KM$. Аналогно, из подударности троуглова AOK и MOB имамо да је $AK = MB$. Како су наспрамне странице четвороугла $ABMK$ једнаке, он је паралелограм, а како су тачке M и K на страницама троугла, то је немогуће, па дужи AM и BK не могу да се полове.



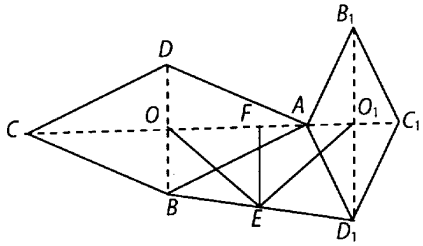
Сл. уз зад. 756

757. Означимо бројеве у кружићима као на слици. Имамо да је: $b = 1 - a$, $c = 2 - b = 1 + a$, $d = 3 - c = 2 - a$, $e = 4 - d = 2 + a$ Како је $a + e = 5$, то је $2 + 2a = 5$, одакле је $a = \dfrac{3}{2}$ па добијамо и остале бројеве: $b = -\dfrac{1}{2}$, $c = \dfrac{5}{2}$, $d = \dfrac{1}{2}$, $e = \dfrac{7}{2}$.

758. *Први начин.* Како је $\measuredangle DAB_1 = \measuredangle BAD_1$ и како дијагонала дели унутрашњи угао ромба на два једнака дела, то је $\measuredangle DAO = \measuredangle BAO$ и $\measuredangle B_1AO_1 = \measuredangle D_1AO_1$, па је $\measuredangle OAO_1 =$



Сл. уз зад. 757



Сл. уз зад. 758

180°, одакле закључујемо да су тачке O, A и O_1 колинеарне. Нека је тачка F подножје нормале из тачке E на праву OO_1. Како је тачка E средиште дужи BD_1 и $EF \parallel BO \parallel D_1O_1$, то је EF средња линија трапеза, одакле је тачка F средиште дужи OO_1. Дакле, тачка E се налази на симетрали дужи OO_1, па је троугао OEO_1 једнакокрак.

Други начин. $\triangle ADD_1 \cong \triangle ABB_1$ јер је $\measuredangle B_1AB = \measuredangle B_1AD + \measuredangle DAB = \measuredangle D_1ABD + \measuredangle DAB = \measuredangle D_1AD$, $AB = AD$ и $AB_1 = AD_1$ па је $DD_1 = BB_1$. Како се дијагонале ромба полове и тачка E је средиште дужи BD_1, имамо $EO = \frac{1}{2}DD_1$ и $EO_1 = \frac{1}{2}BB_1$ као средње линије троуглова BDD_1 и D_1BB_1, одакле је $EO = EO_1$, па је троугао EOO_1 једнакокрак.

759. Претпоставимо да су на такмичењу ученици из највише 44 града и да из сваког града има највише 44 ученика. Тада је на такмичењу највише могло да буде 1936 ученика. Како је на такмичењу било више од 1936 учесника, ако бисмо претпоставили да је неко од преосталих такмичара из неког од датих градова, он би био 45. такмичар из тог града, а ако бисмо претпоставили да је из неког другог од понуђених градова то би био 45. град одакле има такмичара, па важи тврђење задатка.

760. Број n можемо записати у облику

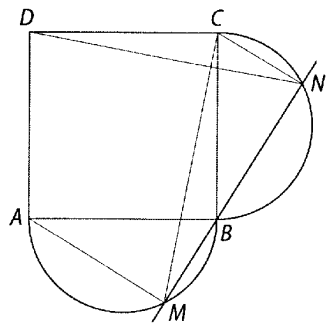
$$n = 3p+a,\ 0 \leqslant a \leqslant 2; \quad n = 6q+b,\ 0 \leqslant b \leqslant 5; \quad n = 9r+c,\ 0 \leqslant c \leqslant 8; \quad 0 \leqslant a+b+c \leqslant 15.$$

С обзиром да је $a+b+c = 15$, то следи да је $a = 2$, $b = 5$, $c = 8$. Тада је $n+1 = 3p+3 = 6q+6 = 9r+9$. Дакле, $n+1$ је дељиво са 3, 6 и 9, тј. дељиво је са 18. Значи да је $n+1 = 18k$, па је $n = 18k-1$, што значи да је остатак при дељењу броја n са 18 једнак 17.

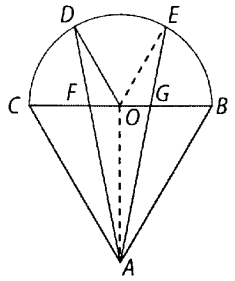
761. Нека је $h_a = h_b + h_c$. Из $2P = a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$ добијамо да је $\frac{h_c}{a} = \frac{h_a}{c}$ и $\frac{h_b}{a} = \frac{h_a}{b}$. Тада је $\frac{h_c+h_b}{a} = h_a\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)$, односно, $\frac{1}{a} = \frac{1}{c}+\frac{1}{b}$. Сада је $\frac{1}{a^2} = \frac{b^2+2bc+c^2}{b^2c^2}$, односно, $b^2c^2 = a^2(b^2+2bc+c^2)$. Одавде је $(a^2-bc)^2 = a^2(a^2+b^2+c^2)$, па закључујемо да је $a^2+b^2+c^2$ природан број и да је то квадрат природног броја јер је $a^2+b^2+c^2 = \left(\frac{a^2-bc}{a}\right)^2$.

762. Нека је цена неке робе x. Првог дана цена те робе је $101\%x = 1{,}01x$. Другог дана цена те робе је $99\% \cdot (1{,}01x) = 0{,}99 \cdot 1{,}01x = 0{,}9999x$. Понављајући ово имамо да је након 2010 дана цена те робе $0{,}9999^{1005}x$. Како је $0{,}9999 < 1$, то је и $0{,}9999^{1005} < 1$, одакле закључујемо да је цена робе после 2010 дана нижа него првог дана.

763. $\measuredangle ABM + \measuredangle CBN = 90°$. $\measuredangle BNC$ је периферијски угао над пречником BC па је прав. Одавде је $\measuredangle ABM = \measuredangle BCN$. Како су полукружнице k_1 и k_2 подударне (имају једнаке пречнике) и како једнаким периферијским угловима одговарају једнаке тетиве, то је $AM = BN$. Сада имамо да је $\triangle MBC \cong \triangle NCD$ одакле је $\measuredangle BCM = \measuredangle CDN$. Како је један пар кракова ових углова нормалан (BC и CD) то закључујемо да је и други пар кракова нормалан, односно $CM \perp DN$.



Сл. уз зад. 763



Сл. уз зад. 766

764. Није могуће. У противном би збир $(Z+E+C)+(V+U+K)+(S+L+O+N)$ био једнак 45, тј. дељив са 9 (јер се свака цифра појављује тачно једанпут), а самим тим би и збир $ZEC+VUK+SLON$ био дељив са 9. Међутим, 2010 није дељиво са 9.

765. Одузимајући другу од треће једначине система добијамо $z = 1$, па се систем своди на $|x| + y = 2008$, $x + y = 2009$. Одузимајући другу од прве једначине система добијамо једначину $|x| - x = -1$. Разматрајући случајеве по x имамо:
i) $x \geqslant 0$. $x - x = -1$, $0 = -1$ па једначина нема решења у овом случају.
ii) $x < 0$. $-x - x = -1$, одакле је $x = \dfrac{1}{2}$ па ни у овом случају једначина нема решења.
Дакле, закључујемо да полазни систем нема решења.

766. Нека је O центар полукружнице (средиште странице BC). Троугао ODC је једнакостраничан и поред тога је страница троугла ODC два пута мања од странице троугла ABC (слика). Како су одговарајући углови троуглова ODF и CAF једнаки, они су слични, а на основу претходног је $CF = 2\,FO$. Аналогно показујемо да је $GB = 2\,GO$. Сада тврђење задатка следи на основу чињенице да је $OB = OC$.

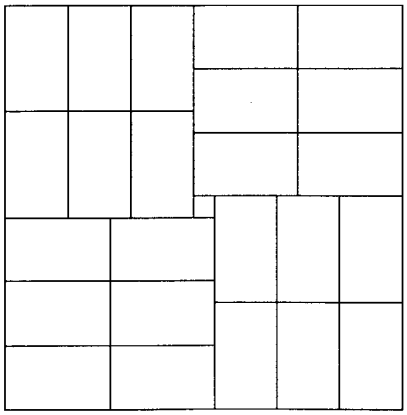
767. Нека су на наспрамним странама коцке записани природни бројеви a и x, b и y, c и z. Тада је:

$$abc + abz + ayz + acy + xbc + xbz + xyz + xcy = 105,$$
$$a(bc + bz + yz + cy) + x(bc + bz + yz + cy) = 105,$$
$$(a + x)(b(c + z) + y(z + c)) = 105,$$
$$(a + x)(b + y)(c + z) = 105.$$

Како су сви бројеви природни, то је сваки чинилац последњег производа већи од 1, а како је $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, то су бројеви $a+x$, $b+y$ и $c+z$ различити бројеви из скупа $\{3, 5, 7\}$. Дакле, збир свих бројева на странама коцке је $3 + 5 + 7 = 15$.

768. Означимо основну ивицу призме са a, а висину са b.Тада је $2a+b = 100$. Површина омотача ће бити највећа када израз nab, тј. ab има највећу вредност. Имамо да је $ab =$

$a(100-2a) = -2a^2+100a = -2(a^2-50a) = -2(a^2-50a+625-625) = -2(a-25)^2+1250$. Зато ab има највећу вредност када је $a-25=0$, тј. $a=25$. Дакле, највећа површина је $1250n$.



Сл. уз зад. 769

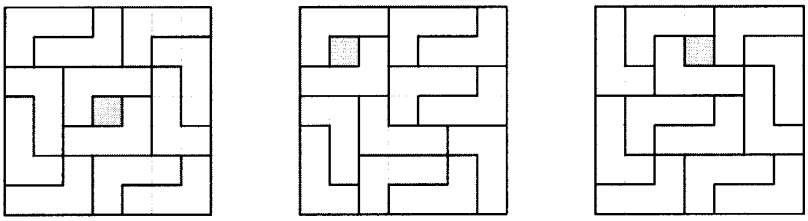
769. Поделимо квадрат као на слици, на 24 правоугаоника 3×5 и један квадрат. Бар у једном од правоугаоника нема више од 3 обојена поља, јер би у супротном укупан број обојених поља био бар $4 \cdot 24 = 96$.

770. Четвороугао $BFEC$ је тетиван јер је $\measuredangle BEC = \measuredangle BFC = 90°$, па је $\measuredangle AFE = \measuredangle ACB = \gamma$ (спољашњи угао тетивног четвороугла једнак је наспрамном унутрашњем углу). Даље је $\gamma = \measuredangle AFE = \measuredangle BFN$ као унакрсни углови. Четвороугао $MBNF$ је тетиван ($\measuredangle FNB = \measuredangle FMA = 90°$) одакле је $\gamma = \measuredangle BFN = \measuredangle BMN$. Дакле, $\gamma = \measuredangle BMN = \measuredangle ACB$ одакле следи тврђење задатка.

771. Како $x, y \in [1,2]$, то је $y \leqslant 2 \leqslant 2x$ и $x \leqslant 2 \leqslant 2y$. Сада је $(2x-y)(x-2y) \leqslant 0$ па је $2x^2-2y^2 \leqslant 5xy$, односно $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} \leqslant \dfrac{5}{2}$. Непосредно добијамо да је $(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right) \leqslant \dfrac{9}{2}$.

772. За $p=2$ добијамо да је $2^{p^2}+3^{p^2}+4^{p^2}-5=348$, а то није дељиво са 13. За $p=3$ добијамо да је $2^{p^2}+3^{p^2}+4^{p^2}-5 = 512+27^3+512^2-5 \equiv 5+1+5^2-5 \equiv 1-1 \equiv 0 \pmod{13}$, па је $p=3$ решење задатка.
Ако је $p>3$ онда је $p=6k\pm 1$, за неко $k \in \mathbf{N}$, одакле је $p^2 \equiv 1 \pmod{12}$. Како је $2^{12} \equiv 3^{12} \equiv 4^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ (мала Фермаова теорема или директна провера), то је $2^{p^2}+3^{p^2}+4^{p^2}-5 \equiv 2+3+4-5 = 4 \pmod{13}$, па у овом случају нема решења. Дакле, једино решење је $p=3$.

773. Бојењем табеле у црно-бело у шаховском стилу, добијамо 25 црних и 24 белих поља. Како L фигура покрива два црна и два бела поља, морамо избацити црно поље. Сада обојимо таблу по колонама црно-бело. Нека је x број L фигура које прекривају три црна и једно бело поље. Разлика броја црних и белих поља у овом случају може бити 8 или 6, у зависности да ли смо избацили бело или црно поље. Како је $x+y=12$, због парности следи $x-y=4$, па морамо избацити бело поље. Добили смо девет кандидата и пробањем за три случаја лако налазимо тражена поплочавања (слика). Због симетрије, довољно је посматрати поља $(2,2)$, $(2,4)$ и $(4,4)$.



Сл. уз зад. 773

774. Добијени деветоцифрени број може се написати у облику

$$1\,000\,000\,A + 2\,000\,A + A = 1\,002\,001\,A = 1001^2 A = 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 A.$$

Следи да A мора бити потпун квадрат, при чему је $\sqrt{A} \in \{11, 12, \ldots, 22\}$. Провера показује да бројеви 196, 256, 289, 361, 441 и 484 задовољавају услове задатка.

775. *Прво решење.* Ако прву од наредне три АГ неједнакости

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc, \quad ab^2 + bc^2 + ca^2 \geqslant 3abc, \quad ac^2 + ba^2 + cb^2 \geqslant 3abc$$

помножимо са 1, другу са 2, а трећу са 4, и резултате саберемо, добијамо да је

$$(a^3 + 2ab^2 + 4ac^2) + (b^3 + 2bc^2 + 4ba^2) + (c^3 + 2ca^2 + 4cb^2) \geqslant 21abc.$$

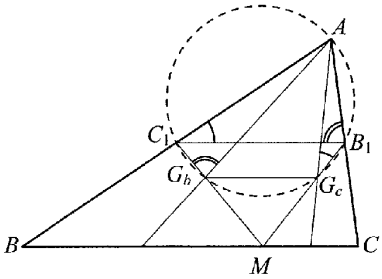
Дељењем са $abc > 0$ добија се неједнакост која се доказује. Једнакост важи ако и само ако важи у наведене три неједнакости, дакле ако и само ако је $a = b = c$.

Друго решење. Трансформишимо леву страну дате неједнакости и применимо АГ неједнакост за 21 број:

$$L = \frac{a^2}{bc} + \frac{b}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{b} + \frac{c}{b} + \frac{c}{b} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{a}{c} + \frac{a}{c} + \frac{a}{c} + \frac{c^2}{ab} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{a} + \frac{b}{a} + \frac{b}{a}$$
$$\geqslant 21 \sqrt[21]{\frac{a^8 b^8 c^8}{a^8 b^8 c^8}} = 21.$$

776. Сви бројеви су међусобно различити јер ако би два броја била једнака, онда би њихова разлика била 0, а како нула није природан број, она се не може појавити на табли. Нека је $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2010}$. Онда је $a_2 - a_1 < a_3 - a_1 < \cdots < a_{2009} - a_1 < a_{2010} - a_1$. Сви ови бројеви су на табли па је: $a_{2009} = a_{2010} - a_1$, $a_{2008} = a_{2009} - a_1$, ... , $a_1 = a_2 - a_1$. Одавде је $a_2 = 2a_1$, $a_3 = 3a_1$, ... , $a_{2010} = 2010a_1$, односно $a_k = ka_1$. Како је 2011 прост број који је записан на табли, то је $a_1 = 2011$, одакле следи тврђење задатка.

777. Нека су средишта страница AB и AC редом C_1 и B_1, а тежишта троуглова ABM и ACM редом G_b и G_c (види слику). Како је четвороугао $ABMG_c$ тетивни, то је $\measuredangle ABM = 180^\circ - \measuredangle AG_cM = \measuredangle AG_cB_1$. Из паралелности $C_1B_1 \parallel BC$ следи да је $\measuredangle ABM = \measuredangle AC_1B_1$, па је $\measuredangle AG_cB_1 = \measuredangle AC_1B_1$. Како су оба угла над дужи AB_1, то је четвороугао $AC_1G_cB_1$ тетивни, тј. тачка G_c припада кружници описаној око троугла AB_1C_1. Аналогно се доказује да и тачка G_b припада тој кружници.



Сл. уз зад. 777

Дакле, тачке A, C_1, G_b, G_c и B_1 припадају једној кружници. Како је $G_cG_b \parallel B_1C_1$, то је $MG_b : G_bC_1 = MG_c : G_cC_1 = 2 : 1$, јер су G_b и G_c тежишта троуглова ABM и ACM. Како је четвороугао $C_1B_1G_cG_b$ тетивни трапез, то је $\measuredangle G_bC_1B_! = 180^\circ - \measuredangle C_1B_1G_c = \measuredangle G_cB_1C_1$ што значи да је трапез једнакокрак. Према томе и $MB_1 = MC_1$, што је и требало доказати.

778. Сабирањем датих једнакости добијамо да је

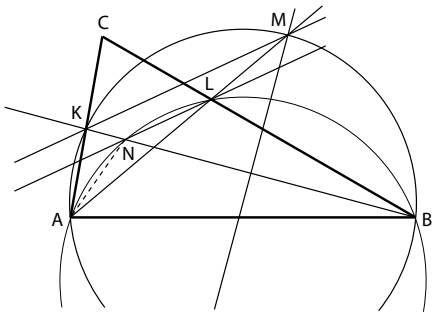
$$abc + bcd + cda + dab = 0.$$

Ако би неки од датих бројева, рецимо d, био једнак нули, из претходне једнакости би слиедило да је $abc = 0$, па прва од датих једнакости не би била могућа. Дакле, важи $abcd \neq 0$, па из претходног дељењем добијамо да је

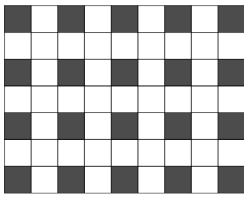
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0.$$

Претпоставимо, супротно тврђењу задатка, да је $a + b + c + d = 0$. Тада из претходне једнакости добијамо да је $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$, а одатле сређивањем $(a + b + c)(bc + ca + ab) = abc$ и $(a+b)(b+c)(c+a) = 0$. Следи да је бар један од израза на левој страни једнак нули. Нека је, на пример, $a + b = 0$. Тада сабирањем друге и треће од једнакости датих у задатку добијамо $0 = 2 + 3$, што је немогуће. На сличан начин се и у осталим случајевима долази до кмонтрадикције, па закључујемо да мора бити $a + b + c + d \neq 0$.

779. Претпоставимо да је услов задатка испуњен. Како је број $n \cdot 2^{n+1} + 1$ непаран, то је $n \cdot 2^{n+1} + 1 = (2m + 1)^2$, односно $n \cdot 2^{n-1} = m(m + 1)$. Како су m и $m + 1$ узајамно прости бројеви, одавде следи да је један од њих дељив са 2^{n-1}, а други не може бити већи од n. Зато је $2^{n-1} \leqslant n + 1$. Докажимо индукцијом да ова неједнакост не може да важи за $n \geqslant 4$.
Заиста, за $n = 4$ је $8 = 2^{4-1} > 5 = 4 + 1$. Претпоставимо да је, за неко n, $2^{n-1} > n + 1$. Множењем са 2 добијамо да је $2^n > 2(n + 1) > n + 2$, чиме је индукцијом доказано да је $2^{n-1} > n + 1$ за $n \geqslant 4$.
Дакле, мора бити $n \leqslant 3$. Провером се добија да $n = 1$ и $n = 2$ не задовољавају услов задатка, а да је $n = 3$ једино решење.

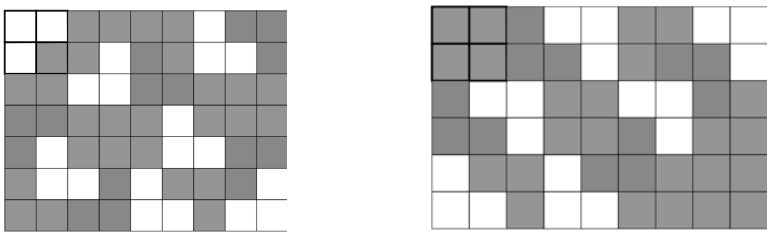


Сл. уз зад. 780



Сл. 1 уз зад. 781

780. Тачка M припада кружници описаној око троугла ABK, јер се симетрала странице троугла и симетрала наспрамног угла секу на описаној кружници (слика). Зато је $\measuredangle ALN = \measuredangle AMK$ (углови на трансверзали) $= \measuredangle ABK$ (периферијски углови) $= \measuredangle ABN$. Дакле, четвороугао $ABLN$ је такође тетивни, одакле даље добијамо да је



Сл. 2 уз зад. 781

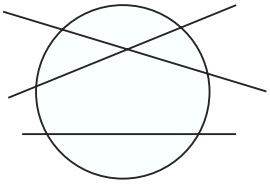
$\measuredangle NAL = \measuredangle NBL$ (периферисјки углови) $= \measuredangle ABK$ (јер је BK симетрала угла ABC) $= \measuredangle ALN$. Према томе, троугао ALN је једнакокрак и важи $LN = NA$.

781. Претпоставимо да је правоугаоник покривен на описани начин и означимо са m број фигура L-облика. Укупан број поља датог правоугаоника је $4n + 3m = 63$. Следи да је n дељиво са 3. Обојимо 20 поља датог правоугаоника као на слици 1. Тада било која L-фигура покрива највише једно обојено поље, а квадратна фигура покрива тачно једно обојено поље. Зато је $n+m \geqslant 20$, тј. $3n+3m \geqslant 60$. Из претходне једнакости следи да је $n \leqslant 3$, па су $n = 0$ и $n = 3$ једине могућности. На слици 2 је показано да је у овим случајевима заиста могуће извршити тражено покривање.

2011. година

782. 2. **783.**

	П	Е	Т	А	Р
оштри	/	/	/	3	/
прави	2	4	2	/	5
тупи	/	/	/	2	/



Сл. уз зад. 785

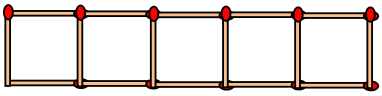
784. 558, 585, 588, 833, 835, 838, 853, 855, 858, 883, 885, 888.

785. Може. Један пример дат је на слици.

786. Како за $5-3=2$ свеске треба платити $136=46+90$ динара, то за једну свеску треба дати $136:2=68$ динара.

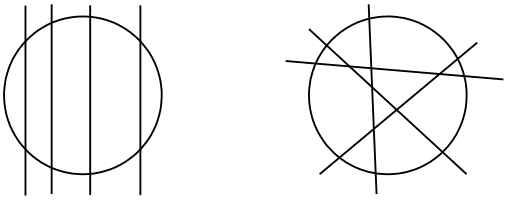
787. а) $109109+45568=154677$; б) $100000-60006=39994$.

788. а) 222211; б) 100011. **789.** Решење је дато на слици.



Сл. уз зад. 789

790. Најмање на 5 делова, слика лево, а највише на 11 делова.



Сл. уз зад. 790

791. Лако се види да A не може бити веће од 4. За $A=4$, рачун није тачан, јер је тада први сабирак већи од збира. Како је и $A>2$, мора бити $A=3$. Тада је $B=9$.

792. 10910.

793. Како скуп A има 2009 елемената, а унија 2011, то значи да унија садржи 2 елемента која нису у A, то јест припадају само скупу B. Како скуп B садржи 2010 елемената и 2 елемента која су различита од елемената скупа A, то значи да су остали елементи заједнички, па пресек садржи 2008 елемената.

794. Ако осмину траженог угла означимо са x, тада је мера траженог угла $8x$. Како је угао суплементан са својом осмином, имамо да је $x + 8x = 180°$. Дакле, мера осмине угла је $x = 20°$, а тражени угао има $160°$.

795. Како је $960 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 3) = 8 \cdot 10 \cdot 12$, то су тражени бројеви 8, 10 и 12. Тражени збир је 30.

796. Милица је прве недеље прочитала $(840 : 7) \cdot 5 = 600$ страница. Дакле, након прве недеље остало јој је 240 страница. Друге недеље је прочитала $(240 : 4) \cdot 3 = 180$ страница, па јој је за трећу недељу остало $240180 = 60$ страница.

797. Како је $(2006 + 2005 + 2004 + 2003) - (2010 + 2009 + 2008 + 2007) = -16$, то је $1999 - * = -16$, па је тражена вредност 2015.

798. Како је $\beta_1 = 3\beta$, то је $\beta + 3\beta = 180°$ па је $\beta = 45°$ и $\beta_1 = 135°$. Нека је $\beta_1 = 2\alpha$. Тада је $\alpha = 67°30'$. Дакле, углови троугла су $45°$, $67°30'$, $67°30'$.

799. Узимајући редом вредност за a и b из скупова A и B, и рачунајући вредност израза $|a + b|$, добијамо елементе скупа $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

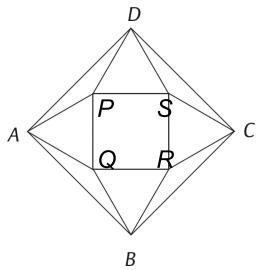
800. Овакав троугао не постоји јер је дата страница једнака збиру друге две, а мора бити мања.

801. Јасно је да је $9 = 4 + 5 = 2 + 3 + 4$. Дакле, тражени бројеви су: 1) 4, 5; 2) 2, 3, 4. Међутим, како је збир два супротна броја 0, осим ова два постоје још 3 решења: 3) $8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; 4) $3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$; 5) $1, 0, 1, 2, 3, 4$. Дакле, задатак има 5 решења.

802. -1

803. Нека је $a = -0{,}2011\,2011\ldots$. Тада је $10000\,a = -2011{,}2011\,2011\ldots$. Сада је $10000\,a - a = -2011$, па је $9999\,a = -2011$, односно $a = -\dfrac{2011}{9999}$. Како је 2011 прост број, то су бројеви 2011 и 9999 узајамно прости, па су решења: $x = -2011, y = 9999$ или $x = 2011, y = -9999$.

804. Означимо темена почетног квадрата са P, Q, R и S. Сви унутрашњи углови конструисаних троуглова су једнаки и сви углови квадрата су прави, па је $\measuredangle APD = \measuredangle DSC = \measuredangle CRB = \measuredangle BQA = 150°$. Како је $AP = PD = DS = SC = CR = RB = BQ = QA$, то су и сви троуглови APD, DSC, CRB и BQA подударни и једнакокраки (једнаки по два пара страница и углови између тих страница). Из подударности ових троуглова следи да је $AB = BC = CD = DA$. Како су сви унутрашњи углови четвороугла $ABCD$ прави (састоје се од унутрашњег угла једнакостраничног троугла и два угла на основици једнакокраких троуглова од по $15°$) то је тражени четвороугао квадрат.

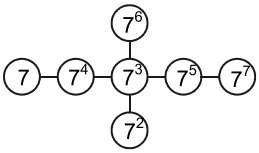


Сл. уз зад. 804

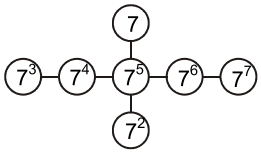
805. Полазна једначина је еквивалентна са $|x| = x + 5$. Разматраћемо случајеве када је $x \geqslant 0$ и $x < 0$. Ако је $x \geqslant 0$, тада је $|x| = x$, па полазна једначина има облик $x = x + 5$ и она нема решења. Ако је $x < 0$, тада је $|x| = -x$ и полазна једначина има облик $-x = x + 5$, одакле долазимо до решења $x = -2{,}5$.

806. Последње цифре бројева $7, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5, 7^6, 7^7$ су редом $7, 9, 3, 1, 7, 9, 3$. Број 1 не може бити у средини, јер је збир осталих бројева 38, што подељено са 2 даје 19, а 19 се не може добити као збир два броја из овог низа.

Ако је 3 у средини, збир осталих бројева је 36, а половина од тога је 18. Те бројеве можемо распоредити тако да су цифре 9 у вертикалном реду, а остале бројеве у водоравним кружићима. Постоје и друга попуњавања, ако се промене места бројева који се завршавају истом цифром. Таквом распореду бројева одговара решење на слици а).



Сл. уз зад. 806а)



Сл. уз зад. 806б)

Ако је 7 у средини, збир преосталих бројева је 32. Пошто $7 + 9 = 16$, та два броја стављамо вертикално, а остале бројеве водоравно. Таквом распореду бројева одговара решење на слици б).
Ако би 9 било на средини, и усправно и водоравно би требало да остали бројеви дају збир 15, што није могуће.

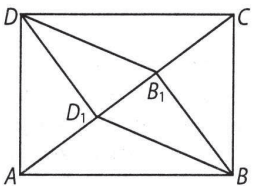
807. а) 16 cm, 32 cm, 20 cm; б) 16 cm, 32 cm, 20 cm; в) 8 cm, 16 cm, 10 cm; г) 4,5 cm; 9 cm; 5,625 cm.

$*$		a
c	15	9
b		24

808. Како квадрат треба да буде магичан, то мора бити $a + 15 + b = a + 9 + 24$, тј. $15 + b = 9 + 24$, одакле је $b = 18$. С друге стране мора бити и $c + 15 + 9 = c + b + *$, тј. $15 + 9 = 18 + *$, па је $* = 6$.

809. Ако две суседне, једнаке ивице, означимо са a, а трећу ивицу са b, онда је збир свих ивица овог квадра $8a + 4b = 64$, тј. $2a + b = 16$. Одавде закључујемо да a мора бити мање од 8, па заменом вредонсти од 1 до 7 имамо следеће могућности: $(a, b) \in \{(1, 14), (2, 12), (3, 10), (4, 8), (5, 6), (6, 4), (7, 2)\}$.

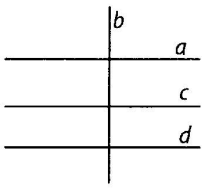
810. Како је $AD = 6\,\text{cm}$ и $AC = AB + 2$, применом Питагорине теореме на троугао ABC добијамо да је $AB = 8\,\text{cm}$ и $AD = 10\,\text{cm}$. Како је BB_1 висина на хипотенузу правоуглог троугла ABC, добијамо да је $BB_1 = 4{,}8\,\text{cm}$. Применом Питагорине теореме на правоугли троугао BB_1C добијамо да је $BB_1 = 3{,}6\,\text{cm}$. Како су троуглови BB_1C и DD_1A подударни, то је $AD_1 = 3{,}6\,\text{cm}$. Дакле, $B_1D_1 = 2{,}8\,\text{cm}$. Површина четвороугла BB_1DD_1 једнака је двострукој површини троугла BB_1D_1. Дакле, тражена површина је $13{,}44\,\text{cm}^2$.



Сл. уз зад. 810

811. $x = 1/3$. **812.** Види слику.

	a	b	c	d
a		⊥	∥	∥
b	⊥		⊥	⊥
c	∥	⊥		∥
d	∥	⊥	∥	

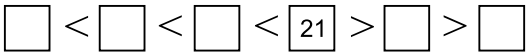


Сл. уз зад. 812

813. Како је $31 + 28 + 31 = 90$, то значи да је Вера рођена 31. марта 2009. године. Дакле, Вера има 1 годину 11 месеци и 5 дана или $365 + 365 - 31 + 5 = 704$ дана.

814. Највећи такав број је 800, а најмањи 107, па је тражена разлика 693, а тражени збир 907.

815. Задатак има више решења. За свако важе неједнакости као на слици. Једно решење је $2 < 5 < 7 < 21 > 16 > 13$.



Сл. уз зад. 815

816. Харалампије највише може да има $2 \cdot 15 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 5 + 2 = 62$ јоцка, а најмање $2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 10 = 26$ јоцка.

817. Страница квадрата је 4 cm. Правоугаоник је подељен на $11 \cdot 4 = 44$ квадрата.

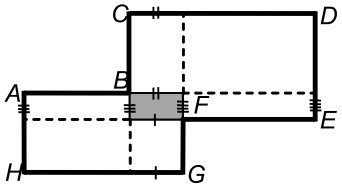
818. Збир прве две цифре је 2 (као и друге две) и таквих бројева има шест: 2020, 2011, 2002, 1120, 1111, 1102.

819. Ако Мома има M сличица, Јова има $2M$ сличица, а Боба $3J$ односно $6M$. Дакле, $6M + M = 210$, одакле закључујемо да Мома има 30 сличица, Јова 60 сличица, а Боба 180 сличица.

820. Види слику.

·	5	11	7
5	25	55	**35**
6	**30**	66	42
9	**45**	**99**	63

Сл. уз зад. 820



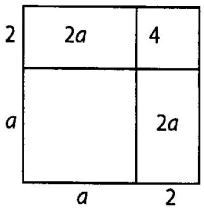
Сл. уз зад. 821

821. Дужина изломљене линије $ABCDEFGHA$ је $2 \cdot (AB + FG + FE + BC) + 6\,\text{cm} = 34\,\text{cm}$.

822. $\frac{2}{4} + \frac{3}{6} + \cdots + \frac{99}{198} = 98 \cdot \frac{1}{2} = 49$.

823. а) $\alpha = 36°30'$, $\beta = 143°30'$; б) $\alpha = 53°30'$, $\beta = 126°30'$; в) $\alpha = 87°$, $\beta = 93°$.

824. Прости бројеви мањи од 30 су: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Једно решење је $13+17 = 11+19 = 7+23$.



Сл. уз зад. 825

825. Како коцка има 6 страна, то се површина сваке стране повећа за $96 : 6 = 16\,\text{cm}^2$. Повећањем ивице коцке за 2 cm, површина једне стране коцке се повећа за површину два прваоугаоника страница 2 cm и a, и један квадрат површине $4\,\text{cm}^2$ (види слику). Према томе, важи $2a + 2a + 4 = 16$, односно $a = 3\,\text{cm}$. Дакле, тражена површина је $P = 6 \cdot a^2 = 54\,\text{cm}^2$.

826. Означимо годину када је особа рођена са $\overline{abcd}$. Тада је $2011 = \overline{abcd} + a + b + c + d = 1000a + 100b + 10c + d + a + b + c + d = 1001a + 101b + 11c + 2d$. Једино је могуће $a = 1$.

Тада имамо $101b + 11c + 2d = 1010$. Једина могућност за b је 9. Тада је $11c + 2d = 101$. Једина могућност за c је 9, па је онда $d = 1$. Дакле, особа је рођена 1991. године.

827. $x = 8$, $y = 3$, $z = 48$. а) 440; б) 8; в) 4.

828. Хипотенуза је дужине 10 cm, па је њој одговарајућа тежишна дуж дужине 5 cm. Тражено растојање је трећина тежишне дужи, тј. $\frac{5}{3}$ cm.

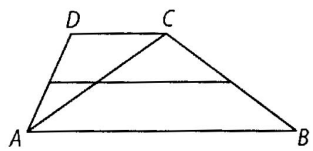
829. Ако је $p = 2$, тада је могуће наћи 8 решења (четири за $a \in \{2011, -2011\}$ и $b \in \{1, -1\}$ и четири за $a \in \{1, -1\}$ и $b \in \{2011, -2011\}$).
Ако је $p = 2011$, тада је могуће наћи још 8 решења (четири за $a \in \{1, -1\}$ и $b \in \{2, -2\}$ и четири за $a \in \{2, -2\}$ и $b \in \{1, -1\}$).

830. Ако је највећи угао при врху једнакокраког троугла, онда су углови на основици по $(180^\circ - 8^\circ) : 3 = 57^\circ 20'$, а угао при врху $65^\circ 20'$.
Ако су углови на основици већи од угла при врху, онда тај угао има $(180^\circ - 16^\circ) : 3 = 54^\circ 40'$, а углови на основици по $62^\circ 40'$.

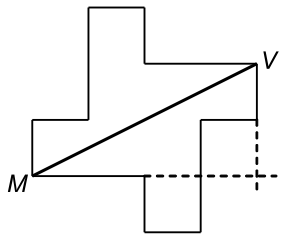
831. Како је $7560 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, то је:
а) највећи број са траженим особинама 75333222;
б) најмањи број са траженим особинама 35789.

832. а) 9; б) 80.

833. Одсечци средње линије трапеза су средње линије троуглова ACD и ABC (слика). Према томе, $DC = 2 \cdot 2 = 4$ cm, $AB = 2 \cdot 5$ cm $= 10$ cm, па је $\frac{P_{ACD}}{P_{ABC}} = \frac{2}{5}$.



Сл. уз зад. 833



Сл. уз зад. 836

834. $x - 2 \geqslant 0$, тј. $x \geqslant 2$. $(\sqrt{x-2})^2 = x - 2$, па првобитна једначина има облик $|x - 1| = 7$. Како је $x - 1 > 0$, јер је $x \geqslant 2$, то је $x - 1 = 7$, односно $x = 8$.

835. Тражени двоцифрени бројеви су облика $\overline{ab}$ Из $\overline{ab} + \overline{ba} = c^2$ добијамо $11(a + b) = c^2$. Како је $2 \leqslant a + b \leqslant 18$, то је $a + b = 11$. Тражени бројеви су 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 и 92.

836. Површина једног правоугаоника је $50\,\text{cm}^2$, а његове димензије су 5 cm и 10 cm (слика). Одатле је $MV^2 = 20^2 + 10^2$, $MV = 10\sqrt{5}$ cm

837. Ако је $x \geqslant 0$: $x = 670$. Ако је $x < 0$: $x = 2010$.

838. $H = 8\sqrt{3}$ cm, $a = 12\sqrt{2}$ cm, $P = (288 + 384\sqrt{6})\,\text{cm}^2$, $V = 2304\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

839. Могући распореди теретних (Т) и путничких (П) вагона су: ТПТППП, ТППТПП, ТПППТП, ТПППТ, ПТПТПП, ПТППТП, ПТППТ, ППТПТП, ППТППТ, ПППТПТ.

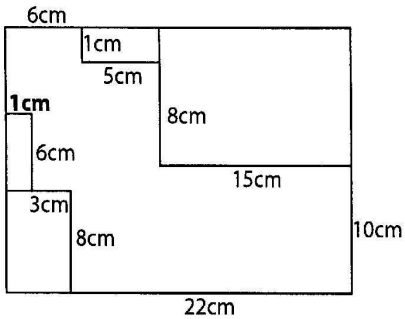
840. Нека је полупречник мањег круга r. Тада је $\frac{1}{7} \cdot 7^2 \pi\,\text{cm}^2 = \frac{1}{4} r^2 \pi\,\text{cm}^2$, па је површина мањег круга $28\pi\,\text{cm}^2$.

841. За $x \neq 0$ важи $\dfrac{x}{|x|} = \pm 1$. Ако су a, b и c сви истог знака, тада је и abc тог знака. У том случају S може бити 4 или 4. Ако a, b и c нису сви истог знака, тада су од четири броја a, b, c и abc увек два позитивна и два негативна, па је $S = 0$.

842. $x \cdot 257 - 422 = 88500$, $x = 346$.

843. Четвороцифрени број је облика $abba$, а троцифрени cdc. Сада је $abba = 2011 + cdc$. Ако је $a = 2$ имамо $2bb2 = 2011 + cdc$, односно $b \cdot 100 + b \cdot 10 + 2 = c \cdot 100 + (d+1) \cdot 10 + c + 1$. Одавде је $c = 1$, $b = 1$ и $d = 0$. За $a = 3$ не постоје тражени бројеви.

844. Ако дату фигуру допунимо до правоугаоника (види слику), његове странице су дужине 26 cm и 19 cm. Површина фигуре је онда $26 \cdot 19 - (15 \cdot 9 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 8 \cdot 4) = 316$. Дакле, $P = 316\,\mathrm{cm}^2$.



Сл. уз зад. 844

845. Од 12 коцкица могу да се направе 4 квадра, типа: $12 \times 1 \times 1$, $6 \times 2 \times 1$, $4 \times 3 \times 1$ и $3 \times 2 \times 2$.

а) Најмању површину има квадар типа $3 \times 2 \times 2$ и то $32\,\mathrm{cm}^2$.

б) Највећу површину има квадар типа $12 \times 1 \times 1$ и то $50\,\mathrm{cm}^2$.

846. Чика Ратко у џепу може да има:

а) 11 новчаница: 3 од 100, 3 од 500 и 5 од 1000 динара;

б) 18 новчаница: 8 од 100, 8 од 500 и 2 од 1000 динара.

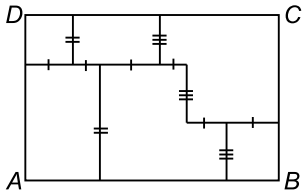
847. 4,9.

848. Како је $2013 = 3 \cdot 671$ и $2010 = 3 \cdot 670$, то се дати број може записати у облику $3 \cdot (2009 \cdot 2011 \cdot 671 + 2008 \cdot 670 \cdot 2012)$, па закључујемо да је он сложен.

849. Како α, β и γ имају паралелне краке, они су једнаки или суплементни. Како је $\alpha + \beta = 2011'$, то је $\alpha = \beta = 16°45'30''$. Како је разлика углова γ и β већа од $90°$, угао γ је туп и углови γ и β су суплементни, па је $\gamma = 163°14'30''$.

850. P, Q, R и S могу имати вредности 2, 3, 5 и 7. Како је збир последњих цифара сабирака једанак R, а $2 + 3 + 5 + 7 = 17$, то је $R = 7$. Како са места јединица постоји прелаз од једне десетице имамо да је $8 + Q + R = Q$, тј. $8 + R = 10$, одакле је $R = 2$. Како са места десетица имамо пренос, имамо да је $8 + Q = S$, па закључујемо да је $Q = 5$ и $S = 3$.

851. Како је збир дужина страница обележених једном цртом, односно две, односно 3 црте (слика) једнак редом 14,26 cm, 11,3 cm, 11,3 cm и како су све дужи обележене цртом странице две новодобијене фигуре, то је збир обима свих 6 фигура $(2 \cdot AB + 2 \cdot BC) + (2 \cdot AB + 4 \cdot BC) = 124{,}84\,\mathrm{cm}$.



Сл. уз зад. 851

852. а) Производ је највећи када је позитиван, па треба изабрати четири негативна броја. Њихов производ је $\dfrac{5}{84}$.

б) Најмањи производ добијамо када изаберемо бројеве $-\frac{4}{7}$, $-\frac{7}{8}$, $\frac{2}{5}$, $-\frac{5}{14}$ и тада је производ $-\frac{1}{14}$.

853. Како је $CC_1 = 3\,\mathrm{cm}$, то је $AB = 6\,\mathrm{cm}$. Такође имамо да је $\measuredangle ABC = 75^\circ$, па се задатак своди на конструкцију троугла ако су дати страница и два налегла угла.

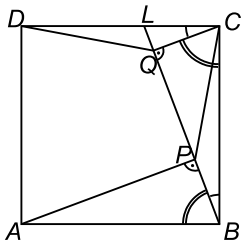
854. Поделимо тај правоугаоник на 670 квадрата површине $1\,\mathrm{cm}^2$. Ако у сваки од тих квадрата распоредимо по 3 тачке, укупно 2010, у ма који квадрат да ставимо последњу тачку он ће садржати 4 тачке.

855. $\triangle ABP \cong \triangle BCQ$ јер је $AB = BC$, $\measuredangle P = \measuredangle Q = 90^\circ$ и $\measuredangle ABP = 90^\circ - \measuredangle QBC = \measuredangle BCQ$ (слика). Сада је $BP = CQ$ и $\measuredangle DCQ = \measuredangle PBC$, па како је $BC = CD$, то је $\triangle PBC \cong \triangle QCD$. Значи, $DQ = CP$.

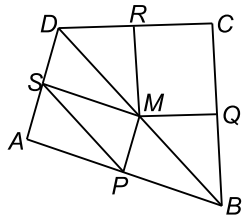
856. Како је

$$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 222(a+b+c) = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot (a+b+c),$$

то ће дати збир бити квадрат неког природног броја ако $a+b+c$ буде најмање једнако са $2 \cdot 3 \cdot 37$, што је немогуће (a, b, c су једноцифрени бројеви).



Сл. уз зад. 855



Сл. уз зад. 860

857. Из $a^2 - 2a + 1 + b^2 + 6b + 9 = 0$ добијамо $(a-1)^2 + (b+3)^2 = 0$. Одавде је $a = 1$ и $b = -3$ па је $a^{2009} - 2009b = 6028$.

858. Ако са a и b означимо катете троугла, а са h хипотенузину висину, тада је $a^2 = h^2 + 16^2$, $b^2 = h^2 + 9^2$ и $a^2 + b^2 = 25^2$. Одатле је $h = 12\,\mathrm{cm}$, $a = 20\,\mathrm{cm}$ и $b = 15\,\mathrm{cm}$, па је $O = 60\,\mathrm{cm}$ и $P = 150\,\mathrm{cm}^2$.

859. Овај број је сложен јер је

$$\begin{aligned} 2009 \cdot 2011 - 48 &= (2010-1)(2010+1) - 48 = 2010^2 - 1 - 48 \\ &= 2010^2 - 49 = (2010-7)(2010+7). \end{aligned}$$

860. Из $\triangle APS \cong \triangle PBM$ и $\triangle APS \cong \triangle SMD$ следи $PS = DM = MB$ и $PS \parallel BM$ и $PS \parallel MD$ (слика). Према томе, тачке B, M и D су колинеарне и M дели дијагоналу на два једнака дела. Сада је MR средња линија троугла BCD и $MR \parallel BC$ и $MR = \frac{1}{2}BC = QC$, Према томе, $MQCR$ је паралелограм.

861. Тражени четвороцифрени број $\overline{abcd}$ задовољава услове $a + b + c + d = a \cdot b$ и $a + b + c + d = \overline{cd}$. Из другог услова добијамо да је $a + b = 9c$, односно $c = 1$ ($c = 2$ даје $a = b = 9$, што је у супротности са првим условом). Сада имамо да је $10 + d = a \cdot b$ па за $d = 4$ добијамо решење 2714 и 7214, односно за $d = 8$ добијамо решења 3618 и 6318.

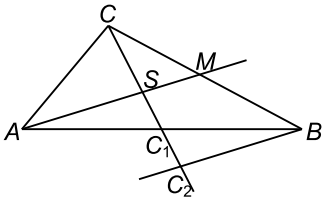
862. График функције има три гране $y = \begin{cases} -2x, & x < -1, \\ 2, & -1 \leqslant x < 1, \\ 2x, & x \geqslant 1 \end{cases}$ и образује са правом $y = 4$ једнакокраки трапез. Темена трапеза су тачке са координатама $(-1, 2)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$

и $(-2,4)$. Основице трапеза су дужине 2 и 4, а висина трапеза дужине 2, па је површина трапеза $P=6$.

863.

$$\begin{aligned} a-b &= \frac{1^2}{1}+\frac{2^2-1^2}{3}+\frac{3^2-2^2}{5}+\cdots+\frac{2011^2-2010^2}{4021} \\ &= \frac{1}{1}+\frac{3\cdot 1}{3}+\frac{5\cdot 1}{5}+\frac{4021\cdot 1}{4021}=2011. \end{aligned}$$

864. Нацртајмо праву паралелну са AM која садржи тачку B и нека је пресек ове праве са CC_1 тачка C_2 (слика). Тада је $\triangle AC_1S \cong \triangle BC_1C_2$, па је $C_2C_1 = C_1S$. На основу Талесове теореме је $CM : MB = CS : 2SC_1$, односно $CS : SC_1 = 2011 : 1006$.



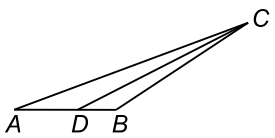
Сл. уз зад. 864

865. Бројеви x и $65x^3$ су исте парности, па x мора бити непаран број. $x=1$ није решење јер $2011-65$ није дељиво са 4, а $x \geqslant 5$ није решење јер је тада $65x^3 > 2011$. За $x=3$ добијамо да је $y=4$ решење дате једначине.

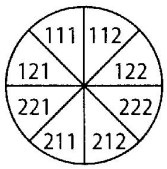
866. Ако са H, B и V обележимо, редом, висину, површину основе и запремину почетне пирамиде, а са H_1, B_1 и V_1 висину, површину основе и запремину пирамиде $AMNP$, тада из $AP : PS = 3 : 1$ добијамо да је $H_1 = \frac{3}{4}H$ а из $AM : MB = 1 : 1$, $AN : ND = 2 : 1$ добијамо да је $B_1 = \frac{1}{6}B$. Следи да је $V_1 = \frac{1}{8}V$, па је $V_1 : (V - V_1) = 1 : 7$.

867. Збир цифара броја који се добија када се броју 357 додају цифре 3, 5 и 7 је 30 па је увек дељив са 3. Како мора бити дељив и са 5, цифра 5 мора бити додата као последња. Дакле, могући бројеви су 373575, 733575, 335775, 735735, 357375 и 357735. Бројеви дељиви са 7 су 735735 и 357735, па су то и решења задатка.

868. Спољашњи углови троугла су $72°$, $126°$ и $162°$, па су унутрашњи углови $108°$, $54°$ и $18°$. Нека је $\measuredangle ABC = 108°$ и $\measuredangle ACB = 18°$. Према томе, $\measuredangle DCB = 9°$, па је $\measuredangle CDB = 180° - (108° + 9°) = 63°$.



Сл. уз зад. 868



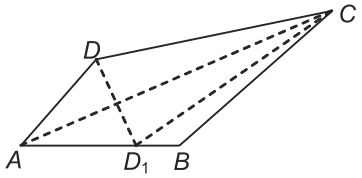
Сл. уз зад. 869

869. Тражени бројеви су 111, 112, 121, 122, 211, 212, 221 и 222 па је једно решење дато на слици.

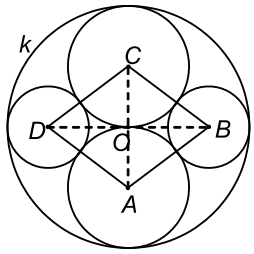
870. Најмање сабирака ће бити ако је $A = 1$. Број 111111 можемо записати као $1001 \cdot 111$, односно $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$. Највећи четвороцифрени број који можемо записати коришћењем нека четири од неведених пет чинилаца је $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 37 = 8547$. Дакле, 13 је најмањи број четвороцифрених сабирака са различитим цифрама који у збиру дају број 111111.

871. Нека је D_1 симетрична тачка тачки D у односу на дијагоналу AC. Како је $\measuredangle BAC = \measuredangle DAC$, тачка D_1 се налази на страници AB. Одавде је $AD = AD_1$ и

$D_1C = DC$. Можемо конструисати троугао D_1BC чије су странице дужина $2\,\mathrm{cm}$, $6\,\mathrm{cm}$ и $7\,\mathrm{cm}$. Продужимо страницу BD_1 преко темена D_1 и нанесемо тачку A тако да је $BA = 5\,\mathrm{cm}$. Сада можемо конструисати троугао ACD чије су нам све странице познате и добијамо и четврто теме четвороугла $ABCD$.



Сл. уз зад. 871

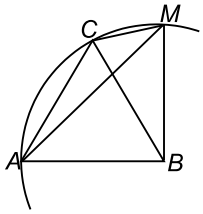


Сл. уз зад. 874

872. Било које три тачке можемо изабрати на $9 \cdot 8 \cdot 7$ начина, а како три исте тачке можемо одабрати на 6 начина, укупан број различитих тројки тачака је 84. Међутим, како има 8 тројки колинеарних тачака, то дате тачке формирају 76 различитих троуглова.

873. Из поставке задатка имамо да је $x^2 = y^2 + \dfrac{10}{y}$. Како је x цео број, то и $\dfrac{10}{y}$ мора бити цео број. Следи да је $y \in \{1, -1, 2, -2, 5, -5\}$. Провером добијамо да су решења $(x, y) \in \{(3, 2), (-3, 2)\}$.

874. Непосредно следи да су две веће кружнице подударне, а због симетрије у односу на праву AC, подударне су и две мање кружнице (слика). Нека је $r = 3\,\mathrm{cm}$ полупречник веће кружнице, а r_1 полупречник мање кружнице. Четвороугао $ABCD$ је ромб јер је $AB = BC = CD = DA = r + r_1$. Како се дијагонале ромба полове и секу под правим углом, троугао OBC је правоугли и важи $3^2 + (6 - r_1)^2 = (3 + r_1)^2$. Одавде је $r_1 = 2\,\mathrm{cm}$. Површина четвороугла $ABCD$ је $24\,\mathrm{cm}^2$.



Сл. уз зад. 875

875. Нека је k кружница са центром у тачки B и полупречником AB, слика. Тачка M припада овој кружници јер је угао ABC два пута већи од угла CMA (централни и периферијски угао). Према томе, троугао ABM је једнакокрак па је угао MAB једнак $45°$. Дакле, угао ABM једнак је $90°$.

876. Претпоставимо да трежени број n постоји и да $(1020^n - 1) \mid (2010^n - 1)$. Тада $1020^n - 1$ дели и разлику $(2010^n - 1) - (1020^n - 1) = 2010^n - 1020^n = 2^n \cdot (1005^n - 510^n)$. Како је број $1020^n - 1$ непаран и дели $2^n \cdot (1005^n - 510^n)$, то $1020^n - 1$ дели $1005^n - 510^n$. Међутим, како је $1020^n - 1 > 1005^n > 1005^n - 510^n$, то је немогуће, па тражени број n не постоји.

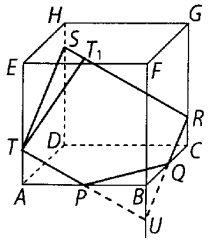
877. Како је $x(x+2)(x+4)(x+6) = (x^2+6x)(x^2+6x+8) = (x^2+6x)^2 + 8 \cdot (x^2+6x) + 16 - 16 = (x^2+6x+4)^2 - 16$, то је најмања вредност израза -16 и достиже се када је $x^2 + 6x + 9 - 5 = 0$, односно за $(x+3)^2 = 5$, то јест за $x = -3 - \sqrt{5}$ или $x = -3 + \sqrt{5}$.

878. Раван α сече пет од шест страна коцке $ABCDEFGH$, слика. Дакле, сече два пара паралелних страна, па петоугао има два пара паралелних страница.

Пресек је петоугао $PQRST$ који је део паралелограма $URST$. Јасно је да је површина петоугла мања од површине паралелограма, односно ако са TT_1 обележимо висину паралелограма која одговара страницама SR и TU, важи следеће:

$$P_{PQRST} < P_{URST} = RS \cdot TT_1 \leqslant RS \cdot ST,$$

што је и требало доказати.



Сл. уз зад. 878

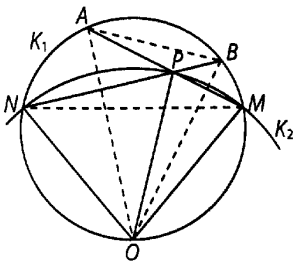
879. Четврти степен ма ког целог броја може се завршавати само цифрама 0, 1, 5 и 6. Збир два четврта степен може се завршавати само цифрама 0, 1, 2, 5, 6 и 7, док се збир четвртог степена неког броја и броја 3 може завршавати само цифрама 3, 4, 8 и 9 (види табеле). Дакле, не постоје цели бројеви x, y и z за које важи дата једнакост јер ће цифре јединица леве и десне стране једнакости бити увек различите.

$+_{10}$	0	1	5	6
0	0	1	5	6
1	1	2	6	7
5	5	6	0	1
6	6	7	1	2

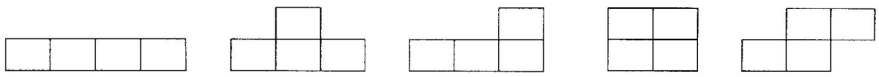
$+_{10}$	0	1	5	6
3	3	4	8	9

880. Збир цифара свих таквих бројева је 2016, а како је 2016 дељиво са 9, и сви ти бројеви су дељиви са 9. Да би неки од тих бројева били дељиви са 11, разлика збира цифара на парним и непарним местима мора бити дељива са 11. Због избора цифара које се употребљавају за запис броја, разлика збира цифара на парним и непарним местима једино може бити 0. Како има 1006 непарних места, 1005 парних и збир цифара на овим местима мора бити 1008, то једна тројка може бити на неком непарном месту, а једна тројка и једна двојка на неким парним местима. Тројка на непарним местима може да се запише на 1006 начина, а двојка и тројка на парним местима на $1005 \cdot 1004$ начина. Дакле, у том скупу је $1006 \cdot 1005 \cdot 1004$ бројева дељивих са 99.

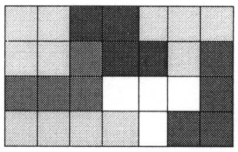
881. Обележимо са K_2 круг са центром O и полупречником OP. Из једнакости периферијских углова у кругу K_1 следи $\measuredangle AMN = \measuredangle AON$, а из односа централног и периферијском угла у кругу K_2, следи да је $2 \cdot \measuredangle PMN = \measuredangle PON$. Дакле, права AO је симетрала угла PON, а пошто је троугао PON једнакокрак, следи да је $AO \perp PN$. Слично закључујемо да је $BO \perp PM$. Посматрајмо троугао AOB. Тачка R је ортоцентар тог троугла јер је $AP \perp BO$ и $BP \perp AO$.



Сл. уз зад. 881



Сл. уз зад. 882а



Сл. уз зад. 882б

882. (а) Има 5 различитих тетрамина који су приказани на слици (а) на претходној страни.

(б) Могуће је и има више решења. Једно је приказано на слици (б).

883. Јасно је да ако број n у свом декадном запису садржи цифру 0, онда је $p(n) = 0$ и такве сабирке можемо занемарити.

Групишући редом по 9 од преосталих сабирака добијамо да је $p(1111) + \cdots + p(1119) = 1 + \cdots + 9 = 45$, затим $p(1121) + \cdots + p(1129) = 2(1 + \cdots + 9) = 2 \cdot 45$, и тако даље до $p(1191) + \cdots + p(1199) = 9 \cdot 45$, па је збир сабирака из стотине између 1100 и 1199 једнак $45(1+2+\cdots+9) = 45^2$. Слично се за наредних 8 стотина редом добијају збирови $2 \cdot 45^2$, $\ldots$, $9 \cdot 45^2$. На тај начин је укупан тражени збир једнак

$$45^2(1 + 2 + \cdots + 9) = 45^2 \cdot 45 = 45^3.$$

884. Доцртајмо теме D тако да $ADBC$ буде правоугаоник. На страници AD уочимо тачку P тако да је $DP = CM$ $(= AN)$. Лако се доказује да је $\triangle PDB \cong \triangle MCA$ $(\cong NAP)$. Одавде следи да је $BP \parallel AM$, па је $\measuredangle NBP$ једнак траженом углу. При том је троугао NPB једнакокрак и правоугли, па је угао између правих BN и AM једнак $45°$.

885. Доказаћемо да је $S = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \dfrac{1}{\sqrt{abc}} \geqslant 4\sqrt{3}$, са једнакошћу ако и само ако је $a = b = c = \dfrac{1}{3}$. Применом АГ неједнакости следи $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geqslant 3\sqrt[6]{abc}$. Ако уведемо смену $t^6 = abc$, потребно је показати следећу неједнакост

$$3t + \frac{1}{t^3} \geqslant 4\sqrt{3},$$

уз ограничење $t^2 = \sqrt[3]{abc} \leqslant \dfrac{a+b+c}{3} = \dfrac{1}{3}$. Сада применимо још једном АГ неједнакост:

$$\begin{aligned} 3t + \frac{1}{t^3} &= 3t + \frac{1}{3t^3} + \frac{1}{3t^3} + \frac{1}{3t^3} \geqslant 4\sqrt[4]{3t \cdot \frac{1}{3t^3} \cdot \frac{1}{3t^3} \cdot \frac{1}{3t^3}} \\ &= 4\sqrt[4]{\frac{1}{3^2t^8}} = 4\frac{1}{t^2\sqrt{3}} \geqslant 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

886. Растављањем на чиниоце добијамо

$$a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = a^3(a^2 + a + 1) + (a^2 + a + 1) = (a^2 + a + 1)(a^3 + 1).$$

Раставимо на сличан начин и преостала два чиниоца на левој страни. После скраћивања видимо да треба доказати неједнакост

$$(a^3 + 1)(b^3 + 1)(c^3 + 1) \geqslant 8.$$

Применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине добијамо:

$$a^3 + 1 \geqslant 2\sqrt{a^3}, \quad b^3 + 1 \geqslant 2\sqrt{b^3}, \quad c^3 + 1 \geqslant 2\sqrt{c^3}.$$

Множењем ове три неједнакости и применом услова $abc = 1$ добијамо

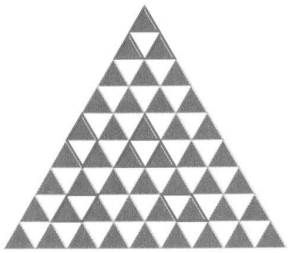
$$(a^3 + 1)(b^3 + 1)(c^3 + 1) \geqslant 8\sqrt{a^3b^3c^3} = 1.$$

Једнакост важи ако и само ако је $a = b = c = 1$.

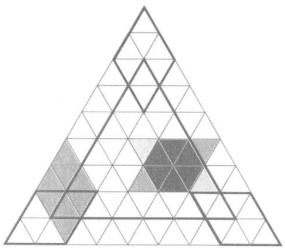
887. Дата једнакост је еквивалентна са

$$(x+y)(xy-p)=5p.$$

Разликујемо следећа четири случаја:
1. $x+y=1$ и $xy=6p$. Јасно је да у овом случају нема решења.
2. $x+y=5$ и $xy=2p$. Заменом $y=5-x$ у другу једнакост добијамо $x(5-x)=2p$. Како је десна страна позитивна, то је $5-x>0$, тј. $x\in\{1,2,3,4\}$. За $x=1$ и $x=4$ добијамо да је $p=2$, а за $x=2$ и $x=3$ добијамо да је $p=3$.
3. $x+y=p$ и $xy=p+5$. Заменом $y=p-x$ у другу једнакост добијамо $x^2-px+p+5=0$. Множењем ове једначине са 4 и додавањем p^2 на обе стране добијамо $4x^2-4px+p^2=p^2-4p-20$. Одавде следи да је $(2x-p)^2-(p-2)^2=-24$. Коришћењем разлике квадрата и скраћивањем добијамо $(x-1)(x-p+1)=-6$. Како је $x-1\geq 0$, то $x\in\{2,3,4,7\}$. Заменом одговарајућих вредности редом добијамо да $p\in\{9,7,7,9\}$, а једино је $p=7$ прост број.
4. За $x+y=5p$ и $xy=p+1$. Због $xy=p+1$ следи $x\leq p+1$ и $y\leq p+1$. Зато је $5p=x+y\leq 2p+2$, односно $3p\leq 2$. Ово је немогуће.
Дата једначина има природна решења ако и само ако је $p\in\{2,3,7\}$.



Сл. уз зад. 888а



Сл. уз зад. 888б

888. Обојимо троуглове црно-бело као на слици (а). Сваки ромб који се састоји од 2 „мала“ троугла састоји се од једног црног и једног белог троугла. Сваки бели троугао може формирати тачно 3 ромба који се састоје од 2 „мала“ троугла, па је број m једнак троструком броју белих поља

$$m=3\cdot(1+2+\cdots+(n-1))=\frac{3(n-1)n}{2}.$$

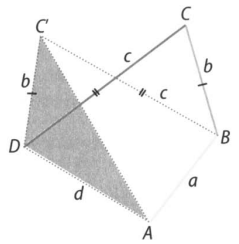
Приметимо да пресеци дијагонала ромбова сачињених од 8 „малих“ троуглова могу бити само темена „малих“ троуглова који припадају централном једнакостраничном троуглу (на слици (б) подебљаном). Темена тог троугла су центри по једног ромба, преостале тачке на обиму по два, а тачке унутар троугла по три. Зато је

$$d=3\cdot 1+2\cdot 3(n-4)+3(1+2+\cdots+(n-5))=\frac{3(n^2-5n+6)}{2}=\frac{3(n-3)(n-2)}{2}.$$

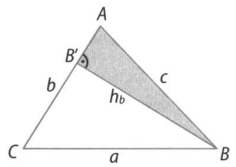
Коначно је $m-d=3(2n-3)$.

889. Докажимо најпре следеће помоћно тврђење.
Нека је S површина конвексног четвороугла $ABCD$. Тада је

$$S\leqslant\frac{1}{2}(AB\cdot CD+BC\cdot DA).$$



Сл. уз зад. 889-1



Сл. уз зад. 889-2

У циљу доказа, конструишимо тачку C' такву да је $BC' = CD$ и $DC' = BC$ (слика 1). При том је $\triangle BCD \cong \triangle BC'D$ и четвороуглови $ABCD$ и $ABC'D$ имају једнаке површине. Како је површина троугла мања или једнака од полупроизвода његових двеју страница (слика 2), то је

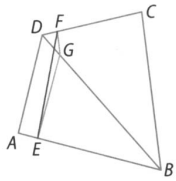
$$S = S_{ADC'} + S_{ABC'} \leqslant \frac{1}{2}AD \cdot DC' + \frac{1}{2}AB \cdot BC' = \frac{1}{2}(AB \cdot CD + BC \cdot DA).$$

Применимо доказано тврђење на четвороугао $AEFD$ и добијамо да је

$$S \leqslant \frac{1}{2}(AE \cdot DF + DA \cdot EF) = \frac{1}{2n^2}(AB \cdot CD + n^2 DA \cdot EF).$$

Нека је G тачка на дијагонали BD таква да је $DB : DG = n$ (слика 3). Применом Талесове теореме добијамо да је $GE = \dfrac{n-1}{n}\,AD$ и $GF = \dfrac{1}{n}\,BC$. Применом неједнакости троугла, из $\triangle EGF$ добијамо да је $EF \leqslant EG + GF = \dfrac{(n-1)AD + BC}{n}$, па је

$$\begin{aligned} S &\leqslant \frac{AB \cdot CD + n^2 DA \cdot EF}{2n^2} \\ &\leqslant \frac{AB \cdot CD + n(n-1)DA + n\,DA \cdot BC}{2n^2}. \end{aligned}$$

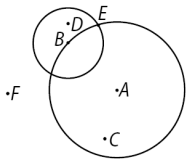


Сл. уз зад. 889-3

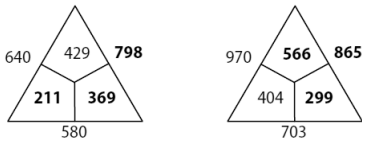
2012. година

890. (а) DXCIX; (б) DCCCII.

891.



892.

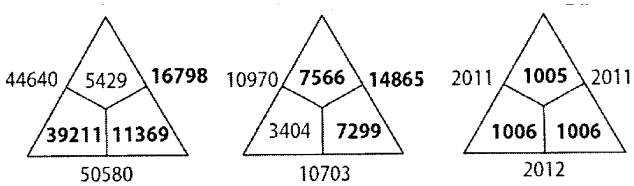


893. Како је $5 = 5 + 0 + 0 = 4 + 1 + 0 = 3 + 2 + 0 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1$ (то су свих 5 начина записивања броја 5 у облику збира 3 једноцифрена броја) и како тражени бројеви треба да буду непарни, то су решења бројеви: 401 (добијен из другог наведеног збира), 203 (из трећег збира), 311, 131, 113 (из четвртог збира) и 221 (из петог збира). Дакле, укупно има 6 таквих бројева.

894. Жутих кликера: x; белих кликера: $2x$, плавих кликера: $3x$; заједно кликера: $6x = 54$. Дакле, жутих кликера има $54 : 6 = 9$, белих 18, а плавих 27.

895. (а) $10000 + 34689 = 44689$; (б) $10000034689 = 65311$.

896.



897. Како је $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 1 \cdot 3 \cdot 9$ (то су једина два начина записивања броја 27 у облику производа 3 једноцифрена броја), то су тражени бројеви: 333 (добијен из првог наведеног производа), 139, 193, 319, 391, 913 и 931 (из другог наведеног производа). Дакле, има 7 таквих бројева.

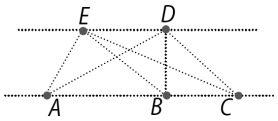
898. Како су наспрамне странице правоугаоника једнаке, имамо да је $10\,\mathrm{cm} = 8\,\mathrm{cm} + y$, па је $y = 2\,\mathrm{cm}$. Дуже странице правоугаоника су $14\,\mathrm{cm} + x$ па за обим правоугаоника имамо да је $2 \cdot 10\,\mathrm{cm} + 2 \cdot (14\,\mathrm{cm} + x) = 60\,\mathrm{cm}$. Одавде је $x = 6\,\mathrm{cm}$.

899. Ако саберемо збир бројева из једне групе са збиром бројева из друге групе добијамо као збир непаран број $1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55$. С друге стране, ако су збирови бројева у две групе једнаки, њихов збир мора бити паран број. Према томе, збирови бројева у две групе не могу бити једнаки.

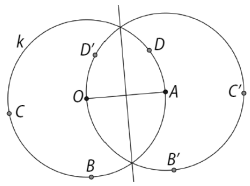
900. 5 060 506.

901. На доњој страни горње коцке су 4 тачке. На горњој страни доње коцке може бити 6 или 1 тачка (наспрам 5 су 2, а наспрам 4 су 3 тачке). Како је поменути збир мањи од 10, то је на горњој страни доње коцке 1 тачка, па је на доњој страни доње коцке 6 тачака.

902. В. слику. Дужи: $AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE$. Троуглови: ABE, ABD, ACE, ACD, BCE, BCD, EDA, EDB, EDC.



Сл. уз зад. 902



Сл. уз зад. 906

903. $E = \{5, 6, 20\}$, $M = \{20, 40\}$. $E \cup M = \{5, 6, 20, 40\}$, $E \cap M = \{20\}$, $E \setminus M = \{5, 6\}$.

904. $\alpha + \beta = 180°$, $\beta + \gamma = 90°$.
(а) $\alpha = 5\beta$; $5\beta + \beta = 180°$; $\beta = 30°$; $\alpha = 150°$; $\gamma = 60°$.
(б) $\alpha = 5\gamma$; $5\gamma + \beta = 180°$; $4\gamma + (\gamma + \beta) = 180°$; $4\gamma = 90°$; $\gamma = 22°30'$; $\beta = 67°30'$; $a = 112°30'$.

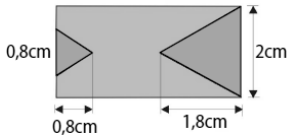
905. 503. **906.** В. слику

907. $a = -11$; $b = -2$; $c = 9$; $d = -11$; $e = -15$.

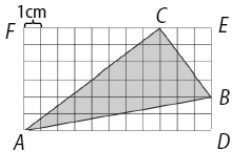
908. $\frac{8}{24}$ укупног броја садница су трешње, $\frac{9}{24}$ укупног броја садница су ораси, па следи да јабука има $\frac{7}{24}$ од укупног броја садница. Највећи број који је мањи од 360 и дељив је са 24 је 336. Како је $336 : 24 = 14$, следи да је број садница јабука $14 \cdot 7 = 98$.

909. Како је $\frac{7}{a+3} \in \mathbf{Z}$, то значи да $a+3$ дели 7. Закључујемо да је $a+ \in \{-1, 1, -7, 7\}$. За $a + 3 = -1$, $a = -4$; за $a + 3 = 1$, $a = -2$; за $a + 3 = -7$, $a = -10$; за $a + 3 = 7$, $a = 4$. Дакле, $a \in \{-10, -4, -2, 4\}$.

910. 0. **911.** Тражену површину P израчунавамо када од површине правоугаоника P_p одузмемо површине троуглова P_1 и P_2 чије су дужине једне странице и одговарајуће висине дати на слици. $P_p = 4\,\text{cm} \cdot 2\,\text{cm} = 8\,\text{cm}^2$, $P_1 = (0{,}8\,\text{cm} \cdot 0{,}8\,\text{cm}) : 2 = 0{,}32\,\text{cm}^2$, $P_2 = (2\,\text{cm} \cdot 1{,}8\,\text{cm}) : 2 = 1{,}8\,\text{cm}^2$, па је тражена површина $P = 5{,}88\,\text{cm}^2$.



Сл. уз зад. 911



Сл. уз зад. 913

912. Нека је $x = 0{,}\overline{1}$ Тада је $10x = 1{,}\overline{1}$. Лако се добија да је $9x = 1$ одакле је $x = \frac{1}{9}$ Сада је $\sqrt{0{,}\overline{1}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$, па је $\sqrt{0{,}\overline{1}}$ рационалан број.

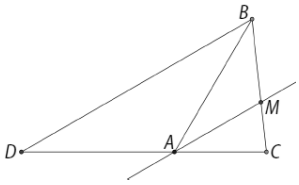
913. Страница квадрата на квадратној мрежи је 1 cm. Сада је $AD = 11\,\text{cm}$, $BD = 2\,\text{cm}$, $BE = 4\,\text{cm}$, $EC = 3\,\text{cm}$, $CF = 8\,\text{cm}$, $FA = 6\,\text{cm}$. Из троугла ADB добијамо да је $AB^2 = AD^2 + BD^2 = 125\,\text{cm}^2$, $AB = 5\sqrt{5}\,\text{cm}$. Слично, из троугла BEC добијамо да је $BC = 5\,\text{cm}$, а из троугла CFA добијамо да је $CA = 10\,\text{cm}$. Како важи $AB^2 = BC^2 + CA^2$, закључујемо да је троугао ABC правоугли.

914. (а) 99 927; (б) 10 017.

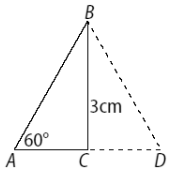
915. $\frac{2x-5}{3} = 5 + \frac{1-3x}{2}$, одакле је $x = \frac{43}{13}$.

916. (а) 21 права; (б) 16 равни.

917. На правој AC одредимо тачку D такву да је $AD = AB$ (слика). Кроз тачку A повуцимо праву која је паралелна са BD и пресек ове праве са BC означимо са M. Тада је $BM : MC = DA : AC = AB : AC$ па је овако конструисана тачка M она која се тражи.



Сл. уз зад. 917



Сл. уз зад. 918

918. Нека је $BC = 3\,\mathrm{cm}$. Ако пресликамо осном симетријом троугао ABC у односу на праву BC, добијамо једнакостранични троугао чија је висина $3\,\mathrm{cm}$. Страница овог једнакостраничног троугла једнака је $2\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$ Полупречник описаног круга око троугла ABC једнак је половини странице једнакостраничног троугла па је тражена површина $3\pi\,\mathrm{cm}^2$.

919. Петнаест радника би другу половину посла завршило за 20 дана. Ако време за које би преосталих 12 радника завршило посао означимо са x, имамо да је $x : 20 = 15 : 12$, одакле је $x = 25$. Дакле, цео посао би био завршен за 45 дана.

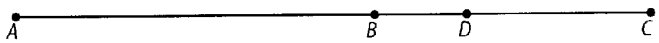
920. Како је збир три иста двоцифрена сабирка двоцифрен број, то М може бити 1, 2 или 3, а како је М $>$ С, то С може бити 0, 1 или 2, зависно од вредности М. Како је С + С + С = М, то је једина могућност М = 3 и С = 1, па је Д = 9. Дакле, $\text{Д} + 2 \cdot \text{М} + 3 \cdot \text{С} = 18$.

921. Како су узастопне стране обележене узастопним бројевима и како је $41 = 20 + 21$, то је лева страна обележена са 20, а десна бројем 21. Тражени производ је $21 \cdot 20 = 420$.

922. Са теразија лево се види да је маса крушке за $50\,\mathrm{g}$ већа од масе јабуке. Да је на теразијама десно уместо крушке јабука, укупна маса би била за $50\,\mathrm{g}$ мања, па би маса две јабуке била $350\,\mathrm{g}$, односно маса једне јабуке би била $175\,\mathrm{g}$, па је маса крушке $225\,\mathrm{g}$.

923. Постоје четири решења: XIV + V = XIX, XV + IV = XIX, XVI + IV = XX, XVI + V = XXI.

924. Распоред тачака A, B, C, D је као на слици. $BD = AD - AB = 1\,\mathrm{cm}\,8\,\mathrm{mm}$; $CD = BC - BD = 3\,\mathrm{cm}\,6\,\mathrm{mm}$.



Сл. уз зад. 924

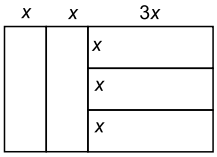
925. (а) 5434; (б) 1434; (в) 5434.

926. Како је збир двоцифреног и једноцифреног броја који се пишу истом цифром троцифрен број, једина могућност је $A = 9$. Како је $99 + 9 = 108$, то је $B = 1$, $C = 0$, $D = 8$ и $A - B + C - D = 0$.

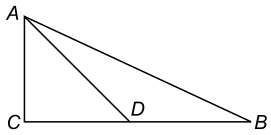
927. У једном минуту кроз цев истекне 9 литара воде. Како од $6\,\mathrm{h}\,13\,\mathrm{min}$ до поноћи протекне $17\,\mathrm{h}\,47\,\mathrm{min} = 1067\,\mathrm{min}$, то за тражено време истекне $1067 \cdot 9 = 9603$ литара воде.

928. (а) 2 222 222 012; (б) 1 010 122 012.

929. Ако краћу страницу малог правоугаоника обележимо са x, онда је дужа страница мањег правоугаоника $3x$ (слика). Дужа страница већег правоугаоника је онда $5x$, па је $5x = 30\,\text{cm}$, тј. $x = 6\,\text{cm}$. Дакле, странице мањег правоугаоника су $6\,\text{cm}$ и $18\,\text{cm}$, па је његов обим $48\,\text{cm}$.



Сл. уз зад. 929



Сл. уз зад. 937

930. $\frac{1}{4} - 0{,}09 = 0{,}16$; $\frac{1}{4} - 0{,}24 = 0{,}01$; $\frac{1}{4} - 0{,}222 = 0{,}028$; $\frac{1}{4} - \frac{1}{100} = 0{,}24$; $\frac{1}{4} - \frac{1}{125} = 0{,}242$.

931. Како су сва растављања броја 48 на производ два чиниоца: (а) $1\cdot 48$, (б) $2\cdot 24$, (в) $3\cdot 16$, (г) $4\cdot 12$, (д) $6\cdot 8$, то значи да постоји 5 могућности за дужине страница правоугаоника, па самим тим постоји и 5 решења. Обим правоугаоника може бити: (а) $98\,\text{cm}$, (б) $52\,\text{cm}$, (в) $38\,\text{cm}$, (г) $32\,\text{cm}$, (д) $28\,\text{cm}$.

932. $\frac{2}{5}$ правог угла је $(90^\circ : 5)\cdot 2 = 36^\circ$. Како је угао α за 36° већи од њему суплементног угла, то је величина суплементног угла $\alpha - 36^\circ$. Сада је $\alpha + (\alpha - 36^\circ) = 180^\circ$, па је $\alpha = 108^\circ$.

933. Квадрата странице $1\,\text{cm}$ има 13. Квадрата странице $2\,\text{cm}$ има 6, и 1 је квадрат странице $3\,\text{cm}$. Збир површина ових квадрата је $13\cdot 1\,\text{cm}^2 + 6\cdot 4\,\text{cm}^2 + 1\cdot 9\,\text{cm}^2 = 46\,\text{cm}^2$.

934. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{7}{n} = 1$, па је $\frac{19}{20} + \frac{7}{n} = 1$, тј. $\frac{7}{n} = \frac{1}{20}$. Одавде је $n = 140$.

935. Како је $AC = AD - CD = CE - CD = ED$ и $\measuredangle CAB = \measuredangle DEF$ као углови са паралелним крацима, имамо да је

$$\left.\begin{array}{c} AB = EF \\ \measuredangle CAB = \measuredangle DEF \\ AC = ED \end{array}\right\} \overset{\text{СУС}}{\Longrightarrow} \triangle ABC \cong \triangle EFD \implies FD = BC.$$

936. $252 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7$. Како се 252 може раставити на највише 5 простих чинилаца, од којих можемо добити највише 5 различитих целих бројева, закључујемо да 1 и -1 морају бити чиниоци броја 252. Дакле, тражени бројеви су $1, -1, 2, -2, 3, -3$ и -7 јер је потребан паран број негативних чинилаца.

937. $\triangle ADC$ је једнакокрако-правоугли па је $\measuredangle CDA = 45^\circ$ (слика). $\triangle ABD$ је једнакокрак па је $\measuredangle DAB = \measuredangle DBA$. Како је $\measuredangle CDA = \measuredangle DAB + \measuredangle DBA$, то је $\measuredangle DBA = 22^\circ 30'$, па су углови троугла 90°, $22^\circ 30'$ и $67^\circ 30'$.

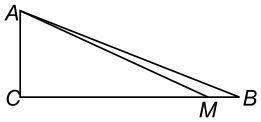
938. Претпоставимо да је било x комада воћа. Тада је број крушака и јабука $\frac{1}{3}x$ а само јабука $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x = \frac{1}{6}x$. Брескви и банана је било $\frac{2}{3}x$ а само банана $\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{3}x = \frac{4}{21}x$. Сада је број јабука и банана $\frac{1}{6}x + \frac{4}{21}x = \frac{15}{42}x$. Како је број комада воћа цео и између 50 и 100, закључујемо да је укупно комада воћа било 84, а јабука и банана 30.

939. У датој једначини $|ab| + p = 53$, a и b су непарни бројеви (производ два непарна броја је увек непаран број), па p мора бити 2, те је $|ab| = 51$. Знамо да је $51 = 1{\cdot}51 = 3{\cdot}17$. Пошто нам треба апсолутна вредност производа бројева a и b, производ датих бројева може бити и негативан. Сва решења су дата у следећој табели.

a	1	-1	1	-1	51	-51	51	-51	3	-3	3	-3	17	-17	17	-17
b	51	51	-51	-51	1	1	-1	-1	17	17	-17	-17	3	3	-3	-3

940. (а) -1; (б) $144 \cdot (6 - 5\sqrt{6})$.

941. Применом Питагорине теореме на троугао ABC је $CB^2 = 8$ (слика). Применом Питагорине теореме на троугао ACM имамо $AM^2 = \dfrac{57}{8}$. Како је $\dfrac{57}{8} < \dfrac{64}{8} = 8$, то је $AM^2 < CB^2$, па је и $AM < CB$.



Сл. уз зад. 941

942. $8^8 = (2^3)^8 = 2^{24}$, $(4^4)^x = 4^{4x} = (2^2)^{4x} = 2^{8x}$. Сада имамо $2^{24} + 2^{8x} = 2^{25}$, па је $2^{8x} = 2^{25} - 2^{24} = 2^{24}(2-1) = 2^{24}$. Дакле, $2^{8x} = 2^{24}$, па је $8x = 24$, тј. $x = 3$.

943. Ратков број је $\overline{A1}$ а Славољубов $\overline{1A}$ и важи $\overline{A1} = 3 \cdot \overline{1A}$. Како је број A петоцифрен, имамо да је $10A + 1 = 3 \cdot (100\,000 + A)$, а после сређивања добијамо $7A = 299\,999$, па је Вера замислила број 42857.

944. (а) Троуглови ABD и ABC имају заједничку страницу (AB) и једнаке висине (AD) па имају и једнаке површине. Сада имамо

$$P_{ASD} = P_{ABD} - P_{ABS} = P_{ABC} - P_{ABS} = P_{BCS}.$$

(б) Површина троугла ABD је $16\,\mathrm{cm}^2$, а троугла ACS је $12\,\mathrm{cm}^2$. Како је $P_{ABD} = P_{ABS} + P_{ASD}$ и $P_{ACD} = P_{CDS} + P_{ASD}$, имамо

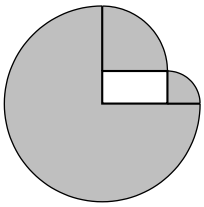
$$P_{ABD} - P_{ACD} = (P_{ABS} + P_{ASD}) - (P_{CDS} + P_{ASD}) = P_{ABS} - P_{CDS},$$

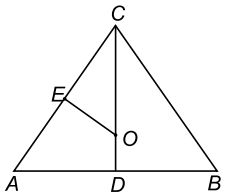
па је $P_{ABS} - P_{CDS} = 4\,\mathrm{cm}^2$.

945. $P = 168\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$, $V = 144\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$.

946. Пас може да се креће само по осенченом делу травњака (слика) који је састављен од три четвртине круга полупречника $12\,\mathrm{m}$, четвртине круга полупречника $8\,\mathrm{m}$ и четвртине круга полупречника $4\,\mathrm{m}$. Дакле, тражена површина је

$$\frac{3}{4}(12\,\mathrm{m})^2\pi + \frac{1}{4}(8\,\mathrm{m})^2\pi + \frac{1}{4}(4\,\mathrm{m})^2\pi = 128\pi\,\mathrm{m}^2.$$


Сл. уз зад. 946



Сл. уз зад. 947

947. (а) Праве OD и OE су симетрале основице и крака, па су углови CEO и CDA прави (слика). Осим два једнака права угла, троуглови ADC и OEC имају једнаке и углове ACD и OCE, па су слични.

(б) Применом Питагорине теореме на троугао ADC имамо да је $AC^2 = AD^2 + DC^2$, па је $DC = 8\,\mathrm{cm}$. Како је E средиште странице AC, то је $CE = 5\,\mathrm{cm}$. Из односа $AC : OC = CD : CE$, добијамо да је тражени полупречник $CO = 6{,}25\,\mathrm{cm}$.

948. Да би једначине биле еквивалентне морају имати исти скуп решења. Како је једино решење друге једначине $x = \frac{3}{4}$, то заменом ове вредности за x у првој једначини добијамо $a = 8\frac{1}{2}$.

949. Нека су све цифре парне. Парне цифре су 0, 2, 4, 6 и 8. Ако је петоцифрени број облика $\overline{abcde}$, тада a може бити било која од цифара 2, 4, 6 и 8, за цифру b остају четири могућности, за цифру c три могућности, за цифру d две могућности и за цифру e једна, па укупно тражених бројева има $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$. Ако су све цифре непарне, тражених бројева $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Дакле, укупно их има 216.

950. Како је $72504 : 36 = 2014$ и $3292510 : 1634 = 2015$, то је други количник већи од првог и то за 1.

951. Збир два двоцифрена броја је увек мањи од 200, па је $D = 1$. Како је цифра десетица сабирака једнака цифри десетица збира, то је могуће само ако постоји пренос са места јединица сабирака (дакле $L > 4$) и ако је $M = 9$. Дакле, имамо да је $\overline{9L}+\overline{9L} = \overline{19S}$. Провером добијамо да су сва решења $95 + 95 = 190$, $96 + 96 = 192$, $97 + 97 = 194$ и $98 + 98 = 196$.

952. Збир бројева на свим картонима је $1+2+3+\cdots+18+19 = 190$. Ако са x означимо збир бројева на картонима у једној групи, онда је $x + 40$ збир бројева на картонима у другој групи. Како је $x + (x + 40) = 190$, закључујемо да су збирови на картонима у групама 75 и 115. Како је $1 + 2 + 3 + 17 + 18 + 19 + 15 = 75$, то је могуће поделити картоне у две групе са траженом особином.

953. Означимо страницу квадрата са a. Обим дате фигуре састоји се од 16 страница квадрата, па је $16a = 32\,\mathrm{cm}$, одакле добијамо да је страница квадрата $2\,\mathrm{cm}$. Како се фигура састоји од 8 квадрата, то је тражена површина $8 \cdot a \cdot a = 32\,\mathrm{cm}^2$.

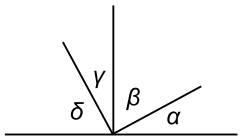
954. Када је записао све једноцифрене бројеве, Бранко је записао 9 цифара. Када је записао све двоцифрене бројеве записао је још 180 цифара. Дакле, за све једноцифрене и двоцифрене бројеве Бранко је записао 189 цифара. До 2012. места, остало је да запише још 1823 цифре. Како је за запис троцифреног броја потребно 3 цифре, Бранко ће на преосталих 1823 места записа 607 троцифрених бројева и још 2 цифре 608. броја (јер је количник при дељењу броја 1823 са 3 једнак 607 и остатак 2). 608. троцифрени број је 707, а његова друга цифра у запису је 0, па је тражена цифра 0.

955. (а) 12 станова; (б) 3 дана; (в) 3 молера.

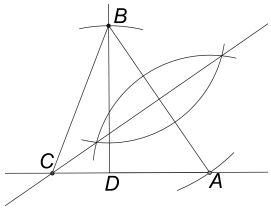
956. Нека је и са леве и са десне стране броја 2012 дописана цифра a. Да би тражени шестоцифрени број $\overline{a2012a}$ био дељив са 12, он мора бити дељив са 3 и са 4. Због дељивости са 4, његов двоцифрени завршетак може бити само 24 или 28, па у обзир долазе бројеви 420124 и 820128. Збир цифара првог броја је 13 и није дељив са 3. Број 820128 има збир цифара 21 и дељив је са 3, па је једино решење број 820128.

957. Како је, по услову задатка, $\alpha + \beta = 90^\circ$ и $\gamma + \delta = 90^\circ$, то је $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$ (слика). Сада је $\alpha + \delta = (\alpha + \beta + \gamma + \delta) - (\beta + \gamma) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, па је $\frac{\alpha + \delta}{2} = 45^\circ$.

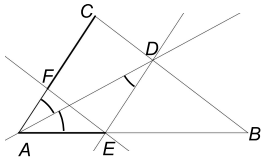
958. Померањем децималне запете за једно место удесно добијамо број који је 10 пута већи од претходног. Ако први број који је Воја записао обележимо са x, тада је други број $10x$, а трећи је $10 \cdot 10x = 100x$. Сада имамо да је $x + 10x + 100x = 2233{,}32$ одакле добијамо да је $x = 20{,}12$. Дакле, Воја је записао бројеве 20,12; 201,2 и 2012.



Сл. уз зад. 957



Сл. уз зад. 961



Сл. уз зад. 963

959. Прва овца за један дан поједе 1 пласт сена, друга овца поједе $\frac{1}{2}$, трећа $\frac{1}{3}$, ... осма $\frac{1}{8}$ пласта сена. Дакле, прве две овце за један дан поједу $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ пласта сена, док преостале поједу $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=\frac{341}{280}$ пласта сена. Како је $\frac{341}{280}<\frac{420}{280}=\frac{3}{2}$, то прве две овце поједу више сена за један дан, па ће и брже појести пласт сена.

960. $\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(2-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(3-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(4-\frac{4}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(9-\frac{9}{10}\right):14\frac{2}{5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{16}{5}\cdot\ldots\cdot\times\frac{81}{10}:\frac{72}{5}$. После скраћивања именилаца са одговарајућим бројиоцима (2 са 4, 3 са 9, 4 са 16, итд), добијамо $\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{1}\cdot\ldots\cdot\frac{9}{2\cdot5}\cdot\frac{5}{8\cdot9}$. Скраћивањем преосталих бројева у имениоцу са истим бројевима у бројиоцу остаће нам производ $3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7=2520$.

961. Означимо подножје висине из темена B основице AB на крак AC са D (слика). Троугао ABD је правоугли и позната је дужина његове хипотенузе и једне катете, па га можемо конструисати. Како је троугао ABC једнакокрак, то се теме C налази на симетрали основице троугла AB. Конструкцијом симетрале странице AB у пресеку са правом AD добијамо треће теме троугла.

962. $\overline{xyzxyz}=\overline{xyz000}+\overline{xyz}=1000\cdot\overline{xyz}+\overline{xyz}=1001\cdot\overline{xyz}$. Сада имамо

$$\overline{xx}\cdot\overline{yz}\cdot\overline{xyz}=1001\cdot\overline{xyz},\quad 1001\cdot\overline{xyz}-\overline{xx}\cdot\overline{yz}\cdot\overline{xyz}=0,$$

одакле је $\overline{xyz}(1001-\overline{xx}\cdot\overline{yz})=0$. Овај производ је једнак 0 ако је $\overline{xx}\cdot\overline{yz}=1001$. Како је $1001=7\cdot11\cdot13=11\cdot91=77\cdot13$, закључујемо да је $x=7$, $y=1$ и $z=3$.

963. Права AD је симетрала $\measuredangle BAC$ па је $\measuredangle BAD=\measuredangle CAD$ (слика). $\measuredangle CAD=\measuredangle ADE$ (углови са паралелним крацима) па је $\measuredangle DAE=\measuredangle ADE$. Сада је троугао ADE једнакокрак и $AE=DE$. Четвороугао $EDCF$ је паралелограм (наспрамне странице су конструисане тако да буду паралелне) па је $CF=DE$. Дакле, како је $AE=DE$ и $CF=DE$, то је и $AE=CF$.

964. На основу трећег броја видимо да у запису Мајиног броја нема цифара 2 и 5. Сада на основу прва два броја закључујемо да се у запису Мајиног броја појављују цифре 1, 3, 4 и 6. Ако је у првом броју погодио позицију цифре 1, то значи да је у другом броју погодио позицију цифре 3 и у том случају Мајин број је 6314. Међутим, ако је погодио позицију цифре 4 у првом броју, онда у другом броју може бити добра само позиција цифре 6 па је тражени број 4163 (ако је погодио позицију цифре 3 онда и цифра 1 и цифра 6 морају бити на четвртој позицији што је немогуће). Дакле, како за задате услове постоје две тачне могућности, Ненад не може из четвртог покушаја са сигурношћу да каже тачан број, већ само може да погађа.

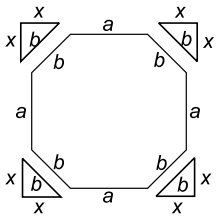
965. Групишући чланове израза на следећи начин $-(x^2-2x)-(z^2-6z)-y^2$ и допуњујући изразе у заградама до квадрата бинома, добијамо

$$-(x^2-2x+1-1)-(z^2-6z+9-9)-y^2=-(x-1)^2+1-(z-3)^2+9-y^2.$$

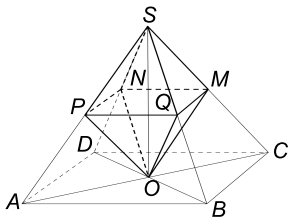
Како је вредност квадрата реалног броја ненегативан број, а у изразу је испред сваког квадрата бинома предзнак „$-$“, дати израз има највећу вредност за $x = 1$, $z = 3$ и $y = 0$, и његова вредност у том случају је 10.

966. $n = 2^{20} \cdot 3^{15} \cdot 5^{10} = 6^{10} \cdot 3^5 \cdot 10^{10}$. (а) n се завршава са 10 нула. (б) Како је последња цифра броја 6^{10} једнака 6, а броја 35 цифра 3, то је прва цифра с десна на лево различита од нуле једнака 8 ($\ldots 6 \cdot \ldots 3 = \ldots 8$). (в) $21 \cdot 16 \cdot 111 = 3696$.

967. Страница квадрата је 12 cm. Како је обим осмоугла једнак збиру обима четири подударна троугла и како су странице означене са b све међусобно једнаке (слика), имамо да је $8x = 4a$, односно $a = 2x$. Сада је $2x+a = 12\,\mathrm{cm}$, па је $a = 6\,\mathrm{cm}$, $x = 3\,\mathrm{cm}$. Применом Питагорине теореме на правоугли троугао добијамо да је $b = 3\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$. Обим осмоугла је $O = 4a + 4b = 12(2+\sqrt{2})\,\mathrm{cm}$. Површина осмоугла једнака је разлици површине квадрата и четири једнакокрака правоугла троугла. Дакле, $P = 126\,\mathrm{cm}^2$.



Сл. уз зад. 967



Сл. уз зад. 972

968. Како је

$$x^6 - 4x^5 + 4x^4 - 81x^2 + 324x - 324 = 0, \quad x^4(x^2 - 4x + 4) - 81(x^2 - 4x + 4) = 0,$$
$$(x^4 - 81)(x^2 - 4x + 4) = 0, \quad (x^2 + 9)(x - 3)(x + 3)(x - 2)^2 = 0,$$

решења су $x \in \{3, -3, 2\}$.

969. Ако је n укупан број тачака, број дужи који се може добити спајањем тих n тачака је $\dfrac{n(n-1)}{2}$. Како је $\dfrac{11 \cdot 10}{2} < 60 < \dfrac{12 \cdot 11}{2}$, закључујемо да је број тачака које је Воја нацртао 12. Како је укупан број дужи са 11 тачака једнак 55, закључујемо да је из последње тачке повукао $60 - 55 = 5$ дужи.

970. Осе координатног система и график формирају троугао чије су катете 1 и 2. Тражено растојање је висина која одговара хипотенузи овог троугла. Хипотенуза овог троугла је $\sqrt{5}$. Како је површина овог троугла 1, висина која одговара хипотенузи, а самим тим и тражено растојање, је $\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$.

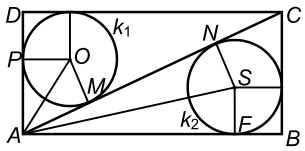
971. $\big||2012 - x| - 2011\big| = 2013$, па је $|2012 - x| - 2011 = 2013$ или $|2012 - x| - 2011 = -2013$. Сада је $|2012 - x| = 4024$, док је случај $|2012 - x| = -2$ немогућ. Дакле имамо $2012 - x = 4024$ или $2012 - x = -4024$, па је $x = -2012$ или $x = 6036$.

972. Висину пирамиде рачунамо као катету правоуглог троугла OBS (слика). Како је $BS = a$ и $BO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, то је $SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $PQ = QM = MN = NP = \dfrac{a}{2}$ (средње линије једнакостраничних троуглова странице a). $PS = QS = MS = NS = \dfrac{a}{2}$ (половине ивица дужина a). $PO = QO = MO = NO = \dfrac{a}{2}$ (средње линије троуглова и паралелне са

страницом дужине a). Дакле, тело $OPQMNS$ се састоји од две једнакоивичне четворостране пирамиде ивице $\frac{a}{2}$ које су спојене по основи. Површина тела се састоји од осам троуглова и једнака је $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Запремина је једнака $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

973. Нека је x број коцки ивице 1 cm, y број коцки ивице 2 cm и z број коцки ивице 3 cm. Тада је $x + 8y + 27z = 133$ и $x + y + z = 2012$. Одузимањем друге једначине од прве добијамо $7y + 26z = 185$. Како је $0 \leqslant 26z \leqslant 185$, то је $0 \leqslant z \leqslant 7$. Само у случају $z = 2$ имао да је $y = 19$, а заменом у првој једначини $x = 1991$. Дакле, могуће је расећи дату коцку на 2012 мањих и то 1991 коцку чија је ивица 1 cm, 19 коцки чија је ивица 2 cm и 2 коцке чија је ивица 3 cm.

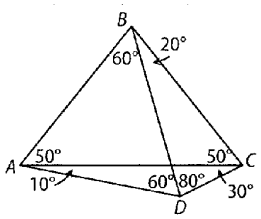
974. Означимо са k_1 круг уписан у троугао ACD, а са k_2 круг уписан у троугао ABC. Означимо са P тачку додира круга k_1 и странице AD, а са F тачку додира круга k_2 и странице AB. Троуглови AFS и ANS су подударни јер је $AS = AS$, $SN = SF = r$, $\measuredangle SFA = \measuredangle SNA = 90°$ па је $AN = AF = a - r$. Аналогно показујемо да су троуглови APO и AMO подударни па је $AM = AP = b - r$. Сада је $MN = AN - AM = a - b$.



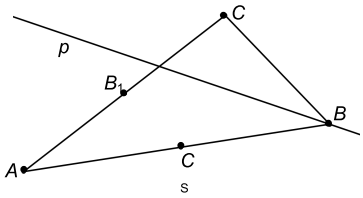
Сл. уз зад. 974

975. Међу шест узастопних целих бројева сигурно је један дељив са 5, три су сигурно парна па је њихов производ дељив са 8, а како су два броја сигурно дељива са 3, производ ових бројева је сигурно дељив са 9. Из дељивости са 2 и 5 добијамо да је производ облика $\overline{*6036*0}$. Из дељивости са 8 имамо да је троцифрени завршетак дељив са 8 па производ може бити облика $\overline{*603600}$ или $\overline{*603640}$ или $\overline{*603680}$, а из дељивости са 9 да је производ један од бројева 3603600 или 8603640 или 4603680. Растављањем на чиниоце датих бројева имамо да је само 3 603 600 производ шест узастопних целих бројева, а они су 10, 11, 12, 13, 14, 15 или $-10, -11, -12, -13, -14, -15$.

976. У троуглу BCD је $\measuredangle BDC = 180° - (\measuredangle CBD + \measuredangle BCD) = 80°$, па је троугао BCD једнакокрак и $BC = BD$ (слика). Како је $AB = BC = BD$, то је и троугао ABD једнакокрак па је $\measuredangle BAD = \measuredangle BDA = 60°$ и $\measuredangle CAD = \measuredangle BAD - \measuredangle BAC = 10°$.



Сл. уз зад. 976



Сл. уз зад. 977

977. Како је B_1 средиште странице AC, теме A добијамо преношењем дужи CB_1 на полуправу CB_1 тако да је $CB_1 = B_1A$ и $C - B_1 - A$ (слика). Како је права p симетрала угла ABC то се тачка C_s, осносиметрична слика тачке S у односу на праву p, налази на страници AB. Конструкцијом ове тачке добијамо праву AC_s. У пресеку ове праве са правом p добијамо треће теме троугла B.

978. У запису ова три број јавља се свих 10 цифара. Девет цифара се јавља тачно једанпут, а једна се јавља четири пута. Збир свих ових цифара је $(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9) + 3 \cdot O = 45 + 3 \cdot O = 3 \cdot (15 + O)$. Како је овај збир сигурно дељив са 3, и

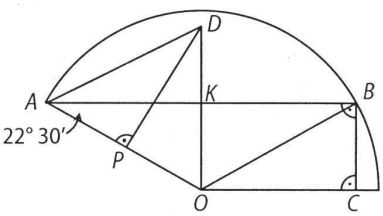
збир цифара збира три дата броја је увек дељив са 3, па је и сам збир дељив са 3, те је увек сложен број. Дакле, Радашин је у праву.

979. Означимо број ученика првог разреда са p, а број ученика другог разреда са d. У првом разреду је $65\%\,p$ девојчица, а у другом разреду $45\%\,d$. Како је укупан број девојчица у оба разреда $53\% \cdot (p+d)$, то је $65\%\,p + 45\%\,d = 53\% \cdot (p+d)$. Сређивањем ове једнакости добијамо да је $3p = 2d$, а додавањем и левој и десној страни по $2p$ имамо $5p = 2 \cdot (p+d)$, односно $p = \frac{2}{5}(p+d) = 40\% \cdot (p+d)$. Дакле, у првом разреду је 40% од укупног броја ученика.

980. Првих 10 чланова низа су: 7, 14, 17, 20, 5, 8, 11, 5, 8, 11. Ако склонимо прва четири члана низа, имамо да је потребно одредити 2008. члан низа у коме се три броја 5, 8 и 11 узастопно понављају. Како је $2008 = 3 \cdot 669 + 1$, закључујемо да је тражени члан 5.

981. Размотримо три могућности:
(а) Ако је Партизан победио, тада су прва четири исказа тачна, па претпоставка није тачна.
(б) Ако је било нерешено, онда су искази А, В и Д нетачни, па ни ова претпоставка није тачна.
(в) Закључујемо да је тачна трећа могућност, тј. да је Звезда победила. У том случају искази В и Г су нетачни. Остала три исказа морају бити тачна. Из тачности исказа Б и Д следи да је резултат утакмице 2 : 1 за Звезду.

982. Нека је D тачка осносиметрична тачки O у односу на праву AB и нека је пресек дужи OD и AB тачка K. Троуглови AOK, BOK и OBC су подударни (све три једнаке странице) па је тражена површина једнака трострукој површини троугла AOK. Троуглови AOK и ADK су подударни (две једнаке странице и угао између њих) па је троугао ку од 45°. Нека је DP нормала из тачке D на крак AO. Сада је троугао APD једнакокрако правоугли и његова хипотенуза је 12 cm, па је $DP = 6\sqrt{2}$ cm. Површина троугла AOD је $\frac{AO \cdot DP}{2} = 36\sqrt{2}\,\text{cm}^2$, па је површина троугла AOK једнака $18\sqrt{2}\,\text{cm}^2$ а површина траженог четвороугла је $3 \cdot 18\sqrt{2}\,\text{cm}^2 = 54\sqrt{2}\,\text{cm}^2$.



Сл. уз зад. 982

983. $p^4 - q^4 = (p^2+q^2)(p^2-q^2)$. Број p^2+q^2 је сигурно дељив са 2 јер је збир два непарна броја. Покажимо да је p^2-q^2 дељиво са 24. $p^2-q^2 = (p^2-1)-(q^2-1) = (p-1)(p+1)-(q-1)(q+1)$. Како бројеви p и q нису дељиви са 3 (прости су!), онда је сигурно њихов претходник или следбеник дељив са 3, па је и $(p-1)(p+1)$ и $(q-1)(q+1)$ дељиво са 3, а одатле и њихова разлика. Такође су $p-1$ и $p+1$ два узастопна парна броја, па је један од њих дељив са 4, а њихов производ дељив са 8. Исто важи и за производ $(q-1)(q+1)$, па је p^2-q^2 дељиво са $3 \cdot 8 = 24$, одакле следи тврђење задатка.

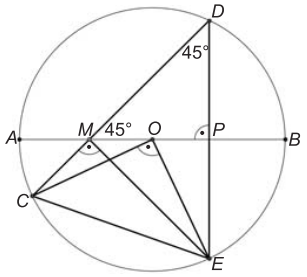
984. (а) Како је $CM = CN$, то је троугао CMN једнакокрако правоугли и $\measuredangle CMN = 45°$ (слика). Нека је P пресек симетрале угла ACD и дужи MN. Троуглови MPC и DPC су подударни ($CM = CD$, $CP = CP$, $\measuredangle MCP = \measuredangle DCP$), па је $\measuredangle CMP = \measuredangle CDP = 45°$. Дакле, полуправа DP је симетрала угла CDA па је тачка P центар уписане кружнице, односно $P \equiv O_1$. Дакле, тачка O_1 припада правој MN. Аналогно се показује и да тачка O_2 припада правој MN.

Сл. уз зад. 984

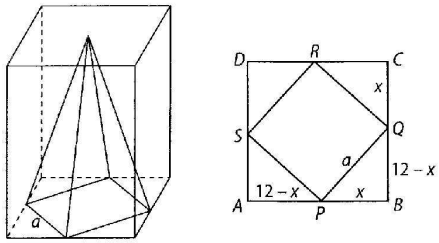
(б) Како су троуглови MO_1C и DO_1C подударни, то је $MO_1 = DO_1$. Аналогно је и $NO_2 = DO_2$. Из троугла O_1DO_2 имамо да је $O_1O_2 < O_1D + O_2D$, па је $MN = MO_1 + O_1O_2 + O_2N = DO_1 + DO_2 + O_1O_2 > 2O_1O_2$.

985. Означимо вредност акција на берзи једног дана била x. После извесног броја дана вредност акција ће бити $1{,}17^k \cdot 0{,}83^p \cdot x$, где је са k означен број дана када се цена акција повећавала, а са p број дана када се цена акција смањивала. Доказаћемо да једначина $1{,}17^k \cdot 0{,}83^p \cdot x = x$ нема решења. Једначина је еквивалентна са $x \cdot \left(\frac{117}{100}\right)^k \left(\frac{83}{100}\right)^p = x$. Наиме, у том случају бисмо имали да је $117^k \cdot 83^p$ једнако 100^{k+p} где су k и p ненегативни цели бројеви. Међутим то је немогуће јер је на левој страни непаран број, а на десној страни паран број. Дакле, цена акција у два различита радна дана после 12.00 часова не може бити иста.

986. Нека је тачка E осносиметрична слика тачке D у односу на пречник AB. Како су троуглови MDP и MEP подударни, то је троугао DME једнакокрако правоугли и $\measuredangle DME = 90°$, $MD = ME$ и $\measuredangle MDE = 45°$. Сада је и $\measuredangle CME = 90°$ и $\measuredangle COE = 90°$ (централни угао над тетивом чији је периферијски угао 45°). Важи да је $CE^2 = MC^2 + ME^2 = MC^2 + MD^2$, али и $CE^2 = CO^2 + OE^2 = 2r^2$, па је $MC^2 + MD^2 = 2r^2$.



Сл. уз зад. 986



Сл. уз зад. 988

987. Означимо количину воде коју попије један слон са s, количину воде у језеру са j и количину воде коју извор допуни за један дан са i. Сада је $i + j = 183s$ и $5i + j = 37 \cdot 5s$. Из ове две једначине добијамо да је $i = 0{,}5s$, па је $j = 182{,}5s$. Ако један слон попије воду из језера за k дана, имамо да је $ks = j + ki$, односно $ks = 182{,}5s + 0{,}5ks$, одакле добијамо да је $k = 365$. Дакле, једном слону би вода из језера била довољна за 365 дана.

988. Како је висина призме једнака висини пирамиде, пирамида најмање запремине је она чија је површина основе најмања (прва слика). Означимо страницу квадрата $PQRS$ који је у основи пирамиде са a (друга слика). Теме P дели страницу AB квадрата $ABCD$

који је у основи призме на делове дужина x и $12-x$. Из подударности троуглова APS и BQP ($SP = PQ$ и два налегла угла на страницу SP једнака са одговарајућим угловима налеглим на страницу PQ) следи да је $BQ = 12 - x$. Сада је $a^2 = x^2 + (12-x)^2 = 2x^2 - 24x + 144 = 2(x-6)^2 + 72$. Страница a ће имати најмању вредност када $(x-6)^2$ има најмању вредност, а то је за $x = 6$, па је $a = 6\sqrt{2}$. Тражена површина је $72(1+\sqrt{33})\,\mathrm{cm}^2$.

989. Победу може да осигура први играч у три извлачења (у два извлачења није могуће остварити победу јер нема два броја која могу дати резултат 50 било којом датом операцијом). Приметимо да се број 50 може добити на следеће начине:

$$6 \cdot 8 + 2; \qquad 8 \cdot 7 - 6; \qquad (6+4) \cdot 5; \qquad 6 \cdot 9 - 4$$

и да се број 6 јавља у свим изразима, бројеви 8 и 4 у два и бројеви 2, 7, 5 и 9 у по једном.

<table>
<tr><td colspan="4">6</td></tr>
<tr><td colspan="2">4</td><td colspan="2">8</td></tr>
<tr><td>5</td><td>9</td><td>2</td><td>7</td></tr>
</table>

Победничка стратегија првог играча може бити следећа: прво извлачи карту са бројем 6. Ако је други играч узео карту са неким од бројева 4, 5 или 9, узима карту са бројем 8. Ако је други играч узео карту са неким од бројева 2, 7 или 8, први узима карту са бројем 4. Ако други играч узме карту са бројевима 1 или 3, први може узети било који од бројева 4 или 8. У трећем извлачењу узима карту са којом може да састави један од дата четири израза и на тај начин осигурава победу.

990. Број $\overline{abba}$ можемо записати у облику

$$\overline{abba} = 1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b = 11(91a + 10b).$$

Како број 11 мора бити један од простих чинилаца, остале чиниоце морамо потражити у суседству броја 11. Једина могућа решења су $5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 5005$ и $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$, тј. тражени бројеви су 1001 и 5005.

991. Због облика једначине можемо претпоставити да је $x \leqslant y \leqslant z$. Дату једначину запишимо у облику

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 6$$

тј.

$$(y-x)^2 + (z-x)^2 + (z-y)^2 = 6.$$

Како су сабирци $(y-x)^2$, $(z-x)^2$, $(z-y)^2$ природни бројеви, један од њих мора бити 4, а два морају бити 1, односно (због претпостављеног поретка) имамо да је $y - x = 1$, $z - x = 2$, $z - y = 1$. Претходне једнакости важе за свака три узастопна природна броја. Дакле, решење једначине је $x = n$, $y = n + 1$ и $z = n + 2$ за сваки природан број n.

992. Означимо чланове низа са $a_1, a_2, \ldots, a_{16}, \ldots$. Како је a_1 једноцифрени број, а a_9 четвороцифрени, имамо да важи $a_9 = a_1 + 8d > 1000$ тј. мора бити испуњено $8d > 991$ што нам даје услов да је $d > 123$. С друге стране a_8 је последњи троцифрени члан низа па је $a_8 = a_1 + 7d < 1000$ тј. $7d < 999$ што нам даје и други услов $d < 143$. Дакле, $123 < d < 143$.

За било коју вредност првог члана низа и било коју вредност за d из одређеног интервала имамо да је $B = 1$, а $A = 2$. Посматрајући девети члан низа уз услов задатка да сва слова означавају различите цифре, лако уочавамо да F не може бити цифра 1 или 2, јер су то већ B и A. А како је $123 < d < 143$, следи да је $F = 0$. Како четврти члан низа не може бити 303, а камоли 505, све због ограничења за d, следи да је $G = 4$. Када имамо одређена два члана низа, лако можемо одредити тачну вредност за d, наиме $a_4 = 3d + a_1$,

одакле лако добијамо да је $d = 134$. Па је $a_{16} = a_1 + 15d = 2 + 2010 = 2012$, тј. 16. члан низа је $AFBA$.

993. Одредимо кординате црвене тачке. Како се црвена тачка налази у пресеку датих правих, њене коорината биће решења система једначина по x и y

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ y &= bx + a. \end{aligned}$$

Како је из услова задатка $a \neq b$, лако добијамо да црвена тачка има координате $(1, a+b)$. Права која садржи плаве тачке очигледно представља y осу, али није познат позитиван смер осе. Знајући да црвена тачка има координате $(1, a+b)$, позитиван смер осе y лако одређујемо.

У пресеку y осе и праве која садржи црвену тачку и нормална је на y осу налази се тачка $P(0, a+b)$. У зависности да ли се тачка P налази између плавих тачака или не, разликоваћемо два случаја. Ова два случаја јављају се као последица тога да a и b могу бити истог, а и различитог знака.

1. случај. Нека су a и b истог знака, на пример позитивни (аналогно и ако су негативни). Плаве тачке имају редом координате $(0, a)$ и $(0, b)$. Растојање између ове две тачке је $|b - a|$. Јасно је да тачка $P(0, a+b)$ неће бити између плавих тачака, већ ће бити ван и то ближе оној плавој тачки која је удаљенија од координатног почетка, јер је њена удаљеност од координатног почетка $a+b$. Растојање тачке $P(0, a+b)$ до њој ближе плаве тачке једнако је растојању друге плаве тачке и координатног почетка. На тај начин лако налазимо позицију координатног почетка.

2. случај. Нека су a и b различитог знака. Тачка $P(0, a+b)$ као и кординатни почетак налазе се између плавих тачака. Није тешко уочити да се тачка $P(0, a+b)$ налази на растојањима $|a|$ и $|b|$ од плавих тачака, а како се и координатни почетак налази на растојањима $|b|$ и $|a|$ од плавих тачака, лако га је одредити, јер имамо растојања $|a|$ и $|b|$ као растојања тачке $P(0, a+b)$ до плавих тачака.

994. Замењујући $1-a$, $1-b$ и $1-c$ редом са $b+c$, $c+a$, $a+b$ на десној страни неједнакости, добијамо следећи низ еквивалентних неједнакости:

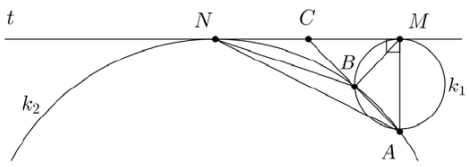
$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} + 6 \geqslant 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} + \sqrt{\frac{a+b}{c}}\right),$$

$$\left(\frac{b+c}{a} - 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{b+c}{a}} + 2\right) + \left(\frac{c+a}{b} - 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{c+a}{b}} + 2\right) + \left(\frac{a+b}{c} - 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{a+b}{a}} + 2\right) \geqslant 0,$$

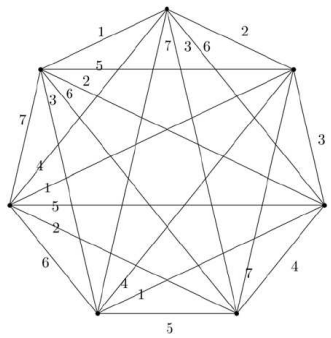
$$\left(\sqrt{\frac{b+c}{a}} - \sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{c+a}{b}} - \sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{a+b}{c}} - \sqrt{2}\right)^2 \geqslant 0.$$

Како је последња једнакост тачна за све вредности a, b, c, важи и дата неједнакост. Једнакост важи ако и само ако је $\frac{b+c}{1a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c} = 2$, што заједно са условом задатка $a+b+c = 1$ даје $a = b = c = \frac{1}{3}$.

995. Нека је C пресечна тачка правих MN и AB (слика). Тада је $CN^2 = CB \cdot AB$ и $CM^2 = CB \cdot AB$, па је $CM = CN$. Како је $MN = 2AM$, то је $CM = CN = AM$, па је троугао AMS једнакокрак и важи $\measuredangle NMB = \measuredangle CMB = \measuredangle BCM = 45^\circ$.



Сл. уз зад. 995



Сл. уз зад. 996

996. (а) Не. Претпоставимо, супротно, да може. Посматрајмо неку боју, рецимо плаву. Сваки плави конац је страница 4 троугла који се могу формирати од 6 тачака (ексера). Како постоји 10 парова боја који се могу формирати од преосталих 5 боја, закључујемо да постоје најмање 3 плава конца. Исто можемо закључити за сваку од преосталих 5 боја. То значи да мора бити најмање 18 конаца на табли. Међутим, како 6 ексера на табли спаја 15 конаца, закључујемо да n не може бити једнако 6.
(б) Да. Поставимо ексере на табли тако да формирају правилан седмоугао и нека је сваки конац који спаја суседна темена тог седмоугла обојен једном од 7 различитих боја. Посматрајмо сваки ексер као теме седмоугла, а сваки конац затегнимо да представља страницу или дијагоналу седмоугла. Конац који представља дијагоналу седмоугла обојићемо оном бојом којом је обојен конац који представља страницу паралелну са том дијагоналом (види слику). Директном провером следи да је за $n = 7$ могуће да за сваке три различите боје постоје 3 ексера која су спојена концима у те три боје.

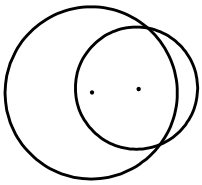
997. Свођење по модулу 3 даје $5^c \equiv 1 \pmod 3$, дакле $2 \mid c$. Покажимо да је и d парно. Претпоставимо супротно: $2 \nmid d$; тада је $7^b \equiv 7 \pmod 8$. Тако добијамо $2^a 3^b = 7^d - 5^c \equiv 7 - 1 = 6 \pmod 8$, па $4 \nmid 2^a 3^b$, одакле је $a = 1$. Међутим, тада је $2^a \cdot 3^b \equiv 1, 4 \pmod 5$, док је $7^d \equiv 2, 3 \pmod 5$, контрадикција.
Означимо $c = 2e$ и $d = 2f$. Полазна једначина постаје $(7^f + 5^e)(7^f - 5^e) = 2^a 3^b$. Како је $(7^f + 5^e, 7^f - 5^e) = 2$, имамо следеће могућности:
(i) $\begin{cases} 7^f + 5^e = 2 \cdot 3^b \\ 7^f - 5^e = 2^{a-1} \end{cases}$. Тада је $7^f = 3^b + 2^{a-2}$ и $5^e = 3^b - 2^{a-2}$. Прва једначина по модулу 3 нам даје $2^{a-2} \equiv 1 \pmod 3$ (тј. $2 \mid a \geqslant 4$), а онда из друге једначине добијамо $5^e \equiv 2 \pmod 3$, тј. $2 \nmid e$. Међутим, тада је $7^f \equiv 5^e \equiv 5 \pmod 8$, што је немогуће.
(ii) $\begin{cases} 7^f + 5^e = 2^{a-1} \\ 7^f - 5^e = 2 \cdot 3^b \end{cases}$. Очигледно је $a \geqslant 5$, па $7^f \equiv -5^e \equiv 3, 7 \pmod 8$, одакле $2 \nmid f$ и $5^e \equiv 1 \pmod 8$, тј. $2 \mid e$. Тада је $2 \cdot 3^b \equiv 7^f - 5^e \equiv 7 - 1 = 6$, одакле $2 \nmid b$. Међутим, тада је $7^f = 2^{a-2} + 3^b \equiv 3 \pmod 8$, што је немогуће.
(iii) $\begin{cases} 7^f + 5^e = 2^{a-1} 3^b \\ 7^f - 5^e = 2 \end{cases}$. По модулу 5, из друге једначине добијамо $f \equiv 1 \pmod 4$ и одатле $7^f \equiv 7 \pmod{25}$. Тада је $5^e = 7^f - 2 \equiv 5 \pmod{25}$, одакле следи $f = 1$ и даље $(a, b, c, d) = (3, 1, 2, 2)$.

2013. година

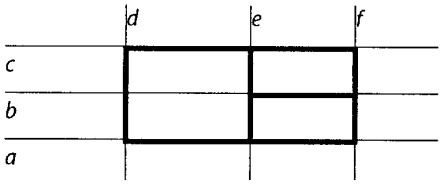
998. Највећи број девете стотине је 900, а најмањи број пете стотине је 401. Дакле, $900 - x = 401$, одакле је $x = 499$, па је тражени број 499.

999. Лаза има $(44 - 8) : 2 = 18$ кликера. Саша има $18 + 8 = 26$ кликера. Укупно имају $48 + 26 = 74$ кликера.

1000. Напомена: растојање између центара кружница које ученици нацртају мора бити мање од 2 cm (слика).



Сл. уз зад. 1000



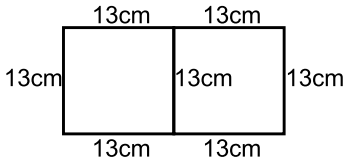
Сл. уз зад. 1001

1001. Праве које одређују странице ових правоугаоника дате су на слици. Нормалне праве су: a и d, a и e, a и f, b и d, b и e, b и f, c и d, c и e, c и f.

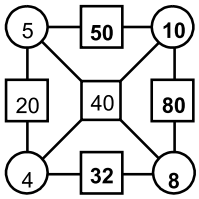
1002. Римски бројеви које се могу записати су: I, II, III, IX, X, XI, XII, XIII, XIX, XX, XXI, XXII, XXIII, XXIX, XXX, XXXI, XXXII, XXXIII. Укупно 18 бројева.

1003. $408723 - 403728 = 4995$, $804732 - 304782 = 499950$, $480273 - 430278 = 49995$. Највише се смањио број 804732 и то за 499950.

1004. Страница квадрата је $52\,\text{cm} : 4 = 13\,\text{cm}$. Странице почетног правоугаоника су 26 cm и 13 cm па је његов обим 78 cm (слика).



Сл. уз зад. 1004



Сл. уз зад. 1007

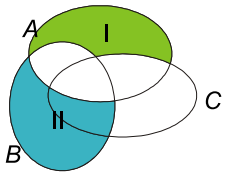
1005. $x = 3210$, $y = 1023$. $(x + y) - (x - y) = 2046$.

1006. $2012 : 4 = 503$, $2013 : 3 = 671$, $2012 : 4 + 2013 : 3 = 1174$.

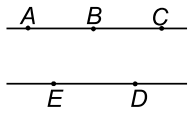
1007. В. слику.

1008. а) $5050050 : 50 - 45 = 101001 - 45 = 100956$. Број за 12 мањи од добијеног броја је 100944.
б) $(36 \cdot 15) : 20 = 27$. Број $36 \cdot 15$ је 27 пута већи од броја 20.

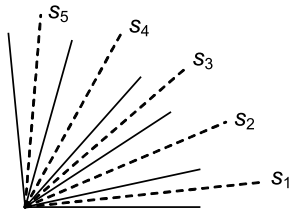
1009. Осенчени део представља унију двеју области (слика). Како област II можемо представити као $B \setminus A$, а област I као $A \setminus (B \cup C)$, имамо да је осенчени део $(B \setminus A) \cup (A \setminus (B \cup C))$.



Сл. уз зад. 1009



Сл. уз зад. 1011



Сл. уз зад. 1015

1010. а) $\alpha = 2013' = 33°33'$. $90° - 33°33' = 56°27'$.
б) $180° - 33°33' = 146°27'$.

1011. Дужи: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE (слика). Троуглови: ABE, ABD, BCE, BCD, ACE, ACD, EDA, EDB, EDC.

1012. а) Ако 6 малих коцки имају тачно по једну обојену страну, онда се по једна таква мала коцка налази на свакој страни велике коцке, па је ивица велике коцке $3\,\mathrm{cm}$. Површина велике коцке је $54\,\mathrm{cm}^2$.
б) Тачно једна мала коцка нема обојену ниједну страну.

1013. $x = -6$, $y = 5$, $|x-1| - |y-2| = 4$.

1014. Да би број био дељив са 15 мора бити дељив и са 3 и са 5. Како је дељив са 5, то је $b = 0$ или $b = 5$. Ако је $b = 0$, тада је $2+0+1+a+3+0 = 6+a$, па је $a \in \{3, 6, 9\}$. Ако је $b = 5$, тада је $2+0+1+a+3+5 = 11+a$, па је $a \in \{1, 4, 7\}$. Дакле, решења су: $(a, b) \in \{(3, 0), (6, 0), (9, 0), (1, 5), (4, 5), (7, 5)\}$.

1015.

$$\measuredangle(s_3, s_4) = \frac{\alpha_3}{2} + \frac{\alpha_4}{2} = \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} = \frac{40°}{2} = 20° \quad \text{(слика)},$$

$$\begin{aligned}\measuredangle(s_2, s_5) &= \frac{\alpha_2}{2} + \alpha_3 + \alpha_4 + \frac{\alpha_5}{2} = \frac{\alpha_2}{2} + \left(\frac{\alpha_3}{2} + \frac{\alpha_3}{2}\right) + \left(\frac{\alpha_4}{2} + \frac{\alpha_4}{2}\right) + \frac{\alpha_5}{2} \\ &= \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} + \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} + \frac{\alpha_4 + \alpha_5}{2} = 20° + 20° + 20° = 60°.\end{aligned}$$

1016. а) Најмањи збир одређују три негативна разломка и најмањи од позитивних разломака. То су: $\frac{2}{5}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}, -\frac{7}{8}$.
б) Највећи збир одређују три позитивна разломка и највећи од негативних разломака. То су: $\frac{2}{5}, \frac{5}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}$.

1017. $2013 = 1 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 61$, па је $2013 = 1 \cdot 2013 = (-1) \cdot (-2013) = 3 \cdot 671 = (-3) \cdot (-671) = 11 \cdot 183 = (-11) \cdot (-183) = 33 \cdot 61 = (-33) \cdot (-61)$.

1018. $-\frac{7}{10}$.

1019. $2{,}\overline{3} = 2\frac{1}{3}$, $0{,}\overline{6} = \frac{2}{3}$, $1{,}\overline{6} = 1\frac{2}{3}$. Решења једначине $x^2 - 2{,}\overline{3} = 1{,}\overline{6}$ су $x = 2$ и $x = -2$, а једначине $0{,}\overline{6}\,y^2 = 1{,}5$ су $y = \frac{3}{2}$ и $y = -\frac{3}{2}$.

1020. Дужа страница једног правоугаоника је $3\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$ јер је $\dfrac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$. Страница мањег квадрата је $2\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$, а већег $4\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$, па су тражене површине, редом, $8\,\mathrm{cm}^2$ и $32\,\mathrm{cm}^2$.

1021. $CP = \dfrac{CA}{2} = 5\,\mathrm{cm}$. $AP^2 = CA^2 - CP^2$, $AP = 5\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$. $BP = \dfrac{BC}{2}$, $BC^2 = BP^2 + CP^2$, $BP = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{cm}$, $BC = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$. Сада је $O = 10 \cdot (1+\sqrt{3})\,\mathrm{cm}$, $P = \dfrac{50\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{cm}^2$.

1022. Цифре броја могу бити: а) 2 и 2012 нула или б) 1, 1 и 2011 нула.
а) Само један број задовољава услов и то 200 ... 00.
б) Цифра 1 мора бити на првом месту, а друга јединица може бити на било ком од преосталих 2012 места, па у овом случају има 2012 бројева.
Дакле, укупно има 2013 бројева.

1023. Дужина хипотенузе правоуглог троугла је $10\,\mathrm{cm}$. Центар описаног круга O је на средини хипотенузе и његова удаљеност од темена је $5\,\mathrm{cm}$. Правоугли троуглови AOM, BOM и COM су подударни (једнаке по две катете) и важи $AM^2 = AO^2 + OM^2$, па је $AM = \sqrt{41}\,\mathrm{cm}$, тј. тражена удаљеност је од свих темена $\sqrt{41}\,\mathrm{cm}$.

1024. а) $AB, AC, AD, BC, BD, CD, EF, EG, EH, FG, FH, GH$.
б) AE, BF, CG, DH.

1025. Укупна сума новца коју је Пера дао за чоколаде је $15\cdot 110 + 20\cdot 200 + 10\cdot 220 = 7850$. Дакле, 7850 динара. Укупна маса свих чоколада које је купио је $15 \cdot 0{,}1\,\mathrm{kg} + 20 \cdot 0{,}2\,\mathrm{kg} + 10\cdot 0{,}25\,\mathrm{kg} = 8\,\mathrm{kg}$. Означимо са x средњу вредност цене једног килограма чоколаде. Сада је $7850 = 8 \cdot x$, па је $x = 981{,}25$ динара.

1026. $y = \dfrac{2a-3}{4}$, $\dfrac{2a-3}{4} \geqslant 2$, $a \geqslant \dfrac{11}{2}$.

1027. Троуглови SCA и SBD су слични ($\measuredangle ASC = \measuredangle DSB$ као унакрсни и $\measuredangle ACS = \measuredangle DBS$ као периферијски над AD). Сада је $AC : DB = SC : SB$, па је $SB = 4{,}8\,\mathrm{cm}$. Такође је $AC : DB = AS : DS$, па је $DS = 6{,}4\,\mathrm{cm}$. Сада је $AB = AS + SB = 12{,}8\,\mathrm{cm}$ и $CD = CS + SD = 12{,}4\,\mathrm{cm}$.

1028. ММ је број четврте десетице, па је ММ = 33. Како је збир два двоцифрена броја троцифрен број, то је Л = 7 или Л = 8 или Л = 9. Провером добијамо да је Л = 9, па сабирање гласи $33 + 99 = 132$.

1029. Филм је почео у 20 сати и 15 минута. Филм се завршио у 21 сат и 45 минута.

1030. Дужина коју лопта пређе у свакој од 10 секунди дата је у табели.

1. сек.	2. сек.	3. сек.	4. сек.	5. сек.	6. сек.	7. сек.	8. сек.	9. сек.	10. сек.
3 m	4 m	5 m	6 m	7 m	8 m	9 m	10 m	11 m	12 m

Дакле, за 10 секунди лопта је прешла укупно $3+4+5+6+7+8+9+10+11+12 = 75$ метара.

1031.

+	150	229	326
317	467	546	643
500	650	729	826
208	358	437	534

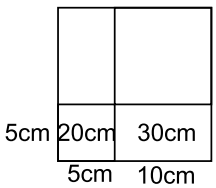
1032. Како је $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 6 = 1 \cdot 3 \cdot 4$, то цифре троцифрених бројева чији је производ цифара 12 могу бити 2, 2, 3 или 1, 2, 6 или 1, 3, 4. Тражени бројеви су: 232, 322, 126, 162, 216, 612, 134, 314.

1033. Борис је замислио број $43598 : 2 = 21799$. Тражени број је $21799 \cdot 12 = 261588$.

1034. Ако је маса једне празне чаше x, тада је $2 \cdot x + 60 = 300$, одакле је $x = 120$, тј. маса празне чаше је 120 грама. Како је маса чаше и воде у њој 300 грама, маса воде у чаши је 180 грама.

1035. $4 = 4 + 0 + 0 + 0 = 3 + 1 + 0 + 0 = 2 + 2 + 0 + 0 = 2 + 1 + 1 + 0 = 1 + 1 + 1 + 1$. Дакле, цифре тражених бројева су 4, 0, 0, 0 или 3, 1, 0, 0 или 2, 2, 0, 0 или 2, 1, 1, 0 или 1, 1, 1, 1, а тражени бројеви су: 4000, 1300, 1030, 1003, 3100, 3010, 3001, 2200, 2020, 2002, 2110, 2101, 2011, 1012, 1021, 1102, 1120, 1210, 1201, 1111.

1036. Обим једног квадрата је 20 cm, па је страница тог квадрата 5 cm. Обим правоугаоника је 30 cm, а како је једна страница правоугаоника једнака страници квадрата, то је друга страница правоугаоника 10 cm (види слику). Дакле, страница почетног квадрата је 15 cm, а обим 60 cm.



Сл. уз зад. 1036

$$\begin{array}{r} 1\ 5\ 6 \\ 3\ 2\ 7 \\ +\ 4\ 8\ 0 \\ \hline 9\ 6\ 3 \end{array}$$

Сл. уз зад. 1037

1037. Једно решење је дато на слици.

1038. Последња цифра производа је 0. Даље дешифрујемо $*7 \cdot 3 = *0*$. Последња цифра овог производа је 1. Број $*01$ треба да је дељив са 3 и да количник буде двоцифрен број $*7$. Те услове задовољава 201. Дакле, решење је $67 \cdot 30 = 2010$.

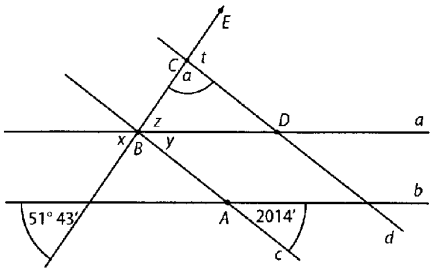
1039. Најмањи разломак је $\frac{1}{9}$. Највећи разломак је $\frac{8}{3}$. Збир је $\frac{1}{9} + \frac{8}{3} = \frac{25}{9}$.

1040. С обзиром да је $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$, то ивице квадра (у cm) могу бити: 2, 5, 7 или 1, 10, 7 или 1, 5, 14 или 1, 2, 35, па су површине квадра (у cm^2), редом, $2 \cdot (2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 5 \cdot 7) = 118$; $2 \cdot (10 + 7 + 10 \cdot 7) = 174$; $2 \cdot (5 + 14 + 5 \cdot 14) = 178$; $2 \cdot (2 + 35 + 2 \cdot 35) = 214$. Највећа површина квадра који задовољава дате услове је $214\,\text{cm}^2$.

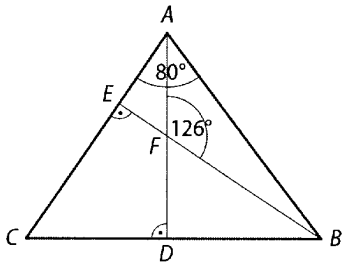
1041. Означимо углове x, y, z и t и тачке A, B, C, D и E, као на слици на следећој страни. $x = 51°43'$, $y = 2014' = 33°34'$ (углови са паралелним крацима). Тада је $z = x$ (унакрсни углови) и $\measuredangle ABC = y + z = 85°17' = \measuredangle DCE = t$ (углови са паралелним крацима). Углови t и α су упоредни, па је $\alpha = 180° - 85°17' = 94°43'$.

1042. Како 2 оловке и 3 свеске коштају 110 динара, то 4 оловке и 6 свезака коштају 220 динара. Како 4 оловке и 7 свезака кошта 250 динара, то 1 свеска кошта 30 динара. Сада добијамо да једна оловка кошта 10 динара. Дакле, 8 оловака и 8 свезака коштају 320 динара.

1043. а) Број је дељив са 5 ако се завршава цифром 0 или 5, па закључујемо да се на последњем месту могу наћи 2 цифре. Како цифре могу да се понављају при запису броја, на првом месту може се наћи 9 цифара (све осим 0), на другом 10 и на трећем 10, па таквих бројева има $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 1800$.



Сл. уз зад. 1041



Сл. уз зад. 1045

б) Ако су све цифре различите, разликоваћемо 2 случаја: 1) На последњем месту је 0 – таквих бројева има $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 = 504$; 2) На последњем месту је 5 – таквих бројева има $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 = 448$. Дакле, укупно имамо 952 четвороцифрена броја дељива са 5 чије су све цифре различите.

1044. Хипотенуза је 18 cm, тежишна дуж која одговара хипотенузи је 9 cm. Ортоцентар правоуглог троугла је у темену правог угла, а центар описане кружнице у средишту хипотенузе. Растојање тежишта од: а) ортоцентра је 6 cm; б) центра описаног круга је 3 cm.

1045. $\measuredangle AFB = \measuredangle EFD = 126^\circ$ (слика). $\gamma = \measuredangle ACB = 180^\circ - \measuredangle EFD = 54^\circ$. $\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 46^\circ$. Како је $\alpha > \gamma > \beta$, то је $a > c > b$.

1046. Лука је укуцао број $\overline{4ab4}$, па имамо да је $\overline{4ab4} = 54 \cdot \overline{ab}$. Како је $\overline{4ab4} = 4004 + 10 \cdot \overline{ab}$, имамо $4004 + 10 \cdot \overline{ab} = 54 \cdot \overline{ab}$, тј. $4004 = 44 \cdot \overline{ab}$, одакле је $\overline{ab} = 91$.

1047. Поделимо квадрат правим које су паралелне страницама квадрата на мање квадрате странице 1 cm. На тај начин добијамо $44 \cdot 44 = 1936$ мањих квадрата. 1936 тачака можемо распоредити тако да у сваком од посматраних квадрата буде тачно по једна тачка. Ма како распоредили остале тачке, свака ће бити у квадрату у коме је бар још једна тачка (од првобитно распоређених 1936 тачака), па следи тврђење задатка.

1048. $x\sqrt{2} - y\sqrt{2} = \sqrt{18}$, $(x - y)\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$, $x - y = 3$.

$$\frac{x\sqrt{3}}{3} - \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{3}}{3} - \frac{y\sqrt{3}}{3} = (x - y) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$$

1049. $AD = 2AB = 2\,\text{cm}$, $BD = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}\,\text{cm}$, $BC = CD = \dfrac{\sqrt{6}}{2}\,\text{cm}$, $DE = 2DF = 4\,\text{cm}$, $EF = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$. $P_{BCD} = \dfrac{3}{4}\,\text{cm}^2$, $P_{ABD} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\text{cm}^2$, $P_{ADFH} = 4\,\text{cm}^2$, $P_{HGF} = \sqrt{3}\,\text{cm}^2$, $P_{EFD} = 2\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Дакле, $P = \left(\dfrac{19}{4} + \dfrac{7\sqrt{3}}{2}\right)\text{cm}^2$.

1050. $\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - (10b + a) = 9a - 9b = 9 \cdot (a - b) = n^2$. Како је 9 квадрат броја 3, то и $a - b$ мора бити квадрат целог броја, а то је могуће за $a - b \in \{1, 4\}$.

a	9	8	7	6	5	4	3	2	9	8	7	6	5
b	8	7	6	5	4	3	2	1	5	4	3	2	1
$a - b$	1	1	1	1	1	1	1	1	4	4	4	4	4

Дакле, тражени бројеви су: 98, 87, 76, 65, 54, 43, 32, 21, 95, 84, 73, 62 и 51.

1051. Број 4^n се завршава цифром 4 уколико је n непаран број, а цифром 6 ако је n паран број. Број 5^n се завршава цифром 5, а 6^n се завршава цифром 6. Ако је n непаран број, онда се збир $4^n + 5^n + 6^n$ завршава цифром 5 $(4 + 5 + 6 = 15)$, а ако је n паран број, онда се $4^n + 5^n + 6^n$ завршава цифром 7 $(6 + 5 + 6 = 17)$.

1052. Како је $2^2+3^2+4^2 = 29 = 25+4 = 5^2+2^2$, закључујемо да је страница траженог троугла једнака хипотенузи правоуглог троугла чије су катете 5 cm и 2 cm. Сада лако конструишемо квадрат чија нам је страница позната.

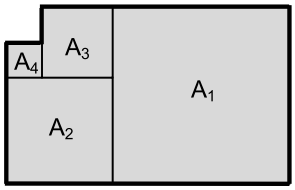
1053. Ако је $x \geqslant 0$, имамо $|5x - |4x + |3x - |2x + |x|||| = |5x - |4x + |3x - |2x + x|||| = |5x - |4x + |3x - 3x||| = |5x - |4x|| = |5x - 4x| = |x| = x$, па је $x = 2013$.
Ако је, $x < 0$ имамо $|5x - |4x + |3x - |2x + |x|||| = |5x - |4x + |3x - |2x - x|||| = |5x-|4x+|3x-|x|||| = |5x-|4x+|3x+x||| = |5x-|4x+|4x||| = |5x-|4x-4x|| = |5x| = -5x$.
Сада је $-5x = 2013$, $x = -\dfrac{2013}{5}$.

1054. Можемо да саставимо 4 различите призме: тространу висине 20 cm чија је основа једнакокрако-правоугли троугао, па је површина $(225+100\sqrt{2})\,\mathrm{cm}^2$; четворострану висине 10 cm чија је основа квадрат, па је површина $250\,\mathrm{cm}^2$; четворострану висине 10 cm чија је основа паралелограм, па је површина $(150+100\sqrt{2})\,\mathrm{cm}^2$; тространу висине 10 cm чија је основа једнакокрако-правоугли троугао катете $5\sqrt{2}$ cm, па је површина $(150+100\sqrt{2})\,\mathrm{cm}^2$. Највећу површину има тространа призма висине 20 cm.

1055. Бројеви дељиви са 12 су: 12, 24, 36, 48, 60, ... Број 12 има 6 делилаца, 24 има осам, 36 има девет, 48 има десет, а 60 има дванаест, и то су: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 и 60. Дакле, тражени број је 60.

1056. Ако је површина $P(B_1TC) = 3$, онда је $P(B_1BC) = 9$ јер је $3TB_1 = B_1B$ и одговарајуће висине су им једнаке. Даље је $P(ABC) = 2P(B_1BC) = 18$ јер је $AC = 2B_1C$ и одговарајуће висине су им једнаке.

1057. У току једне године постоје 4 парна месеца (02, 04, 06 и 08). У једном месецу постоји 9 парних датума (02, 04, 06, 08, 20, 22, 24, 26 и 28). У трећем миленијуму постоје 124 парне године $(5\cdot5\cdot5-1)$. Према томе, укупан број парних датума је $124\cdot9\cdot4 = 4464$.



Сл. уз зад. 1059

1058. Ружица је замислила број 10 100.

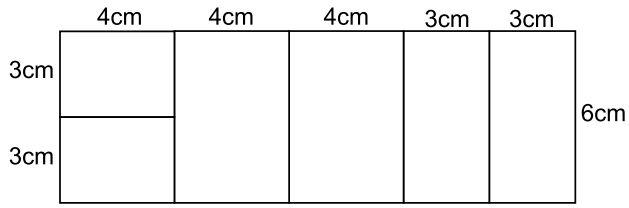
1059. Означимо квадрате као на слици. Дужина странице квадрата A_1 је 10 cm, а квадрата A_2 је 6 cm. Дужина странице квадрата A_3 је $10\,\mathrm{cm} - 6\,\mathrm{cm} = 4\,\mathrm{cm}$, а квадрата A_4 је $6\,\mathrm{cm} - 4\,\mathrm{cm} = 2\,\mathrm{cm}$. Површина дате фигуре је $156\,\mathrm{cm}^2$, а обим 52 cm.

1060. За нумерацију првих 99 страна цифра 1 је употребљена 20 пута. За нумерацију страна од 100 до 109 цифра 1 је употребљена 11 пута (укупно 31 пут). За нумерацију страна од 110 до 119 цифра 1 је употребљена 21 пут (укупно 52 пута). У свакој следећој десетици друге стотине цифра 1 се употребљава 11 пута: 120–129 – укупно 63 пута; 130–139 – укупно 74 пута; 140–149 – укупно 85 пута; 150–159 – 96 пута. Остаје да се цифра 1 употреби још 4 пута, и то за бројеве 160, 161 и 162, па књига има 162 стране.

1061. Површина квадра је једнака површини картона. Дакле, $2\cdot(6\cdot4+6\cdot3+4\cdot3) = 6\cdot x$, где смо са x обележили тражену дужину друге странице тог картона. Добија се $x = 18$ cm (слика).

1062. а) $192 : 64 \cdot 8 + 16 - 32 = 8$; б) $192 \cdot 64 + 32 - 16 : 8 = 12318$.

1063. Вредност израза је 26,3, па је његова вредност 5 пута већа од датог разломка.



Сл. уз зад. 1061

1064. $\dfrac{AAA}{AB} = A \cdot A$, $\dfrac{A \cdot 111}{AB} = A \cdot A$, $\dfrac{111}{AB} = A$, па је $111 = A \cdot AB$. Како је $111 = 3 \cdot 37$, то је $A = 3$ и $B = 7$, па је $\dfrac{333}{37} = 3 \cdot 3$.

1065. Страница квадрата је 1,5 cm, па је једна страница правоугаоника 2,7 cm. Из обима добијамо да је друга страница правоугаоника 1,3 cm. Површина квадрата је 2,25 cm^2, а површина правоугаоника 3,51 cm^2. Дакле, већа је површина правоугаоника.

1066. $6048 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$. Како се тражи најмањи број, то можемо груписати: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ и $3 \cdot 3 = 9$. Преостају фактори 2, 2 и 3 од којих можемо формирати бројеве 2 и 6 или 4 и 3. Најмањи број чији је производ цифара 6048 је 26 789.

1067. У подне сатна и минутна казаљка се поклапају. Минутна казаљка се за 1 минут помери за $360° : 60 = 6°$. За 14 минута помери се за $84°$. Сатна казаљка се за 1 минут помери за $30'$, а за 14 минута за $7°$. Дакле, угао између казаљки ће бити $84° - 7° = 77°$.

1068. Како је збир непаран, то је један сабирак паран, а други непаран. Дакле, или је $p = 2$ или $q = 2$.
1) Ако је $p = 2$, онда је $497q^2 = 2009$, па q није цео број.
2) Ако је $q = 2$, онда је $p^2 = 25$, тј. $p = 5$.
Директно се проверава да $p = 5$ и $q = 2$ јесте решење.

1069. Како је $\overline{xyxyx}$ дељиво са 3, то је $3x + 2y$ дељиво са 3, па је и y дељиво са 3, тј. $y \in \{3, 6, 9\}$. Како је $\overline{yxyxyxy}$ дељиво са 18, то y мора бити паран број, па је $y = 6$, и $4y + 3x = 24 + 3x$ дељиво са 9, па је $x \in \{1, 4, 7\}$. Дакле, решења су $(x, y) \in \{(1, 6), (4, 6), (7, 6)\}$.

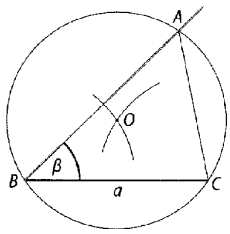
1070. Нека је на слици дат троугао ABC који задовољава услове задатка. Центар описане кружнице једнако је удаљен од темена троугла и можемо га одредити у пресеку кружница са центрима у теменима B и C чији су полупречници по 3 cm (слика). Конструкцију изводимо на следећи начин:

а) на произвољној правој конструишемо страницу BC;

б) у тачки B конструишемо угао од $45°$;

в) центар O конструишемо на претходно описани начин;

г) тачку A добијамо у пресеку описане кружнице троугла и конструисаног крака.

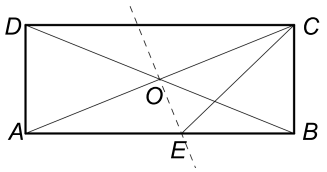


Сл. уз зад. 1070

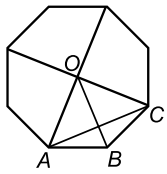
1071. $\dfrac{1}{3} < \dfrac{2}{1-x} < \dfrac{3}{4}$, $\dfrac{6}{18} < \dfrac{6}{3(1-x)} < \dfrac{6}{8}$, одакле је $8 < 3(1-x) < 18$, па је $\dfrac{8}{3} < 1 - x < 6$ тј. $-1\dfrac{2}{3} > x > -5$. Дакле, $x \in \{-2, -3, -4\}$.

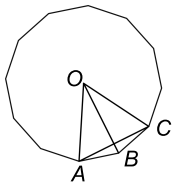
1072. Посматрајмо правоугаоник $ABCD$. Симетрала дијагонале пролази кроз пресек дијагонала и сече страницу AB у тачки E. Троугао EBC је једнакокрак и $\measuredangle ECB =$

$\measuredangle CEB = 45°$. Троугао ACE је једнакокрак па је $\measuredangle ACE = 22°30'$. Како је $\measuredangle ACB = \measuredangle ACE + \measuredangle ECB = 67°30'$ и троугао OCB једнакокрак, то је тражени угао $45°$.



Сл. уз зад. 1072



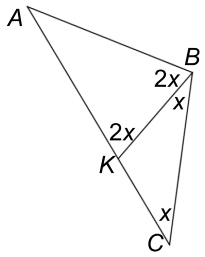


Сл. уз зад. 1074

1073. $1 + x^2 - y^2 - 2x = 0$, $x^2 - 2x + 1 = y^2$, $y^2 = (x-1)^2$. Како су x и y природни бројеви, то је $y = x - 1$. Сада је $(y-x)^{2013} = (x-1-x)^{2013} = -1$.

1074. Правилни осмоугао се састоји од четири подударна делтоида (прва слика), па је $P_8 = 4P_d = 4 \cdot \dfrac{d_1 d_2}{2} = 2d_1 d_2$, где су d_1 и d_2 дијагонале делтоида. Једна дијагонала једнака је полупречнику описане кружнице око осмоугла, $d_1 = OB = r$, а друга $d_2 = AC = r\sqrt{2}$. $P_8 = 2d_1 d_2 = 2r \cdot r\sqrt{2} = 2r^2\sqrt{2}$. Слично, површина правилног дванаестоугла (друга слика) је $P_{12} = 6P'_d = 6 \cdot \dfrac{d'_1 d'_2}{2} = 3d'_1 d'_2$, $d'_1 = r$, $d'_2 = r$. $P_{12} = 3d'_1 d'_2 = 3r \cdot r = 3r^2$. Однос површина ових многоуглова је $\dfrac{P_8}{P_{12}} = \dfrac{2r^2\sqrt{2}}{3r^2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

1075. $\dfrac{3n^2+15}{n+2} = \dfrac{3n^2-12+27}{n+2} = \dfrac{3(n-2)(n+2)}{n+2} + \dfrac{27}{n+2} = 3(n-2) + \dfrac{27}{n+2}$. Вредност почетног разломка је цео број када је $\dfrac{27}{n+2}$ цео број. Дакле, $n + 2 \in \{-27, -9, -3, -1, 1, 3, 9, 27\}$, па је $n \in \{-29, -11, -5, -3, -1, 1, 7, 25\}$.



Сл. уз зад. 1076

1076. Постоје два тражена многоугла.

1) Нека је $AB = AK$ и $BK = KC$. Означимо углове као на слици. Како је $\measuredangle BAC = \measuredangle BCA$, то је $180° - 4x = x$, па је $x = 36°$. Дакле, унутрашњи угао је $3x = 108°$, па је реч о правилном петоуглу.

2) Ако је $AK = BK$ и $CK = KB$ тада је $\measuredangle ABC = 90°$, па је тражени многоугао квадрат.

1077. Милашин. Првим потезом Милашин износи 3 сулундара. У даљем току игре, Милашин увек износи по 2 сулундара. На тај начин после сваког његовог потеза број сулундара је дељив са 3, док после сваког Радашиновог потеза број преосталих сулундара при дељењу са 3 даје остатак 2. Јасно је онда да ће последњи сулундар изнети Милашин.

1078. Права кроз C паралелна са AD сече основицу AB у средишту K. По Талесовој теореми, та дуж полови и дуж BE, а како је паралелна са AD, она је и нормала на BE. Дакле, CK је симетрала дужи BE, па је $CE = CB$.

1079. Обележимо са a, b, h и H, редом, дужине основне ивице, бочне ивице, апотеме и висине пирамиде. Тада из бочне стране пирамиде (једнакокраког троугла) следи да је $a : h = 6 : 4$. Нека је $a = 6t$, $h = 4t$. Тада је $4t + 6t + 4t = 7\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$, односно $14t = 14$, па

је $t = 1$. Дакле, основна ивица ове пирамиде је 6 cm, а апотема 4 cm. За висину пирамиде важи $H^2 = h^2 - (a/2)^2$, па је $H = \sqrt{7}\,\mathrm{cm}$. Тражена запремина је $V = \dfrac{6^2\sqrt{7}}{3} = 12\sqrt{7}\,\mathrm{cm}^3$.

1080. Означимо дужину укупног пута који су прешле са x. Пут који су обе прешле када је прва прешла петину пута, а друга 1300 метара, јесте $\dfrac{1}{5}x + 1300$. Пут који им је остао да пређу до сусрета је $x - \left(\dfrac{1}{5}x + 1300\right)$. Како је ово растојање три пута дуже од пута који је Стана прешла, имамо да је $x - \left(\dfrac{1}{5}x + 1300\right) = \dfrac{3}{5}x$. Решавањем ове једначине долазимо до траженог растојања од 6,5 km.

1081. Графици функција имају једну заједничку тачку, па следе једнакости $3x+a = x+1$, $-2x + b = x + 1$, односно $2x = 1 - a$, $3x = b - 1$. Сада је $x = \dfrac{1-a}{2}$, $x = \dfrac{b-1}{3}$, одакле је $\dfrac{1-a}{2} = \dfrac{b-1}{3}$. Дакле, тражена веза је $3a + 2b = 5$, тј. $a = \dfrac{5-2b}{3}$.

1082. Како је $8x + 3y = 2013$, то је $8x = 3(671 - y)$, па је $x = 3k$, $k \in \mathbf{Z}$. Сада је $24k = 3(671 - y)$, одакле је $y = 671 - 8k$. Како је $x_n > 0$ и $y_n > 0$, то је $k > 0$ и $671 - 8k > 0$, па је $0 < k < 83\dfrac{7}{8}$, тј. $1 \leqslant k \leqslant 83$. Дакле, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 3 + 6 + \cdots + 3 \cdot 83 = 3 \cdot (1 + 2 + \cdots + 83) = 10458$.

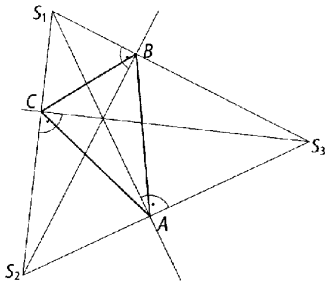
1083. Нека Бранко у трци, од старта до циља, направи n корака дужине d. Тада је пут који пређе Бранко једнак nd. За исто време Ратко пређе растојање $(1 - 0{,}15)n \cdot (1 + 0{,}15)d = (1 - 0{,}0225)nd = 0{,}9775\,nd$. Дакле, Бранко ће пре стићи на циљ.

1084. За један минут велика (минутна) казаљка направи угао од 6°, а мала (сатна) казаљка пређе угао од $0{,}5^\circ$. Нека је Бане почео да ради домаћи у 7 сати и t_1 минута. Тада је $180^\circ - 6^\circ \cdot t_1 = 30^\circ + 0{,}5^\circ \cdot t_1$, односно $180^\circ - 30^\circ = 6^\circ \cdot t_1 + 0{,}5^\circ \cdot t_1$, па је даље $150^\circ = 6{,}5^\circ \cdot t_1$ и $t_1 = \dfrac{300}{13}$ минута.

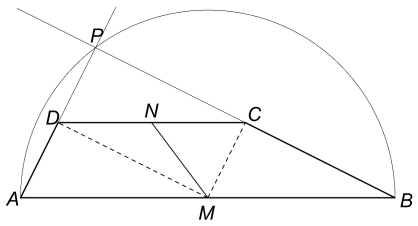
Сл. уз зад. 1084

Бане је завршио домаћи у 7 сати и t_2 минута. Тада је $6^\circ \cdot t_2 = 210^\circ + 0{,}5^\circ \cdot t_2$, односно $6^\circ \cdot t_2 - 0{,}5^\circ \cdot t_2 = 210^\circ$, па је даље $5{,}5^\circ \cdot t_2 = 210^\circ$ и $t_2 = \dfrac{420}{11}$ минута. Бане је на израду домаћег задатка из математике утрошио $t_2 - t_1 = \dfrac{420}{11} - \dfrac{300}{13} = 15\dfrac{15}{143}$ минута.

1085. а) Нека је S_1 пресек симетрала спољашњих углова код темена B и C. Тачка S_1 је једнако удаљена од правих AC и BC, односно BC и AB. Дакле, S_1 је једнако удаљена од правих AB и AC па је на симетрали унутрашњег угла код темена A троугла ABC.
б) Нека су S_1, S_2 и S_3 пресеци симетрала спољашњих углова троугла ABC (слика). Како су симетрале упоредних углова нормалне међусобно, то је симетрала унутрашњег угла BAC, која пролази кроз S_1 (из дела под а), нормална на праву одређену тачкама S_2 и S_3. Закључујемо да тражени троугао добијамо конструисањем висина из S_1, S_2 и S_3 на наспрамне странице троугла $S_1S_2S_3$ чија су подножја темена A, B и C.



Сл. уз зад. 1085



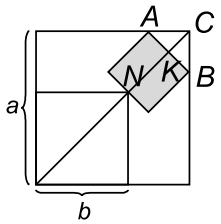
Сл. уз зад. 1087

1086. Збир цифара траженог броја може бити најмање 2014 и тај број може имати најмање 224 цифре. Сви ти бројеви пишу се или са 223 цифре 9 и једном цифром 7 или са 222 цифре 9 и две цифре 8. Како збир цифара новог броја мора бити 1, закључујемо да на последњем месту мора бити цифра 7, како бисмо добили број који се пише са једном цифром 1 и 224 цифре 0. Дакле, тражени број је $\underbrace{99\ldots9}_{223}7$.

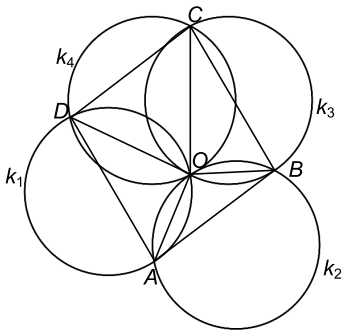
1087. Уочимо троугао MCD (слика). Тежишна дуж MN једнака је половини странице CD па је троугао правоугли, односно $\measuredangle CMD = 90°$. По условима у задатку следи $AM = MB = CD$ и AB (односно AM и MB) паралелно CD. Дакле, четвороуглови $AMCD$ и $MBCD$ су паралелограми. Следи да су праве AD и MC, односно BC и MD паралелне, па је $\measuredangle APB = 90°$, где смо са P обележили пресек правих одређених страницама BC и AD трапеза $ABCD$. Сада је троугао ABP правоугли, па је његова хипотенуза AB пречник њему описане кружнице, односно тачка P припада кружници чији је пречник AB, што је и требало доказати.

1088. За $a = 1$ број $(\overline{ab})^a$ је двоцифрен. За $a \geqslant 3$ је $(\overline{ab})^a \geqslant 1000$, односно није троцифрен, па је $a = 2$. Дакле, $(\overline{2b})^2 = \overline{bcb}$, тј. $(20+b)^2 = \overline{bcb}$. Цифре јединица бројева $\overline{2b}$ и $(\overline{2b})^2$ су једнаке, па је $b \in \{1, 5, 6\}$. Услов је једино испуњен за $b = 6$, одакле је $c = 7$. Тражени број је $26^2 = 676$.

1089. Површина квадрата K_1 је $(a-b)^2$. Странице квадрата K_2, паралелне су дијагоналама квадрата које полове одговарајуће странице квадрата (слика). Страница квадрата K_2 је дужине 16. Како је троугао ABC једнакокрако-правоугли, то је $AK = KC = KB = 8$. Сада је $NC = a\sqrt{2} - b\sqrt{2} = NK + KC = 24$, одакле је $a - b = 12\sqrt{2}$. Сада је $P_{K_1} = (a-b)^2 = (12\sqrt{2})^2 = 288$.



Сл. уз зад. 1089



Сл. уз зад. 1091

1090. Како је $|a-b|<2$, то је $a^2-2ab+b^2<4$. Додавањем $4ab$ левој и десној страни једнакости добијамо $(a+b)^2<4(1+ab)$. Како су a, b и c позитивни реални бројеви, то је $a+b<2\sqrt{1+ab}$. Аналогно се добија да је и $b+c<2\sqrt{1+bc}$ и $a+c<2\sqrt{1+ac}$. Сабирањем ових неједнакости добијамо да је

$$2(a+b+c)<2(\sqrt{ab+1}+\sqrt{bc+1}+\sqrt{ac+1}),$$

односно, $a+b+c<\sqrt{ab+1}+\sqrt{bc+1}+\sqrt{ac+1}$.

1091. Периферијски углови над подударним тетивама у подударним кружницама су међусобно подударни. Због тога важе једнакости (слика): $\measuredangle ABO=\measuredangle ADO$ (периферијски углови над тетивом AO у кружницама k_1 и k_2); $\measuredangle CBO=\measuredangle CDO$ (периферијски углови над тетивом CO у кружницама k_3 и k_4); $\measuredangle BAO=\measuredangle BCO$ (периферијски углови над тетивом BO у кружницама k_2 и k_3); $\measuredangle DAO=\measuredangle DCO$ (периферијски углови над тетивом DO у кружницама k_1 и k_4), из којих добијамо $\measuredangle ABC=\measuredangle ABO+\measuredangle CBO=\measuredangle ADO+\measuredangle CDO=\measuredangle ADC$, $\measuredangle BAD=\measuredangle BAO+\measuredangle DAO=\measuredangle BCO+\measuredangle DCO=\measuredangle BCD$. У четвороуглу $ABCD$ наспрамни углови су подударни, па је четвороугао $ABCD$ паралелограм.

1092. Разбијмо 16 темена правилног 16-угла на 4 подскупа од по 4 темена тако да су у оквиру сваког подскупа темена једног квадрата. Од уочених 9 темена бар 3 су из једног од претходно уочених скупова (Дирихлеов принцип). Како су уочене три тачке темена једног квадрата, оне су и темена једнакокракоправоуглог троугла.

1093. $(x,y)=(5,2)$.

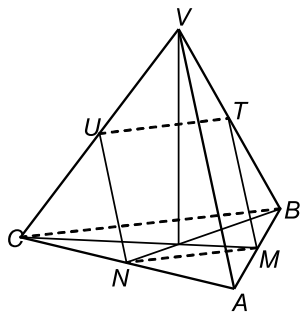
1094. $\dfrac{2^2+1}{2^2-1}+\dfrac{3^2+1}{3^2-1}+\cdots+\dfrac{2013^2+1}{2013^2-1}=\dfrac{2^2-1+2}{2^2-1}+\dfrac{3^2-1+2}{3^2-1}+\cdots+\dfrac{2013^2-1+2}{2013^2-1}$
$=1+\dfrac{2}{2^2-1}+1+\dfrac{2}{3^2-1}+\cdots+1+\dfrac{2}{2013^2-1}=2012+\dfrac{2}{2^2-1}+\dfrac{2}{3^2-1}+\cdots+\dfrac{2}{2013^2-1}$.
Како је $\dfrac{2}{n^2-1}=\dfrac{2}{(n-1)(n+1)}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}$, следи да се добијени збир може представити у облику $2012+\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2012}-\dfrac{1}{2014}\right)$, па сређивањем добијамо да је вредност израза једнака

$$2012+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}=2013+\frac{1}{2}-\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014},$$

одакле следи тражена неједнакост.

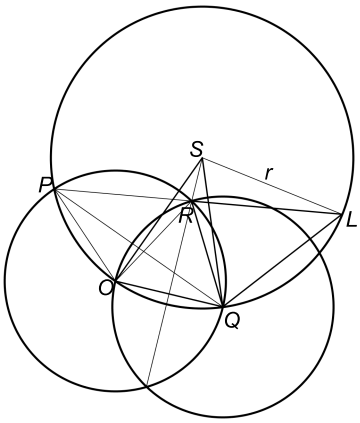
1095. Нека је раван пресека α. Права AV је пресек равни ABV и ACV. Из паралелности равни α са правом AV следи да раван α сече равни ABV и ACV по правим које су паралелне са правом AV и садрже средишта M и N ивица AB и AC, дакле по средњим линијама MT и NU троуглова ABV и ACV које су паралелне са AV (слика). Дужи MN и TU су средње линије троуглова ABC и VBC па су паралелне са BC. Четвороугао $MNUT$ је паралелограм и $MN=TU=6\,\mathrm{cm}$, $MT=NU=7\,\mathrm{cm}$. Троуглови CMV и BNV су подударни (ССС) па су њихове тежишне дужи MU и NT једнаке, односно дијагонале паралелограма $MNUT$ су једнаке. Следи да је пресек пирамиде и равни правоугаоник.

Тражени обим и површина су $O=26\,\mathrm{cm}$, $P=42\,\mathrm{cm}^2$.



Сл. уз зад. 1095

1096. Сваки такав једнакокраки троугао одређен је избором темена A и B основице, јер постоји само једно теме C које је једнако удаљено од A и B. Два темена између 2013 могу се изабрати на $2013 \cdot 1006$ начина. При томе је сваки од 671 једнакостраничних троуглова рачунат три пута, па је тражени број $2013 \cdot 1006 - 2 \cdot 671 = 671 \cdot 3016$.



Сл. уз зад. 1097

1097. Троугао QOR је једнакостраничан јер су му све три странице једнаке полупречнику кружнице m (слика). Дакле, $\measuredangle ROQ = 60°$, па је $\measuredangle RPQ = 30°$ (као одговарајући периферијски угао над истим луком кружнице m). Како је $\measuredangle RPQ = \measuredangle LPQ$ (периферијски углови над истим луком кружнице k), то је $\measuredangle LSQ = 60°$ (као централни над исти луком кружнице k). Зато је и троугао SQL једнакостраничан, па је $QL = r$. Из $\measuredangle LQS = \measuredangle RQO = 60°$, следи да је и $\measuredangle LQR = \measuredangle SQO$. Осим тога је $LQ = SQ$ и $QR = QO$, па су троуглови LQR и SQO подударни (СУС), одакле следи да је $LR = SO = r$.

1098. За $k = 4$ добија се $8100 = 90^2$. За произвољан природни број m важи

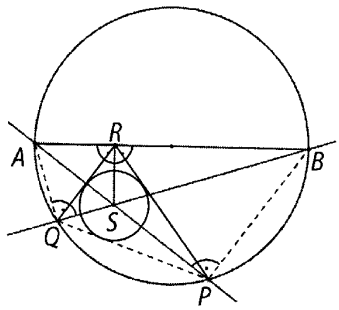
$$\begin{aligned}(90 + 2013m)^2 &= 90^2 + 2 \cdot 90 \cdot 2013m + (2013m)^2\\ &= 8100 + 2013 \cdot 180m + 2013 \cdot 2013 \cdot m^2\\ &= 48 + 4 \cdot 2013 + 2013 \cdot 180m + 2013 \cdot 2013 \cdot m^2\\ &= 48 + 2013(4 + 180m + 2013m^2),\end{aligned}$$

одакле следи тврђење задатка.

1099. а) 4. Не може бити мање од 4, јер се у сваком угаоном квадрату 3×3 мора налазити по једна фигура. Четири фигуре на пољима $c3$, $f3$, $c6$, $f6$ задовољавају услове задатка.

б) 9. Шаховска табла може се поделити на 4 квадрата 3×3, један квадрат 2×2 и 4 правоугаоника 2×3. Ни у једном од тих 9 делова не сме бити више од једне фигуре. С друге стране, фигуре на пољима $a1$, $d1$, $g1$, $a4$, $d4$, $g4$, $a7$, $d7$, $g7$ задовољавају услове задатка.

1100. Разликујемо два случаја. Ако тачка S припада дужи AB, постоји бесконачно много једнакокраких троуглова чије је једно теме на AB и који су симетрични у односу на праву AB.



Сл. уз зад. 1100

Ако тачка S не припада дужи AB, означимо са P и Q друге пресечне тачке правих AS и BS са кружнцом k, а са R подножје нормале из S на AB (слика). Доказаћемо да је S центар уписаног круга добијеног троугла PQR. Наиме, из тетивних четвороуглова $ARSQ$, $BPSR$ и $ABPQ$ имамо:

$$\measuredangle RPS = \measuredangle RBQ = \measuredangle QPS,$$
$$\measuredangle RQS = \measuredangle RAP = \measuredangle PQS,$$

чиме је доказ завршен.

1101. Приметимо да је $a+bc = a(a+b+c)+bc = (a+b)(a+c) = (1-c)(1-b)$. Применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине добијамо

$$\sqrt{a+bc} = \sqrt{(1-b)(1-c)} \leqslant \frac{2-b-c}{2} = \frac{a+1}{2},$$

и слично за остала два израза. Применом неједнакости између аритметичке и хармонијске средине добијамо

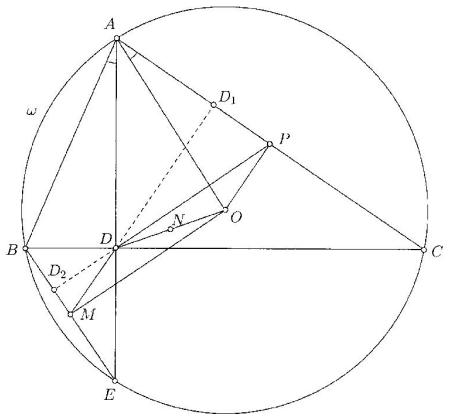
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{a+bc}} + \frac{1}{\sqrt{b+ca}} + \frac{1}{\sqrt{c+ab}} &\geqslant \frac{2}{a+1} + \frac{2}{b+1} + \frac{2}{c+1} \\ &\geqslant \frac{2\cdot 9}{(a+1)+(b+1)+(c+1)} = \frac{2\cdot 9}{4} = \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

Једнакост важи ако и само ако је $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

1102. Ако је $\dfrac{a^3b-1}{a+1}$ цео број, како је $a^3b-1 = b(a^3+1)-(b+1)$ и како $a+1 \mid a^3+1$, мора бити $a+1 \mid b+1$. Слично, ако је $\dfrac{b^3a+1}{b-1}$ цео број, како је $b^3a+1 = a(b^3-1)+(a+1)$ и како $b-1 \mid b^3-1$, мора бити $b-1 \mid a+1$. Дакле, $b-1 \mid b+1$ што значи да $b-1 \mid 2$. Постоје две могућности, $b \in \{2,3\}$. Ако је $b=2$, онда $a+1 \mid b+1 = 3$ повлачи $a=2$. Ако је $b=3$, онда $a+1 \mid b+1 = 4$ повлачи $a \in \{1,3\}$. Провера показује да $(a,b) \in \{(2,2),(1,3),(3,3)\}$ јесу решења задатка.

1103. Тврђење задатка ће бити доказано ако покажемо да је $MOPD$ паралелограм (слика). Како је $\measuredangle BAD = \measuredangle CAO = 90^\circ - \measuredangle ABC$, D је подножје нормале из A на страницу BC. Како је M средиште дужи BE, то је $BM = ME = MD$ и одатле $\measuredangle MDE = \measuredangle MED = \measuredangle ACB$. Означимо са D_1 пресек правих MD и AC. Како је $\measuredangle ADD_1 = \measuredangle MDE = \measuredangle ACD$, MD је нормално на AC. Како је O центар описног круга троугла ABC, а P је средиште странице AC, то је OP нормално на AC. Следи да је $MD \parallel OP$.

Слично, како је P средиште странице AC, то је $AP = PC = DP$ и зато $\measuredangle PDC = \measuredangle ACB$. Означимо са D_2 пресечну тачку правих PD и BE. Како је $\measuredangle BDD_2 = \measuredangle PDC = \measuredangle ACB = \measuredangle BED$, добијамо да је $PD \perp BE$. Како је M средиште дужи BE, то је $OM \perp BE$ и зато је $OM \parallel PD$, чиме је тврђење доказано.



Сл. уз зад. 1103

1104. *Прво решење.* Најпре, из $ab \geqslant 1$ следи да је $a+b \geqslant a+\dfrac{1}{a} \geqslant 2$. Даље је

$$\begin{aligned}a+2b+\frac{2}{a+1} &= b+(a+b)+\frac{2}{a+1} \geqslant b+2+\frac{2}{a+1} \\ &= \frac{b+1}{2}+\frac{b+1}{2}+1+\frac{2}{a+1} \geqslant 4\sqrt[4]{\frac{(b+1)^2}{2(a+1)}},\end{aligned}$$

на основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине. Аналогно се добија да је $b+2a+\dfrac{2}{b+1} \geqslant 4\sqrt[4]{\dfrac{(a+1)^2}{2(b+1)}}$. Множећи добијене неједнакости, још једном

примењујући А-Г неједнакост, као и претпоставку $ab \geqslant 1$, добијамо да важи

$$\left(a+2b+\frac{2}{a+1}\right)\left(b+2a+\frac{2}{b+1}\right) \geqslant 16\sqrt[4]{\frac{(a+1)(b+1)}{4}}$$
$$\geqslant 16\sqrt[4]{\frac{2\sqrt{a}\cdot 2\sqrt{b}}{4}} = 16\sqrt[8]{ab} \geqslant 16.$$

Друго решење. Из очигледне неједнакости $\frac{a+1}{2}+\frac{2}{a+1} \geqslant 2$, додајући обема странама израз $b+\frac{a-1}{2}$, добијамо $a+2b+\frac{2}{a+1} \geqslant \frac{a+3}{2}+2b$. Слично се изводи да је $b+2a+\frac{2}{b+1} \geqslant \frac{b+3}{2}+2a$. Множећи добијене неједнакости, користећи Коши-Шварцову неједнакост, као и претпоставку $ab \geqslant 1$, добијамо да је

$$\left(a+2b+\frac{2}{a+1}\right)\left(b+2a+\frac{2}{b+1}\right) \geqslant \frac{a+3+4b}{2}\cdot\frac{b+3+4a}{2}$$
$$\geqslant \frac{(\sqrt{ab}+3+4\sqrt{ab})^2}{4} \geqslant \frac{64}{4} = 16.$$

1105. (а) Да. Нека је Ана изабрала бројеве $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$. Како се сваки број 4 пута појављује у збировима по два, Бане може да сабере свих 10 њему познатих збирова и да делећи добијени резултат са 4 добије вредност $a+b+c+d+e$. Ако затим од те вредности одузме највећи $(d+e)$ и најмањи $(a+b)$ од познатих збирова по два броја, добиће c. Даље, одузимајући c од другог по величини збира $c+e$, добиће e, а одузимајући e од највећег збира $d+e$ добиће d. На сличан начин Бане може да добије бројеве a и b.

(б) Да. Слично као под (а), ако је Ана изабрала бројеве $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e \leqslant f$, онда Бане може да сабере свих 15 њему познатих збирова, па ако резултат подели са 5, добиће укупан збир $a+b+c+d+e+f$ свих 6 бројева. Ако од тог резултата одузме највећи $(e+f)$ и најмањи $(a+b)$ збир, добиће колики је збир $c+d$. Ако од укупног збира $a+b+c+d+e+f$ одузме најмањи збир $a+b$, као и други по величини збир $d+f$, добиће вредност збира $c+e$. Слично може да одреди колики је збир $b+d$. На основу тога може да нађе збирове $a+f$ и $b+e$.
Сада Бане зна следеће збирове: $a+b$, $a+c$, $a+f$, $b+d$, $b+e$, $c+d$, $c+e$, $d+f$, $e+f$. Од преосталих 6 збирова ($a+d$, $a+e$, $b+c$, $b+f$, $c+f$ и $d+e$), најмањи су $a+d$, $a+e$ и $b+c$. Ако њих сабере и од резултата одузме познате збирове $c+d$ и $b+e$, добиће двоструку вредност броја a. Даље се једноставно одређују остали бројеви.

(в) Не. Слично као у примеру датом у поставци задатка, следећи полазни скупови бројева:

$$\{1,5,7,9,12,14,16,20\} \quad \text{и} \quad \{2,4,6,10,11,15,17,19\}$$

дају исте скупове од 28 збирова по два.