ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Материјали за младе математичаре, свеска 38

РЕПУБЛИЧКА ТАКМИЧЕЊА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

1959–2000.

Б Е О Г Р А Д
2000.

РЕПУБЛИЧКА ТАКМИЧЕЊА УЧЕНИКА
СРЕДЊИХ ШКОЛА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Материјали за младе математичаре, свеска 38

Издавач: ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
Београд, Кнеза Михаила 35/IV

За издавача: *др Зоран Каделбург*

Уредник: *др Владимир Јанковић*

ISBN 86–81453–43–2

Тираж: 500 примерака

Штампа: „Графомед“, Бор

С А Д Р Ж А Ј

РЕПУБЛИЧКА ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Рад[1] са младима је вероватно један од најважнијих, а сигурно најбоље организован вид делатности Друштва математичара Србије, практично од његовог оснивања. Он се одвијао и одвија у више облика — кроз припреме младих математичара и програмера на разним нивоима, на летњим и зимским школама, у оквиру издавачке делатности чији је већи део окренут младима и у, ако не најважнијем, оно сигурно најпознатијем и најатрактивнијем облику — такмичењима.

Такмичења младих математичара Друштво је почело да организује још 1958. године и од тада овај вид активности се усталио и постао незаобилазан облик рада са ученицима. Нећемо претерати ако кажемо да су у поплави разноразних такмичења из многих области која се организују у последње време, такмичења која организује Друштво математичара сигурно и најстарија, и најмасовнија и најбоље организована. У њиховој реализацији, посредно и непосредно, учествују практично сви извођачи наставе из математике и рачунарства у основним и средњим школама, као и они запослени у разним просветним институцијама, а непосредну организацију и контролу изводе Републичке комисије за такмичења (има их укупно четири).

Не постоје сасвим прецизни подаци о броју ученика који се такмиче, али неке процене говоре да на почетним ступњевима, на сва четири вида такмичења укупно, учествује годишње око 150 000 такмичара. Кроз оштру селекцију, од школских и општинских, преко окружних и Републичких, до Савезних такмичења долази укупно око 250 најбољих, да би се у олимпијске екипе које представљају Југославију на међународним такмичењима из математике и рачунарства пласирало њих 15.

Прво „такмичење ученика гимназија у решавању задатака из математике“ одржано је у организацији градске подружнице Друштва математичара, физичара и астронома Србије у Београду 1958. године. Већ наредне године, 26.04.1959. у Београду се одржава Прво републичко такмичење, пошто су претходно одржана два припремна ступња. На првом је учествовало око 2000 ученика из 68 гимназија, на другом („среском“) 421 ученик у 12 центара, да би на завршном ступњу учествовало 109 такмичара из 44 гимназије. Прве награде освојили су: *Душан*

[1] Редигован текст из књиге „50 година Друштва математичара Србије“, Београд 1998.

Обрадовић, ученик VIII* разреда XIV београдске гимназије, *Миодраг Кирић*, VII разред II гимназије у Зрењанину, *Зоран Стојаковић*, VI разред гимназије „С. Марковић“ у Новом Саду, *Стеван Кузмановић*, VI разред XIV београдске гимназије и *Небојша Марић*, VI разред II београдске гимназије.

Традиција организовања оваквих такмичења је врло брзо успостављена, а интересовање и број учесника су нагло расли. Републичка такмичења су у почетку редовно одржавана у Београду, да би почев од 1977. године она почела да се одржавају у разним местима широм Србије, што је још више допринело њиховој популаризацији, а рекли бисмо често и бољој организацији. Ево списка градова у којима су од тада одржана Републичка такмичења: Смедеревска Паланка 1977, Чачак 1978, Београд 1979. и 1980, Ваљево 1981, Светозарево 1982, Бор 1983, Ниш 1984, Трстеник 1985, Т. Ужице 1986, Аранђеловац 1987, Врање 1988, Светозарево 1989, Кладово 1990, Београд и Сомбор 1991, Ивањица и Кикинда 1992, Београд, Ниш и Врбас 1993, Пожаревац и Нови Сад 1994, Крушевац и Челарево 1995, Нови Сад 1996, Београд 1997, Крагујевац 1998, Чачак 1999 и Панчево 2000.

Међу најважнијим ефектима такмичења је свакако подизање интересовања за математику. Нећемо претерати ако кажемо да је велика већина успешних такмичара касније наставила да се бави математиком у неком виду, па су одлазили на студије било математике било неких сродних области, најчешће техничких, на којима се математика примењује. Многи од њих су били и међу најуспешнијима на тим студијама, па им је и даље опредељење била математика. Данас, међу асистентима и професорима на Универзитетима, научним и стручним сарадницима у Институтима већину чине они који су се калили кроз такмичења, често још од основне школе.

На жалост, нема прецизних података о свима онима који су у првим годинама организације ових такмичења поднели највећи терет њихове припреме. У фрагментарним записима и сећањима налазимо имена *Јелене Михајловић, Богољуба Станојевића, Милице Илић-Дајовић, Константина Орлова, Олге Митриновић, Мирослава Живковића, Слободанке Крстић, Ковиљке Попов, Љиљане Петровић, Владимира Мићића*, ... Према неким сећањима, у почетку Републичка комисија није имала формалног председника, а затим су њеним радом руководили *Слободанка Крстић* и *Ковиљка Попов*. Каснија времена се боље памте, па знамо да су председници Републичке комисије почев од седамдесетих година били: *Бранка Ђерасимовић, Живорад Ивановић, Зоран Каделбург, Срђан Огановић, Павле Младеновић, Ђорђе Дугошија, Владимир Драговић* и *Раде Тодоровић*. Иначе, сама комисија се мењала, али је углавном имала око 20 чланова, при чему су то већ одавно по правилу бивши такмичари, а сада асистенти или професори на факултетима или најуспешнији професори средњих школа.

Републичко такмичење није завршни ступањ. Само годину дана после Првог републичког, одржано је и Прво савезно такмичење, такође у Београду 1960. године. Мада, строго речено, његова организација спада у делокруг рада Савеза друштава математичара, има више разлога због којих о њему треба говорити и

*Ради се о вишим разредима тадашње гимназије

овде. Прво, иницијатор и годинама главни организатор Савезног такмичења било је баш Друштво математичара Србије; оно је првих петнаестак година стално и одржавано у Београду. Друго, можда и важније, такмичари из Србије имали су на овим такмичењима далеко највише успеха; често су по броју награда превазилазили и све остале републике заједно. Задаци са првих тридесет Савезних такмичења (са решењима) могу се наћи у свесци 23 Материјала за младе математичаре (аутори су Зоран Каделбург и Павле Младеновић), а задаци са наредних десет такмичења ће се наћи у збирци која се припрема за штампу (свеска 39 Материјала).

Исте године кад и наше Прво републичко такмичење, дакле 1959, одржана је у Румунији Прва међународна математичка олимпијада. Југославија се врло брзо укључила у ово такмичење, пославши своју екипу на Пету олимпијаду у Пољску 1963. године. После свега што је речено вероватно је сувишно истицати да су у наредним годинама основу наше екипе на Олимпијадама по правилу сачињавали ученици из Србије. Дугачак је и списак награда које су такмичари из Југославије освојили на Међународним олимпијадама — на 35 учешћа освојили смо 6 првих, 46 других и 89 трећих награда. Овде ћемо издвојити само прве награде које су освојили: *Франц Дацар* 1963. године, *Б. Варга Јожеф* и *Миодраг Живковић* 1974, *Младен Деспић* 1982, *Раде Тодоровић* 1989. и *Душан Ђукић* 1999. године. Комплетан списак олимпијаца из Југославије и освајача награда (закључно са 1996. годином) може се наћи у књигама 11 и 32 серије Материјали за младе математичаре. Те књиге садрже и све задатке (са решењима) са ових такмичења (аутори обеју књига су бивши олимпијци). Подаци за године после 1996. могу се наћи у бројевима часописа „Тангента“.

У Југославији је два пута и одржана Међународна олимпијада — 1967. године на Цетињу и 1977. године у Београду. Поред веома успешне организације, треба поменути и да је у оба случаја значајно проширен круг земаља-учесница — док су пре 1967. године на Олимпијадама учествовале само земље Источне Европе, на наш позив олимпијском покрету придружиле су се В. Британија, Француска, Шведска и Италија. Слично, 1977. године први пут су учествовали Алжир, Куба и Бразил, што је отворило пут даљем повећању олимпијске породице која сада броји преко 80 земаља са свих континената. У оквиру XIX олимпијаде у Аранђеловцу 1977. године одржан је и симпозијум „Омладина и математика“, у чијем су првом делу чланови Жирија говорили о раду с младим талентима, а у другом делу су сами учесници Олимпијаде саопштили своје радове и посебно лепа решења задатака са тог такмичења. Поменимо и свеску 33 Материјала за младе математичаре аутора В. Јанковића и В. Мићића ‘‘IX & XIX International Mathematical Olympiads” у којој су сабрани и издати са решењима сви задаци предложени за ове две олимпијаде.

Од 1987. година Југославија редовно учествује и на Балканским математичким олимпијадама и на њима такође осваја многе награде. На укупно 13 Балканијада имамо 17 првих, 27 других и 25 трећих награда (видети такође свеску 32 Материјала за младе математичаре). Два пута били смо и успешни домаћини Балканијаде — 1989. године у Сплиту и 1994. у Новом Саду.

У закључку поменимо и аргументе оних који су против такмичења. Има ученика којима овај вид „бављења математиком“ не лежи — не могу се прилагодити притиску да „морају успети“, смета им ограничено време у оквиру којег треба урадити постављене задатке, или једноставно имају трему. Или, нешто што се ређе помиње, а чини нам се можда и важније — понеки од најуспешнијих такмичара наставе да се баве само решавањем проблема и у каснијим годинама, не схватајући да је озбиљно бављење математиком ипак нешто много више. Све је ово тачно, а сигурно је да би се нашло и више аргумената „против“. Но, сматрамо да их аргументи „за“, од којих су само неки поменути у овом кратком приказу, и по броју и по значају далеко превазилазе.

Читањем задатака које доносимо у овој збирци могу се уочити многе промене у врсти и тежини, но мислимо да је основни дух углавном сачуван у протекле 42 године. Желећи да математичкој јавности стави на увид све задатке са Републичких такмичења сакупљене на једном месту, Друштво математичара Србије објављује ову збирку, уз напомену да су они досад објављивани у збиркама задатака које Друштво издаје сваке године, почев од 1978. (популарним „Билтенима“), као и у свесци 16 серије Материјали за младе математичаре која садржи решене задатке од 1970. до 1983. године. У припреми је и свеска 39 те серије која ће садржати решене задатке из последњих једанаест година.

У Београду, јуна 2000. *Зоран Каделбург*

ПРВО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Београд, 1959.

5.* Разред

1. Решити једначину

$$\frac{m-1}{m-3}x - \frac{m-3}{m-1}x + 1 = \frac{m-3}{m-1}$$

и затим одредити m да: (а) решење буде 2; (б) решење буде позитивно.

2. Неко се одвезе до извесног места брзином 30 km/h а врати се брзином 50 km/h. Која му је средња брзина за цео пут (за одлазак и повратак)?

3. Конструисати паралелограм кад је дата једна страница, висина која јој одговара и угао између дијагонала.

4. У троуглу ABC, BD је симетрала угла CBA. Кругови описани око троуглова BCD и BAD секу редом страницу BA у P и страницу CB у Q. Доказати да је $CP = AQ$.

5. Над страницама троугла ABC конструисани су споља једнакостранични троуглови ABC_1, BCA_1 и CAB_1. Доказати да је $AA_1 = BB_1 = CC_1$ и одредити углове које граде те дужи међу собом.

6. Разред

1. Решити једначину

$$\frac{a-b+1}{ax+bx} - \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{a-b}{x}.$$

2. Стабло облика правог ваљка плива у води тако да је једна четвртина пречника ван воде. Наћи његову специфичну тежину.

3. У равни α налази се ромб $ABCD$ чија је страница a и дијагонала $BD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Из пресека дијагонала O подигнута је нормала на раван α и на њој узета тачка S тако да је $SB = SD = a$.

(а) Показати да је $\angle ASC = 90°$.

(б) Израчунати површину пирамиде $ABCDS$.

(в) Показати да је диедар $BSAD$ чија је ивица AS правоугли.

---

*Ради се о вишим разредима тадашње гимназије

4. Дат је круг полупречника R. У том кругу уписан је једнакостранични троугао ABC и из центра подигнута нормала на раван круга.

(а) Одредити на нормали тачку K тако да су дужи KA, KB, KC једнаке страницама троугла ABC и израчунати површину и запремину пирамиде $KABC$.

(б) Ако је тачка T средиште дужи OK, доказати да је троугао TAB једнакокрако правоугли.

7. Разред

1. Ако је $2\operatorname{tg} a = 3\operatorname{tg} b$, показати да је

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} b}{2+3\operatorname{tg}^2 b} = \frac{\sin 2b}{5-\cos 2b}.$$

2. Решити систем једначина: $x^2+y=2$, $y^2+x=2$.

3. Из једне тачке M на растојањима a и b од две паралелне праве повучене су две међусобно нормалне дужи MA и MB до тих правих. Наћи минимум површине троугла AMB.

4. Решити једначину $\sin^2 x - \sin 2x = 1 - 2\cos x$.

5. Висина из темена C троугла ABC једнака је збиру друге две висине. Доказати да је

$$\frac{1}{\sin\gamma} = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}.$$

8. Разред

1. Упростити израз

$$\sqrt{x\sqrt{y^3\sqrt{x\sqrt{y^3\sqrt{x\sqrt{\cdots}}}}}}.$$

2. У правоуглом троуглу, чије странице чине аритметичку прогресију а хипотенузина висина је $h = 4{,}8$, уписан је правоугаоник максималне површине. Наћи однос површина правоугаоника и троугла.

3. За разне вредности a, b и c одредити које све линије представља једначина $ax^2+by^2+c=0$.

4. Два праволинијска пута секу се под правим углом. Из места A на првом путу, удаљеног 60 km од раскршћа путева, крене камион брзином 30 km/h. Истовремено из места B на другом путу, удаљеног 30 km од раскршћа, крене други камион брзином 60 km/h. Када ће међусобно бити најближи?

5. У тетраедру $ABCD$ мимоилазне ивице су једнаке.

(а) Показати да су му стране подударни троуглови.

(б) Показати да су дужи које спајају средишта једнаких ивица, нормалне на те ивице и да се све три секу у истој тачки.

ДРУГО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Београд, 1960.

5. Разред

1. Решити једначину

$$\frac{ax}{a^2-4a+4}-\frac{2x}{(2-a)^2}+\frac{x+2}{a+2}=2\left(x-\frac{a^2x}{a^2-4}\right).$$

2. Конструисати троугао ако су дати: висина и тежишна линија које одговарају истој страници и полупречник описаног круга.

3. Дат је паралелограм $ABCD$. Нека је тачка M средиште странице BC и тачка S средиште странице AD. Доказати да дужи AM и CS деле дијагоналу BD на три једнака дела.

4. У трапезу $ABCD$ дијагонала AC је нормална на страницу BC и полови угао DAB. Угао ABC једнак је 60° и обим трапеза је $2\,\mathrm{m}$. Наћи страницу AB.

5. Веслач весла низ реку брзином $350\,\mathrm{m/min}$, а уз исту реку брзином $125\,\mathrm{m/min}$. Колико је далеко ишао низ реку ако је одлазак и повратак трајао укупно 1 сат и 25 минута?

6. Разред

1. За бројеве x и y важи $x^2y=x\sqrt[3]{x}$. Израчунати: (а) y ако је $x^3=4$; (б) x ако је $y^2=8$.

2. Проверити да ли је

$$\left(\frac{1}{10x}\right)^{\frac{1}{\log x}}-4\cdot 10^{-1}\cdot\left(\frac{1}{10x}\right)^{\frac{1}{\log x}}=60$$

ако је $x=\sqrt[3]{\dfrac{1}{10}}$.

3. Ако су m и n решења једначине $x^2+px+q=0$, показати да су решења једначине

$$qx^2+p(1+q)x+(1+q)^2=0$$

$m'=m+\dfrac{1}{n}$ и $n'=1+\dfrac{1}{m}$.

4. Дата је ивица a правилне једнакоивичне тростране призме. Наћи површину и запремину призме и површину пресека који пролази кроз једну основну ивицу и средиште наспрамне бочне ивице. Одредити површину и запремину оба тела на које је призма подељена пресеком.

5. Дата је површина P правилног октаедра.

(а) Одредити његову запремину у функцији површине.

(б) Наћи ивицу оног правилног октаедра који има два пута већу запремину.

7. Разред

1. Наћи оне вредности x за које је истовремено трином $x^2 - 7x + 13$ већи од 3 а мањи од 7.

2. За разне вредности x и y које задовољавају једначину $ax+by+c = 0$ израз $a^2x^2+b^2y^2+c^2$ добија разне вредности. Која је међу њима најмања? Одредити и вредности променљивих x и y које одговарају тој траженој вредности. Проверити за $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = -2$.

3. Дат је трином $a^2x^2 + (b^2 - c^2 - a^2)x + c^2$, где су a, b и c мерни бројеви страница једног троугла.

(а) Показати да је дати трином позитиван за све реалне вредности променљиве x.

(б) Коју релацију задовољавају позитивни бројеви a, b и c ако је дати трином потпун квадрат?

4. Знајући да су $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ решења једначине $x^2 + px + q = 0$, израчунати у функцији од p и q вредност израза

$$A = \sin^2(\alpha + \beta) + p\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha + \beta) + q\cos^2(\alpha + \beta).$$

5. У кругу полупречника r са средиштем O повучена су два нормална пречника AA_1 и BB_1. У произвољној тачки C на кругу повучена је тангента која тангенту у тачки A сече у H, а продужетак пречника BB_1 у тачки K. Угао AOC означимо са x.

(а) Изразити странице четвороугла $AOKH$ у функцији угла x.

(б) Доказати (тригонометријски) да је $HK = OK$, ма колики био угао x.

(в) Изразити површину четвороугла $AOKH$ у функцији угла x.

8. Разред

1. Доказати да је разлика квадрата ма која два непарна броја дељива са 8.

2. Кроз тачку $P(2, -1)$ повучена је права тако да тачка P полови одсечак те праве који се налази између правих $x - 2y + 2 = 0$ и $3x - y - 15 = 0$. Наћи једначину те праве.

3. Око круга $x^2 + y^2 = 16$ описан је једнакостранични троугао са једним теменом на y-оси. Наћи једначине његових страница и површину између тог круга и две странице троугла.

4. У правилној четвоространој пирамиди основне ивице a и висине H уписана је коцка, изнад ње уписана је друга коцка итд. Који део пирамиде заузима то степенасто тело састављено од свих коцки?

5. У два наспрамна угла датог правоугаоника (са страницама a и b) уписана су два једнака круга, који се међусобно додирују. Израчунати њихов полупречник и затим их конструисати.

ТРЕЋЕ РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Београд, 1961.

1. Разред

1. Дате су једначине

$$\frac{2a-x}{3}+\frac{x}{2}=\frac{5}{3}, \qquad \frac{x}{2}+x-a=1.$$

(а) Решити по x обе једначине.

(б) Одредити a тако да решења буду једнака и наћи заједничко решење.

(в) За нађену вредност a образовати функције

$$y=\frac{2a-x}{3}+\frac{x}{2}-\frac{5}{3}, \qquad y=\frac{x}{2}+x-a-1$$

и графички их представити у истом координатном систему. Где се налази пресечна тачка оба графика и због чега?

2. Дате су у простору четири тачке.

(а) Одредити тачку подједнако удаљену од датих тачака.

(б) Поставити раван од које су све четири дате тачке подједанко удаљене. Колико има таквих равни? Дати опис конструкције.

3. У четвороуглу $ABCD$ тачка E је средиште странице AB, а тачка F средиште наспрамне странице CD. Ако се почев од E конструишу вектори $\overrightarrow{ED'}$ и $\overrightarrow{EC'}$, једнаки векторима $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$, доказати да тачке C', F и D' леже на једној правој.

4. Решити једначину

$$\frac{3ab+1}{a}\,x-\frac{3ab}{a+1}-\frac{a^2}{(a+1)^2}=\frac{(2a+1)x}{a^3+2a^2+a}.$$

(а) Показати да решење једначине не зависи од b.

(б) Одредити a тако да добијена вредност за x буде позитивна, затим и већа од 1.

5. Дат је једнакокраки троугао ABC $(AB=AC)$. Ван троугла конструисани су једнакостранични троуглови ABD и ACE. Доказати да је $BE=DC$ и да се те две дужи секу на висини AH троугла.

2. Разред

1. Дат је круг пречника $AB=2R$ и на њему тачка M чија је ортогонална пројекција на AB тачка P $(AP=x)$.

(а) Изразити у функцији од R и x:

$$y=AM^2+2\,PM^2$$

и проучити ту функцију кад x варира од 0 до $2R$.

(б) Одредити x тако да буде $y=kR^2$ $(k>0)$.

2. Доказати да су ортогоналне пројекције темена једног паралелограма на његове дијагонале темена новог паралелограма сличног датом.

3. Одредити m тако да полином

$$x^4 + 2x^3 - 23x^2 + 12x + m$$

буде идентички једнак производу два квадратна тринома $(x^2+ax+c)(x^2+bx+c)$. Одредити коефицијенте a, b, c и на основу тога раставити дати полином четвртог степена на линеарне чиниоце. Најзад одредити нуле полинома.

4. Нормални пресек призматичне површи је једнакостранични троугао ABC странице a. На нормалама које полазе из B и C са исте стране равни ABC узете су две тачке B' и C' тако да је $BB' = y$, $CC' = x$ $(y > x)$.

(а) Који услов треба да задовољавају x и y да би троугао $AB'C'$ био правоугли са теменом правог угла у C?

(б) Како се из добијеног услова одређује рачунски и конструктивно y за дато x?

3. Разред

1. Функција $y = x^2 + (m-3)x + 1 - 2m$ одређује скуп парабола.

(а) Показати да све ове параболе секу x-осу.

(б) Одредити једначину геометријског места темена свих парабола и нацртати то геометрисјко место.

(в) У скупу функција одредити оне чија је једна нула три пута већа од друге.

2. Дат је правоугаоник $ABCD$ $(AB = a,\ AD = b,\ a > b)$. На страницама AB, BC, CD и DA узети редом тачке M, N, P и Q, тако да је $AM = BN = CP = DQ = x$ $(x < b)$.

(а) Доказати да је $MNPQ$ паралелограм.

(б) Изразити површину тог паралелограма у функцији од x.

(в) Одредити x тако да та површина буде максимална.

(г) За коју ће вредност x добијени паралелограм бити ромб?

3. У једној равни налазе се три полуправе OA, OB, OC тако да је $\angle COA = \angle AOB = 60^\circ$. Из тачке P, која се налази у углу AOB, спуштене су нормале PQ, PR, PS, редом на OA, OB и OC. Показати да је $PQ + PR = PS$.

4. У полукругу пречника $AB = 2r$ повучена је тетива AC. Полукруг ротира око пречника AB.

(а) Изразити у функцији полупречника и $\angle BAC = x$ површину која настаје ротацијом тетиве AC и површину која настаје ротацијом лука CB.

(б) Одредити угао BAC тако да те две површине буду једнаке.

4. Разред

1. Дата је функција $y = x^2 + px + q$.

(а) Одредити p и q тако да график ове функције сече y-осу у тачки $A(0,1)$ и да додирује праву $y + 3 = 0$ (за p и q узети оба решења).

(б) У једначини $x^2+px+q=0$ означити решења са $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$. Одредити релацију која постоји између p и q ако је $\alpha+\beta=\pi/3$. Одредити p и q тако да поред осталих услова једно решење једначине буде 1.

2. Наћи једначину тангенте хиперболе $3x^2-y^2=3$ у тачки $A(2,3)$ и показати:

(а) да се ортогоналне пројекције хиперболиних жижа на тангенту налазе на кругу који је описан око центра хиперболе полупречником a (a је полуоса);

(б) да тачка симетрична једној жижи хиперболе у односу на ту тангенту лежи на кругу који је описан око друге жиже полупречником $2a$.

3. Лопта полупречника r додирује раван P у тачки A. Врх праве купе налази се на лопти у тачки B, која је дијаметрално супротна тачки A, а основа купе, полупречника R, лежи у равни P. Оба тела пресећи једном равни Q која је паралелна са равни P на растојању x.

(а) Изразити у функцији од x разлику површина пресека купе и пресека лопте.

(б) Одредити R тако да функција има минимум за $x=3r/2$.

4. Дате су две сталне тачке A и B ($AB=a$) и променљива права l која пролази кроз тачку A.

(а) Одредити геометријско место тачке M која је ортогонална пројекција тачке B на променљивој правој l.

(б) На правој l узете су дужи $MP=MQ=MB$. Конструисати геометријско место тачака P и Q кад l ротира око A. Дати геометријско решење као и решење методом координата.

ЧЕТВРТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Београд, 1962.

1. Разред

1. Ако је $aa'=bb'=cc'$, доказати да је тада

$$(a+b')(b+c')(c+a')=(a'+b)(b'+c)(c'+a).$$

2. Дат је паралелепипед $ABCDA'B'C'D'$. Ако је $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{n}$ и $\overrightarrow{AA'}=\vec{p}$, конструисати сваки од следећих вектора (нацртати слику): (а) $\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}$; (б) $\vec{m}+\vec{n}+\frac{1}{2}\vec{p}$; (в) $\frac{1}{2}\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n}+\vec{p}$; (г) $\vec{m}+\vec{n}-\vec{p}$; (д) $-\vec{m}-\vec{n}+\frac{1}{2}\vec{p}$.

3. 1° Решити једначину

$$\frac{2x}{a^3-8}-\frac{a}{a^2+2a+4}=\frac{x-1}{a-2},$$

где је a дати реални број. Да ли за свако a дата једначина има решење?

2° За које је вредности броја a решење дате једначине позитиван број?

3° Колико треба да буде a да би решење дате једначине било $x=0$?

4. Дате су равни p и q и тачке A, B и C које не леже на истој правој. Одредите тачку O која је подједнако удаљена од равни p и q, а такође подједнако удаљена од тачака A, B и C. Да ли увек постоји тачка O?

5. Дат је троугао ABC. На страници AC изабрано је n тачака M_1, M_2, $\dots$, M_n од којих се ниједна не поклапа са теменима A и C, а на страници BC n тачака N_1, $\dots$, N_n од којих се ниједна не поклапа са теменима B и C. На колико је делова подељен троугао ABC дужима BM_1, BM_2, $\dots$, BM_n и AN_1, AN_2, $\dots$, AN_n?

2. Разред

1. Дат је квадратни трином

$$f(x) = (m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 5, \tag{1}$$

где је m реалан број.

1° Показати да графици тринома (1) за свако m пролазе кроз једну заједничку тачку.

2° Показати да не постоји ниједан трином (1) чији је екстремум у овој заједничкој тачки.

2. Одредити a и b тако да полином $x^4 + 3x^2 + ax + b$ буде дељив полиномом $x^2 - 2ax + 2$.

3. Дата је права p и тачке A и B које не леже на правој p. Конструисати круг k који пролази кроз тачке A и B и који додирује праву p.

4. Дат је разломак $\dfrac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d}$, где су a, b, c и d рационални бројеви. Какав однос мора постојати између бројева a, b, c и d да би дати разломак био рационалан број?

5. Дата су два концентрична круга k_1 и k_2 од којих k_2 има већи полупречник. Конструисати сечицу s која круг k_1 сече у тачкама A_1 и A_2, а круг k_2 у тачкама B_1 и B_2, тако да се тачка A_1 налази између тачака B_1 и A_2 и да је $B_1A_1 = A_1A_2 = A_2B_2$.

3. Разред

1. 1° Доказати идентичности

$$\sin kx = \frac{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

$$\cos kx = \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

где је k природан број.

2° Користећи се резултатима добијеним под 1° одредити следеће збирове:

$$S_1 = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx, \qquad S_2 = \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx.$$

2. Показати да је израз $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2$ позитиван за свако x ако су a, b и c мерни бројеви дужина страница једног троугла.

3. Одредити основни период функције $f(x) = \sin x \cdot \sin(x + a)$, где је a дата константа $(0 < a < \pi/2)$.

4. Основа праве призме је једнакокраки троугао крака a и угла на основици α. Кроз основицу горње основе и супротно теме доње основе постављена је раван p која је нагнута према равни основе под углом β.

1° Одредити површину омотача ове призме.

2° Раван p дели призму на два тела од којих је једно четворострана пирамида. Одредити запремину ове пирамиде.

5. Дати су круг k и тачка M на њему. Кроз тачку M повлаче се све могуће тетиве круга k чији други крајеви су означени са N. Нека је X тачка тетиве MN таква да је $MX : XN = m : n$, где су m и n дати бројеви. Наћи скуп тачака X када се тачка N креће по датом кругу k.

4. Разред

1. Дата је функција $f(x) = \dfrac{x}{a^x - 1} + \dfrac{x}{2}$. Показати да је:

(а) $f(x) \equiv f(-x)$; (б) $4f(2x)f(x) \equiv 4f^2(x) + x^2$.

2. Дата је елипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ чије су жиже тачке $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Наћи скуп свих средишта тетива елипсе које пролазе кроз жижу F_2.

3. Ако у троуглу између углова β и γ постоји веза $\dfrac{\sin^2\beta}{\sin^2\gamma} = \dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma}$, троугао је или једнакокрак или правоугли. Доказати.

4. Нека S_1, S_2 и S_3 означавају редом збирове првих n_1, n_2 и n_3 чланова аритметичке прогресије. Доказати да је тада

$$\frac{S_1}{n_1}(n_2 - n_3) + \frac{S_2}{n_2}(n_3 - n_1) + \frac{S_3}{n_3}(n_1 - n_2) = 0.$$

5. Правилан тетраедар ивице a пресечен је једном равни p која пролази кроз једну његову ивицу и која супротну ивицу тетраедра дели у односу $2 : 1$. Наћи површину пресека као и углове пресека.

ПЕТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Београд, 1963.

1. Разред

1. Нека су x, y, z различити реални бројеви. Доказати:

$$\frac{xy}{(z-x)(z-y)} + \frac{yz}{(x-y)(x-z)} + \frac{zx}{(y-z)(y-x)} = 1.$$

2. Доказати да тачке $A(1, 1-3k)$, $B(3, 1-k)$, $C(5, 1+k)$, ма какв био број k, увек леже на некој правој p, чији је коефицијент правца k. Доказати да све праве p пролазе кроз једну заједничку тачку.

3. Ако је $xyz = 1$, онда је

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)=4.$$

Доказати.

4. Конструисати правоугли троугао кад су дате хипотенуза и тежишна линија једне катете.

2. Разред

1. Нека је

$$y=\left(\frac{5}{2}x^2-x+5\right)^2-\left(\frac{3}{2}x^2+5x-4\right)^2.$$

(а) Доказати да је $y \geqslant 0$ за сваки реални број x.

(б) Решити једначину $y = 0$ по x.

2. У равни α дат је круг k са пречником $AB = 2a$. На нормалама равни α у тачки A и центру круга O са једне стране равни одређене су тачке C и D тако да је $AC = a$, $OD = 2a$. На кругу k одредити тачку M тако да троугао CMD буде правоугли.

3. Ако је $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$, онда је

$$\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}=1.$$

Доказати. Да ли важи и обрнуто?

4. Конструисати троугао код кога су висина, тежишна линија и симетрала угла, које полазе из истог темена, три дате дужи.

3. Разред

1. Дата је једначина

$$\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} 3x-m\operatorname{tg} 2x=0. \tag{1}$$

(а) Доказати да су решења ове једначине уједно и решења једначине

$$\sin 2x[2m\cos^2 2x+(m+2)\cos 2x-m]=0.$$

(б) Решити једначину (1) ако је $m = -1$.

2. Четири тачке у простору A, B, C, D међусобно су удаљене за $d = 4$. Нека је S тачка која је једнако удаљена од тих тачака. Наћи њено растојање од тих тачака.

3. Ако су решења једначине $x^2 + px + q = 0$ реална и различита, доказати да једначине $x^2 + (p + 2a)x + (q + ap) = 0$, $3x^2 + 2(p + a)x + (q + ap) = 0$ имају исто тако реална и различита решења.

4. Доказати да је

$$\cos^3\alpha + \sin^3\alpha + \cos^4\alpha - \sin^4\alpha \equiv 4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

4. Разред

1. Доказати да све параболе $y^2 - 2\lambda y + \lambda x + \lambda = 0$ (λ реални број) пролазе кроз једну заједничку тачку и да им темена леже на једној правој.

2. Међу свим елипсама $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ које пролазе кроз дату тачку $A(x_0, y_0)$ наћи ону која има најмању површину.

3. Доказати идентитет

$$\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \cdots + \sin(2n-1)\alpha \equiv \frac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha}$$

ако је n природан број и ако је $\sin\alpha \neq 0$.

4. Испитати функцију

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(x^2 - x) + \sqrt[3]{n^6 + x}}{n^3(x^2 - 4) + n^2 + nx}.$$

Нацртати њен график.

ШЕСТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Београд, 1964.

1. Разред

1. Доказати да је производ четири узастопна природна броја дељив са 24.

2. Ако је $ad = bc$, онда је $(ab+cd)^2 = (a^2+c^2)(b^2+d^2)$ и обрнуто. Доказати.

3. Доказати да тачке $P(a+b, a-b+1)$, $Q(a+b+2, a-b+3)$, $R(a+b+5, a-b+2)$, $S(a + b + 3, a - b)$ представљају темена паралелограма ако су a и b произвољни бројеви. Доказати да су за разне вредности a и b ови паралелограми подударни.

4. Дати су у једној равни два круга k_1 и k_2 и права p. Конструисати праву q паралелну правој p која сече круг k_1 у тачкама A и B и круг k_2 у тачкама C и D тако да је збир тетива AB и CD једнак датој дужи l.

5. Конструисати троугао ABC ако су дате две странице и разлика наспрамних углова.

2. Разред

1. Рационалисати именилац разломка $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$.

2. Нека је

$$f(x) = (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \cdots + (x-a_n)^2,$$

где су a_1, a_2, $\ldots$, a_n дати бројеви. Доказати да је за свако x

$$f(x) \geqslant f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right).$$

3. Нека су a, b и c три различита реална броја од којих ниједан није нула. Доказати да је

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right) = 9$$

ако је $a+b+c=0$.

4. Ако су P, Q, R, S подножја управних кроз пресек O дијагонала на странице AB, BC, CD, DA четвороугла $ABCD$, доказати да је

$$\angle SOQ = 180^\circ \pm \frac{1}{2}(\angle SRQ - \angle SPQ),$$

где су $\angle SRQ$ и $\angle SPQ$ унутрашњи углови четвороугла $PQRS$.

5. Дат је једнакостранични троугао OAB странице a. Одредити праву паралелну страници AB која сече странице OA и OB (или њихове продужетке) редом у тачкама C и D тако да је $AC^2+CD^2+DB^2 = 3a^2$.

3. Разред

1. Доказати да је троугао правоугли ако његови углови p, q и r задовољавају услов $\cos p + \cos q = \sin r$.

2. Решити по x, y, z систем: $ax+by+z=1$, $x+aby+z=b$, $x+by+az=1$, где су a и b дати бројеви. Дискусија!

3. Нека су a, b и c дужине страница датог оштроуглог троугла.

(а) Ако је R дужина полупречника описаног круга, онда је

$$a\sqrt{4R^2-a^2}+b\sqrt{4R^2-b^2}+c\sqrt{4R^2-c^2} = \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

Доказати.

(б) Решити по x једначину

$$a\sqrt{x^2-a^2}+b\sqrt{x^2-b^2}+c\sqrt{x^2-c^2} = \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

4. Доказати да се све равни, од којих свака садржи једну ивицу триедра и симетралу наспрамног ивичног угла, секу по једној правој.

4. Разред

1. Испитати функцију $y = \dfrac{(x-1)^2(x-3)}{x^2}$ и нацртати њен график.

2. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ позитивни бројеви такви да је $x_1+x_2+\cdots+x_n = 1$. Доказати да тада важи неједнакост $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n} \leqslant \sqrt{n}$.

3. Наћи $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x \cos 3x - 1}{x^2}$.

4. Доказати да је производ k узастопних природних бројева дељив са $k!$.

5. Одредити бројеве A, B, C тако да за сваки природни број n важи једнакост

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n} = \frac{An+B}{2^n}+C.$$

СЕДМО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Београд, 1965.

1. Разред

1. Ако је

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z} = 0,$$

доказати да је $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

2. Раставити на просте чиниоце полином $P(x) = 2x^3+3x^2+x$ и наћи највећи природан број којим су дељиви сви бројеви $P(x)$ када је $x = 1, 2, 3, \ldots$.

3. Дата је фамилија правих $ax+by = 1$, где су бројеви a и b везани једнакошћу $a^2+b^2 = 1$. Доказати да су све ове праве подједнако удаљене од координатног почетка.

4. Конструисати троугао ABC ако је дата страница c, симетрала угла α и разлика два угла: $\beta-\gamma$.

5. У простору су дате тачке A, B, C и D. Доказати да средишта дужи AB, BC, CD и DA припадају истој равни.

2. Разред

1. Ако је $a > b > 0$, доказати да је

$$\sqrt{(a+b)^3}-\sqrt{(a-b)^3} = \sqrt{2}\,(2a+\sqrt{a^2-b^2})\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}.$$

2. Дата је фамилија парабола $y = x^2+(\lambda+2)x+3-\lambda$, где је λ реалан параметар.

(а) Доказати да све ове параболе пролазе кроз једну заједничку тачку.

(б) Наћи геометријско место темена ових парабола.

3. У кругу су конструисане две међусобно нормалне тетиве. Ако су a, b, c и d дужине одсечака тих тетива од пресечне тачке до периферије круга, доказати да је површина тога круга

$$P = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\pi.$$

4. На ивицама AA_1, BB_1, CC_1 коцке $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ивице a пренете су дужи $AM = y$, $BN = x$, $CP = z$ $(x, y, z \leqslant a/2)$, па је кроз тачке M, N и P постављена раван која сече ивицу DD_1 у тачки Q.

(а) Доказати да је четвороугао $MNPQ$ паралелограм.

(б) Одредити зависност x од y и z тако да тај паралелограм буде правоугаоник.

5. Конструисати троугао ако је дата страница a, угао α и тежишна линија t_b.

3. Разред

1. Геометријски приказати скуп тачака чије координате задовољавају релацију $\sin x + \sin y = \sin(x + y)$.

2. Раван α која садржи хипотенузу AB правоуглог троугла ABC гради са катетама углове од $30°$ и $45°$. Из темена C спуштена је нормала CO на раван α, где је $CO = a$.

(а) Одредити угао између равни троугла ABC и равни α.

(б) Наћи површину и запремину тетраедра $ABOC$.

3. Теме правог угла правоуглог троугла налази се у координатном почетку, док му се друга два темена налазе на правим $y = a$, односно $y = b$ $(a \neq b)$. Написати једначину геометријског места подножја висина које одговарају хипотенузама таквих троуглова.

4. Нека су x и y цели бројеви. Доказати да је $3x + 2y$ дељиво са 5 ако и само ако је $4x + y$ дељиво са 5.

5. Решити једначину $\sqrt[3]{49 + x} + \sqrt[3]{49 - x} = 2$.

4. Разред

1. Наћи реална решења једначине $\sqrt[3]{a + x} + \sqrt[3]{a - x} = 1$, где је a реалан параметар.

2. Доказати неједнакост

$$n(x - 1) \leqslant x^n - 1 \leqslant nx^{n-1}(x - 1),$$

где је $x > 1$ и n природан број.

3. Наћи $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + A_1x + B_1} + \sqrt{x^2 + A_2x + B_2} - 2x)$.

4. Доказати једнакост

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1}\binom{n}{i} = \frac{2^n(n-1)+1}{n+1},$$

где је n природан број.

5. Дата је функција $y = \ln(\lambda x^2 + x + 1)$.
(а) Одредити λ тако да функција буде дефинисана за свако x.
(б) Наћи геометријско место стационарних тачака.

ОСМО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Београд, 1966.

1. Разред

1. Показати да из пропорције

$$(a+b+c+d) : (a-b+c-d) = (a+b-c-d) : (a-b-c+d)$$

следи $a : c = b : d$.

2. У дати квадрат уписати једнакостранични троугао.

3. Решити систем једначина

$$\begin{aligned} mx - 2y &= 3, \\ 3x + my &= 4 \end{aligned}$$

и одредити m тако да решења буду позитивна.

4. Конструисати троугао ако је дата страница c, симетрала угла α и разлика углова β и γ.

5. У истој равни дати су троуглови ABC и MNP. Ако су T и T_1 њихова тежишта, доказати да је

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = 3\,\overrightarrow{TT_1}.$$

2. Разред

1. Упростити израз

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

2. На полукругу пречника $AB = 2R$ узети тачку M чија је пројекција на AB тачка P. Одредити положај тачке P тако да је

$$AM^2 + MB^2 + 2\,MP^2 = \lambda\,R^2.$$

За које вредности λ задатак има смисла?

3. Конструисати троугао кад је дато $\beta - \gamma$, h_a и R (где је R полупречник описаног круга).

4. Код правилног тетраедра $ABCS$ тачка P је средиште висине из темена S. Доказати да је AP нормално на BP и BP нормално на CP.

5. Доказати да тачке симетричне ортоцентру троугла у односу на странице, леже на кругу описаном око троугла.

3. Разред

1. Доказати да једнакост $\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha = 1$ не важи ни за једно α.

2. Решити систем једначина

$$\begin{aligned}\log_2 x + \log_4 y + \log_4 z &= 2,\\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x &= 2,\\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y &= 2\end{aligned}$$

3. Површине троуглова које образују основице трапеза са одсечцима дијагонала износе p и r. Колика је површина тог трапеза.

4. Из средишта висине правилне четворостране пирамиде спуштена је нормала дужине m на бочну ивицу и нормала дужине n на бочну страну. Наћи запремину пирамиде.

5. Страница $AB = c$ троугла ABC је непомична, док се страница $AC = b$ обрће око темена A у равни троугла, не мењајући своју дужину. Наћи једначину скупа средишта странице BC.

4. Разред

1. Колико различитих делилаца има број 12! ?

2. Бројеви $a_1, a_2, a_3, \ldots$ су чланови аритметичке прогресије са разликом d.
(а) Ако је $p + q = r + s$, доказати да је $a_p + a_q = a_r + a_s$.
(б) Доказати да за свако $n \in \mathbf{N}$ важи

$$\frac{a_1a_2a_3}{a_1+a_3} + \frac{a_2a_3a_4}{a_2+a_4} + \cdots + \frac{a_na_{n+1}a_{n+2}}{a_n+a_{n+2}} = \frac{1}{2}n\left[a_1^2 + a_1d(n+1) + \frac{(n-1)(2n+5)}{6}d^2\right].$$

3. Наћи $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$.

4. Одредити криву c у равни xOy дефинисану као скуп тачака које су једнако удаљене од дате праве $x+\alpha = 1$ и датог круга $x^2+y^2-2\alpha x+\alpha^2-1 = 0$ $(\alpha > 1)$, и доказати да је за сваку тангенту те криве производ њеног коефицијента правца и одсечка на ординатној оси константан.

5. Испитати ток и нацртати график функције $y = \dfrac{1-\ln x}{1-x^2}$ (нуле првог извода одредити графички).

ДЕВЕТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Београд, 1967.

1. Разред

1. Дат је полином $P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$.

(а) Раставити $P(x)$ на чиниоце.

(б) Решити једначину $P(x) = 0$.

(в) Показати да је $P(x)$ дељиво са 3 ако је x паран број, а да је $P(x)$ дељиво са 48 ако је x непаран број.

2. У оштроуглом троуглу AFE висине ED и FB секу се у тачки C. Тачке M, N, P и Q су редом средишта дужи FC, EC, AE и AF. Доказати да је четвороугао $MNPQ$ правоугаоник.

3. Ако је $abc = 1$, онда је

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2-4=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right).$$

Доказати.

4. Дат је систем једначина

$$ax - 4y + 2 = 0, \quad x - ay - 1 = 0,$$

где је a реалан параметар.

1° Одредити параметар a тако да дати систем: (а) има једно решење (x, y); (б) нема ниједно решење; (в) има бесконачно много решења.

2° Да ли дати систем једначина може имати целобројних решења?

5. Конструисати троугао ABC код кога је $BC = a$, $AB + AC = m$ и $\angle B - \angle C = \varphi$, где су a и m дате дужи и φ дати угао.

2. Разред

1. Конструисати троугао ако су дати: страница BC, тачка D на тој страници кроз коју пролази симетрала наспрамног угла и полупречник R описаног круга тога троугла.

2. Доказати да је $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 1$.

3. Решити једначину $|x^2 - 4x + 3| = \alpha x - 1$ за разне вредности параметра α.

4. Пирамида $SABCD$ има за основу квадрат $ABCD$ странице a, њена бочна ивица SA је нормална на раван $ABCD$. Кроз ивицу AD постављена је раван π која сече SB у тачки B_1 и SC у тачки C_1.

1° Доказати да је четвороугао AB_1C_1D трапез и наћи геометријско место тачака које описује пресечна тачка M дијагонала DB_1 и AC_1 када B_1 описује дуж SB.

2° Ако је дужина бочне ивице SA једнака $a\sqrt{3}$, изразити

$$y = AB_1^2 + B_1C_1^2 + C_1D^2$$

у функцији од $SB_1 = x$ и представити ту функцију графички када тачка B_1 описује дуж SB.

5. Нека је ABC троугао чије су странице AB и AC неједнаке и нека је O центар описаног круга тог троугла. Висина AD сече описани круг у тачки K, права кроз O, нормална на BC, сече страницу BC у тачки M, а права AO сече описани круг у тачки F; H је пресек висина тог троугла.

Доказати:

(а) да су углови BCK, CBF и BCH једнаки;

(б) $FK = 2\,MD$;

(в) да тачке F, M, H припадају једној правој.

3. Разред

1. Решити једначину

$$\log\sqrt{2x-3} + \log\sqrt{2x+a} = 2 + \log 0{,}02,$$

где је a реалан параметар (логаритам је са основом 10).

2. Дат је круг $(x-1)^2+y^2 = 2$. Наћи једначину скупа тачака пресека висина свих троуглова уписаних у дати круг ако им је заједничка страница тетива коју одсеца круг на y оси.

3. Да би троугао био оштроугли, неопходно је и довољно да за два његова угла α и β важи неједнакост $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta > 1$. Доказати.

4. Дат је правоугаоник $ABCD$ са страницама $AB = a$, $BC = pa$ (p је природан број). Страница BC је подељена на $2p$ делова и деоне тачке P_1, P_2, $\dots$, P_{n-1}, $P_n = C$ спојене су са теменом A. Нека су са α_i $(i = 1, 2, \dots, n = 2p)$ обележени углови које дужи AP_1, AP_2, $\dots$, AP_{n-1}, AC граде са ивицом BC.

Испитати да ли постоје углови α_k и α_m $(k, m = 1, 2, \dots, 2p,\ k \neq m)$ такви да је $\alpha_k + \alpha_m = 45^\circ$.

5. Показати да свака раван која пролази кроз средишта двеју наспрамних ивица тетраедра дели тај тетраедар на два тела једнаких запремина.

4. Разред

1. Дата је функција $y = \dfrac{ax}{1 - ax + a^2x^2}$.

(а) Испитати ту функцију за различите вредности параметра a и представити геометријски породицу одговарајућих кривих $y = f(x, a)$.

(б) Одредити геометријско место екстремума тих кривих и нацртати график.

2. Доказати да је за $n > 1$:

$$2!\,4!\cdots(2n)! > ((n+1)!)^n.$$

3. Углови троугла ABC образују аритметичку прогресију са разликом φ тако да је $\alpha < \beta < \gamma$.

(а) Између којих се граница може налазити угао φ?

(б) Показати да странице a, b, c тог троугла задовољавају једнакост

$$(a+c)^2 = b^2 + 3ac.$$

Могу ли истовремено и странице тог троугла образовати аритметичку прогресију?

(в) Ако су дати страница b и обим троугла $2s$, израчунати: 1° угао φ (дискусија) и 2° странице a и c (дискусија).

4. Исти као 67.3.4.

5. Колико се различитих природних бројева дељивих са 3 може образовати од цифара 1, 2, 3, 4, 5 тако да се ниједна од ових цифара не понавља?

ДЕСЕТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Београд, 1968.

1. Разред

1. У равни xOy график релације $|x-2|+|y-1|=3$ ограничава део равни. Нацртати график те релације и израчунати површину тог дела.

2. Одредити најмањи природни број који при дељењу бројевима 11, 12, 13, 14, 15 даје остатак један.

3. Решити по x једначину

$$\frac{x-ab}{a+b}+\frac{x-ac}{a+c}+\frac{x-bc}{b+c}-c-b-a=0.$$

4. Доказати да дужи које спајају редом центре квадрата, конструисаних над страницама паралелограма изван њега, образују квадрат.

5. Над векторима $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$ конструисан је правоугли паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Тачка M је центар стране $A_1B_1C_1D_1$, а тачка N је центар стране BCC_1B_1 тог паралелепипеда.

Доказати да је разлика вектора $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{AM}$ вектор колинеаран вектору $\overrightarrow{A_1B}$.

2. Разред

1. Одредити остатак који се добија када се полином

$$x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$$

подели са x^3-x.

2. Решити једначину $x+\alpha|x|=\alpha$, где је α реалан број.

3. Два круга се секу у тачкама A и B. Сечица повучена кроз тачку A сече кругове још у тачкама C и D. Тачка E је пресек тангената кругова у тачкама C и D. Доказати да је четвороугао $BCED$ тетивни.

4. Над пречником AB круга конструисан је правоугаоник $ABCD$ чија је висина AD једнака страници квадрата уписаног у том кругу. Темена D и C спојена су са произвољном тачком N круга. Дужи DN и CN секу пречник AB у тачкама E и L.

Доказати да је $AL^2+BE^2=AB^2$.

5. Конструисати дуж x ако је $\dfrac{x^2}{m^2}=\dfrac{n}{p}$, где су m, n и p дате дужи.

3. Разред

1. Нека су a, b и c дужине страница, а α, β и γ наспрамни углови троугла ABC. Ако је

$$a+b=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\,(a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta),$$

доказати да је троугао ABC једнакокрак.

2. Наћи сва решења система једначина

$$\begin{aligned} x+5y+z&=tx\\ x+y+5z&=ty\\ 5x+y+z&=tz, \end{aligned}$$

где је t реалан параметар.

3. Основа праве призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ је ромб $ABCD$ дате странице α и угла код темена A од 60°. Ако је M средиште ивице AB, N средиште ивице AD и α угао између дужи MD_1 и NB_1, одредити запремину призме у функцији угла α.

4. Круг конструисан над косим краком правоуглог трапеза као над пречником, додирује нормалан крак. Ако је висина трапеза h, одредити површину оног правоуглог троугла чије су катете једнаке основицама трапеза.

5. Дат је круг $x^2+y^2=r^2$. Ортогонална пројекција произвољне тачке P круга на осу Ox је P_1. Око тачке P као центра описан је круг полупречника PP_1, који сече дати круг у тачкама M и N.

Одредити скуп тачака пресека дужи MN и PP_1.

4. Разред

1. Доказати да је

$$x^n+x^{n-2}+x^{n-4}+\cdots+\frac{1}{x^{n-4}}+\frac{1}{x^{n-2}}+\frac{1}{x^n}\geqslant n+1$$

($x>0$, $n\in\mathbf{N}$).

2. Низ (x_n) је задат на следећи начин: $x_1=a$, $x_{n+1}=\dfrac{1}{4}+x_n^2$. Испитати конвергенцију низа када је $a<\dfrac{1}{2}$, $a=\dfrac{1}{2}$, односно $a>\dfrac{1}{2}$ и наћи границу када она постоји.

3. Нацртати график и испитати функцију $y=\dfrac{2|x|}{x^2-2x+p}$ ако је $0\leqslant p\leqslant 1$.

4. Полупречник лопте уписане у зарубљену купу је R, а полупречник описане лопте је $R\sqrt{30}$. Наћи угао између изводнице и основа зарубљене купе.

5. Дат је паралелепипед P ивица a, b, c. Равни паралелне његовим странама деле ивице на по m једнаких делова.

(а) Одредити број свих тако добијених паралелепипеда P_i (чије стране припадају некој од поменутих равни или странама датог паралелепипеда), као и

број свих тако добијених паралелограма p_j (који су стране неког од паралелепипеда P_i).

(б) Ако су A и C_1 дијагонално супротна темена паралелепипеда P, одредити број свих могућих путања од темена A до темена C_1 ако се кретање врши дуж ивица паралелепипеда P_i уз стално удаљавање од темена A.

ЈЕДАНАЕСТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Београд, 1969.

1. Разред

1. Доказати да је

$$\frac{1}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p^3}+\frac{1}{q^3}\right)+\frac{3}{(p+q)^4}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right)+\frac{6}{(p+q)^5}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)=\frac{1}{p^3q^3}$$

ако је $p \neq 0$, $q \neq 0$, $p+q \neq 0$.

2. Петоцифрени број почиње цифром 3. Ако ту цифру преместимо са првог на последње место, а да при томе поредак остале четири цифре остане непромењен, добијени број је за 29 997 већи од првобитног. Наћи те бројеве.

3. Два радника могу да заврше неки посао за 12 дана. После 5 дана заједничког рада један радник се разболео, па је други радник сам продужио посао и завршио га за следећих 17,5 дана. За колико дана би могао да заврши тај посао сваки од радника радећи сам?

4. У равни су дате две једнаке дужи A_1B_1 и A_2B_2. Одредити тачку C у тој равни тако да буде $\triangle A_1B_1C \cong \triangle A_2B_2C$.

5. Правоугли троугао је подељен висином спуштеном из темена правог угла на хипотенузу на два троугла у које су уписани кругови. Доказати да је права која пролази кроз центре ових кругова нормална на симетрали правог угла троугла.

2. Разред

1. Разломак $\dfrac{281}{140}$ представити као збир три разломка чији су бројиоци и имениоци једноцифрени бројеви.

2. Одредити најмању вредност израза

$$y=(x-5)(x-1)(x-6)(x-2)+9.$$

3. Ако је један угао правоуглог троугла 15°, тада је производ катета једнак квадрату половине хипотенузе. Доказати.

4. Конструисати троугао ABC ако су дате тачке: теме A, центар описаног круга O и ортоцентар H.

5. Из произвољне тачке P на симетрали AD угла α троугла ABC конструисане су нормале PC_1, PA_1 и PB_1, редом на странице AB, BC и CA. Доказати да пресек правих B_1C_1 и PA_1 припада тежишној линији AM троугла ABC.

3. Разред

1. Доказати неједнакост

$$\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}>\frac{1}{4}$$

ако бројилац разломка на левој страни садржи n квадратних корена, а именилац $n-1$ квадратних корена.

2. Решити систем једначина

$$\sin x+\sin y=\sin(x+y),$$
$$|x|+|y|=1.$$

3. Дат је круг k и његова тетива AB. У кругу су уписани троуглови чија је једна страница AB. Наћи геометријско место пресека висина ових троуглова.

4. Да би један угао троугла износио 60° или 120° потребно је и довољно да растојање темена тог угла до ортоцентра буде једнако полупречнику R описаног круга. Доказати.

5. Тространа пирамида се пресеца равнима које су паралелне двема мимоилазним ивицама. Одредити пресек највеће површине.

4. Разред

1. Дат је низ (x_n):

$$x_1=\sqrt{a+\sqrt{a}},\quad x_2=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\quad x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}},\quad \ldots$$

$(a>0)$. Одредити $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2. Написани су природни бројеви од N до M укључујући и M и N $(M>N)$. Колики је број цифара потребних да се напишу сви ови бројеви? Изразити тај број цифара у функцији од N и M.

3. У урни се налазе куглице k различитих боја, при чему куглица i-те боје има n_i. Извлачи се по једна куглица без враћања, све док се међу куглицама не појави m куглица исте боје. Колико је извлачења за то сигурно довољно?

4. Дати геометријску интерпретацију неједнакости $|2z|<|1+z^2|$ ако је z комплексан број.

5. Исти као 69.3.5.

ДВАНАЕСТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Београд, 1970.

1. Разред

1. Ако рационални бројеви a, b и c задовољавају једнакост

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c} \qquad (a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0, a+b+c\neq 0),$$

онда је збир нека два од њих једнак нули. Доказати.

2. Уместо слова ставите одговарајуће цифре тако да сабирање

$$\begin{array}{r} \text{М О Р Е} \\ +\quad \text{С Е Т А} \\ \hline \text{М О Т Е Л} \end{array}$$

буде тачно. Сваком слову одговара једна цифра, при чему различитим словима одговарају различите цифре, а истим словима исте цифре.

3. Дати су изрази $A=x^3+1$ и $B=x^2+x$, где је x рационалан број. За које x је: 1° $A>B$; 2° $A=B$; 3° $A<B$?

4. У равни су дате три праве које пролазе кроз исту тачку O. На једној од њих уочена је тачка A. Конструисати троугао чије је једно теме тачка A, а дате праве су симетрале његових углова.

5. Дате су две праве a и b које се секу у тачки O и трећа права c која продире раван одређену првим двема правим у тачки C.

(а) Одредити праву p која сече све три дате праве.

(б) Где леже све праве p које секу ове три дате праве?

2. Разред

1. Уместо слова ставите одговарајуће цифре тако да сабирање

$$\begin{array}{r} \text{Р О В И Њ} \\ \text{И К А} \\ +\quad \text{И К А} \\ \hline \text{У Л Ц И Њ} \end{array}$$

буде тачно. Сваком слову одговара једна цифра, при чему различитим словима одговарају различите цифре, а истим словима исте цифре.

2. Ако су a и b реални бројеви, а z решење једначине $1+z+z^2=0$, онда је $(az^2+bz)(bz^2+az)=a^2-ab+b^2$. Доказати.

3. Ако су a, b и c дужине страница троугла, тада је функција

$$f(x)=b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2$$

позитивна за свако реално x. Доказати.

4. Доказати да је производ дужина нормала конструисаних из ма које тачке круга на две наспрамне странице четвороугла уписаног у том кругу, једнак производу дужина нормала конструисаних из исте тачке на друге две странице тог четвороугла.

5. Конструисати троугао ако је дат полупречник описаног круга, једна страница и разлика углова на тој страници.

3. Разред

1. Решити систем једначина $\sin x \cdot \sin y = \dfrac{\sqrt{2}-1}{4}$, $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 3 - 2\sqrt{2}$.

2. У равни xOy одредити скуп S тачака $M(x, y)$ чије координате задовољавају неједначину $\log_x(\log_y x) > 0$.

3. На турниру је учествовало 5 шахиста. Одредити резултате свих партија ако је познато да је сваки играо са сваким по једну партију и да су сви освојили различит број поена, при чему:

(а) првопласирани није играо ниједну партију нерешено;

(б) другопласирани није изгубио ниједну партију;

(в) такмичар који је заузео четврто место није добио ниједну партију.

4. Права која пролази кроз координатни почетак сече праве $x + y = 1$ и $x - y = 1$ у тачкама A и B. Одредити геометријско место средишта S дужи AB.

5. Кроз темена A и B једнакостраничног троугла ABC конструисане су нормале Ax и By на AB у истој полуравни у којој је троугао ABC. Кроз теме C конструисана је произвољна права која сече Ax у тачки M и By у тачки N. Симетрала дужи MN сече праву AB у тачки S.

1° Доказати да је троугао MSN једнакостраничан.

2° Површину троугла MSN изразити у функцији дужине странице троугла ABC и угла ACS.

4. Разред

1. Са колико нула се завршава број $11^{100} - 1$?

2. Нека бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$ чине аритметички низ са диференцијом d, а бројеви $b_1, b_2, \ldots, b_n$ геометријски низ са количником $q \neq 1$. Израчунати збир $S_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$.

3. Исти као 70.3.2.

4. На колико највише делова могу n равни да поделе сферу?

5. У праву купу полупречника основе 1 и нагибног угла изводнице према основи 2α $(2\alpha < \pi/2)$ уписана је лопта L и конструисано је још n лопти од којих свака додирује основу и омотач купе, лопту L и по две од тих n лопти. Одредити везу између n и α.

ТРИНАЕСТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Београд, 1971.

1. Разред

1. Скратити разломак

$$\frac{bc(c^2-b^2)+ca(a^2-c^2)+ab(b^2-a^2)}{b^2c^2(c-b)+c^2a^2(a-c)+a^2b^2(b-a)},$$

где су a, b, c различити позитивни бројеви.

2. Решити једначину $\sqrt{(2x-1)^2}-|3x-2|+4x-3=1$.

3. Дужина једне катете правоуглог троугла је 21, а дужине осталих двеју страница изражене су природним бројевима. Колико има таквих троуглова? Наћи њихове странице.

4. У правоуглом троуглу ABC је конструисана висина CD; тачка M је средиште дужи CD, тачка N је средиште дужи BD. Доказати да је права AM нормална на правој CN.

5. Дата је права p и ван ње тачке M и N. Конструисати троугао ABC тако да су M и N средишта страница AB и AC а висина која одговара страници AB припада правој p.

2. Разред

1. За које вредности реалног параметра a једначина

$$\sqrt{2x-3a}+\sqrt{2x+3a}=1$$

има решења?

2. Показати да је за свако реално x полином $x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+\frac{3}{4}$ позитиван.

3. У школи раде три кружока: математички, физички и хемијски. У сваком од њих ради по 15 ученика. Од ученика математичког кружока учествује у кружоку за физику њих 7, а у кружоку за хемију 8 ученика. Од ученика који раде у кружоку за физику 5 њих ради у хемијском кружоку. Зна се да 4 ученика раде у сва три кружока. Одредити:

(а) колико ученика ради само у математичком кружоку, само у кружоку за физику и само у кружоку за хемију;

(б) колико ученика ради само у по једном кружоку.

4. У круг је уписан троугао ABC. Тачке M, N и P су средишта лукова BC, CA и AB (тачка M се налази са оне стране праве BC са које није тачка A, итд). Тетива MN сече страницу BC у тачки K, а тетива NP сече страницу AB у тачки L. Доказати да је права KL паралелна правој AC и да центар уписаног круга троугла ABC припада дужи KL.

5. Конструисати троугао ако су дате све три његове тежишне дужи.

3. Разред

1. Одредити вредност израза $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ ако је $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = m$ $(0 < x < \pi/2$, m реалан број).

2. Ако су a, b, c цели бројеви, такви да је $a^2 + b^2 = c^2$, доказати да је онда бар један од бројева a и b дељив са 3.

3. Решити једначину $\log_{\sin x} 2 \cdot \log_{\sin^2 x} a = 1$, a реално.

4. Дат је троугао ABC и на страници AB тачка M. Кроз тачку M конструисати две праве које деле троугао ABC на три дела једнаких површина.

5. Основа правог паралелепипеда је ромб са оштрим углом α. Под којим углом према равни основе треба поставити раван тако да пресек паралелепипеда том равни буде квадрат чија темена припадају бочним ивицама паралелепипеда?

4. Разред

1. Дат је низ бројева a_n одређен формулом $a_{n+1} = \dfrac{3a_n - 1}{3 - a_n}$. Изразити општи члан низа у функцији од a_1, где је $a_1 = \text{const} < 0$. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2. Доказати неједнакост $\ln \dfrac{x+1}{x} > \dfrac{1}{1+x}$, $x > 0$.

3. Одредити број чланова у развоју израза $(a+b+c+d)^n$, где је n природан број.

4. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$. Тачке M, N, P и Q које припадају редом страницама AB, BC, CD, DA, деле те странице у истој размери. Одредити вредност те размере тако да површина четвороугла $MNPQ$ буде најмања.

5. Дата је шаховска табла формата 9×9. У доњем десном углу налази се пас, а у горњем левом углу зец. На централно поље табле не смеју доћи ни пас ни зец. У горњем десном углу и доњем левом углу налазе се склоништа за зеца. И пас и зец се крећу по табли по правилу: једно поље напред, назад, лево, десно или укосо (као краљ). Доказати да зец може да побегне од пса у своја склоништа без обзира ко почиње игру, ако се игра наизменично.

ЧЕТРНАЕСТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Београд, 1972.

1. Разред

1. Колико позитивних делилаца има број 180?

2. Ако за позитивне бројеве a, b, c важи једнакост $2b^2 = a^2 + c^2$, доказати да је тада

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{2}{c+a}.$$

3. Нека је D подножје нормале конструисане из темена C правоуглог троугла ABC на хипотенузу AB, а O_1 и O_2 средишта кругова уписаних у троуглове CAD и CBD. Доказати да је симетрала правог угла троугла ABC нормална на дуж O_1O_2.

4. Конструисати троугао ABC ако је дато a, $\beta - \gamma$ и $b - c$.

5. Доказати да у сваком троуглу већој страници одговара мања тежишна дуж, а мањој страници већа тежишна дуж.

2. Разред

1. Ако је $x^2 + x + 1 = 0$, онда је $x^{1972} + x^{-1972} = -1$. Доказати.

2. Решити једначину $\sqrt{x + 5 - 4\sqrt{x+1}} + \sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x+1}} = 1$.

3. Доказати да је у правоуглом троуглу однос производа дужина симетрала оштрих углова и производа полупречника описаног и уписаног круга троугла изражен ирационалним бројем.

4. Одредити на страницама AC и BC датог троугла ABC редом тачке P и Q такве да су дужи AP, PQ и QB једнаке.

5. Доказати да постоји бесконачно много троуглова дате странице AB у којима ортоцентар полови једну и само једну висину.

3. Разред

1. Решити систем једначина

$$\begin{aligned}
x^2 + 2yz &= x,\\
y^2 + 2zx &= z,\\
z^2 + 2xy &= y.
\end{aligned}$$

2. Наћи сва позитивна решења једначине $x^2 + 2x\sin(ax) + 1 = 0$, где је a реалан параметар.

3. У тетраедру $DABC$ страна BDC је нормална на страну ABC, $DB = DC = 1$, а ивични углови у темену D су сви једнаки 60°. Одредити запремину тетраедра.

4. У дељењу (без остатка)

$$\begin{array}{l}
xx\;xxx\;xxx : xxx = xx\;8xx\\
\underline{\;x\;xx\quad}\\
\quad xxx\;x\\
\quad\underline{xx\;x\quad}\\
\qquad x\;xxx\\
\qquad\underline{x\;xxx\quad}
\end{array}$$

заменити симболе x цифрама, тако да дељење буде исправно.

5. Нека је α оштар угао. Доказати да је

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\geqslant 3+2\sqrt{2}.$$

4. Разред

1. Решити систем једначина

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= 1,\\ x_2x_3 &= 1,\\ &\dots\\ x_{n-1}x_n &= 1,\\ x_nx_1 &= 1. \end{aligned}$$

2. Да би различити од нуле бројеви $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots$ чинили аритметичку прогресију, неопходно је и довољно да за сваки природни број $n\geqslant 2$ буде испуњена једнакост

$$\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\dots+\frac{1}{x_{n-1}x_n}=\frac{n-1}{x_1x_n}.$$

Доказати.

3. Дат је троугао $A_1A_2A_3$ са страницама $a_1=A_2A_3$, $a_2=A_3A_1$, $a_3=A_1A_2$. Обележимо са s_i тангентну дуж уписаног круга датог троугла која полази из темена A_i $(i=1,2,3)$. Доказати да важи неједнакост $\dfrac{s_1}{a_1}+\dfrac{s_2}{a_2}+\dfrac{s_3}{a_3}\geqslant\dfrac{3}{2}$, где једнакост важи ако и само ако је троугао $A_1A_2A_3$ једнакостраничан.

4. У граду Алгебургу мрежа метроа има 13 станица. Свака линија метроа има четири станице. Сваке две различите линије метроа имају једну и само једну заједничку станицу, а сваке две различите станице спаја директном везом једна и само једна линија метроа.

Нацртати мрежу метроа града Алгебурга.

5. Испитати и графички представити функцију $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$.

ПЕТНАЕСТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Београд, 1973.

1. Разред

1. Дат је систем $\dfrac{z}{x+y}=2$, $\dfrac{z}{y-x}=3$, $x>0$, $y>0$, $z>0$. Шта је веће, x или z?

2. Број $a+\dfrac{1}{a}$ (a није цео број) је цео. Доказати да је број $a^3+\dfrac{1}{a^3}$ такође цео.

3. Конструисати троугао ако су дати елементи a, $b+c$, $\beta-\gamma$.

4. На датој дужи AC изабрана је произвољна тачка B и над дужима AB и BC конструисани су са исте стране праве AB једнакостранични троуглови ABD и BCD_1. Нека су M и N средишта дужи CD и AD_1. Доказати да је троугао MBN једнакостраничан.

5. Три девојчице, Вера, Милица и Гордана су сакриле у џепове по један од следећих предмета: оловку, прстен и кључ. Одредите шта се у чијем џепу налази ако се зна да је од следећа три тврђења једно истинито, а два лажна.

(а) Вера је сакрила оловку.

(б) Милица није сакрила оловку.

(в) Гордана није сакрила кључ.

2. Разред

1. Доказати да је $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1{,}001>0$, $x\in\mathbf{R}$.

2. Доказати да је сваки број облика 8^n+1 сложен, $n\in\mathbf{N}$.

3. (а) Кругови k_1 и k_2 секу се у тачкама A и B. Произвољна сечица кроз A сече кругове k_1 и k_2 у тачкама M и N, а произвољна сечица кроз B у тачкама P и Q. Доказати да је MP паралелно са NQ.

(б) Дат је круг k, тачка A која му припада и тачка P која припада датој правој p. Произвољан круг кроз тачке A и P сече круг k у тачки B, а праву p у тачки Q. Доказати да све праве BQ имају заједничку тачку која припада кругу k.

4. Дат је круг k и кругови k_1 и k_2 једнаких полупречника који га додирују изнутра у тачкама A и B и при том се међусобно додирују. Нека је C произвољна тачка круга k и нека CA сече k_1 у M, а CB сече k_2 у N. Доказати да је MN паралелно са AB.

5. Упростити израз $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}$.

3. Разред

1. Дат је прост број чије су све цифре (у декадном запису) једнаке 1. Доказати да број цифара мора бити прост. Важи ли обрнуто?

2. Доказати да важи неједнакост $\dfrac{1}{\sin^4 x}+\dfrac{1}{\cos^4 x}\geqslant 8$.

3. Странице троугла везане су релацијом $a^2=b(b+c)$. Доказати да је у том случају $\alpha=2\beta$, где су α, β и γ углови троугла.

4. Дат је оштроугли троугао ABC. Нека су AA', BB', CC' његове висине, а O центар описаног круга.

(а) Доказати да је $OA\perp B'C'$.

(б) Доказати да је површина троугла ABC једнака производу полуобима троугла $A'B'C'$ и полупречника описаног круга троугла ABC.

5. У дати тетраедар уписан је други тетраедар чија су темена тежишта страна датог тетраедра. Наћи однос запремина ових тетраедара.

4. Разред

1. Испитати ток и нацртати график функције $y = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}$.

2. Нека су a_1, a_2, a_3 произвољни реални бројеви и нека је, за $n > 3$, низ (a_n) дефинисан рекурентном везом

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}}{3}.$$

Доказати да је низ (a_n) конвергентан.

3. Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост

$$\frac{\cos(n+1)x}{\cos nx} < \cos^{2n+1} x,$$

где је $0 < (n+1)x < \pi/2$.

4. Паук јури муву по бесконачном пољу. То се одиграва на следећи начин:

Паук осматра, затим направи један корак у правцу севера, југа, истока или запада, поново осматра и затим направи још један корак у једном од поменутих праваца (који не мора бити истоветан с претходним) и на крају поново осматра.

Потом мува осматра, направи један корак у правцу севера југа, истока или запада и поново осматра.

Игра се затим наставља на већ описан начин. Доказати да паук може да ухвати муву ма где се у почетку налазила ако се зна да су им кораци једнаки, да паук види само у правцу север, југ, исток и запад, и да паук, када види муву није у стању да одреди даљину до ње, већ само правац у коме се налази. Мува у сваком тренутку зна тачан положај паука.

5. Дате су две мимоилазне праве p и q. Наћи геометријско место средишта дужи чији крајеви припадају датим мимоилазним правим.

ШЕСНАЕСТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Београд, 1974.

1. Разред

1. Нека су a, b и c произвољни бројеви такви да је $abc \neq 0$, $a + b + c \neq 0$. Ако је

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a+b+c},$$

тада је $a + b = 0$ или $b + c = 0$ или $c + a = 0$. Доказати.

2. Разлика два непарна броја дељива је са 5. Наћи којом се цифром завршава разлика кубова тих бројева.

3. Из темена A троугла ABC конструисане су нормале AM и AP на симетрале спољашњих углова у теменима B и C. Доказати да је дужина дужи MP једнака половини обима троугла ABC.

4. Угао код темена A троугла ABC једнак је $75°$. Израчунати остале углове овог троугла ако права која пролази кроз теме A дели троугао на два једнакокрака троугла. (Испитати све случајеве.)

5. Растојање између места A и места B изражава се целим бројем километара који је дељив са 5. Аутобус пролази пут од A до B сталном брзином $60\,\mathrm{km/h}$ при чему на сваких $5\,\mathrm{km}$ има станицу на којој стоји 5 минута. Бициклиста прелази пут од A до B сталном брзином (не стаје успут) за $1\,\mathrm{h}$. На путу, њега је претекао аутобус, затим је он претекао аутобус који је стајао на станици, затим га је поново претекао аутобус и више се нису претицали. Да ли је аутобус путовао више или мање од 45 минута?

2. Разред

1. Доказати да се израз

$$\frac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}-2}{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}+2} \qquad (x>2)$$

може трансформисати у израз $\dfrac{(x+1)\sqrt{x-2}}{(x-1)\sqrt{x+2}}$.

2. Дата је дуж $AB=a$. На датој дужи одредити тачку M, тако да је збир површина једнакокрако-правоуглих троуглова са хипотенузама AM и BM једнак датом броју m.

3. У конвексном петоуглу $ABCDE$ тачке M, N, P, Q су средишта редом страница AB, BC, CD, DE. Доказати да је дуж која је одређена средиштима дужи MP и NQ паралелна са AE и једнака $\frac{1}{4}AE$.

4. Тачка M припада описаном кругу око једнакостраничног троугла ABC. Нека су p_1, p_2, p_3 праве кроз M, паралелне са BC, CA и AB и нека су P_1, P_2, P_3 пресечне тачке правих p_1, p_2, p_3 са правим AB, BC, CA. Доказати да тачке P_1, P_2, P_3 припадају једној правој.

5. Исти као 74.1.5.

3. Разред

1. Решити једначину

$$2^{3x}-\frac{8}{2^{3x}}-6\left(2^x-\frac{1}{2^{x-1}}\right)=1$$

у скупу реалних бројева.

2. Дужине страница троугла ABC су $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$. Доказати да је $x=y=z=0$ једино целобројно решење једначине

$$x\sin\alpha+y\sin\beta+z\sin\gamma=0,$$

где су α, β, γ углови троугла ABC.

3. Нека су h_a, h_b, h_c висине а r полупречник уписаног круга троугла ABC. Ако је $h_a + h_b + h_c = 9r$, тада је троугао ABC једнакостраничан. Доказати.

4. Доказати да је код конвексног многоугла са једнаким угловима сума растојања произвољне тачке у многоуглу до његових страница константна.

5. Дата је шаховска табла формата 10×10. Назовимо супердамом фигуру која може да се креће и као дама и као скакач. Разместити 10 супердама на ову таблу тако да се ниједан пар супердама узајамно не напада.

4. Разред

1. Израчунати граничну вредност $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-2+3-4+\cdots-2n}{\sqrt{n^2+n}}$.

2. Доказати да је за $n > 1$

$$\frac{7}{9}\cdot\frac{26}{28}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right).$$

3. Израчунати збир

$$\frac{1}{\binom{n}{0}} - \frac{1}{\binom{n}{1}} + \frac{1}{\binom{n}{2}} - \frac{1}{\binom{n}{3}} + \cdots + \frac{(-1)^n}{\binom{n}{n}}.$$

4. Доказати да је бројилац сведеног разломка једнаког збиру

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1}$$

дељив са p, ако је p прост број већи од 2.

5. У држави Заврзламији има n градова. Треба их повезати телефонским линијама тако да буду испуњени услови:

(а) свака линија повезује два града;

(б) има укупно $n-1$ линија;

(в) из сваког од тих n градова се може (директно или не) разговарати са било којим другим градом.

На колико се начина то може учинити?

СЕДАМНАЕСТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Београд, 1975.

1. Разред

1. Ако је $\dfrac{aa_1+bb_1+cc_1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = 1$ и бројеви a, b, c, a_1, b_1, c_1 су сви различити од нуле, доказати да је $\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} = \dfrac{c}{c_1}$.

2. Доказати да је број $N = 4a^2 + 3a + 5$, где је a цео број, дељив са 6 ако и само ако a није дељив ни са 2 ни са 3.

3. Из места A према месту B кренуо је пешак брзином $4\,\mathrm{km/h}$. После неког интервала времена кренуо је за њим други пешак, а после још толико времена и трећи брзином $6\,\mathrm{km/h}$. Трећи пешак стигао је другог тачно на половини пута између A и B а затим су они наставили да се крећу заједно брзином која је аритметичка средина њихових дотадашњих брзина. Ако су сва три пешака заједно стигла у B, наћи почетну брзину другог пешака.

4. У једној равни дате су права p и тачке A и B са исте стране те праве. Одредити на правој p тачке C и D тако да је дуж CD једнака датој дужи d и да је збир $AC + CD + DB$ најмањи.

5. Дата су два пара узајамно нормалних правих које својим пресечним тачкама одређују четири правоугла троугла. Доказати да су средишта хипотенуза ових троуглова темена правоугаоника.

2. Разред

1. Дата је једначина

$$x^2 - 2ax - (a + 3) = 0.$$

Одредити све вредности целог броја a тако да решења дате једначине буду цели бројеви.

2. Решити једначину

$$|x^2 - 1| + |x^2 - 4| = mx,$$

где је m реалан параметар.

3. Дат је троугао ABC. Одредити геометријско место тачака M у равни тог троугла, таквих да се нормале на праве MA, MB и MC, конструисане кроз тачке A, B и C секу у једној тачки.

4. Кругови k_1 и k_2 секу се у тачкама A и B. Кроз произвољну тачку M дужи AB конструисане су тетива PQ круга k_1 и тетива RS круга k_2. Доказати да тачке P, Q, R и S припадају једном кругу.

5. Тачка A налази се унутар шест кругова. Доказати да се центар бар једног од тих кругова налази у неком од преосталих.

3. Разред

1. Ако је n сложен природан број и ако су $1 = d_0 < d_1 < \cdots < d_{m-1} < d_m = n$ сви природни делиоци броја n, доказати да је

$$\frac{2}{\log n} \sum_{k=1}^{m-1} \log d_k$$

природан број.

2. Одредити тангенсе бројева x, y, z ако је $\operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y : \operatorname{tg} z = a : b : c$, $x + y + z = \pi$, где су a, b, c позитивни реални бројеви.

3. Дат је конвексан шестоугао $ABCDEF$ у коме свака од дијагонала AD, BE и CF дели површ шестоугла на делове једнаке површине. Доказати да се те дијагонале секу у једној тачки.

4. Дата је четворострана пирамида чија је основа ромб, а бочне стране су једнако нагнуте према равни основе. Кроз произвољну тачку H основе пирамиде конструисана је нормала на раван основе. Доказати да збир одсечака на нормали од тачке H до њених продора кроз све бочне стране пирамиде не зависи од избора тачке H.

5. Дата је произвољна коцка. По њеним ивицама (само по ивицама) крећу се мува и два паука. Њихове максималне брзине су једнаке. У почетном тренутку оба паука се налазе у једном темену коцке, а мува у дијагонално супротном. Доказати да пауци увек могу да улове муву.

4. Разред

1. Одредити аритметичку прогресију $a_1, a_2, \ldots$ ако је

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1,$$
$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3 = 0{,}1.$$

2. (а) Доказати да за сваки природан број $n \geqslant 2$ важе неједнакости

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1.$$

(б) Одредити највећи природан број n за који важи неједнакост

$$n \leqslant \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}.$$

3. За који природан број n је број $\dfrac{19^n + 75^n}{n!}$ највећи?

4. У доњем десном и горњем левом углу шаховске табле налазе се скакачи, бели и црни. Играчи повлаче потезе наизменично. Бели почиње игру, а циљ игре је узети противничког скакача. Игра се завршава нерешено када се иста позиција понови три пута. Доказати да се игра мора завршити ремијем уколико оба играча играју најбоље.

5. Одредити максимум и минимум модула комплексног броја z ако је $\left|z + \dfrac{1}{z}\right| = 2$.

ОСАМНАЕСТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Београд, 1976.

1. Разред

1. Скупови M_1, M_2, M_3, M_4, $M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$ имају редом n_1, n_2, n_3, n_4, s елемената; при томе је $M_1 \cap M_3 = M_2 \cap M_4 = \varnothing$. Доказати да је $2s \geqslant n_1 + n_2 + n_3 + n_4$. Да ли може у тој релацији да важи једнакост?

2. Деца деле орахе. Прво дете је узело a ораха и n-ти део остатка; друго $2a$ ораха и n-ти део новог остатка итд, док сви ораси нису били подељени. Испоставило се да је свако дете добило исти број ораха. Колико је било деце?

3. У равни је дато пет тачака од којих никоје три не леже на једној правој. Оне се спајају црвеним и плавим дужима и то тако да никоје три дужи исте боје не образују троугао. Доказати:

(а) из сваке тачке полазе тачно две плаве и две црвене дужи;

(б) постоји затворена изломљена линија састављена од дужи исте боје која садржи све дате тачке.

4. У правоуглом троуглу ABC ($\angle C = 90^\circ$) конструисане су симетрале AD и BF углова код темена A и B. Из тачака D и F конструисане су нормале DN и FM на хипотенузу. Доказати да је $\angle MCN = 45^\circ$.

5. Нека су тачке K, L, M средишта страница BC, CA и AB троугла ABC, а P, Q и R средишта изломљених линија BAC, CBA и ACB. Доказати да се праве KP, LQ и MR секу у једној тачки.

2. Разред

1. Ако се неком троцифреном броју са леве стране допишу три цифре, добија се квадрат датог броја. Наћи све такве бројеве.

2. Позитивни бројеви x, y, z задовољавају релацију

$$\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}+\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}+\frac{z^2+z^2-y^2}{2zx}>1.$$

Доказати да су ови бројеви мерни бројеви страница неког троугла.

3. Решити једначину $\sqrt{4x-y^2}-\sqrt{y+2}=\sqrt{4x^2+y}$.

4. Кругови k_1, k_2 и k_3 имају заједничке тачке A и B. Права a садржи тачку A и сече кругове k_1, k_2 и k_3 још редом у тачкама A_1, A_2, A_3. Нека су A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 паралелне тетиве кругова k_1, k_2 и k_3. Доказати да тачке B_1, B_2 и B_3 припадају једној правој.

5. У троугао ABC уписан је паралелограм $ADEF$ тако да темена D, E, F леже редом на страницама AB, BC и CA. Кроз средиште A_1 странице BC конструисана је права AA_1 која сече праву FE у тачки G. Доказати да је четвороугао $BGFD$ паралелограм.

3. Разред

1. (а) Доказати да је $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(\alpha+60^\circ)+\operatorname{tg}(\alpha+120^\circ)=3\operatorname{tg}3\alpha$.

(б) Доказати да је

$$\operatorname{tg}1^\circ+\operatorname{tg}5^\circ+\operatorname{tg}9^\circ+\cdots+\operatorname{tg}173^\circ+\operatorname{tg}177^\circ=45.$$

2. Дат је четвороугао $ABCD$, описан око круга. Доказати да се квадрати растојања центра круга до супротних темена односе као производи страница које се сустичу у тим теменима.

3. Шест тимова A, B, C, D, E, F такмиче се у неком првенству. Тројица пријатеља --- Аца, Богдан и Вук прогнозирају њихов коначан пласман. Ацина прогноза: редослед ће бити $ABCDEF$. Богданова прогноза: $DFCBAE$. Вукова прогноза: $BDEAFC$. На крају првенства испоставило се да су Аца и Вук тачно погодили пласман три тима, а Богдан само једног. Одредити пласман свих шест тимова ако се зна да су тимови освојили различите бројеве бодова и да су то једини тимови који су учествовали у првенству.

4. Нека су A, B, C и D узастопна темена правилног многоугла и нека је $\dfrac{1}{AB} = \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AD}$. Колико страница има тај многоугао?

5. Ортогонална пројкеција врха тростране пирамиде на раван основе је тежиште основе. Кроз средиште висине конструисане су четири равни паралелне основи и бочним странама пирамиде. Површине пресека ових равни са пирамидом су, редом, S_1, S_2, S_3, S_4. Израчунати површину пирамиде.

4. Разред

1. Задат је низ (a_n) на следећи начин:

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{2xa_n}{a_n + x}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2. Испитати и графички представити функцију $y = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}$.

3. Наћи последње две цифре броја $9^{8^{7^{6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}}}}$.

4. Доказати да је за сваки природан број n

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \binom{n+k}{k} = 2^n.$$

5. У равни је дато n^2 тачака са координатама (i, j), $i, j = 1, 2, \ldots, n$, и дато је n боја. Сваку тачку бојимо неком бојом. Бојење ћемо назвати правилним ако нема једнако обојених тачака са једнаким апсцисама, или једнаким ординатама. Све тачке, сем неколико њих чија је апсциса 1, правилно су обојене. Доказати да се и преостале тачке могу обојити тако да бојење остане правилно.

ДЕВЕТНАЕСТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Смедеревска Паланка, 1977.

1. Разред

1. Нека је $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$. Израчунати $ab + cd$.

2. Доказати да је израз

$$\frac{1}{4}\big(\big||x-y|+x+y-2z\big|+|x-y|+x+y+2z\big)$$

једнак највећем од бројева x, y, z.

3. На основици једнакокраког троугла одредити тачку тако да разлика њених одстојања од кракова тог троугла буде подударна датој дужи.

4. За сваку тачку P на рубу квадрата $ABCD$ са центром O конструисан је једнакостранични троугао OPQ. Коју путању описује тачка Q када се тачка P креће по страницама квадрата?

5. Једна породица полази ове године на летовање последњег дана у месецу. Производ половине њеног кућног броја, датума поласка на летовање, редног броја месеца повратка са летовања, броја деце у тој породици и броја дана које ће провести на летовању (рачунајући и дан поласка) је 1 452 784. Одредити датум завршетка њиховог летовања.

2. Разред

1. Број $3^{105}+4^{105}$ је дељив са 13, а није дељив са 11. Доказати.

2. Ако је $xy \neq 0$, онда је

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+4 \geqslant 0.$$

Доказати неједнакост и испитати када важи једнакост.

3. На основици BC и крацима AB и AC једнакокраког троугла ABC дате су тачке P, Q и R такве да је $PQ \parallel AC$ и $PR \parallel AB$. Доказати да тачка симетрична тачки P у односу на праву QR лежи на кругу описаном око троугла ABC.

4. Дат је троугао ABC. Нека је $A'B'C'$ троугао чије су странице једнаке тежишним дужима првог троугла и $A''B''C''$ троугао чије су странице једнаке тежишним дужима троугла $A'B'C'$. Доказати да су троуглови ABC и $A''B''C''$ слични.

5. У неком граду постоји n станица милиције ($n \geqslant 4$). У свакој знају по неки податак важан за хватање неког криминалца. Доказати да после $2n-4$ телефонских разговора све станице могу знати све податке. (У једном разговору учествују само две станице.)

3. Разред

1. Решити систем једначина (a, b, c су параметри)

$$\begin{aligned} xy &= bx+ay,\\ yz &= cy+bz,\\ zx &= az+cx. \end{aligned}$$

2. Дат је кружни прстен с полупречницима 5 и 10. Доказати да га је могуће покрити са осам кругова полупречника 4.

3. Дијагонале конвексног четвороугла $ABCD$ се секу у тачки O. Нека су S_1 и S_2 површине троуглова AOB и COD а S површина четвороугла $ABCD$. Доказати неједнакост $\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\leqslant\sqrt{S}$.

Када важи једнакост?

4. У простору је дато n тачака ($n\geqslant 3$). Сваке две од ових n тачака одређују дуж. Претпоставимо да су ове дужи различитих дужина. Сваку тачку спојимо са њој најближом тачком. Доказати да се на овај начин не може добити затворена изломљена линија.

5. У равни је дато 5 тачака са целобројним координатама. Доказати да постоји дуж чији крајеви припадају датом скупу, таква да су координате средишта те дужи целобројне.

4. Разред

1. Доказати да је број $\underbrace{11\ldots1}_{100}\underbrace{22\ldots2}_{100}$ производ два узастопна природна броја.

2. Дат је скуп од n елемената. Одредити број његових подскупова који садрже непаран број елемената.

3. Ако су a и b решења једначине $t^2-6t+1=0$, доказати да је a^n+b^n ($n\in\mathbf{N}$) цео број који није дељив са 5.

4. Одредити минимум и максимум функције $f(x,y)=\cos x+\cos y-\cos(x+y)$.

5. У рибњак је пуштено 1977 штука. Оне су гладне и једу се међу собом. Штука је сита кад поједе три штуке (сите или гладне). Који је највећи број штука које могу утолити глад?

ДВАДЕСЕТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Чачак, 1978.

1. Разред

1. Нека су a, b, c реални бројеви и $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$. Доказати да је

$$a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)\neq 0.$$

2. Решити једначину $2(x^2-y^2)=1978$, где су x и y природни бројеви.

3. У дати троугао уписана су три квадрата тако да сваки од тих квадрата има два врха на једној страници, а по један на свакој од преостале две странице троугла. Доказати да је троугао ABC једнакостраничан ако су сва три квадрата подударна.

4. Нека је P тачка у оштроуглом троуглу ABC. Посматрајмо одстојање тачке P од тачака на обиму троугла и обележимо са d и D најмање, односно највеће од њих. Доказати да је $2d\leqslant D$. Када важи једнакост?

5. У квадратну таблицу 8×8, почев од горњег левог угла, уписани су редом бројеви од 1 до 64. У свакој врсти и колони промењен је знак на четири места (на произвољан начин), тако да сада имамо у свакој врсти и колони 4 позитивна и 4 негативна броја. Доказати да је збир свих бројева у таблици једнак нули.

2. Разред

1. Одредити све шестоцифрене бројеве $\overline{abcdef}$, са међусобно различитим цифрама, за које важи

$$\overline{abcdef} = a(10^3(\overline{cc})^2 - \overline{cc}), \qquad (a \neq 0).$$

(Бројеви су записани у систему са основом 10.)

2. Одредити све целе бројеве x, y, z такве да је

$$x^2 + y^2 + z^2 < xy + 3y + 2z - 3.$$

3. У равни су дата три круга једнаких полупречника који се секу у тачки K, као на слици. Доказати да је збир означених лукова KA, KB и KC једнак полукругу истог полупречника.

4. (а) Око једнакостраничног троугла ABC описан је круг k. Ако је T произвољна тачка на луку AB (који не садржи тачку C) тог круга, доказати да је $TA + TB = TC$.

(б) Са a, b и c означимо дужине тангената конструисаних из тачака A, B и C на круг k_1 који додирује круг k у тачки T, а налази се унутар круга k. Доказати да је $a + b = c$.

5. Нека је n непаран број, а f бијекција која скуп $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ пресликава на самог себе. Доказати да је производ

$$(f(1) + 1)(f(2) + 2) \cdots (f(n) + n)$$

паран број.

3. Разред

1. Решити систем једначина

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z &= 2, \\ x + y^2 + z^2 &= 2, \\ x^2 + y + z^2 &= 2. \end{aligned}$$

2. Решити једначину $x^4 - 2ax^2 + x + a^2 - a = 0$, где је a реалан параметар.

3. Колико решења има систем једначина

$$\begin{aligned} \cos x_1 &= x_2, \\ \cos x_2 &= x_3, \\ &\dots \\ \cos x_{n-1} &= x_n, \\ \cos x_n &= x_1? \end{aligned}$$

4. Одредити све природне бројеве који се не могу представити у облику збира неколико (бар два) узастопних природних бројева.

5. Три сфере имају заједничку тачку P, при чему ниједна права која садржи тачку P није заједничка тангента за све три сфере. Доказати да те сфере имају бар још једну заједничку тачку.

4. Разред

1. Нека је низ $(a_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ такав да је $a_0 = a$, $a_1 = b$ и $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n \geqslant 2)$. Израчунати $a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1}$ у функцији од n, a, b.

2. Нека се међу n људи никоја три међусобно не познају. Доказати да је број парова људи који се узајамно познају највише $[n^2/4]$.

3. Нека f пресликава скуп парова реалних бројева различитих од нуле у позитивне реалне бројеве тако да

$$f(ab,c) = f(a,c)f(b,c), \quad f(a,bc) = f(a,b)f(a,c), \quad f(a,1-a) = 1.$$

Тада је $f(a,a) = f(a,-a) = 1$, $f(a,b)f(b,a) = 1$. Доказати.

4. Доказати неједнакост $x^5 + (1-x)^5 \geqslant \dfrac{1}{16}$ за $x \geqslant 0$.

5. Ако полином $p(x)$ са целим коефицијентима узима вредност 1 у више од три целобројне тачке, онда $p(x)$ не узима вредност -1 ни у једној целобројној тачки. Доказати.

ДВАДЕСЕТПРВО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Београд, 1979.

1. Разред

1. Наћи све ненегативне бројеве a, b и c за које важи једнакост

$$\sqrt{a-b+c} = \sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

2. Наћи троцифрен број чије су све цифре различите од нуле, а збир свих различитих двоцифрених бројева састављених од цифара овог броја једнак је том броју.

3. Дат је једнакокраки троугао ABC ($AB = AC$) и тачке E и K на полуправим AB и AC такве да је $AE + AK = AB + AC$. Доказати да је $BC < EK$.

4. Кроз произвољну тачку P на страници AB троугла ABC конструисана је права паралелна са CD, где је D средиште дужи AB, која сече AC и BC у тачкама A_1 и B_1. Доказати да је

$$\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PB_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}.$$

5. У равни је дато 9 тачака које су распоређене као на слици. Колико постоји троуглова чије је једно теме фиксирана тачка овог скупа, а друга два темена су ма које две од датих тачака?

2. Разред

1. Дат је квадрат $ABCD$. Тачкама P_1, P_2, ... , P_{n-1} страница AB је подељена на n једнаких делова. На дијагонали AC одредити тачку P тако да збир квадрата растојања тачке P од тачака P_1, P_2, ... , P_{n-1} буде минималан.

2. Наћи троцифрен број који је квадрат природног броја a и чији је збир цифара $a - 1$.

3. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви. Неједнакост

$$(b - c)(x - a) + (\sqrt{bc} - \sqrt{ax})^2 > 0$$

важи за сваки реалан број $x > 0$ ако и само ако је c између a и b. Доказати.

4. У кругу k са центром O дате су две паралелне тетиве AB и CD. Нека је P пресечна тачка правих AC и BD, а Q пресечна тачка тангенти на круг k у тачкама B и C. Доказати да је петоугао $OBQPC$ тетиван и наћи геометријско место центара кругова описаних око петоуглова $OBQPC$ ако се тетива CD мења, остајући при томе паралелна тетиви AB.

5. Над висином правилног тетраедра ивице a, као над пречником, описана је сфера. Одредити површину оног дела тетраедра који се налази унутар сфере.

3. Разред

1. Одредити све рационалне бројеве r за које је $\log_2 r$ и сам рационалан број.

2. Нека је $0 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. Доказати да је

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leqslant x_1^{x_1} x_2^{x_2} \cdots x_n^{x_n}.$$

3. Ако су α, β, γ углови троугла и ако је

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \sqrt{3}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma),$$

тада је бар један од углова α, β, γ једнак $\pi/3$. Доказати.

4. Основа пирамиде је једнакостранични троугао, а бочне стране су једнаких површина. Одредити страницу троугла основе ако дужине двеју бочних ивица износе 3, односно 4.

5. Дати су квадрат странице 7 и осам квадрата странице 3.

(а) Може ли се велики квадрат прекрити малим квадратима тако да су им странице међусобно паралелне и паралелне страницама великог квадрата?

(б) Може ли се то урадити без услова паралелности страница?

4. Разред

1. Низ (x_n) је дат једнакостима:

$$x_0 = a \quad (a \in \mathbf{R}, a > 0), \qquad x_n = \frac{x_{n-1}}{2 + x_{n-1}} \quad (n \geqslant 1).$$

Доказати да је низ (x_n) конвергентан и наћи $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2. У простору је дато 9 тачака са целобројним координатама. Доказати да је средиште бар једне дужи чији су крајеви дате тачке такође са целобројним координатама.

3. Нека је $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Доказати да $f(x)$ није количник два полинома.

4. Нека су $f(x)$ и $g(x)$ непрекидне периодичне функције са заједничким периодом T, дефинисане на скупу реалних бројева и нека је $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - g(x)) = 0$. Доказати да је $f(x) = g(x)$ за свако $x \in \mathbf{R}$.

5. Доказати да у низу квадрата природних бројева не постоји бесконачан подниз који је аритметичка прогресија.

ДВАДЕСЕТДРУГО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Београд, 1980.

1. Разред

1. У координатној равни xOy представити $\{\,(x, y) \mid x + |x| = y + |y|\,\}$.

2. Нека је $xy = 1$ и $x > y$ $(x, y \in \mathbf{R})$. Доказати неједнакост

$$\frac{x^2 + y^2}{x - y} \geqslant 2\sqrt{2}.$$

3. У равни су дате праве p и q које се секу и тачке $A \in p$ и $B \in q$. Тачке A и B крећу се по правим p и q сталним брзинама чији су интензитети једнаки. Доказати да у равни (p, q) постоји непокретна тачка P која је у сваком тренутку једнако удаљена од тачака A и B.

4. Тачке A, B и C су тежишта троуглова OMN, ONP и OMP. Доказати да тежишта троуглова MNP и ABC и тачка O припадају једној правој.

5. Одредити четвороцифрен број $\overline{abcd}$ такав да је $\overline{abcd}+\overline{cdab}=9999$, а разлика $\overline{bc}-\overline{ad}$ највећа.

2. Разред

1. Доказати (без употреба таблица) неједнакост

$$\log_4 5+\log_5 6+\log_6 7+\log_7 8>4{,}4.$$

2. Колико целобројних решења има једначина $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1980}$?

3. (а) Ако у бесконачној аритметичкој прогресији целих бројева постоји члан који је куб целог броја, тада у њој постоји бесконачно много чланова који су кубови целих бројева. Доказати.

(б) Навести пример бесконачне аритметичке прогресије целих бројева у којој ниједан члан није куб целог броја.

4. У троуглу ABC је $\angle ABC=67^\circ 30'$, $BC=AD\sqrt{2}$, где је AD висина из A. Израчунати $\angle BAC$.

5. Заједничке спољашње тангенте двају кругова $k_1(O_1)$ и $k_2(O_2)$ секу заједничке унутрашње тангенте у тачкама A, B, C и D. Доказати да тачке A, B, C, D, O_1 и O_2 припадају једном кругу.

3. Разред

1. Нека су p, q, r прости бројеви и S скуп свих природних бројева који немају других простих делилаца осим p, q и r. Израчунати збир $\sum\limits_{n\in S}\dfrac{1}{n}$.

2. Доказати да ако је α оштар угао, тада је

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\geqslant 3+2\sqrt{2}.$$

3. Нека су h'_a, h'_b и h'_c редом праве симетричне висинама троугла ABC у односу на симетрале углова код темена A, B и C. Доказати да се h'_a, h'_b и h'_c секу у једној тачки.

4. Доказати да међу бројевима $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, $n\in\mathbf{N}$ има бесконачно много таквих да су свака два од њих узајамно прости.

5. У лифт петоспратне зграде улази истовремено n путника, од којих сваки силази на било ком од спратова, почевши од првог, са једнаким вероватноћама. Наћи вероватноћу догађаја: постоје бар три узастопна спрата на којима ниједан путник не силази.

4. Разред

1. Доказати да се квадрат може разложити на n квадрата, где је n природан број већи од 5.

2. Решити једначину $x^2+y^2+z^2=1980$ у скупу целих бројева.

3. Нека је n природан број већи од 1.

(а) Доказати: ако је $n^2 + 2^n$ прост број, онда је n непаран број дељив са три.

(б) Испитати да ли важи обрнуто тврђење.

4. Нека су x_0, x_1, ... , x_n реални бројеви који задовољавају услове: $x_0 = x_n = 0$; $x_i > 0$ за $i = 1, 2, \ldots, n-1$; $x_{i-1} + x_{i+1} \geqslant 2x_i \cos\dfrac{\pi}{k}$ за $i = 1, 2, \ldots, n-1$, где је k фиксиран природан број. Доказати да је $n \geqslant k$.

5. Доказати да се природан број m може представити у облику $m = [n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}]$ ако и само ако m није потпун квадрат. (Са $[x]$ је означен највећи цео број мањи или једнак x.)

ДВАДЕСЕТТРЕЋЕ РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Ваљево, 1981.

1. Разред

1. Доказати да, ако за $a, b, c \in \mathbf{R}$ важи

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c},$$

онда за било које непарно $n \in \mathbf{N}$ важи

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}.$$

2. Решити једначину

$$\frac{x-29}{1971} + \frac{x-27}{1973} + \frac{x-25}{1975} + \frac{x-23}{1977} + \frac{x-21}{1979} + \frac{x-19}{1981}$$
$$= \frac{x-1971}{29} + \frac{x-1973}{27} + \frac{x-1975}{25} + \frac{x-1977}{23} + \frac{x-1979}{21} + \frac{x-1981}{19}.$$

3. Конструисати троугао ABC ако су дате тачке A_1, B_1 и C_1, такве да је $A_1 = \mathcal{S}_B(A)$, $B_1 = \mathcal{S}_C(B)$ и $C_1 = \mathcal{S}_A(C)$.

4. Дат је тетивни четвороугао $ABCD$. Праве одређене наспрамним страницама AB и CD секу се у тачки M, а праве одређене наспрамним страницама AD и BC у тачки N. Доказати да су симетрале углова ANB и AMD нормалне међу собом.

5. На табли су записани бројеви 1, 2, 3, ... , 1981. Ученик је избрисао нека два броја и уместо њих уписао њихову разлику. Тај поступак поновио је више пута и на крају су на табли биле уписане само нуле. Доказати да је у рачуну начињена грешка.

2. Разред

1. Одредити интервал за променљиву x у коме је функција

$$y = \sqrt{x-1} + \sqrt{x + 24 - 10\sqrt{x-1}}$$

константна.

2. Решити неједначину

$$1 + \log_2 x + \log_2^2 x + \log_2^3 x + \cdots > 0.$$

3. Нека су A_1, B_1, C_1, D_1 средишта страница AB, BC, CD, DA конвексног четвороугла $ABCD$, а A_2, B_2, C_2, D_2 пресеци дужи DA_1 и AB_1, AB_1 и BC_1, BC_1 и CD_1, CD_1 и DA_1. Доказати да је површина четвороугла $A_2B_2C_2D_2$ једнака збиру површина троуглова AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 и DD_1D_2.

4. Дате су две тачке A и B, и променљива тачка C, таква да је $\angle ACB$ константан. Нека су A_1 и B_1 подножја висина h_a и h_b троугла ABC. Доказати да је дуж A_1B_1 константне дужине.

5. Да ли се могу сви десетоцифрени бројеви, чије су цифре 1 и 2, поделити у две групе тако да збир било која два броја из исте групе садржи међу својим цифрама бар две тројке?

3. Разред — А категорија

1. Нека је

$$\sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3 = 0,$$
$$\cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3 = 1.$$

Доказати да за неки $x_i \in \{x_1, x_2, x_3\}$ важи $\sin x_i = 0$, $\cos x_1 = 1$.

2. Доказати да постоји тачно један низ (u_n) природних бројева са својствима

$$u_1 = 1, \quad u_1 < u_2 \quad \text{и} \quad u_n^3 + 1 = u_{n-1}u_{n+1} \quad \text{за } n > 1.$$

3. Нека је $ABCD$ позитивно оријентисан трапез и $APDQ$ и BP_1CQ_1 позитивно оријентисани квадрати. Доказати да је $PP_1 = QQ_1$.

4. Одредити вероватноћу догађаја да се у низу бацања коцке цифра 1 појави пре парне цифре.

5. Раван је представљена као унија два дисјунктна скупа, који могу бити ма каквог облика и који се могу састојати из више делова. Доказати да постоји једнакокраки правоугли троугао чија су сва три темена у једном од скупова.

3. Разред — Б категорија

1. Дат је троугао ABC. На полуправим AB, AC, BC, BA, CA и CB одређене су, респективно, тачке Q, K, L, M, N и P, такве да је $AQ = CP = AC$, $AK = BL = AB$ и $BM = CN = BC$. Доказати да су праве MN, PQ и LK паралелне.

2. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^n}$.

3. Доказати да аритметички низ чији је први члан $a_1 = 7$ а диференција $d = 4$ садржи бесконачно много простих бројева.

4. Права која пролази кроз координатни почетак сече праве $x + y - 1 = 0$ и $x - y + 1 = 0$ у тачкама A и B. Одредити геометријско место средишта дужи AB.

5. Дата је таблица од 50×50 поља и у сваком је написан један цео број. Ако се било који део таблице покрије шаблоном са слике, збир покривена четири броја је увек 4. Одредити бројеве у таблици.

4. Разред

1. Нека су комплексни бројеви z_1, z_2, z_3 темена позитивно оријентисаног троугла који садржи тачку O (координатни почетак). Доказати да је површина овог троугла једнака

$$\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_3 z_1).$$

2. Исти као 81.3А.2

3. Исти као 81.3А.3

4. Исти као 81.3А.4

5. Нека је R раван и $f\colon R \to R$ бијекција која пресликава сваки круг у круг. Доказати да f пресликава сваку праву у праву.

ДВАДЕСЕТЧЕТВРТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Светозарево, 1982.

1. Разред

1. Доказати да важи неједнакост $\dfrac{x^2}{1+x^4} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

2. Доказати да су троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ подударни ако је $AB = A_1B_1$, $CD = C_1D_1$, где су D и D_1 средишта дужи AB и A_1B_1, и $CB - CA = C_1B_1 - C_1A_1$ ($CB > CA$, $C_1B_1 > C_1A_1$).

3. Троугао A_1B_1C симетричан је правоуглом троуглу ABC ($\angle C = 90°$) у односу на симетралу угла код темена C. Доказати да је тежишна дуж CM троугла ABC нормална на праву A_1B_1.

4. Познато је да крокодил има највише 68 зуба. Доказати да међу 16^{17} крокодила не морају да постоје два са истим распоредом зуба.

5. Троцифрен број са различитим цифрама дељив је сваким од двоцифрених бројева који се из њега добијају уклањањем једне његове цифре, при чему се поредак цифара не мења. Наћи све такве троцифрене бројеве.

2. Разред

1. Нека је p прост број, $p > 2$. Да ли постоје природни бројеви x и y такви да је $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2p}$?

2. Одредити све аритметичке прогресије чија је разлика $d = 2$ а однос S_{3n}/S_n не зависи од n (S_n је збир првих n чланова прогресије).

3. Дата су два круга који се споља додирују у тачки C. Нека су A и B додирне тачке једне од њихових заједничких спољашњих тангенти. Одредити странице троугла ABC у зависности од полупречника датих кругова.

4. Око сваке стране тетраедра $ABCD$ описан је круг. Доказати: ако сва четири круга имају подударне полупречнике, онда су све четири стране подударни троуглови.

5. Комисија за други разред је замислила пет реалних бројева x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Нека су $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_{10}$ вредности збирова $x_1 + x_2$, $x_1 + x_3$, $\ldots$, $x_4 + x_5$ поређане по величини. Како ћеш, ако су ти познати бројеви s_1, s_2, $\ldots$, s_{10}, одредити бројеве x_1, x_2, x_3, x_4, x_5?

3. Разред — А категорија

1. Израчунати збир

$$1 + \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \cdots + \frac{\cos nx}{\cos^n x} \qquad (\cos x \neq 0).$$

2. У кутији се налази 10 белих и 20 црних куглица. Из кутије се извлачи, једна по једна, укупно 13 куглица, без враћања. Одредити вероватноћу догађаја да последња извучена куглица буде бела.

3. Нека је p прост и n природан број. Доказати да је број $\binom{n}{p} - \left[\frac{n}{p}\right]$ дељив са p. ($[x]$ --- цео део броја x.)

4. Нека је (x_n) низ различитих од нуле реалних бројева који задовољавају релацију

$$x_n = \frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2} - x_{n-1}} \qquad (n = 3, 4, \ldots).$$

Доказати да су сви чланови овог низа цели бројеви ако и само ако су x_1 и x_2 међусобно једнаки цели бројеви.

5. Дате су подударне дужи AB и A_1B_1. Клизајућа симетрија G_1 пресликава дуж AB на дуж A_1B_1, тј. $G_1(A) = A_1$ и $G_1(B) = B_1$; клизајућа симетрија G_2 пресликава дуж AB на дуж B_1A_1, тј. $G_2(A) = B_1$ и $G_2(B) = A_1$.

(а) Доказати да су осе клизајућих симетрија G_1 и G_2 нормалне међу собом.

(б) Доказати да је $G_2 \circ G_1$ централна симетрија.

3. Разред — Б категорија

1. Дате су тачке $A(0,9)$, $B(3,6)$ и систем неједначина

$$2x - y + a < 0,$$
$$6x + 3y - 5a \geqslant 0.$$

За које вредности параметра a ће координате бар једне тачке дужи AB задовољавати дати систем?

2. Ако су α, β и γ унутрашњи углови троугла и ако је $\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 1$, доказати да је један од углова α, β, γ једнак $2\pi/3$.

3. Нека су a, b, c различити позитивни бројеви и $P(x)$ полином шестог степена. Ако је $P(a) = P(-a)$, $P(b) = P(-b)$, $P(c) = P(-c)$, доказати да је $P(x) = P(-x)$ за сваки реалан број x.

4. Шестоугао је описан око круга полупречника 10. Доказати да постоје тачке P и Q на рубу шестоугла, такве да је $PQ > 21{,}2$.

5. Функција f је дефинисана за сваки реалан број и за свако x и y је испуњена једнакост

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1,$$

при чему је $f(1) = 2$.

(а) Наћи $f(m)$, m произвољан цео број.

(б) Наћи $f(r)$, r произвољан рационалан број.

4. Разред

1. Исти као 82.3А.1

2. Дат је правилан $2n$-тоугао. Колико има оштроуглих троуглова чија су темена врхови $2n$-тоугла?

3. Исти као 82.3А.3.

4. Свака од 9 датих правих дели дати квадрат на два четвороугла чији је однос површина $2:3$. Доказати да се неке три од тих правих секу у једној тачки.

5. Нека су a_1, a_2, $\ldots$, a_n међусобно различити цели бројеви. Доказати да се полином

$$p(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n) - 1$$

не може представити у облику производа два полинома са целим коефицијентима који су различити од константе.

ДВАДЕСЕТПЕТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Бор, 1983.

1. Разред

1. За које вредности p и q је полином $P(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 + px + q$ дељив полином $Q(x) = x^2 - 3x + 2$?

2. Доказати импликацију: $x^2 + y^2 \leqslant 2 \implies |x + y| \leqslant 2$.

3. Површина трапеза $ABCD$ једнака је 1. Колика је најмања дужина веће дијагонале трапеза?

4. Нека је K средиште тежишне дужи CC_1 троугла ABC и нека је $AK \cap BC = \{M\}$. Доказати да је $CM : MB = 1 : 2$.

5. На столу су књиге које треба спаковати. Ако бисмо их паковали по 4, 5 или 6, сваки пут би остала по једна књига, а ако их пакујемо по 7, све би биле спаковане.

(а) Колико најмање књига може бити на столу?

(б) Наћи сва остала решења за број књига на столу.

2. Разред

1. Решити једначину $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$.

2. Дат је правилни тетраедар $ABCD$. Тачке M, N, P и Q припадају редом ивицама AD, AC, BD и BC, тако да је

$$\frac{AM}{AD} = \frac{AN}{AC} = \frac{BP}{BD} = \frac{BQ}{BC} = k.$$

Одредити однос запремина V_{ABMNPQ} и V_{ABCD}.

3. У тупоуглом троуглу ABC тачке A_1, B_1 и C_1 су подножја висина. Ако је троугао ABC сличан троуглу $A_1B_1C_1$, одредити углове троугла ABC.

4. Решити неједначину $\dfrac{1}{2^{2x} + 3} \geqslant \dfrac{1}{2^{x+2} - 1}$.

5. (а) Природан број n има тачно 80 различитих делилаца из скупа природних бројева, укључујући бројеве 1 и n. Доказати да је производ свих 80 делилаца броја n једнак n^{40}.

(б) Природан број n има тачно 1983 различита делиоца из скупа природних бројева, укључујући бројеве 1 и n. Доказати да је број n потпун квадрат.

3. Разред — А категорија

1. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$x + y = z, \qquad x^2 + y^2 = z, \qquad x^3 + z^3 = z.$$

2. Функција f која је дефинисана за све целе бројеве и узима реалне вредности задовољава услове:

(1) $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$, за свако x и y;

(2) $f(0) \neq 0$.

Наћи све такве функције f ако је: (а) $f(1) = \dfrac{5}{2}$; (б) $f(1) = \sqrt{3}$.

3. У кутији се налази p белих и q црних куглица. Поред тога је дата посуда са довољно црних куглица. Насумице се из кутије ваде две куглице. Ако су исте боје, у кутију се стави црна куглица из посуде; ако су различитих боја, бела куглица се враћа у кутију. Поступак се наставља док се последњи пар куглица не извади из кутије и затим последња куглица не стави у њу. Колика је вероватноћа да је та последња куглица бела?

4. На страницама CA и CB једнакостраничног троугла ABC са центром M изабране су, редом, тачке D и E такве да је $CD = CE$. Ако је F таква тачка да је четвороугао $DMBF$ паралелограм, доказати да је троугао MEF једнакостраничан.

5. По завршетку једног шаховског турнира испоставило се да је сваки учесник освојио тачно половину својих поена играјући са играчима који су заузели последња три места. Колико је учесника било на турниру?

3. Разред — Б категорија

1. Исти као 83.3А.1.

2. Нека су f и g реалне функције и за свако реално x, y важи

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y).$$

(а) Ако је f периодична функција, доказати да је и g периодична.

(б) Ако је g периодична, да ли f мора бити периодична?

3. Наћи сва решења једначине $\sin^{2m} x + \cos^{2n} x = 1$, где су m и n природни бројеви од којих је бар један већи од 1.

4. Исти као 83.3А.4.

5. Исти као 83.3А.5.

4. Разред

1. Исти као 83.3А.1.

2. Дат је тетраедар $ABCD$. Нека бисекторна раван диедра код ивице AB сече ивицу CD у тачки M. Доказати да је

$$MC : MD = S(ABC) : S(ABD).$$

($S(ABC)$ и $S(ABD)$ су површине троуглова ABC и ABD.)

3. Одредити минимум функције

$$f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz}, \qquad x,y,z > 0.$$

4. Одредити целобројна решења једначине $x^2 = 3^y + 7$.

5. Доказати да број $(2+i)^n$ није реалан, ако је n природан број.

ДВАДЕСЕТШЕСТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Ниш, 1984.

1. Разред

1. Израчунати збир свих бројева формираних од свих пермутација цифара 1, 2, 3, 4, 5, 6.

2. Ако су a и b позитивни и различити бројеви, доказати неједнакост

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} < \sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}}.$$

3. Ако тачка M припада симетрали спољашњег угла код темена C троугла ABC, доказати да је $MA + MB \geqslant AC + BC$.

4. У ромбу $ABCD$ са углом од 60° код темена A, на страницама AB и BC дате су тачке M и N такве да је збир $MB+BN$ једнак страници ромба. Доказати да је троугао MND једнакостранични.

5. Испитати да ли је дељив са 5 број

$$1^{1984} + 2^{1984} + 3^{1984} + 4^{1984}.$$

2. Разред

1. Решити једначину (a --- реалан параметар)

$$2\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} = \sqrt{a - x + \sqrt{x(a+x)}}.$$

2. На колико се начина број 1984 може представити као збир неколико узастопних природних бројева и који су то бројеви?

3. Нека су a, b и c дужине страница троугла, а x, y и z реални бројеви такви да је $x + y + z = 0$. Доказати да је тада

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy \leqslant 0.$$

4. У круг је уписан четвороугао $ABCD$ чије су дијагонале узајамно нормалне и секу се у тачки E. Из тачке E је конструисана нормала на праву AD. Та нормала сече праву BC у тачки M. Доказати да је $BM = MC$. Одредити геометријско место тачака M кад се дијагонала BD мења, остајући при том нормална на AC.

5. Ако су у тетраедру дужи које спајају средишта наспрамних ивица узајамно нормалне, доказати да је збир ивичних углова у сваком темену тетраедра једнак 180°.

3. Разред — А категорија

1. Нека су A, B и C углови троугла. Ако је

$$\frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C} = 2,$$

доказати да је тај троугао правоугли.

2. Одредити све чланове низа $a_n = 3^{2n-1} - 2^{n-1}$, $n \in \mathbf{N}$ који су потпуни квадрати.

3. Коцка се баца више пута и са x_i означава број који падне у i-том бацању. За природан број n оначимо са $p(n)$ вероватноћу да постоји k такво да је $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$. Одредити n за које је $p(n)$ највеће.

4. У дијаметрално супротним тачкама A и B круга k конструисане су тангенте тог круга p_1 и p_2, респективно. Нека је C произвољна тачка праве p_1 различита од A, D и E тачке у којима произвољна права која садржи C сече круг k и F додирна тачка круга k и тангенте из C која је различита од p_1. Ако су M, H и K, тим редом, тачке у којима праве AE, AF и AD секу праву p_2, доказати да је $MH = HK$.

5. Дат је правоугаоник са страницама $a = 3 + 2\sqrt{2}$, $b = 1$. Доказати да се правоугаоник може поделити на четири мања (са две праве паралелне страницама правоугаоника) тако да површина једног буде не мања од 2, а да површине остала три буду не мање од 1. Доказати да је таква подела немогућа ако смањимо страницу a.

3. Разред — Б категорија

1. Исти као 84.3А.1.

2. Исти као 84.3А.2.

3. Дат је тетраедар $ABCD$. Изразити растојање темена D од тежишта T стране ABC у функцији од дужина ивица тог тетраедра.

4. Наћи све реалне бројеве a и b за које систем једначина

$$xyz + z = a,$$
$$xyz^2 + z = b,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

има тачно једно решење у скупу реалних бројева.

5. Исти као 84.3А.5.

4. Разред

1. Нека је n природан број и $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ за $i = 1, 2, \ldots, n$. Доказати да важи неједнакост

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \geqslant 4 \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Када важи једнакост?

2. Одредити све парове природних бројева (x, y) за које је број $2^y + 1$ дељив бројем $2^x - 1$.

3. Решити у позитивним бројевима систем једначина

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = 9,$$
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_k} = 1.$$

4. Исти као 84.3А.4

5. Доказати да за сваки природан број n подскупови скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ могу да се поређају у низ тако да је симетрична разлика свака два узастопна члана низа једночлан скуп, тј. тако да се сваки члан низа, сем првог, из претходног добија или додавањем или одузимањем једног елемента скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$

ДВАДЕСЕТСЕДМО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Трстеник, 1985.

1. Разред

1. Доказати да није могуће све природне бројеве од 1 до 1985 написати у неком поретку тако да добијени број буде потпун квадрат.

2. Наћи сва решења једначине

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = 1$$

у скупу природних бројева.

3. Доказати неједнакост

$$\frac{1}{3+\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n-1}+(2n-1)\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{2}.$$

4. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$. Доказати да се кругови уписани у троуглове ABC и ACD додирују ако и само ако су збирови наспрамних страница тог четвороугла једнаки.

5. У равни је дато n тачака тако да су сва њихова међусобна растојања различита. Ако је из сваке тачке конструисана дуж до њој најближе тачке, доказати да ни из једне тачке не може полазити више од пет таквих дужи.

2. Разред

1. Нека су квадратни триноми $a_1x^2+2b_1x+c_1$ и $a_2x^2+2b_2x+c_2$ позитивни за све вредности x. Доказати да је тада и трином $a_1a_2x^2 + 2b_1b_2x + c_1c_2$ позитиван за свако x.

2. Одредити све четвороцифрене бројеве $\overline{abcd}$ тако да је

$$\overline{abcd} = 5\big((\overline{ab})^2 + (d+1)^2\big).$$

3. Кругови полупречника 2, 3 и 4 додирују се споља. Одредити полупречник круга који садржи додирне тачке датих кругова.

4. У тространој пирамиди $ABCD$ подножје висине DH је ортоцентар H основе ABC. Доказати да се висине AE, BF, CG и DH те пирамиде секу у једној тачки.

5. Дат је конвексан 1985-тоугао чији је обим 2500. Доказати да нека три темена датог многоугла одређују троугао чија је површина мања од један.

3. Разред — А категорија

1. Наћи сва целобројна решења једначине $2^x = 3^y + 1$.

2. Доказати да за $x \neq k\pi$ (k -- цео број) и све природне бројеве n важи неједнакост

$$|\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \cdots + (-1)^{n-1} \cos nx| \leqslant \frac{1}{|\cos \frac{x}{2}|}.$$

3. Одредити правоугаоник минималне површине који покрива дати троугао ABC.

4. Нека су BCA_1A_2, CAB_1B_2, ABC_1C_2 квадрати над страницама BC, CA, AB троугла ABC и ван њега и нека су $AB_1A'C_2$, $BC_1B'A_2$ и $CA_1C'B_2$ паралелограми.

(а) Доказати да су дужи BC и AA' подударне, а праве BC и AA' нормалне.

(б) Доказати да троуглови ABC и $A'B'C'$ имају заједничко тежиште.

5. Исти као 85.2.5.

3. Разред — Б категорија

1. Исти као 85.3А.1.

2. Исти као 85.3А.2.

3. Исти као 85.3А.3.

4. Решити систем једначина

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6, \quad x_2 + x_3 + x_4 = 9, \quad x_3 + x_4 + x_5 = 3,$$
$$x_4 + x_5 + x_6 = -3, \quad x_5 + x_6 + x_7 = -9, \quad x_6 + x_7 + x_1 = -2,$$
$$x_7 + x_1 + x_2 = 2.$$

5. Ако су бројеви $3x$, $3y$, $-x$ у интервалу $[a, b]$, доказати да је и број $x + y$ у том интервалу.

4. Разред

1. Исти као 85.3А.1.

2. Нека је $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ако за $-1 \leqslant x \leqslant 1$ важи $|f(x)| \leqslant 1$, доказати да је $2a + b \leqslant 4$.

3. Исти као 85.3А.3.

4. Исти као 85.3А.4.

5. Дата је коцка $ABCDEFGH$. Колико има различитих n-торки $(A, X_2, \ldots, X_{n-1}, A)$ чија су свака два узастопна члана суседна темена коцке?

ДВАДЕСЕТОСМО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Титово Ужице, 1986.

1. Разред

1. Да ли је број $2^{1986}+1$ прост или сложен? Образложити одговор.

2. Ако су a, b и c позитивни реални бројеви, такви да је $a+b+c=1$, показати да важи неједнакост

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \geqslant 64.$$

Када важи једнакост?

3. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла ABC. Означимо средишта дужи AH, BH, BC и AC, редом, са M_1, M_2, M_3 и M_4. Доказати да је четвороугао $M_1M_2M_3M_4$ правоугаоник.

4. Унутар конвексног четвороугла $ABCD$ дата је тачка N, таква да је четвороугао $ABND$ паралелограм. Ако је $\angle CBN = \angle CDN$, доказати да је $\angle ACD = \angle BCN$.

5. У равни је дато n тачака. Неке од њих су спојене дужима. Доказати да постоје бар две тачке из којих полази једнак број дужи.

2. Разред

1. Нека су p и q реални бројеви. Доказати да неједначина

$$|x^2+px+q| < \frac{1}{2}$$

може имати највише два целобројна решења.

2. Ако су a, b, c и d позитивни реални бројеви, такви да је $a+b+c+d=1$, доказати неједнакост

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)\left(\frac{1}{d}-1\right) \geqslant 81.$$

Када важи једнакост?

3. Одредити све природне бројеве n за које је број $\dfrac{n(n+1)}{2}-1$ прост.

4. Нека је AB тетива круга k, а t_1 и t_2 тангенте на круг k у тачкама A и B. Ако су X, Y и Z подножја нормала из произвољне тачке P круга k, редом на AB, t_1 и t_2, доказати да је $PX = \sqrt{PY \cdot PZ}$.

5. Дат је тетраедар $ABCD$ у коме је $AB \perp CD$. Нека се површине троуглова CAB и DAB односе као $m : n$. Одредити однос у коме симетријска раван диедра који је одређен овим троугловима дели запремину тетраедра $ABCD$.

3. Разред — А категорија

1. Доказати да не постоје међусобно различити природни бројеви x и y, такви да је

$$x^{y^x} = y^{x^y}.$$

2. Наћи све реалне бројеве x за које важи

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots \; 1 + \cfrac{1}{x}}}} = x,$$

где се разломачка црта појављује 1986 пута.

3. На јединичној кружници дато је n тачака. Доказати да збир квадрата свих дужи одређених тим тачкама није већи од n^2.

4. Дата је тачка P унутар троугла ABC. Нека су m, n и p праве симетричне правим AP, BP и CP, редом у односу на симетрале унутрашњих углова код темена A, B и C троугла ABC. Доказати да се праве m, n и p секу у једној тачки.

5. Три играча A, B и C, исте снаге, играју турнир у стоном тенису. Прву партију играју A и B, а C је слободан. Другу партију играју C и победник прве партије. Сваку следећу партију играју победник и слободни из претходне партије. Резултат било које партије не зависи од резултата осталих партија. Турнир се завршава када један од играча добије две партије за редом (победом тог играча). Одредити вероватноћу победе на турниру за сваког играча.

3. Разред — Б категорија

1. Исти као 86.3А.1.

2. Наћи бар један полином с целобројним коефицијентима чији је један од корена број $\sqrt{2} - \sqrt[3]{3}$.

3. Исти као 86.3А.3.

4. Исти као 86.3А.4.

5. Нека су a, b, c, m, n, p цели бројеви. Доказати да је $x = y = z = 0$ једино решење система

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x &= ax + my + z, \\ \tfrac{1}{2}y &= x + by + nz, \\ \tfrac{1}{2}z &= px + y + cz. \end{aligned}$$

4. Разред

1. Исти као 86.3А.1.

2. Исти као 86.3А.2.

3. Исти као 86.3А.3.

4. Из сваког од n шпилова (од којих сваки садржи једнак број црних и црвених карата) случајно се бира по једна карта и тако формира нови шпил који садржи n карата. Затим се из тог шпила случајно бира m карата, једна по једна, са враћањем у шпил. Ако међу m тако бираних карата није било ниједне црне карте, одредити вероватноћу догађаја да шпил од n карата не садржи црних карата.

5. Скуп $M = \{1, 2, 3, \ldots, 2n-1, 2n\}$ представљен је у облику уније скупова $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Претпоставимо да је $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ и $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$. Доказати да је

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k| = n^2.$$

ДВАДЕСЕТДЕВЕТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Аранђеловац, 1987.

1. Разред

1. Наћи сва целобројна решења једначине $xy = x + y + 1$.

2. Доказати да за све природне бројеве n важи неједнакост

$$n^n \geqslant 2^{n-1} \cdot n!.$$

3. На зидовима часовничарске радње налази се 1987 увек тачних сатова. Доказати да за сваку тачку M у унутрашњости радње постоји тренутак када је збир растојања те тачке до центара свих сатова мањи од збира растојања тачке M до врхова свих минутних казаљки.

4. Колико има пермутација бројева 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, таквих да јединица није на првом месту, двојка није на једном од прва два места и тројка није на једном од прва три места?

5. Петоугао $ABCDE$ има једнаке странице, а за његове углове важи

$$\angle A \geqslant \angle B \geqslant \angle C \geqslant \angle D \geqslant \angle E.$$

Доказати да је петоугао правилан.

2. Разред

1. Нека је a природан број, такав да a^{1987} даје остатак 4 при дељењу са 5. Наћи остатак који при дељењу са 5 даје број a.

2. Доказати да за сваки позитиван број x важи

$$\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right] = \left[\sqrt{\sqrt{x}}\right].$$

($[t]$ је највећи цео број не већи од t.)

3. Нека је $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c, x --- реални бројеви). Ако за $|x| \leqslant 1$ важи $|f(x)| \leqslant 1$, доказати да за $|x| \leqslant 2$ важи $|f(x)| \leqslant 7$.

4. Осмоугао $A_1A_2A_3 \ldots A_8$ је уписан у круг и важи $A_1A_2 \parallel A_5A_6$, $A_2A_3 \parallel A_6A_7$, $A_3A_4 \parallel A_7A_8$. Доказати да је $A_8A_1 = A_4A_5$.

5. Дат је тетраедар $ABCD$ чије су стране подударни троуглови са страницама a, b, c. Израчунати запремину октаедра чија су темена средишта ивица датог тетраедра.

3. Разред — А категорија

1. Нека је n природан број и α, β и γ углови троугла. Доказати да је

$$\operatorname{ctg}^n \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}^n \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}^n \frac{\gamma}{2} \geqslant 3^{\frac{n+2}{2}}.$$

2. Дат је тетиван четвороугао $ABCD$. Нека су K, L, M и N, тим редом, подножја нормала из пресека S дијагонала AC и BD на праве AB, BC, CD и DA. Доказати да се у четвороугао $KLMN$ може уписати круг.

3. У простору су дате права p и тачке A и B тако да су праве AB и p мимоилазне. Ако су тачке A и B подједнако удаљене од праве p, доказати да заједничка нормала правих AB и p полови дуж AB.

4. Колико има n-тоцифрених природних бројева чији је збир цифара једнак 11?

5. Дата је петорка $(1, 2, 3, 4, 5)$. Нову петорку формирамо тако што произвољне четири координате старе петорке, означимо их са x, y, z и t, заменимо бројевима

$$\frac{1}{2}(x+y+z-t), \quad \frac{1}{2}(x+y-z+t), \quad \frac{1}{2}(x-y+z+t), \quad \frac{1}{2}(-x+y+z+t).$$

Да ли се вишеструким понављањем овог поступка може добити петорка:

(а) $(-1, 3, 5, 7, 9)$; (б) $(0, 2, 3, 4, 6)$?

3. Разред — Б категорија

1. Исти као 87.3А.1.

2. Дат је тетиван полигон са непарним бројем страница. Ако су му сви унутрашњи углови једнаки, доказати да је он правилан.

3. Доказати да систем једначина

$$|x| + |y| = 1,$$
$$ax + by + c = 0$$

нема решења ако и само ако су сви бројеви $c + a$, $c - a$, $c + b$, $c - b$ истог знака.

4. Исти као 87.3А.4.

5. Исти као 87.3А.5(а).

4. Разред

1. Нека су нуле x_1, x_2, x_3 полинома $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ позитивне. Доказати да је $b^2 = 3ac$ ако и само ако је $x_1 = x_2 = x_3$.

2. Исти као 87.3А.2.

3. Наћи максималну површину ортогоналне пројекције правилног тетраедра ивице a на раван π.

4. Исти као 87.3А.4.

5. Исти као 87.3А.5.

ТРИДЕСЕТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Врање, 1988.

1. Разред

1. Из квадрата димензија 7×7 исечен је један квадратић као на слици. Доказати да се добијена фигура не може поделити на осам подударних делова, тако да је сваки од тих делова унија шест квадратића 1×1.

2. Ако су a, b, c дужине страница троугла, доказати да је

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geqslant 3.$$

3. Нека су L и M редом тачке у којима симетрале унутрашњег и спољашњег угла са теменом C троугла ABC секу праву AB. Ако је $CL = CM$, доказати да је $AC^2 + BC^2 = 4r^2$, где је r дужина полупречника круга описаног око троугла ABC.

4. У равни је дат конвексан четвороугао $ABCD$. Над страницама AB и CD са унутрашње стране и над страницама BC и AD са спољашње стране (у односу на четвороугао $ABCD$) конструисани су редом једнакостранични троуглови ABQ, CDN, BCM и ADP. Доказати да је четвороугао $MQPN$ паралелограм.

5. Одредити све реалне бројеве x за које важи

$$\{x\} = \frac{x + [x] + (x)}{10},$$

где је $[x]$ највећи цео број не већи од x, $\{x\} = x - [x]$ и $(x) = \left[x + \frac{1}{2}\right]$.

2. Разред

1. (а) Дат је квадратни трином $f(x) = ax^2 + bx + c$ такав да за $-1 \leqslant x \leqslant 1$ важи $|f(x)| \leqslant 1$. Доказати да је $|a| \leqslant 2$.

(б) Одредити бар један трином $f(x) = ax^2 + bx + c$, такав да важи $|a| = 2$ и $|f(x)| \leqslant 1$ за $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

2. Ако су α, β и γ углови троугла, доказати да је

$$\frac{\sqrt{\sin\alpha}}{\sqrt{\sin\beta} + \sqrt{\sin\gamma} - \sqrt{\sin\alpha}} + \frac{\sqrt{\sin\beta}}{\sqrt{\sin\gamma} + \sqrt{\sin\alpha} - \sqrt{\sin\beta}} + \frac{\sqrt{\sin\gamma}}{\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt{\sin\beta} - \sqrt{\sin\gamma}} \geqslant 3.$$

3. Круг k_1 додирује круг k изнутра у тачки C. Нека је M произвољна тачка круга k_1 различита од C. Тангента круга k_1 у тачки M сече круг k у тачкама A и B. Доказати да је $\angle ACM = \angle MCB$.

4. Исти као 88.1.5.

5. Нека је $ABCD$ правоугли тетраедар, код кога су сви ивични углови код темена C прави и нека је M тачка која припада страни ABC и једнако је удаљена од ивица AB, BC и CD, а N тачка која припада страни BCD и једнако је удаљена од ивица AB, BC и CD. Ако је $AC = a$, $BC = b$, израчунати дужину дужи MN.

3. Разред — А категорија и 4. Разред

1. У равни је дато $n \geqslant 5$ кругова. Свака три од њих имају заједничку тачку. Доказати да свих n кругова имају заједничку тачку.

2. Унутар квадрата странице 1 налази се проста полигонална линија дужине 1000. Доказати да постоји права која сече ову линију бар у 500 тачака.

3. Нека је (F_n) Фибоначијев низ:

$$F_1 = F_2 = 1, \qquad F_{n+2} = F_n + F_{n+1}, \quad \text{за } n \geqslant 1.$$

Означимо са f_n последњу цифру у декадном запису броја F_n. Да ли постоји

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}{n}\,?$$

4. Доказати да за позитивне бројеве a_1, a_2, ... , a_n важи

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n} a_j \leqslant \frac{1}{\sqrt[n]{n}} + \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Када важи једнакост?

5. Дати су природни бројеви m, n и k. Колико има k-комбинација X елемената скупа $\{1,2,\ldots,n\}$, таквих да за различите елементе x и y скупа X важи $|x-y|>m$?

3. Разред — Б категорија

1. Исти као 88.3А.1.

2. Исти као 88.3А.2.

3. Ако је n природан број и x није целобројни умножак броја π, доказати да је

$$\frac{1}{\cos x+\cos 3x}+\frac{1}{\cos x+\cos 5x}+\cdots+\frac{1}{\cos x+\cos(2n+1)x}=\frac{\operatorname{tg}(n+1)x-\operatorname{tg}x}{2\sin x}.$$

4. Дата је функција $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, таква да за свако $x\in\mathbf{R}$ важи

$$f(x+1)=\frac{f(x)-5}{f(x)-3}.$$

Доказати да је функција f периодична.

5. На колико начина таблица $m\times n$ може да се попуни бројевима 1 и -1, тако да производ бројева у свакој врсти и свакој колони буде -1?

ТРИДЕСЕТПРВО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Светозарево, 1989.

1. Разред

1. Доказати да за све реалне бројеве x такве да је $0<x<1$ и све природне бројеве n важи неједнакост

$$\frac{1-x^{n+1}}{n+1}<\frac{1-x^n}{n}.$$

2. Наћи сва решења једначине

$$\left[\frac{5+6x}{8}\right]=\frac{15x-7}{5},$$

где је $[t]$ ознака за највећи цео број који није већи од t.

3. Дат је квадрат $ABCD$. На страницама BC и CD дате су тачке M и N тако да је $\angle MAN = 45°$. Користећи само лењир, конструисати нормалу из тачке A на праву MN.

4. Нека су M и N подножја нормала из темена A на симетрале спољашњих углова у теменима B и C троугла ABC. Доказати да је дуж MN једнака полуобиму троугла ABC.

5. На једном међународном скупу нашла се група Шпанаца, Финаца, Монгола и Вијетнамаца, укупно 21 особа. Петоро од њих говори шпански, 14 фински, 14 монголски и 10 вијетнамски. Један Шпанац говори само свој матерњи језик. Два Финца говоре монголски и вијетнамски, али не говоре шпански. Од осталих нико не говори више од два језика. Осам људи говори фински и монголски. Колико Шпанаца говори вијетнамски?

2. Разред

1. Одредити сва реална решења једначине

$$19^x \cdot 89^{2-x^2} = 19 \cdot 89.$$

2. Дат је круг $K(O, R)$ и тачка A изван круга. Нека права OA сече круг у тачкама M и N, при чему је тачка M између тачака O и A, и нека је B тачка дужи MO. Ако је $AO \cdot BO = R^2$, доказати да је $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{BM}{BN}$.

3. Нека је $f(x) = \dfrac{4^x}{4^x + 2}$. Израчунати збир

$$f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f\left(\frac{n}{n}\right),$$

где је n природан број.

4. Одредити све вредности реалног параметра a тако да је за све x из интервала $[-1, 1]$ задовољена неједнакост

$$ax^2 + 2(a+1)x + a - 4 \leqslant 0.$$

5. Исти као 89.1.5.

3. Разред — А категорија и **4. Разред**

1. Нека су n и k природни бројеви и $n > 1$. Доказати неједнакост

$$\underbrace{\sqrt[n]{n + \sqrt[n]{n + \cdots + \sqrt[n]{n}}}}_{k} < 2.$$

2. Доказати да за сваки природан број n постоји природан број m и бројеви $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \{-1, 1\}$, такви да важи једнакост

$$n = c_1 \cdot 1^2 + c_2 \cdot 2^2 + \cdots + c_m \cdot m^2.$$

3. На страницама AB и AC троугла ABC дате су редом тачке K и L, такве да важи $\dfrac{KB}{AK}+\dfrac{LC}{AL}=1$. Доказати да тежиште троугла ABC припада дужи KL.

4. Свака страна полиедра обојена је плавом или црвеном бојом, тако да никоје две стране које имају заједничку ивицу нису обојене истом бојом. Ако је плавом бојом обојена већа површина него црвеном, онда се у полиедар не може уписати сфера. Доказати!

5. Колико има пермутација $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ за које збир

$$|p_1-1|+|p_2-2|+\cdots+|p_n-n|$$

има максималну вредност?

3. Разред — Б категорија

1. Исти као 89.3А.1.

2. Исти као 89.3А.2.

3. Исти као 89.3А.3.

4. Доказати да је $\operatorname{tg} 37^\circ 30' = \sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2$.

5. На шаховском првенству школе учествовало је по неколико ученика I и II разреда. Свака два ученика су одиграла по једну партију и ниједна партија није завршена ремијем. Сваки ученик I разреда победио је бар једног и изгубио бар од једног ученика II разреда. Сваки ученик II разреда победио је бар једног и изгубио бар од једног ученика I разреда. Доказати да постоје ученици A_1 и A_2 из I разреда и ученици B_1 и B_2 из II разреда, такви да важи: A_1 је победио B_1 и изгубио од B_2; A_2 је победио B_2 и изгубио од B_1.

ТРИДЕСЕТДРУГО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Кладово, 1990.

1. Разред

1. Одредити све просте бројеве p и q тако да је $p^2-2q^2=1$.

2. У унутрашњости оштроуглог троугла ABC дата је тачка P, тако да је

$$\angle APB=\angle ACB+60^\circ,\quad \angle BPC=\angle BAC+60^\circ,\quad \angle CPA=\angle CBA+60^\circ.$$

Нека су P_a, P_b и P_c подножја нормала из тачке P редом на странице BC, CA и AB троугла ABC. Израчунати углове троугла $P_aP_bP_c$.

3. Доказати да постоји природан број n, такав да је број 3^n-1 дељив са 1990.

4. Наке су h'_a, h'_b и h'_c редом праве симетричне висинама троугла ABC у односу на симетрале углова код темена A, B и C. Доказати да се праве h'_a, h'_b и h'_c секу у једној тачки.

5. Ако је $a+b+c=6$, доказати да је $a^2+b^2+c^2 \geqslant 12$.

2. Разред

1. Ако су бројеви $2a$, $a+b$ и c цели, доказати да квадратни трином ax^2+bx+c за све целобројне вредности x узима целобројне вредности.

2. Конструисати трапез $ABCD$ ($AB \parallel CD$) ако су дате четири тачке M, N, O и P ($MN \perp OP$), тако да су M и N средишта кракова AD и BC, O пресек дијагонала AC и BD, а P тачка праве AB.

3. Нека су a, b, c реални бројеви, такви да једначине $ax^2+bx+c=0$ и $-ax^2+bx+c=0$ имају реална решења. Ако је r било које решење прве, а s било које решење друге једначине ($s>r$), доказати да интервал $[r,s]$ садржи бар једно решење једначине $\frac{a}{2}x^2+bx+c=0$.

4. Решити једначину $2^{x^5}+4^{x^4}+256^4=3\cdot 16^{x^3}$.

5. Нека је ABC правоугли троугао ($\angle C=90^\circ$), CD висина троугла и K тачка равни троугла, таква да је $AK=AC$. Доказати да је пречник круга описаног око троугла ABK, који садржи тачку A, нормалан на праву DK.

3. Разред

1. Нека је $0<a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant e$. Доказати да је

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{e}+\frac{e}{a}\geqslant\frac{a}{e}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{e}{d}.$$

2. Доказати да се сваки троугао може ортогоналним пројектовањем пресликати на једнакостраничан троугао.

3. Нека је n природан број већи од 2. Доказати да је $k=n-1$ најмања вредност природног броја k за коју важи

$$\underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}_{k}>\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n}$$

4. Одредити све тројке (x,y,z) реалних бројева за које важи

$$2x+x^2y=y,\qquad 2y+y^2z=z,\qquad 2z+z^2x=x.$$

5. Доказати да за сваки природан број n једначине $x^2+y^2=n$ и $x^2+y^2=2n$ имају једнак број целобројних решења.

4. Разред

1. Исти као 90.3.1.

2. Исти као 90.3.2.

3. Исти као 90.3.3.

4. Доказати да се полином x^n+4 може представити у облику производа два неконстантна полинома са целим коефицијентима ако и само ако је n дељиво са 4.

5. Изводи се низ независних бацања хомогене коцке за игру чије су стране нумерисане бројевима 1, 2, 3, 4, 5, 6. Израчунати вероватноћу догађаја да ће се шестица појавити два пута узастопно пре него што се непаран број појави три пута узастопно.

ТРИДЕСЕТТРЕЋЕ РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Београд, Сомбор, 1991.

1. Разред

1. Израчунати углове једнакокраког троугла код кога су средишта описаног круга и круга који додирује основицу и продужетке кракова симетрична у односу на основицу троугла.

2. Наћи све просте бројеве p, q, r који задовољавају једначину $p^q + q^p = r$.

3. Нека су A_1, B_1, C_1 подножја нормала конструисаних из произвољне тачке M на странице BC, CA и AB троугла ABC. Доказати да се праве одређене средиштима дужи MA и B_1C_1, MB и C_1A_1, MC и A_1B_1, секу у једној тачки.

4. Наћи све парове природних бројева m, n $(m \neq n)$ за које важи:

(i) аритметичка средина бројева m и n је двоцифрен број;

(ii) ако цифрама тог броја заменимо места, добијамо геометријску средину бројева m и n.

2. Разред

1. Доказати да једначина $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$ има јединствено решење у скупу $\mathbf{N}$, ако и само ако је n прост број.

2. Над страницама оштроуглог троугла ABC, конструисана су споља три међусобно слична троугла AC_1B, BA_1C, CB_1A тако да је

$$\angle AB_1C = \angle ABC_1 = \angle A_1BC; \qquad \angle BA_1C = \angle BAC_1 = \angle B_1AC.$$

Доказати да се кругови описани око троуглова AC_1B, BA_1C и CB_1A секу у једној тачки, која је пресек правих AA_1, BB_1, CC_1.

3. Решити једначину $2x^2 + [x] = x^4$.

4. Нека су M_n и N_n редом тачке на страницама AC и BC троугла ABC, такве да је $CM_n = \dfrac{1}{n}AC$, $CN_n = \dfrac{1}{n+1}BC$ $(n \geqslant 2)$. Доказати да све праве M_nN_n $(n \geq 2)$, пролазе кроз једну утврђену тачку.

3. Разред

1. У равни су дата два коначна скупа тачака A и B. Доказати да постоји полигон такав да су тачке скупа A у његовој унутрашњости а тачке скупа B ван њега.

2. Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао површине S. Доказати да је површина бар једног од троуглова ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB мања или једнака $\frac{1}{6}S$.

3. Одредити углове троугла ако је познато:

(i) један угао троугла је два пута већи од другог;

(ii) тежишна линија из темена трећег угла дели тај угао на два дела од којих је један два пута већи од другог.

4. Ако је функција $f(x) = 1 + a \cdot \cos x + b \cdot \sin x + c \cdot \cos 2x + d \cdot \sin 2x$ $(a, b, c, d \in \mathbf{R})$ позитивна за све реалне бројеве x, доказати да је онда $f(x) < 3$, за све реалне бројеве x.

4. Разред

1. Исти као 91.3.1

2. Нека је

$$\frac{1}{2^{i_1}} + \frac{1}{2^{i_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{i_n}} = 1, \qquad i_1, i_2, \ldots, i_n \in \mathbf{N}$$

и $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_n$. Доказати да постоји k $(1 \leqslant k \leqslant n)$, тако да је

$$\frac{1}{2^{i_1}} + \frac{1}{2^{i_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{i_k}} = \frac{1}{2}.$$

3. Исти као 91.3.2.

4. Скуп од 2^n предмета је подељен на известан број подскупова. Једним потезом могуће је из једног од тих подскупова пребацити у неки други подскуп онолико предмета колико их други већ има. Доказати да се после коначно много потеза сви предмети могу пребацити у један подскуп.

ТРИДЕСЕТЧЕТВРТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Ивањица, Кикинда, 1992.

1. Разред

1. Да ли постоји пет различитих природних бројева таквих да збирови формирани од по два од њих чине 10 узастопних природних бројева?

2. Нека су M, N и P произвољне унутрашње тачке страница BC, CA, AB троугла ABC, редом, и X, Y, Z, редом средишта дужи AM, BN и CP. Доказати да тачке X, Y и Z нису колинеарне.

3. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао и нека су K, L, M и N редом средишта страница AB, BC, CD и DA, а O произвољна тачка у равни четвороугла $ABCD$ различита од њих. Нека су k, l, m и n праве одређене условима: $K \in k$, $k \parallel OM$; $L \in l$, $l \parallel ON$; $M \in m$, $m \parallel OK$; $N \in n$, $n \parallel OL$. Доказати да се праве k, l, m и n секу у једној тачки.

4. У равни је дато n подударних кругова, таквих да никоја два немају заједничких унутрашњих тачака. Доказати да се међу тим круговима може наћи бар један који додирује највише три дата круга.

2. Разред

1. Нека су a и b реални бројеви, такви да је $a^2 \leqslant 2b$. Доказати да за све реалне бројеве x важи

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 \geqslant 0.$$

2. Наћи све просте бројеве p за које је $2p^4 - p^2 + 16$ потпун квадрат.

3. У унутрашњости конвексног петоугла дата је тачка M. За страницу петоугла кажемо да је наспрамна оном темену петоугла које није суседно крајевима те странице. Доказати да је број правих које спајају тачку M са теменима петоугла и немају заједничких тачака са одговарајућим наспрамним страницама паран.

4. Ако ограничена равна фигура има више од једне осе симетрије, доказати да се све осе симетрије секу у једној тачки.

3. Разред

1. Испитати да ли су $\cos\frac{\pi}{9}$, $\cos\frac{5\pi}{9}$, $\cos\frac{7\pi}{9}$ корени полинома $8x^3 - 6x - 1$.

2. Наћи све просте бројеве p и q и целе бројеве r, s веће од 1, такве да је $|p^r - q^s| = 1$.

3. Нека је $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{1992} > 0$. Доказати неједнакост

$$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \cdots + a_{1991}^2 - a_{1992}^2 \geqslant (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{1991} - a_{1992})^2.$$

4. Наћи запремину тетраедра $ABCD$ код кога је $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $CA = BD = c$.

4. Разред

1. Наћи сва целобројна решења једначине

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \cdots + \sqrt{x}}} = y,$$

где се x јавља 1992 пута.

2. Квадратна таблица 3×3 попуњена је бројевима као на слици

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}$$

Таблица се може трансформисати у нову тако што се два броја из суседних поља (тј. оних који имају заједничку страницу) умање за вредност мањег од та два

броја, док се остали бројеви не мењају. Да ли се оваквим трансформацијама може добити таблица попуњена нулама?

3. У тангентном четвороуглу дијагонале су нормалне и једнаке 1. Ако је један угао четвороугла 60°, одредити његове странице.

4. На кругу је дато n ($n \geqslant 3$) тачака нумерисаних на известан начин бројевима 1, 2, ... , n. Колико има лукова датог круга који имају следећа три својства:

(а) крајеви лука су неке од датих тачака;

(б) на луку се осим крајева налази бар још једна од датих тачака;

(в) свака од датих тачака која је на луку, нумерисана је бројем мањим од бројева којим су нумерисани крајеви лука.

ТРИДЕСЕТПЕТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Београд, Ниш, Врбас, 1993.

1. Разред

1. На правој је дат скуп C од 1993 тачке. У једној од њих налази се благо. Једним мерењем могуће је утврдити да ли је благо лево или десно од изабране тачке која не припада скупу C. Колико најмање мерења је потребно да би се сигурно пронашло благо?

2. Одредити једанаест реалних бројева од којих је сваки једнак квадрату збира преосталих десет.

3. У једнакостраничном троуглу ABC дата је тачка O тако да је $\angle AOB = 113^\circ$ и $\angle BOC = 123^\circ$. Израчунати углове троугла чије су странице дужи OA, OB и OC.

4. Доказати да је бар један од природних бројева

$$n, \quad n+1, \quad n+2, \quad n+3, \quad n+4, \quad n+5, \quad n+6, \quad n+7,$$

узајамно прост са сваким од преосталих бројева.

2. Разред

1. Нека су a_1, a_2, ... , a_n реални бројеви такви да је

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n > (n-1)a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказати:

(а) сви бројеви a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ су позитивни;

(б) за све различите $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ вреди $a_i + a_j > a_k$.

2. Нека су a и x реални бројеви такви да је

$$x^3 + x^2(2a-1) + x(a^2+1) + a^2 - a - 2 = 0.$$

Доказати да је $-2 < x < 3$.

3. Нека су m, n природни бројеви за које је $\dfrac{m^2+n^2-m}{mn}$ цео број. Доказати да је m потпун квадрат.

4. Нека је H ортоцентар троугла ABC и нека су D и E пресечне тачке круга чији је пречник AH и страница AB и AC. Доказати да се тангенте круга у тачкама D и E секу на страници BC.

3. Разред

1. Нека су H и O редом ортоцентар и центар описаног круга троугла ABC, Q тачка симетрична тачки H у односу на O и S тежиште троугла ABQ. Доказати да су тачке C, O и S колинеарне.

2. Конвексни n-тоугао је разложен на троуглове. У сваки од тих троуглова уписан је круг. Доказати да је збир полупречника тих кругова већи или једнак од $\dfrac{2P}{s}$, при чему је P површина а s обим n-тоугла.

3. (а) Доказати да је полином $x^3+y^3+z^3-3xyz$ дељив полиномом $x+y+z$.
(б) Решити једначину $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x+3}=0$.

4. Нека је $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}+2\operatorname{arctg}x$. Израчунати $f(1993)$.

4. Разред

1. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви. Доказати да је

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\leqslant\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}.$$

2. За $m\times m$ таблицу попуњену бројевима из скупа $\{1,2,\dots,p\}$ симетрично у односу на главну дијагоналу кажемо да је p-магични квадрат, ако су остаци суме елемената сваке врсте као и сваке колоне при дељењу са p једнаки. Колико има p-магичних квадрата?

3. У равни је дата целобројна мрежа. Доказати да се у унутрашњости сваког конвексног петоугла чија су темена чворови мреже налази бар један чвор мреже.

4. Исти као 93.3.4.

ТРИДЕСЕТШЕСТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Пожаревац, Нови Сад, 1994.

1. Разред

1. Нека је M средиште дијагонале AC правилног шестоугла $ABCDEF$ и N средиште странице DE. Доказати да је троугао MNF једнакостраничан.

2. Дати су реални бројеви a, b, c, p, такви да бројеви a, b и c нису сви међусобно једнаки и да важе једнакости

$$a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}=p.$$

Доказати да је $abc + p = 0$.

3. Колико највише делилаца може да има природан број мањи од 1994?

4. Да ли постоји равна затворена изломљена линија $A_1A_2\ldots A_{2n}$ која не пресеца саму себе, таква да су вектори $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_3A_4}$, $\ldots$, $\overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}}$ истог правца и смера.

2. Разред

1. Да ли постоји коначан скуп S од n $(n > 3)$ тачака у равни, тако да за сваке две тачке $A, B \in S$ постоји тачка $C \in S$, таква да је троугао ABC једнакостраничан?

2. Круг k_1 описан око једнакостраничног троугла ABC додирује споља круг k_2. Доказати да је једна од тангентних дужи конструисаних из тачака A, B, C на круг k_2 једнака збиру друге две.

3. Нека су a, b, c позитивни бројеви. Доказати да интервал

$$\left[ab, (a+c)\left(b+\frac{1}{c}\right)\right]$$

садржи бар један квадрат природног броја.

4. Квадратна таблица $n \times n$ попуњена је тако да је у поље које припада i-тој врсти и j-тој колони уписан број i/j $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n)$. Затим је одабрано n бројева из таблице, тако да је из сваке врсте и сваке колоне одабран тачно један број. Нека је S збир одабраних бројева. Доказати да је

$$n \leqslant S \leqslant \frac{n(n+3)}{4}.$$

3. Разред

1. Да ли троугао може да се разложи на коначан број паралелограма?

2. Дата су четири различита реална броја. Доказати да се међу датим бројевима могу изабрати бројеви x и y тако да је $0 < \dfrac{y-x}{1+xy} \leqslant 1$.

3. Да ли број облика

$$S(n,k) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+13} + \frac{1}{n+26} + \cdots + \frac{1}{n+13k},$$

где су n и k природни бројеви, може да буде природан?

4. Означимо са S_n скуп уређених n-торки које се могу формирати од n узастопних децимала у запису реалног броја a. Доказати следећа тврђења:

(а) Ако за неко n скупови S_n и S_{n+1} имају исти број елемената, онда је a рационалан број.

(б) Ако се у децималама децималног записа реалног броја a појављују све цифре и ако за неко n број елемената у S_n није већи од $n+8$, онда је a рационалан број.

4. Разред

1. Исти као 94.3.1.

2. На основици AB једнакокраког троугла ABC дата је тачка D, таква да је полупречник круга уписаног у троугао BCD једнак полупречнику круга споља уписаног у троугао ACD који додирује страницу AD. Доказати да је висина троугла ABC из темена A четири пута већа од тих полупречника.

3. Исти као 94.3.3.

4. Исти као 94.3.4.

ТРИДЕСЕТСЕДМО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Крушевац, Челарево, 1995.

1. Разред

1. Дата су два концентрична круга k_1 и k_2 полупречника a и b. Од свих правоугаоника чија два темена припадају кругу k_1, а друга два кругу k_2, наћи онај чија је површина највећа и израчунати ту површину.

2. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ $(n > 1)$ природни бројеви такви да је

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Доказати да је $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ сложен број.

3. У троуглу ABC дата је тачка P, таква да је

$$\angle BPC = \angle BAC + 60^\circ, \quad \angle CPA = \angle CBA + 60^\circ, \quad \angle APB = \angle ACB + 60^\circ.$$

Нека су A_1, B_1, C_1 друге пресечне тачке правих AP, BP и CP, редом, са кругом описаним око троугла ABC. Доказати да је троугао $A_1B_1C_1$ једнакостраничан.

4. Ученици једне школе су два пута ишли у позориште. Сваки ученик је био бар на једној представи. Међу ученицима који су били на првој представи било је 60% дечака, а међу ученицима који су били на другој представи било је 75% дечака. Доказати да у тој школи број дечака није мањи од броја девојчица.

2. Разред

1. У равни је дат правоугли координатни систем. Да ли постоји правилан 1995-тоугао чија темена имају целобројне координате?

2. Нека је p прост број и n природан број, такав да је број n^2+n+3 дељив са p. Доказати да постоји природан број k такав да је број k^2+k+25 дељив са p.

3. У квадрату $ABCD$ дата је тачка P, таква да је $AP : BP : CP = 1 : 2 : 3$. Одредити угао $\angle APB$.

4. Дато је пет бројева. Од њих се прави нових пет бројева следећим поступком: међу њима се изаберу четири броја и сваки од њих се замени разликом полузбира изабраних бројева и тог броја; пети број остаје непромењен. Да ли се понављањем овог поступка од полазних бројева 1, 2, 3, 4, 5 могу добити бројеви:

(а) 10, -11, 12, -13, 14; (б) 13, -14, 15, -16, 17?

3. Разред

1. У троуглу јединичне површине дато је 7 тачака од којих никоје три нису на једној правој. Доказати да су неке три од датих тачака темена троугла чија површина није већа од $1/4$.

2. У правоугаоник је уписан четвороугао тако да се на свакој страници правоугаоника налази по једно теме тог четвороугла. Доказати да обим уписаног четвороугла није мањи од збира дијагонала правоугаоника.

3. Дат је скуп X који се састоји од n елемената. Сваком подскупу скупа X придружена је једна од датих p боја. Одредити највећу вредност броја p, тако да за свако придруживање боја подскуповима, постоје скупови $A \subset X$ и $B \subset X$, такви да је сваком од скупова A, B, $A \cap B$, $A \cup B$ придружена иста боја.

4. Ако је d највећи од позитивних реалних бројева a, b, c, d, доказати да је

$$a(d-b)+b(d-c)+c(d-a) \leqslant d^2.$$

4. Разред

1. Исти као 95.3.1.

2. Исти као 95.3.2.

3. Исти као 95.3.3.

4. Низ бројева (a_n) задат је са: $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ и

$$a_{n+3} = \frac{1 + a_{n+1}a_{n+2}}{a_n} \quad \text{за } n \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Доказати да су сви чланови низа (a_n) природни бројеви.

ТРИДЕСЕТОСМО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Нови Сад, 1996.

1. Разред

1. За врхове два стуба висина 11 и 15 метара, који су на растојању од 9 m, закачен је канап дужине 15 m. На канап је окачен тежак тег и пуштен да клизи, све док се тег не нађе у најнижој тачки. На којој висини ће се налазити тада тег?

2. Ако су a, b, c и d позитивни реални бројеви, такви да је $\dfrac{5a+b}{5c+d} = \dfrac{6a+b}{6c+d}$ и $\dfrac{7a+b}{7c+d} = 8$, израчунати $\dfrac{9a+b}{9c+d}$.

3. Нека је n природан број и d делилац броја $2n^2$. Да ли $n^2 + d$ може бити потпун квадрат?

4. Али-Баба се налази у пећини у којој има злата и дијаманата. Килограм злата кошта 20 динара, а килограм дијаманата кошта 60 динара. На располагању му се налази један ковчег. Пун ковчег злата тежи 200 kg, а пун ковчег дијаманата тежи 40 kg. Тежина празног ковчега је занемарљива. Али-Баба може да понесе 100 kg. Колико злата и колико дијаманата треба да понесе Али-Баба да би највише профитирао?

2. Разред

1. Имамо $n+1$ тег укупне тежине $2n$ и теразије са два уравнотежена таса. Тежина сваког од тегова изражава се природним бројем. Тегови се један по један стављају на тас: прво најтежи (или, ако их има више, један од најтежих), затим најтежи од преосталих и тако даље. При томе се сваки следећи тег ставља на онај тас на коме је укупна тежина тегова у том тренутку мања; ако су теразије у равнотежи, онда на произвољну страну. Доказати да ће након стављања свих тегова на тасове на описани начин теразије бити у равнотежи.

2. У скупу природних бројева решити једначину $7^x - 3 \cdot 2^y = 1$.

3. Круг k додирује у тачкама A и C краке угла са теменом B. Тачка D круга k је таква да је $CD \parallel AB$. Дуж BD сече k у тачки E. Доказати да је $CE = \dfrac{1}{2} DE$.

4. Круг k_1 полупречника 1 изнутра додирује круг k_2 полупречника 2. Описати геометријско место тачака у којима се нађе одређена тачка M круга k_1 приликом котрљања круга k_1 по кругу k_2.

3. Разред

1. Наћи све реалне вредности α за које важи: ако су a, b, c странице троугла, онда је

$$a^2 + b^2 + c^2 \leqslant \alpha(ab + bc + ca).$$

2. Нека је билијарски сто облика квадрата чија је страница дужине 1. Ако је кугла упућена као на слици, где је $k = \sqrt{2} - 1$, наћи тачку на ивици билијар стола у којој ће кугла да се одбије стоти пут.

3. За које n постоји конвексан n-тоугао чија је једна страница 1, а све дијагонале су му целобројне?

4. Нека је $ABCD$ произвољан тетраедар и L_1, L_2, L_3 лопте чији су пречници AB, AC, AD, редом. Доказати да је тетраедар $ABCD$ садржан у унији $L_1 \cup L_2 \cup L_3$.

4. Разред

1. На столу се налази 1996 жетона. Два играча узимају жетоне наизменично. Првим потезом први играч узима колико хоће, али не све. У сваком следећем потезу сваки играч може узети само број који је делилац броја жетона које је узео противник у претходном потезу. Како треба да игра први играч да би победио?

2. Исти као 96.3.2.

3. Наћи све функције $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N} \cup \{0\}$ које задовољавају следеће услове:
(1) $f(mn) = f(m) + f(n)$ за свако $m, n \in \mathbf{N}$;
(2) $f(10m + 3) = 0$ за свако $m \in \mathbf{N}$;
(3) $f(10) = 0$.

4. Исти као 96.3.4.

ТРИДЕСЕТДЕВЕТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Београд, 1997.

1. Разред

1. Наћи пет реалних бројева чије су суме (по два) једнаке 0, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 17.

2. Нека је $a = 123456789$ и $b = 987654321$.
1° Наћи НЗД (a, b).
2° Наћи остатак при дељењу броја НЗС (a, b) са 11.

3. Кругови k_1 и k_2 се секу у тачкама A и B. Променљива права која пролази кроз тачку A сече по други пут круг k_1 у тачки P, а круг k_2 у тачки Q. Доказати да симетрале дужи PQ садрже једну утврђену тачку.

4. У равни су дате тачке A и B. Наћи скуп свих тачака M, таквих да се при праволинијском кретању од M ка A растојање MB стално повећава.

2. Разред

1. Нека су a и b реални бројеви за које је $a+b=2$. Доказати да је

$$\min\{|a|,|b|\} < 1 < \max\{|a|,|b|\} \iff a\cdot b \in (-3,1).$$

2. Поља шаховске табле 8×8 нумерисана су бројевима 1, 2, 3, ..., 64. Играчи A и B играју игру у којој наизменично повлаче потезе, а у сваком потезу могу поставити један или неколико жетона на поља шаховске табле по следећем правилу: Играч који је на потезу бира поље шаховске табле на којем се не налази жетон и које је означено, на пример, са n, а затим ставља по један жетон на изабрано поље и свако поље које је слободно и које је нумерисано бројем који није узајамно прост са n. На почетку на табли нема жетона, први потез има играч A, а побеђује играч који последњи стави жетон. Који играч може да победи у овој игри независно од игре противника? Одредити победничку стратегију.

3. Скупштина има 500 посланика и распоређује S динара у буџету на 50 ставки. Сваки посланик предаје свој предлог по ставкама, тако да сума по ставкама не буде већа од S. Скупштина утврђује сваку ставку као број који није већи од предлога бар k посланика за ту ставку. Одредити најмању вредност броја k која гарантује да сума тако добијених ставки не буде већа од S.

4. Дат је троугао ABC са угловима $\angle B = 50^\circ$, $\angle C = 30^\circ$. Тачка M је унутар троугла ABC и задовољава $\angle MBC = 20^\circ$, $\angle MCB = 10^\circ$. Доказати да је $AM \perp BC$.

3. Разред

1. Исти као 97.2.3.

2. Сандук облика квадра $ABCDA_1B_1C_1D_1$ који има димензије $AB=1$, $BC=1$, $AA_1=2$ лежи на доњој страни $ABCD$. У темену A налази се миш који може да се креће по бочним странама сандука и по горњој страни $A_1B_1C_1D_1$. У коју тачку на бочним или горњој страни сандука треба поставити парче сира, тако да је растојање миша од сира највеће могуће. (Растојање је најкраћи пут који миш треба да пређе крећући се по странама квадра.)

3. За природни број n означимо са $f(n)$ производ свих простих бројева мањих или једнаких од n. Доказати да за $n>2$ важи $f(n)>n$.

4. Исти као 97.2.4.

4. Разред

1. Доказати да за сваки природан број n постоји природан број k такав да је

$$\sqrt{k+1996^n}+\sqrt{k}=(\sqrt{1997}+1)^n.$$

2. Исти као 97.3.2.

3. За које вредности реалног параметра a систем

$$\begin{aligned} x+y+z&=1,\\ x^2+y^2+z^2&=1,\\ xyz&=a \end{aligned}$$

има реалних решења?

4. У равни је дато n разних кругова полупречника 1. Доказати да бар на једном од тих кругова постоји лук дужине барем $2\pi/n$ који не сече ниједан од осталих кругова.

ЧЕТРДЕСЕТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Крагујевац, 1998.

1. Разред

1. (а) Раставити на чиниоце израз $x^4+x^2y^2+y^4$.
(б) Испитати да ли је број $9^{1998}+3^{1998}+1$ прост.

2. Нека су a, b, c различити бројеви из $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ и нека је дат израз

$$V(x,y)=\frac{1}{(a-x)^2(a-y)^2}\big((a-b)^2(c-x)(c-y)-(c-a)^2(b-x)(b-y)\big),$$

где $x,y\neq a$. Доказати да постоје изрази $f(x)$ и $g(y)$ (тј. такви да f не зависи од y, а g не зависи од x) тако да се израз $V(x,y)$ може, за свако $x,y\in\mathbf{R}$, $x\neq y$, $x,y\neq a$, приказати у облику

$$V(x,y)=\frac{1}{x-y}(f(x)-g(y)).$$

3. Дат је израз

$$*1*3*3^2*\cdots*3^{1997}*3^{1998}.$$

Аркадије и Бранислав наизменично замењују по једну звездицу са $+$ или са $-$. Бранислав настоји да број који се добије после замене и последње звездице буде дељив са 7. Може ли Аркадије да га спречи у томе ако он први игра?

4. Дат је троугао ABC. Одредити све тачке M у његовој равни тако да троуглови ABM, BCM и CAM имају једнаке површине.

5. Доказати да осмоугао коме су сви унутрашњи углови једнаки и коме су дужине свих страница рационални бројеви има центар симетрије.

2. Разред

1. Испитати да ли је рационалан број

$$\sqrt{15-6\sqrt{6}}+2\sqrt{30-8\sqrt{14}}+\sqrt{10-4\sqrt{6}}+\sqrt{105-28\sqrt{14}}.$$

2. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ позитивни реални бројеви који задовољавају услов $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. Доказати да за сваки позитиван број a важи неједнакост

$$\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2} + \frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3} + \cdots + \frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1} \geqslant \frac{n^2}{2}.$$

Када важи једнакост?

3. Наћи најмањи природан број a за који постоје цели бројеви b и c тако да квадратни трином $ax^2 + bx + c$ има два различита реална корена који припадају интервалу $(0, 1)$.

4. Израчунати површину тетивног осмоугла коме су неке четири странице дужине 3, а преостале четири дужине 2.

5. У једној групи ученика неки од њих се међусобно познају. При томе, два ученика која имају заједничког познаника увек познају различит број ученика те групе. Доказати да постоји ученик који познаје само једног од преосталих ученика.

3. Разред

1. Две равни τ и σ секу се по правој a. Нека је α угао диедра који чине те две равни, а β угао између неке праве p равни τ и праве a. Ако је γ угао између праве p и равни σ, доказати да је

$$\sin\gamma = \sin\alpha \sin\beta.$$

2. Нека је S непразан скуп тачака у равни и a позитиван број. Скуп S_a дефинишемо на следећи начин: тачка A припада скупу S_a ако и само ако постоји тачка $B \in S$ таква да растојање између тачака A и B није веће од a.

(а) Ако скуп S није конвексан, да ли скуп S_a може бити конвексан?

(б) Ако је скуп S конвексан, да ли скуп S_a мора бити конвексан?

3. Доказати да је $\operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ = \operatorname{tg} 80^\circ$.

4. Два круга се секу у тачкама A и B. Нека је C тачка првог круга различита од A, B. Означимо са D тачку пресека праве CA са другим кругом, различиту од A. Нека су M и N средишта лукова BC и BD који не садрже тачку A, а K средиште дужи CD. Доказати да је $\angle MKN$ прав.

5. Дата је функција $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N} \cup \{0\}$ за коју важе следећи услови:

(а) $f(mn) = f(m) + f(n)$, за све $m, n \in \mathbf{N}$;

(б) $f(n) = 0$ за сваки природан број чија је цифра јединица у декадном запису једнака 3;

(в) $f(10) = 0$.

Доказати да је $f(n) = 0$ за сваки природан број n.

4. Разред

1. Решити једначину

$$\cos^2(x \sin x) = 1 + \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1}.$$

2. Исти као 98.3.2.

3. Исти као 98.3.3.

4. Одредити све тројке (a, b, c) природних бројева за које важи $a < b < c$ и

$$ac = b^2, \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{1998}.$$

5. Дат је низ (a_n) помоћу $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 + 1}$ за $n \geqslant 1$. Доказати да је сваки члан тог низа цео број.

ЧЕТРДЕСЕТПРВО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Чачак, 1999.

1. Разред — А категорија

1. Дат је конвексан шестоугао $ABCDEF$. Свака од дијагонала AD и BE дели шестоугао на два дела једнаких површина. Доказати да је четвороугао $BDEA$ трапез.

2. Дат је скуп $A \subset \{1, 2, \ldots, 100\}$ који садржи 10 елемената. Доказати да постоје два дисјунктна и непразна подскупа S и T скупа A тако да је збир елемената скупа S једнак збиру елемената скупа T.

3. Нека је m дати цео број. Доказати да постоји бар један пар (x, y) целих бројева тако да важи

$$2x^2 + 11xy + 12y^2 + 4x + 5y + 6 = 2m.$$

4. У равни су дати кругови k_1, k_2, ... , k_{1999}. Кругови k_1 и k_2 се споља додирују у тачки A_1, k_2 и k_3 у тачки A_2, ... , k_{1999} и k_1 у тачки A_{1999}. Нека је $M_1 \in k_1$ произвољна тачка, M_2 пресечна тачка праве A_1M_1 и k_2, различита од A_1, M_3 пресечна тачка праве A_2M_2 и k_3, различита од A_2, итд, и M_{2000} пресечна тачка праве $A_{1999}M_{1999}$ и круга k_1, различита од A_{1999}. Доказати да су тачке M_1 и M_{2000} дијаметрално супротне на k_1.

5. Природан број $n \geqslant 2$ дели се, редом, свим природним бројевима који су од њега мањи и записују се сви добијени остаци. Наћи све n за које је збир свих различитих остатака једнак n.

1. Разред — Б категорија

1. Исти као 99.1А.1.

2. Доказати да не постоји полином $P(x)$ са целобројним коефицијентима за који је $P(a) = b$, $P(b) = c$, $P(c) = a$, где су a, b, c три различита цела броја.

3. Ако су a, b, c дужине страница троугла, доказати да је вредност израза $(b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2$ негативна.

4. Да ли постоје бројеви m и n такви да су и $m^2 + n$ и $n^2 + m$ квадрати целих бројева? Одговор образложити.

5. Ако је $ad - bc = 1$, доказати да је $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + cd \neq 1$.

2. Разред — А категорија

1. Ако су AA_1, BB_1 и CC_1 висине оштроуглог троугла ABC, а A_2, B_2, C_2 тачке у којима праве AA_1, BB_1, CC_1 секу круг описан око троугла ABC, доказати да је

$$\frac{AA_2}{AA_1} + \frac{BB_2}{BB_1} + \frac{CC_2}{CC_1} = 4.$$

2. Нека су a, b, c реални бројеви, $a \geqslant b \geqslant c > 0$, такви да важи

$$\sqrt{3a(b-c)} - \sqrt{c(a-b)} = 0.$$

Ако су x, y, z, p реални бројеви, одредити којем од скупова $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$, $\mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$, $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ или $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ припада вредност израза

$$f(x,y,z,p) = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}p - i\sqrt{3}\right)\left(-\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}z - iy\right) + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)(2+ip)\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y - iz\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{y}{2} - ix\right)\right].$$

3. На табли је написан израз $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Два ученика играју следећу игру: први избрише произвољан од параметара a, b и c и замени га неким реалним бројем. Затим други то исто уради са неким од преосталих параметара. На крају први замени последњи параметар реалним бројем. Ако добијени полином нема позитивних корена, онда је победио ученик који први игра. У супротном игру добија други ученик. Који од ученика може да победи и како треба да игра?

4. Нека су f и g различити квадратни триноми са најстаријим коефицијентом 1. Ако је

$$f(20) + f(3) + f(1999) = g(20) + g(3) + g(1999),$$

наћи све $x \in \mathbf{R}$ за које је $f(x) = g(x)$.

5. Математичар се изгубио у шуми која покрива област облика бесконачне траке ширине 1 km. Доказати да математичар може изабрати такав начин кретања који ће га извести из шуме после највише $2\sqrt{2}$ km пређеног пута.

2. Разред — Б категорија

1. Исти као 99.2А.1.

2. Исти као 99.2А.2.

3. Решити неједначину $2 \cdot 125^x - 3 \cdot 50^x - 9 \cdot 20^x + 10 \cdot 8^x \leqslant 0$.

4. Да ли је број

$$\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} + 1}{\sqrt{10} - \sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1}$$

рационалан или ирационалан? Одговор образложити.

5. Наћи сва решења једначине $x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4 = 0$.

3. Разред — А категорија

1. У тетраедру $ABCD$ ивица AC је нормална на BC, а AD на BD. Доказати да је косинус угла између правих AC и BD мањи од CD/AB.

2. Нека су z_1 и z_2 комплексни бројеви који задовољавању услове $|z_1 - z_2| = 2$ и $z_1 \cdot z_2 = 1$. Доказати да је четвороугао $ABCD$ чија темена имају комплексне координате -1, z_1, 1, z_2 једнакокраки трапез.

3. Колико се највише једнакокраких крстића површине 5 може изрезати из табле 6×6?

4. У равни је задато n вертикалних и n хоризонталних правих које се секу у n^2 тачака. Праве су обојене плавом, црвеном или зеленом бојом. Нека је пресек две плаве праве плава тачка, две црвене праве црвена тачка, две зелене праве зелена тачка, пресек плаве и црвене праве зелена тачка, црвене и зелене праве плава тачка, а зелене и плаве праве црвена тачка. На тај начин је добијено n^2 обојених тачака. Колико различитих бојења тих тачака добијамо различитим избором бојења правих?

5. Одредити све вредности параметра $a \in \mathbf{R}$ за које су једначине

$$a(2a-1)\sin^3 x + 3\cos^3 x - 2a^2 \sin x = 0$$

и

$$\log_{1/2}(3\operatorname{tg} x - 1) - \log_2(3\operatorname{tg} x + 1) - \log_{1/\sqrt{2}}(5 - \operatorname{tg} x) = 1$$

еквивалентне.

3. Разред — Б категорија

1. Одредити странице неправоуглог троугла чија је површина цео број, а дужине његових страница су три узастопна, најмања могућа парна броја.

2. Дата је права купа полупречника основе R и висине $H = 2R$. Одредити полупречник основе и висину правог ваљка уписаног у ту купу који има највећу површину омотача.

3. Наћи геометријско место тачака симетричних жижи параболе $y^2 = px$ у односу на све тангенте параболе.

4. Доказати да природан број чији је збир цифара једнак 5 не може бити потпун квадрат.

5. Исти као 99.3А.5.

4. Разред — А категорија

1. Нека је ABC троугао са одговарајућим дужинама страница a, b, c. Доказати да у простору постоји тачка D таква да је $DA = \sqrt{bc}$, $DB = \sqrt{ca}$, $DC = \sqrt{ab}$.

2. Нека $S(n)$ означава збир природних делилаца природног броја n (укључујући 1 и n). Нека је n_1, n_2, n_3, ... строго растући бесконачан низ природних бројева, такав да за свако $i \in \mathbf{N}$ важи $S(n_i) - n_i = m$. Одредити m.

3. Дат је низ комплексних бројева a_1, a_2, ... , a_{3^k} који су сви решења једначине $z^3 = 1$. Од датог низа се у сваком кораку формира нови низ a_1a_2, a_2a_3, ... , $a_{3^k}a_1$. Доказати да се после неколико корака овим поступком добија полазни низ.

4. Исти као 99.3А.4.

5. Исти као 99.3А.3.

4. Разред — Б категорија

1. Наћи све полиноме P такве да за сваки реалан број x важи

$$P(x^2+1) = P(x)^2 + 1 \quad \text{и} \quad P(0) = 0.$$

2. Доказати да за $x > 0$ важи $\operatorname{arctg} x < x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5}$.

3. Исти као 99.4А.3.

4. Колико решења у интервалу $[0,1]$ има једначина

$$8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1) = 1?$$

5. Исти као 99.3А.5.

ЧЕТРДЕСЕТДРУГО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Панчево, 2000.

1. Разред — А категорија

1. Нека је $ABCD$ паралелограм. Ако је E тачка у равни таква да је $EA \perp AB$ и $EC \perp CB$, доказати да су углови AED и CEB подударни.

2. Дат је оштроугли троугао ABC. Конструисати (лењиром и шестаром) унутар овог троугла тачку P такву да пресеци полуправих AP, BP и CP са описаним кругом око троугла ABC буду темена једнакостраничног троугла.

3. Нека су a_1, a_2, ... , a_n позитивни реални бројеви чији је збир 1. Ако је

$$S = \frac{a_1^2}{2a_1} + \frac{a_1a_2}{a_1+a_2} + \cdots + \frac{a_1a_n}{a_1+a_n} + \frac{a_2a_1}{a_2+a_1} + \frac{a_2^2}{2a_2} + \cdots + \frac{a_2a_n}{a_2+a_n} + \cdots + \frac{a_na_1}{a_n+a_1} + \frac{a_na_2}{a_n+a_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{2a_n}$$

(S је збир свих израза облика $\dfrac{a_ia_j}{a_i+a_j}$ за $1 \leqslant i, j \leqslant n$), доказати да је $S \leqslant \dfrac{n}{2}$.

4. На острву има 45 камелеона: 17 жутих, 15 сивих и 13 плавих. Они лутају острвом сусрећући се повремено. При савком сусрету присутна су само

два камелеона. Ако се сретну два камелеона исте боје, њихова боја остаје непромењена. Ако се сретну два камелеона различите боје, оба мењају боју у трећу (нпр. ако се сретну жути и сиви камелеон, оба мењају боју у плаву). Може ли се десити да од једног момента (па надаље) сви камелеони на острву имају исту боју?

5. Нека су a, b, c, d, x, y позитивни реални бројеви за које је $a+2ay+y=b+2bx+x$ и $x+2xd+d=y+2yc+c$. Доказати да важи $a+2ad+d=b+2bc+c$.

1. Разред — Б категорија

1. Одредити све функције $f\colon \mathbf{N}\to\mathbf{N}$ такве да је $f(1)=1$ и $f(f(n)+n)=f(n)$ за свако $n\in\mathbf{N}$.

2. Наћи све тројке целих бројева (x,y,z) које задовољавају следеће две једначине

$$x+y+z=0$$
$$x^3+y^3+z^3=-18$$

3. Дат је четвороугао $ABCD$. Средишта страница AD и BC означена су, редом, са M и N. Ако права BD полови дуж MN, доказати да полови и дијагоналу AC овог четвороугла.

4. Наћи сва целобројна решења једначине $x^{2000}+px^{1999}+q=0$, где су p и q непарни цели бројеви.

5. Ако се у датом троуглу саберу по две висине, три тако добијена збира су у односу $27:32:35$. Одредити највећи угао овог троугла.

2. Разред — А категорија

1. Дат је троугао ABC. Тачка D се налази на полуправој BA тако да је $BD=BA+AC$, док тачке K и M припадају страницама BA и BC, редом, тако да троуглови BDM и BCK имају једнаке површине. Ако је $\angle BAC=\alpha$, одредити $\angle BKM$.

2. Доказати да за позитивне реалне бројеве a_1, a_2, a_3, a_4 важи неједнакост

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+a_4}+\frac{a_2}{a_3+a_4+a_1}+\frac{a_3}{a_4+a_1+a_2}+\frac{a_4}{a_1+a_2+a_3}\geqslant\frac{4}{3}$$

и да једнакост важи ако и само ако је $a_1=a_2=a_3=a_4$.

3. Ако су a и b дати реални бројеви, наћи све парове (x,y) реалних бројева који задовољавају следећи систем једначина

$$x^3y+xy^3=ax+by$$
$$2x^2y^2=bx+ay$$

4. Колико има пермутација $f\colon\{1,2,\ldots,n\}\to\{1,2,\ldots,n\}$ таквих да за свако $j\in\{1,2,\ldots,n\}$ важи $f(j)\leqslant j+1$?

5. Дат је правоугли троугао ABC са правим углом код темена B. Трисектрисе угла код темена A (полуправе које га деле на три подударна угла) деле наспрамну катету BC на три дужи, од којих је најдужа двоструко дужа од најкраће. Одредити углове троугла ABC.

2. Разред — Б категорија

1. Решити систем једначина

$$\begin{aligned} 2x_1^4 &= x_2^2(1+x_1^4) \\ 2x_2^4 &= x_3^2(1+x_2^4) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ 2x_n^4 &= x_1^2(1+x_n^4) \end{aligned}$$

($x_1, \dots, x_n$ су реални бројеви).

2. Решити једначину $4x^2 - 40[x] + 51 = 0$, где је са $[x]$ означен највећи цео број који није већи од x.

3. На вертикалном торњу висине H налази се антена висине h ($h > H$). Колико далеко од подножја торња мора да стане посматрач да би торањ и антену видео под једнаким угловима?

4. Ако је n природан број већи од 1 и $x = \dfrac{1+n^2}{2n}$, доказати да је вредност израза

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$$

цео број.

5. Доказати једнакост $\left(\sqrt[5]{\dfrac{1}{5}} + \sqrt[5]{\dfrac{4}{5}}\right)^{1/2} = (1 + \sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{8})^{1/5}$.

3. Разред — А категорија

1. Дати су природни бројеви q, n и r, $0 < r \leqslant n$. Доказати да $r!$ дели број $(q^n - 1)(q^n - q)\cdots(q^n - q^{n-1})$.

2. За какве $a, b \in \mathbf{R}$ систем једначина

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= a \\ \sin x + \sin y &= b \end{aligned}$$

има решења?

3. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Израчунати угао између равни AB_1C_1 и A_1B_1C.

4. Нека је k природан број већи од 1. Низ $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ задат је са:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = k, \qquad x_n = kx_{n-1} - x_{n-2} \quad (n > 2).$$

Доказати да за свако $n \in \mathbf{N}$ постоји $m > n$ такво да су $x_m - 1$ и x_n узајамно прости.

5. Наћи максималну вредност детерминанте трећег реда у којој су тачно два елемента једнака 4, а остали су из скупа $\{1, -1\}$.

3. Разред — Б категорија

1. Да ли постоје четири тачке A, B, C, D у простору тако да важи: $AB = CD = BD = 4$, $AC = 3$ и $BC = AD = 5$?

2. У троуглу ABC са оштрим углом код темена C, над средњом линијом DE паралелном AB као над пречником конструисан је круг који сече странице AC и BC, редом, у тачкама M и N. Изразити дужину дужи MN преко $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$.

3. Доказати да растојања произвољне тачке круга описаног око квадрата до четири темена тог квадрата не могу сва бити рационални бројеви.

4. Ако су x, y, z позитивни реални бројеви различити од 3 и ако је $y = 3^{\frac{1}{1-\log_3 x}}$ и $z = 3^{\frac{1}{1-\log_3 y}}$, доказати да је $x = 3^{\frac{1}{1-\log_3 z}}$.

5. Исти као 00.3А.5.

4. Разред — А категорија

1. Исти као 00.3А.1.

2. Исти као 00.3А.2.

3. Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост

$$\{n\sqrt{2}\} > \frac{1}{2n\sqrt{2}}$$

(са $\{\alpha\}$ је означен разломљени део броја α, тј. $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$, где је $[\alpha]$ највећи цео број који није већи од α).

4. Под *одстојаем тачке M од фигуре* Φ подразумева се најмање од растојања MN, где $N \in \Phi$. Ако је дат троугао ABC, доказати да је скуп тачака равни које су ближе тачки A него затвореној дужи BC, у односу на горе дефинисано одстојање, конвексан.

5. Описати све непразне, коначне подскупове S интервала $[0, +\infty)$ такве да за свака два (не обавезно различита) елемента $x, y \in S$ важи $x + y \in S$ или $|x - y| \in S$.

4. Разред — Б категорија

1. Дата је функција f која свакој тачки неке равни додељује по један реалан број. Познато је да је збир вредности ове функције у теменима ма ког правилног многоугла те равни једнак нули. Доказати да функција f има вредност 0 у свакој тачки.

2. Наћи све природне бројеве x и y за које важи $x^3 - y^3 = xy + 25$.

3. Дате су функције

$$f(x) = \operatorname{arctg} x^2 \quad \text{и} \quad g(x) = \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} - 1) - \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} + 1) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Доказати да је разлика ових функција константа и одредити ту константу.

4. У квадратној таблици $n \times n$ уписани су бројеви $1, 2, \ldots, n^2$, редом (у првом реду, редом: $1, 2, \ldots, n$; у другом: $n+1, n+2, \ldots, 2n$; $\ldots$; у последњем: $n^2 - n + 1, n^2 - n + 2, \ldots, n^2$). Изабрано је n од ових бројева тако да никоја два нису у истом реду или у истој колони таблице. Доказати да сума изабраних бројева не зависи од њиховог избора и одредити ту суму.

5. У равни су дате две различите тачке A и B. Одредити геометријско место тачака M у тој равни за које важи

$$AM \cdot BM \cdot \cos\angle AMB = \frac{3}{4}\, AB^2.$$

ЧЕТРДЕСЕТТРЕЋЕ РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Београд, 2001.

1. Разред — А категорија

1. Да ли се првих 100 природних бројева могу поделити у три групе, тако да је збир бројева прве дељив са 102, збир бројева друге дељив са 203, а збир бројева треће дељив са 304?

2. Дат је оштроугли троугао ABC. Нека је BK, $K \in AC$, симетрала његовог унутрашњег угла у темену B, CD висина, $N \in CD$ тачка таква да је $KN \perp BC$, и $\{M\} = BK \cap CD$. Ако је P пресечна тачка круга описаног око троугла BKN и праве AB, $P \neq B$, доказати да је $PK = PM$.

3. Нека су a, b, c позитивни бројеви, такви да је $a > c$ и $b > c$. Доказати да је

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leqslant \sqrt{ab}.$$

4. Дата је кружница k полупречника 31 mm и изломљена линија l дужине 61 mm, којој се обе крајње тачке налазе на тој кружници. Доказати да постоји права p која садржи центар кружнице k, таква да се све тачке изломљене линије l налазе са исте стране праве p.

5. Дат је скуп $\mathcal{A}$ од 2000 тачака у равни, тако да међу њима не постоје три колинеарне. Доказати да се ове тачке могу спојити са 1000 плавих, 1000 црвених и 1000 жутих дужи, тако да важи:

(1) свака тачка скупа $\mathcal{A}$ спојена је са тачно 3 друге тачке скупа $\mathcal{A}$;

(2) из сваке тачке скупа $\mathcal{A}$ полазе дужи три различите боје;

(3) дужи различитих боја немају заједничких унутрашњих тачака.

1. Разред — Б категорија

1. Ако је $x = \frac{b}{c} + \frac{c}{b}$, $y = \frac{a}{c} + \frac{c}{a}$, $z = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ $(abc \neq 0)$, доказати да вредност израза $x^2 + y^2 + z^2 - xyz$ не зависи од a, b, c.

2. Кружница уписана у троугао ABC додирује странице BC и BA редом у тачкама M и N. Ако је K пресечна тачка симетрале угла BAC са правом MN, израчунати угао AKC.

3. Домаћица је направила торту округлог облика, али не зна тачно колико ће имати гостију -- троје или четворо. Који је најмањи број праволинијских резова торте које она треба да направи пре него што дођу гости, тако да у сваком случају, без допунских резова, сваки гост може да добије једнаку количину торте?

4. Производ природних бројева x и y је троцифрен број са једнаким цифрама, а њихов збир је двоцифрен, такође са једнаким цифрама. Наћи све такве бројеве x и y.

5. Исти као 01.1А.5.

2. Разред — А категорија

1. Одредити скуп свих реалних вредности параметра a за које неједначина

$$x^2 - a(a+1)x + a^3 \leqslant 0$$

ома тачно пет целобројних решења.

2. Наћи два седмоцифрена броја, таква да су њихов збир, њихова разлика и збир цифара једног од њих, факторијели неких бројева.

3. Свака дијагонала конвексног петоугла одсеца троугао јединичне површине. Израчунати површину тог петоугла.

4. На полукружници полупречника 1 са пречником AD дате су тачке B и C. Доказати да важи $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AB \cdot BC \cdot CD = 4$.

5. Да ли се бројеви 1, 2, ... , 2001 могу поређати по кругу, тако да разлика свака два суседна броја припада интервалу $[500, 999]$?

2. Разред — Б категорија

1. Исти као 01.2А.1.

2. У равни су дате кружнице k_1 и k_2 са центрима O_1 и O_2. Полуправе O_1a и O_1b додирују кружницу k_2 и секу k_1 у тачкама A и B, а полуправе O_2c и O_2d додирују k_1 и секу k_2 у тачкама C и D. Доказати да је $AB = CD$.

3. Исти као 01.1А.3.

4. Одредити све вредности реалног параметра a тако да једначина

$$4^x - (a+3)2^x + 4a - 4 = 0$$

има тачно једно реално решење.

5. Да ли је број

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{9\sqrt{8}+8\sqrt{9}}$$

рационалан или ирационалан? Одговор образложити.

3. Разред — А категорија

1. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 &= 0 \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 &= 0 \\ x^3 - 9z^2 + 27z &= 27. \end{aligned}$$

2. Ако су a, b и c дужине страница, P површина и s полуобим неког троугла, доказати да важи неједнакост

$$3^{500}(a^{2001} + b^{2001} + c^{2001}) \geqslant 2^{2001} \cdot P^{2001} \cdot s.$$

3. Доказати да је мерни број површине нормалне пројекције јединичне коцке на произвољну раван α једнак мерном броју дужине нормалне пројекције коцке на праву n нормалну на α.

4. На табли је написан природан број a. Дозвољено је додати том броју неки његов делилац различит од тог броја и јединице. На добијени број дозвољено је применити исту процедуру, итд. Одредити све бројеве који се на тај начин могу добити полазећи од броја $a = 4$.

5. Наћи све функције $f\colon \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$, такве да је $2f(x) = f(x-y) + f(x+y)$, за све $x, y \in \mathbf{Q}$.

3. Разред — Б категорија

1. Доказати да је

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leqslant \frac{1}{2},$$

за све реалне бројеве x и y.

2. Странице троугла су три узастопна природна броја, а један од углова троугла је два пута већи од једног од преостала два угла. Одредити дужине страница тог троугла.

3. Исти као 01.3А.3.

4. Ако су a, b, c дужине страница троугла, доказати да је трином

$$ax^2 + (b - c - a)x + c$$

позитиван за све реалне бројеве x.

5. Нека су a, b, c међу собом различити реални бројеви који су различити од нуле. Доказати да је вредност детерминанте

$$\begin{vmatrix} \frac{a}{b} & \frac{b}{c} & \frac{c}{a} \\ a & b & c \\ ab & bc & ca \end{vmatrix}$$

различита од нуле.

4. Разред — А категорија

1. Колико има функција $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, таквих да за свако $n \in \mathbf{N}$ важи $f(n) > 1$ и $f(n+3)f(n+2) = f(n+1) + f(n) + 36$?

2. Исти као 01.3А.2.

3. Исти као 01.3А.3.

4. У кутији се налазе 4 куглице нумерисане бројевима 1, 2, 3, 4. Два играча играју игру у којој наизменично насумице бирају са враћањем једну куглицу из кутије. Избори су међусобно независни, а свака куглица има вероватноћу $1/4$ да буде изабрана у сваком кораку. Игра се завршава у тренутку када је збир свих до тада изабраних бројева дељив са 3, победом играча који је последњи бирао куглицу. Одредити вероватноћу догађаја да се игра заврши победом играча који је први бирао куглицу.

5. Дати су реални бројеви x и r, $|r| \leqslant \frac{1}{2}$. Низ (s_n) задат је са:

$$s_1 = \frac{1}{2}, \quad s_n = s_{n-1} + r^{n-1}\cos(2^{n-2}x), \quad n \geqslant 2.$$

Доказати да су сви чланови тог низа ненегативни.

4. Разред — Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned} x + y + z &= \frac{7}{2} \\ x^2 + y^2 + z^2 &= \frac{41}{4} \\ x^2y^2z + xy^2z^2 + x^2yz^2 &= -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

2. Дат је природан број a и аритметички низ a, $3a$, $5a$, $7a$, $\ldots$. Чланови тог низа груписани су на следећи начин: прву групу чине првих a чланова низа,

другу следећих $2a$ чланова, трећу следећих $3a$ чланова, итд. Доказати да је збир елемената у свакој групи једнак кубу броја елемената те групе.

3. Исти ка 01.3А.3.

4. Дата је функција $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, таква да је $f(f(m)+f(n)) = f(f(m))+f(n)$, за све природне бројеве m и n. Ако је $f(1) = 29$ и $f(29) = 58$, израчунати $f(2001)$.

5. Дата је реална функција $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, где су a, b, c, d дати реални бројеви, $ad - bc \neq 0$. Доказати да је ова функција једнака својој инверзној функцији ако и само ако важи $a + d = 0$.

ЧЕТРДЕСЕТЧЕТВРТО РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
Ужице, 2002.

1. Разред — А категорија

1. Дат је полином $p(x)$ са целобројним коефицијентима. При дељењу полиномом $x^2 - 12x + 11$, $p(x)$ даје остатак $990x - 889$. Доказати да $p(x)$ нема ниједну нулу у скупу целих бројева.

2. Дат је троугао ABC и тачке M, N, P на његовим страницама AB, BC, CA редом, такве да је четвороугао $AMNP$ паралелограм. Посматрајмо кругове описане око троуглова MBN и NCP. Нека су t_1 и t_2 њихове тангенте у тачкама M и P редом. Доказати да је $t_1 \parallel t_2$.

3. Дати су реални бројеви a, b, c, d за које важи

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2, \quad ab + cd > 0, \quad ac + bd > 0.$$

Доказати да је $ad + bc > 0$.

4. Дат је троугао ABC. Посматрајмо праве које секу странице AC и BC у тачкама M и N редом, тако да је $MN = AM + BN$. Доказати да постоји круг k који додирује све такве праве.

5. Нека је $S(n)$ збир, а $P(n)$ производ цифара природног броја n. Наћи све природне бројеве за које је $S(n) + P(n) = n$.

1. Разред — Б категорија

1. Одредити све просте бројеве p за које су бројеви $p^3 + 6$ и $p^3 - 6$ прости.

2. Исти као 02.1А.2.

3. Дати су позитивни бројеви a, b, c. Ако је $a^2 + b^2 + c^2 = \dfrac{5}{3}$, доказати да је

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} < \frac{1}{abc}.$$

4. Исти као 02.1А.4.

5. Дат је скуп $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, \ldots, 2002\}$. Колико има подскупова $\mathcal{B}$ скупа $\mathcal{A}$ са следећим својством: ако $x \in \mathcal{B}$ и $y \in \mathcal{B}$, онда $x + y \neq 2003$?

2. Разред — А категорија

1. Наћи све вредности реалног параметра a тако да систем

$$\begin{aligned} axy + x - y + \frac{3}{2} &= 0 \\ x + 2y + xy + 1 &= 0 \end{aligned}$$

има јединствено решење у скупу реалних бројева.

2. Дат је конвексан петоугао $ABCDE$. Ако је $AB = 5$, $BC = 6$, $CD = 10$, $DE = 7$ и $AE = 9$, доказати да се у тај петоугао не може уписати круг.

3. У скупу целих бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 3. \end{aligned}$$

4. Нека је a_1, a_2, $\ldots$, a_{99} низ цифара за који важи: ако је $a_n = 1$, онда $a_{n+1} \neq 2$, и ако је $a_n = 3$, онда $a_{n+1} \neq 4$. Докзати да постоје $k, l \in \{1, 2, \ldots, 98\}$, $k \neq l$, такви да је $a_k = a_l$ и $a_{k+1} = a_{l+1}$.

5. Дат је троугао ABC. На правим AC, AB, BC дате су тачке A_1, B_1, C_1 редом, тако да важе распореди: C--A--A_1, A--B--B_1, B--C--C_1. Ако је

$$AA_1 : BB_1 : CC_1 = \frac{AB}{BC} : \frac{BC}{AC} : \frac{AC}{AB},$$

доказати да су троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ слични.

2. Разред — Б категорија

1. Исти као 02.2А.1.

2. Дат је трапез $ABCD$, $AB \parallel CD$. Нека је $\{S\} = AC \cap BD$, и p права која садржи тачку S и паралелна је основицама трапеза. Ако су M и N пресечне тачке праве p са крацима трапеза, доказати да је S средиште дужи MN.

3. Дати су позитивни реални бројеви a и b, $a + b = 1$. Ако су бројеви a^3 и b^3 рационални, доказати да су и бројеви a, b такође рационални.

4. Исти као 02.2А.4.

5. Дат је троугао ABC. Нека су A_1, B_1 средишта страница BC, AC редом, и T његово тежиште. Ако се у четвороугао B_1TA_1C може уписати круг, доказати да је троугао ABC једнакокрак.

3. Разред — А категорија

1. Наћи све природне бројеве n за које је број $2^n - 1$ дељив са n.

2. Дати су комплексни бројеви a, b, c и полином x^3+ax^2+bx+c. Доказати да важи бар једна од следеће четири неједнакости:

$$|P(1)| \geqslant 1, \quad |P(-1)| \geqslant 1, \quad |P(i)| \geqslant 1, \quad |P(-i)| \geqslant 1.$$

3. Дат је тетраедар $SABC$ код кога је троугао ABC оштроугли и $SA = SB = SC$. Доказати да се тај тетраедар може исећи на коначно много полиедара од којих се може сложити тетраедар подударан са $SABC$, али супротне оријентације.

4. Доказати да постоји природан број n коме су последње четири цифре једнаке 2002, такав да број n^{2002} почиње цифрама 2002.

5. Дати су природни бројеви m, n. Правоугаоник чије су странице једнаке m и n издељен је на mn јединичних квадратних поља. За неку праву кажемо да сече неко поље ако садржи бар једну његову унутрашњу тачку. Колико највише поља овог правоугаоника може да сече нека права?

3. Разред — Б категорија

1. Нека су α и β оштри угливи неког троугла. Ако је

$$\sin(\alpha+\beta) - 1 = \sin^2\alpha - \cos^2\beta,$$

доказати да је трећи угао тог троугла прав.

2. У троуглу ABC, странице AC и BC су подударне и $\angle BCA = 100^\circ$. Унутар тог троугла уочена је тачка M таква да је $\angle MAB = 30^\circ$ и $\angle MBA = 20^\circ$. Одредити $\angle ACM$.

3. Исти као 02.3А.3.

4. Исти као 02.3А.4.

5. Дати су природни бројеви a, b, c. Доказати да је вредност

$$\frac{1}{2abc}\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

куб неког природног броја.

4. Разред — А категорија

1. Нека су f и g не-нула полиноми истог степена, са целобројним коефицијентима. Ако је $f(n)$ дељиво са $g(n)$ за свако $n \in \mathbf{N}$, доказати да постоји такво $c \in \mathbf{Z}$ такво да је $f(x) = cg(x)$ за свако $x \in \mathbf{R}$.

2. Доказати да је број

$$\left[\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})^{2002}\right] + 1$$

дељив са 7. ($[x]$ је највећи цео број који није већи од x.)

3. Дат је триедар са врхом O и тачке A, B, C на његовим ивицама које су једнако удаљене од тачке O. Нека је S центар лопте уписане у тај триедар. Доказати да је вектор $\overrightarrow{OS}$ колинеаран са вектором

$$\sin(\angle BOC)\cdot\overrightarrow{OA}+\sin(\angle COA)\cdot\overrightarrow{OB}+\sin(\angle AOB)\cdot\overrightarrow{OC}.$$

4. У кутији се налази једна плава и 99 црвених куглица. Из кутије се случајно бирају куглице једна за другом и остављају ван кутије, све док се не изабере куглица (означимо је са A) која се по боји разликује од претходно изабране куглице. Куглица A се враћа у кутију и експеримент почиње из почетка. Процес се наставља све док се не узму све куглице. Избори куглица су међусобно независни. Колика је вероватноћа да је последња изабрана куглица плава?

5. Доказати да се у координатној равни може нацртати кружница која не пролази ни кроз једну тачку са целобројним координатама, а у чијој се унутрашњости налазе тачно 2002 такве тачке.

4. Разред — Б категорија

1. Шта је веће, $\dfrac{2}{201}$ или $\ln\dfrac{101}{100}$? Образложити одговор.

2. Дати су бројеви $z\in\mathbf{C}$, $z\neq 1$ и $n\in\mathbf{N}$, $n\geqslant 2$. Ако је $z^n=1$, доказати да је $1+2z+3z^2+\cdots+nz^{n-1}=\dfrac{n}{z-1}$.

3. Исти као 02.4А.3.

4. Одредити сва реална решења система једначина

$$\frac{2x_1^2}{1+x_1^2}=x_2,\quad \frac{2x_2^2}{1+x_2^2}=x_3,\quad \ldots,\quad \frac{2x_n^2}{1+x_n^2}=x_1.$$

5. Исти као 02.4А.5.