ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
Материјали за младе математичаре, св. 45

ТАНГЕНТА 10

Збирка решених задатака објављених у рубрици

Задаци из математике

часописа „**Тангента**“ 1995–2005. године

Б Е О Г Р А Д
2006

ТАНГЕНТА 10

Материјали за младе математичаре, свеска 45

Редактори: *др Ратко Тошић,* професор ПМФ у Новом Саду,
мр Небојша Икодиновић, асистент ПМФ у Крагујевцу,
мр Марија Станић, асистент ПМФ у Крагујевцу,
мр Слађана Димитријевић, асистент ПМФ у Крагујевцу

Издавач: ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
Београд, Кнеза Михаила 35/IV
`www.matf.bg.ac.yu/dms` E-mail: `dms@matf.bg.ac.yu`

За издавача: *др Бранислав Поповић*
Рецензенти: *мр Ђорђе Кртинић, Јасмина Мицић*
Уредник: *др Зоран Каделбург*
Слог: *редактори*
Цртежи: *мр Марија Станић*

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

51(076)

ТАНГЕНТА 10 : збирка задатака објављених у рубрици Задаци из математике часописа „Тангента“ 1995–2005. године / [уредник Зоран Каделбург ; цртежи Марија Станић]. – Београд : Друштво математичара Србије, 2006 (Крагујевац : Сквер). – 241 стр. : граф. прикази ; 24 cm – Материјали за младе математичаре ; св. 45)

Тираж 1000. – Стр. 5–6: Предговор / редактори [Ратко Тошић . . . и др.].

ISBN 86–81453–56–4
1. Каделбург, Зоран
а) Математика – Задаци
COBISS.SR–ID 127668492

ISBN 86–81453–56–4

Тираж: 1000 примерака

Штампа: „Сквер“, Крагујевац

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ТАНГЕНТА 10

Збирка задатака објављених у рубрици

Задаци из математике
часописа **Тангента**

Београд
2005

Редактори:

др Ратко Тошић, професор Природно–математичког факултета у Новом Саду
мр Небојша Икодиновић, асистент Природно–математичког факултета у Крагујевцу
мр Марија Станић, асистент Природно–математичког факултета у Крагујевцу
мр Слађана Димитријевић, асистент Природно–математичког факултета у Крагујевцу

С А Д Р Ж А Ј

П Р Е Д Г О В О Р

Ова збирка садржи 483 задатака који су се појавили у рубрици **Задаци из математике** часописа **Тангента**, за првих 10 година излажења часописа, односно закључно са 40. бројем часописа. Обзиром да су се током десет година смењивали чланови редакција који су уређивали ову рубрику, неколико задатака се поновило. Ти задаци су замењени сличним задацима.

Самостално решавање задатака из ове збирке представља најбољи начин припреме ученика за домаћа и међународна такмичења из математике. Иначе, од школске 2005/2006. године на свим нивоима математичких такмичења ће се обавезно јављати одређен број задатака из часописа **Тангента**.

Размишљајући о математичким проблемима и њиховом решавању, веома је важно и за ученике и за њихове наставнике да схвате да иза коначних решења која се дају у књигама стоје гомиле одбаченог папира и многи неуспешни покушаји. Коначно решење често је клинички прецизно у поређењу са менталном конфузијом из које је проистекло. Зато је важно рвати се са проблемом самостално пре него се упознате са готовим решењем. Само на тај начин може се стећи представа о суштини проблема, развити извесна сопствена идеја решења и схватити у чему се крију тешкоће. Мало је користи од читања туђих решења ако претходно нисте уложили довољно напора да задатак решите самостално, чак и ако су ти напори били неуспешни. Из искуства које стичемо решавањем проблема рађа се разумевање мотивације у избору одређеног приступа, који води задовољавајућем решењу проблема.

Сви задаци у овој збирци су дати са решењима, али је избегавано сувишно детаљисање, како би се сваком читаоцу оставио простор да у извесној мери учествује у обликовању решења.

Бићемо захвални читаоцима који нам укажу на недостатке, како би они били отклоњени у евентуалном другом издању.

Редактори

1. ЗАДАЦИ

1. Часопис ***„Тангента“*** ће, почев од 1995. године, излазити бар 4 пута годишње. Ако бројеви буду нумерисани са $1, 2, 3, \ldots$, доказати да ће наступити тренутак када ће се број часописа поклопити са годином у којој је изашао.

2. Ако је разлика кубова два узастопна природна броја једнака n^2, тада је број n једнак збиру квадрата нека два природна броја. Доказати.

3. Производ полинома $P(x)$ и $Q(x)$ са целобројним коефицијентима је полином чији су сви коефицијенти дељиви са 5. Доказати да су сви коефицијенти бар једног од полинома $P(x)$ и $Q(x)$ дељиви са 5.

4. Доказати да за сваки реалан број x важи неједнакост $\sin(\cos x) < \cos(\sin x)$.

5. Нека је A центар произвољног поља шаховске табле 8×8. Обележимо са b и c збирове квадрата растојања тачке A од центара свих белих односно свих црних поља. Доказати да је $b = c$.

6. У једнакокраком троуглу ABC ($|AC| = |BC|$) је $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = 40°$. Симетрала угла A сече крак BC у тачки D. Доказати да је $|AD|+|DC| = |AB|$.

7. Може ли раван да се покрије кружницама, тако да кроз сваку тачку пролазе тачно 1994 кружнице?

8. Да ли постоји просторни петоугао чије су све странице једнаке и сви углови које образују суседне странице прави? Шта се може рећи у случају $n-$угла ($n \geqslant 6$)?

9. Из места A у место B крену истовремено два путника. Први путник је прву половину времена проведеног на путу ишао брзином a, а другу брзином b ($a \neq b$). Други путник је прву половину пута ишао брзином a, а другу брзином b. Који путник је први стигао у место B?

10. Да ли постоји природан број који је потпун квадрат и чији је збир цифара 1994?

11. Нека је функција f дата са $f(x) = \dfrac{a^x}{a^x + \sqrt{a}}$, где је $x \in \mathbb{R}$ и $a > 0$. Одредити вредност збира

$$f\left(\frac{1}{1995}\right) + f\left(\frac{2}{1995}\right) + \cdots + f\left(\frac{1994}{1995}\right).$$

12. Ако су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 2)$ реални бројеви при чему је $0 < x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n$, доказати неједнакост

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \geqslant \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \cdots + \frac{x_1}{x_n}.$$

13. У квадратној табели формата $2n \times 2n$ $(n \geqslant 1)$ је уочено $3n$ поља и у свако од њих уписана по једна звездица. Доказати да се увек може наћи n врста и n колона чијим се брисањем уклањају све звездице из табеле.

14. Тежишна линија AD троугла ABC сече кружницу уписану у троугао у тачкама M и N. Одредити угао MON (O – центар уписане кружнице) ако је $|AB| + |AD| = |AC|$.

15. Квадрат је подељен на 5 дисјунктних правоугаоника једнаких површина, тако да темена квадрата припадају различитим правоугаоницима, а један правоугаоник нема заједничких тачака са страницама квадрата. Доказати да је тај правоугаоник квадрат.

16. Доказати да се у равни може изабрати 1995 тачака и неке од њих спојити дужима, тако да су све дужи једнаке, из сваке тачке излазе тачно 4 дужи и добијена фигура је повезана, тј. сваке две изабране тачке спојене су изломљеном линијом састављеном од нацртаних дужи.

17. Да ли је број $1,000001^{0,999999} \cdot 0,999999^{1,000001}$ већи или мањи од 1?

18. Рационалисати разломак $\dfrac{1}{1 + 3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}}$.

19. Дат је низ $1, 2, 4, 8, 16, 23, \ldots$ у којем је сваки следећи број једнак збиру претходног броја и збира његових цифара, тј. $a_1 = 1$ и $a_n = a_{n-1} + S(a_{n-1})$ за $n > 1$, где је $S(x)$ – збир цифара броја x. Да ли се у том низу појављује број 1995 ?

20. Доказати да за произвољне позитивне реалне бројеве $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 4)$ важи неједнакост

$$\frac{x_1}{x_n + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_{n-1} + x_1} \geqslant 2.$$

21. На командној табли налази се 100 светлећих дугмади распоређених у облику квадрата 10×10. Притиском на једно дугме мења се његово стање као и стања свих дугмади која су са њим у истој врсти или у истој колони; упаљена се гасе, а угашена се пале. На почетку сва дугмад светле. Колики је минималан број притисака потребан да би се сва угасила?

22. Центри кружница $k_A(r_A)$, $k_B(r_B)$, $k_C(r_C)$, $k_D(r_D)$ су темена паралелограма $ABCD$. Свака од кружница k_A и k_C, односно k_B и k_D, лежи у спољашњости друге. Спољашње тангенте кружница k_A и k_C у пресеку са спољашњим тангетама кружница k_B и k_D образују један четвороугао. Ако је $r_A + r_C = r_B + r_D$, доказати да је тај четвороугао тангентан, тј. да у њега може да се упише кружница.

23. У конвексном осмоуглу сви углови су једнаки, а дужине свих страница су цели бројеви. Доказати да су наспрамне странице тог осмоугла једнаке.

24. Да ли постоји
(а) тетраедар; (б) полиедар
чије су све стране троуглови на чију сваку ивицу належе један прав или туп угао?

25. Шаховски сат се састоји од два часовника којима се мере времена играча утрошена на размишљање. На почетку партије оба часовника показују исто време. Прво се пушта у рад часовник белог. Након одигранoг првог потеза он зауставља свој и пушта у рад часовник црног. Он ради све док црни не повуче потез када га зауставља и поново укључује часовник белог и тако наизменично.

У једној партији након повучених по 40 потеза оба играча су потрошила по 2 часа и 30 минута. Доказати да су часовници у једном тренутку показивали времена која су се разликовала за тачно 1 минут и 51 секунд.

26. Да ли постоји природан број који се у декадном запису завршава са 11, који је дељив са 11 и чији је збир цифара 11?

27. Решити систем једначина:

$$(x+y)^3 = z, \quad (y+z)^3 = x, \quad (z+x)^3 = y.$$

28. Ако су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 2)$ природни бројеви за које важи

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} = 1,$$

доказати да су међу њима бар два једнака.

29. Ако за низ реалних бројева $\{a_n\}$ важи

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_{n+1} - \frac{a_n}{2}\right) = 0,$$

доказати да је $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

30. Разлика дужина највеће и најмање дијагонале правилног n–угла једнака је дужини странице? Одредити n.

31. (а) У равни је дат скуп S од n тачака. Доказати да за свако k, $0 \leqslant k \leqslant n$, постоји кружница која у својој унутрашњости садржи тачно k тачака скупа S.

(б) Доказати да за сваки ненегативан цео број k постоји кружница која у својој унутрашњости садржи тачно k тачака са целобројним координатама.

32. Из сваког темена полиедра M излазе по 3 ивице, а око сваке стране (пљосни) може да се опише кружница. Доказати да око M може да се опише лопта.

33. Три ученика решила су укупно 100 задатака при чему је сваки решио по 60. Задатак се сматра тешким ако га је решио само један ученик, а лаким уколико су га решила сва тројица. Доказати да је тешких задатака било за 20 више од лаких.

34. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sqrt{\frac{x-7}{1989}}+\sqrt{\frac{x-6}{1990}}+\sqrt{\frac{x-5}{1991}}=\sqrt{\frac{x-1989}{7}}+\sqrt{\frac{x-1990}{6}}+\sqrt{\frac{x-1991}{5}}.$$

35. Да ли постоје такви реални бројеви a и b да је:

(а) број $a+b$ рационалан, а број a^n+b^n ирационалан за сваки природан број n, $n \geqslant 2$;

(б) број $a+b$ ирационалан, а број a^n+b^n рационалан за сваки природан број n, $n \geqslant 2$?

36. Доказати да за свака три природна броја a, b, c важи неједнакост

$$a^{\frac{a}{a+b+c}} \cdot b^{\frac{b}{a+b+c}} \cdot c^{\frac{c}{a+b+c}} \geqslant \frac{1}{3}(a+b+c)\,.$$

37. Доказати да се из сваког 1997–цифреног броја у чијем се декадном запису појављују само цифре 9 и 6, може одстранити једна цифра, тако да добијени 1996–цифрени број буде дељив са 11.

38. (а) Све странице конвексног шестоугла су веће од 1. Да ли такав шестоугао мора да има дијагоналу већу од 2?

(б) Дијагонале AD, BE, CF конвексног шестоугла $ABCDEF$ су веће од 2. Да ли такав шестоугао мора да има страницу већу од 1?

39. У правилном $2n$–углу $(n \geqslant 2)$ уочене су средине свих страница и свих дијагонала. Колико се највише уочених тачака може наћи на једној кружници?

40. Нормалне пројекције неког тела на две различите равни су кругови. Доказати да су ти кругови подударни.

41. Дате су две посуде, свака запремине $3l$. У првој је $1l$ чисте воде, а у другој $1l$ 2% раствора соли у води. Може ли се пресипањима течности из једне посуде у другу посуду добити у првој посуди $1,5\%$ раствор соли?

42. Збир два природна броја је 30030. Може ли њихов производ да буде дељив са 30030?

43. Решити једначину $\log_2\left(xy+\dfrac{1}{xy}\right)=1-(x+y-2)^2$ у скупу реалних бројева.

44. Доказати неједнакост $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}$.

45. Трисектрисе угла C деле страницу AB троугла ABC на три дужи. Може ли средња дуж да буде највећа? (Трисектрисе угла су две полуправе које деле угао на три подударна угла.)

46. Нека је P унутрашња тачка једнакокраког $\triangle ABC$ у којем је $|AC|=|BC|$ и $\sphericalangle C=80^\circ$. Ако је $\sphericalangle PAB=10^\circ$ и $\sphericalangle PBA=20^\circ$, одредити $\sphericalangle ACP$.

47. Основа пирамиде је правилан $n-$угао, а сви ивични углови при врху пирамиде су међусобно подударни. Доказати да су бар две бочне стране пирамиде подударне.

48. На шаховску таблу постављено је 8 топова, тако да се никоја два не нападају. Доказати да је број топова који стоје на црним пољима паран.

49. Међу учесницима једног скупа 70% има браон очи, 75% црну косу, 85% је више од $175\,\mathrm{cm}$ и 90% је теже од $80\,\mathrm{kg}$. Колико је најмање процената особа које поседују све четири карактеристике?

50. 175 фломастера коштају више од 125, али мање од 126 хемијских оловака. Може ли се за 100 динара купити 3 фломастера и 1 хемијска оловка? (Цене су у целим бројевима динара.)

51. Без употребе калкулатора одредити цифре које стоје уместо звездица у изразу

$$109^{10}=23673**67459211723401.$$

52. Доказати да ниједан број облика $10\ldots02$ (произвољан број нула) није збир кубова неколико узастопних природних бројева.

53. Ученик је решавао једначину $f\left(19x-\dfrac{96}{x}\right)=0$ и нашао 11 различитих решења. Да се још мало потрудио нашао би бар још једно решење. Зашто?

54. Да ли постоји пресликавање $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ – скуп целих бројева, тако да је $f(f(x))=x+1$ за свако $x\in\mathbb{Z}$?

55. Наћи све природне бројеве n за које је 2^n-1 дељиво са n.

56. Да ли се међу члановима низа $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ може наћи
(а) 5; (б) 1997
узастопних чланова аритметичке прогресије?

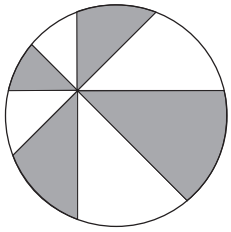
57. Нека је E тачка у унутрашњости квадрата $ABCD$, таква да је $|AE| = \sqrt{3}$, $|BE| = 1$, $CE = \sqrt{5}$. Доказати да је $\sphericalangle AEB = 135°$.

58. Нека је $ABCDEFG$ правилан седмоугао странице 1. Доказати да је

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = 1.$$

59. У равни је дато коначно много правих. Доказати да се увек може нацртати круг произвољно великог полупречника који нема заједничких тачака ни са једном од датих правих.

60. (*Pizza – проблем*) Унутар круга уочена је тачка и кроз њу су повучене четири праве, тако да сваке две суседне образују угао од 45°. Тако је круг подељен на 8 области. Области су наизменично обојене бело и сиво (слика 1). Доказати да је збир површина белих области једнак збиру површина сивих.



Слика 1.

61. У лопту су уписане две коцке. Доказати да збир квадрата растојања темена једне коцке од темена друге не зависи од њиховог међусобног положаја.

62. Може ли са 4 непрозирне кугле да се заклони тачкасти извор светлости у простору? (Кугле заклањају извор светлости S ако свака полуправа која излази из S сече бар једну од кугли.)

63. На гомили је 1998^{11} жетона. Играчи A и B наизменично узимају са гомиле жетоне. Почиње играч A тако што узима бар један жетон, али не више од 1998 жетона. Затим играч B узима бар један жетон, али највише онолико колико је узео A. Даље A узима бар један жетон, али највише онолико колико је претходно узео B итд. Победник је играч који узме последњи жетон. При најбољој игри за обе стране, који од играча A или B побеђује?

64. Свако поље шаховске табле покривено је по једном коцком ивице једнаке страници поља. На свакој коцки пет страна је обојено бело, док је шеста црна. Све коцке које су у истом реду (хоризонтали) или истој колони (вертикали) могу се

истовремено ротирати око праве која садржи њихове центре за $\pm 90^\circ$ или $\pm 180^\circ$. Доказати да се коначним бројем оваквих трансформација сваки распоред коцки може превести у положај у којем су све црне стране окренуте горе.

65. Из места A и B која су на растојању $60\,\mathrm{km}$ крену истовремено један другом у сусрет двојица бициклиста. Први се креће брзином $30\,\mathrm{km/h}$, а други брзином $20\,\mathrm{km/h}$. Заједно са првим бициклистом у сусрет другом полети голуб брзином $50\,\mathrm{km/h}$. Када сретне другог бициклисту голуб се врати натраг ка првом. Када сретне њега полети натраг ка другом и све тако до сусрета бициклиста. Колики пут је прешао голуб?

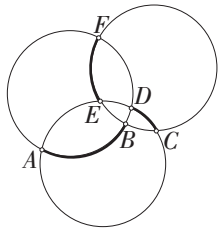
66. Ако је $1! + 2! + \cdots + n! = m!$, тада је $1! + 2! + \cdots + m! = n!$. Доказати.

67. Доказати једнакост $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$.

68. Ако за позитивне бројеве x, y, z важи $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, доказати да је

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

69. Дате су три подударне кружнице као на слици 2. Доказати да је збир подебљаних лукова AB, CD и EF једнак 180°. (Мера лука једнака је мери одговарајућег централног угла.)



Слика 2.

70. Тачка M лежи у унутрашњости једнакостраничног $\triangle ABC$ и при томе је $|MA| = 5$, $|MB| = 4$, $|MC| = 3$. Колико износи странице $\triangle ABC$?

71. Доказати да се конвексан многоугао не може исећи на неконвексне четвороуглове.

72. У таблицу $m \times n$ уписано је mn различитих бројева, тако да бројеви сваке врсте образују опадајући низ (с лева на десно). Затим се бројеви сваке колоне уреде, тако да образују опадајући низ (одозго на доле). Доказати да су у новој таблици бројеви сваке врсте и даље у опадајућем низу (с лева на десно).

73. Јован је почео са доручком између 7 и 8 сати у тренутку када су обе казаљке биле једнако удаљене од цифре 6, а завршио када су се казаљке први пут поклопиле. Колико дуго је Јован доручковао?

74. Доказати да су решења једначине

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$$

реална за било које реалне бројеве a, b, c.

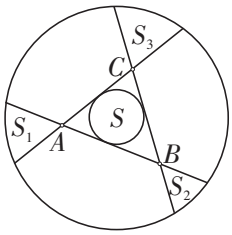
75. Доказати да за произвољне позитивне реалне бројеве a, b и c важи неједнакост

$$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

76. Нека је n природан број који у систему са основом 1997 има 20 цифара. Ако те цифре, узете неким редом, образују аритметичку прогресију, доказати да је n сложен број.

77. Нека је M тачка која лежи у спољашњости једнакостраничног троугла ABC и у унутрашњости угла BAC. Ако је $\sphericalangle AMC = 30^\circ$ и $\sphericalangle AMB = 40^\circ$ колико износе углови $\sphericalangle ABM$ и $\sphericalangle ACM$?

78. На мању од две концентричне кружнице повучене су три тангенте које се секу у тачкма A, B и C. Ако је S површина $\triangle ABC$, а S_1, S_2 и S_3 површине означене на слици 3, доказати да збир $S_1+S_2+S_3-S$ не зависи од избора тангенти.



Слика 3.

79. Доказати да сваки правилан $2n-$угао може да се исече на ромбове.

80. У равни је дато n $(n>1)$ правих међу којима нема паралелних и никоје три не пролазе кроз исту тачку. Доказати да се свакој од области на које праве деле раван може доделити по један цео број различит од 0 и чија апсолутна вредност није већа од n, тако да је збир свих бројева који леже са сваке стране сваке од правих једнак 0.

81. Петар и Наташа станују у солитеру у којем на сваком спрату има по 10 станова. Станови почињу од првог спрата и нумерисани су бројевима $1, 2, \ldots$. Петар станује на спрату чији је број једнак броју стана у којем је Наташа. Збир бројева њихових станова је 239. Који је број стана у којем станује Петар?

82. Ако за позитивне реалне бројеве a, b, c, d, A, B, C, D важи

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{D}{d},$$

доказати да је

$$\sqrt{Aa} + \sqrt{Bb} + \sqrt{Cc} + \sqrt{Dd} = \sqrt{(A+B+C+D)(a+b+c+d)}.$$

83. Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}} + \sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}} < 5.$$

84. Нека су x_1 и x_2 решења једначине $ax^2 + (7a+4)x - 4 = 0$. Одредити све вредности параметра a за које је $1 < x_1 < 2$ и $x_2 > 2$.

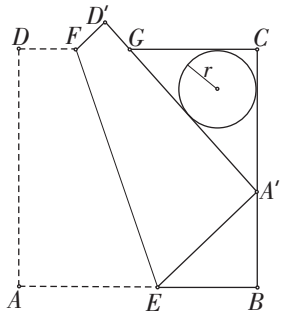
85. Решити једначину $9^x + 4^x + 1 = 6^x + 3^x + 2^x$ у скупу реалних бројева.

86. Странице једне књиге нумерисане су бројевима од 1 до 100 на уобичајен начин. Из књиге је истргнут известан број листова и при томе се испоставило да збир бројева којима су нумерисане истргнуте стране износи 4949. Колико листова је истргнуто?

87. Познато је да постоје тачно два проста броја чије реципрочне вредности записане у облику децималног броја имају периоде 7. Један од тих бројева је 4649. Који је други?

88. Дужине страница троугла су цели бројеви a, b, c, а једна од висина једнака је збиру друге две. Доказати да је $a^2 + b^2 + c^2$ потпун квадрат.

89. (*Санґаку проблем*[1]) Квадратни комад папира $ABCD$ пресавијен је дуж праве EF као на слици 4. У троугао $A'CG$ уписана је кружница полупречника r. Доказати да је $|D'G| = r$.



Слика 4.

[1] *Санґаку* су дрвене таблице на којима су насликане математичке теореме. Настале су у Јапану у периоду XVII-XIX век. Обично су биле изложене у храмовима. *Санґаку* је јапанска кованица. Састоји се од речи *сан*-математика и *ґаку*-уоквирена табела.

90. У тангентном четвороуглу дијагонале су узајамно нормалне. Доказати да је тај четвороугао делтоид.

91. У унутрашњости датог троугла ABC конструисати тачку S, тако да праве AS, BS и CS секу кружницу описану око троугла ABC у теменима једнакостраничног троугла. Колико има решења?

92. Нека је S произвољан скуп од 4 различите тачке у равни. Доказати да се увек може наћи подскуп A скупа S, такав да за сваки круг K важи $K \cap S \neq A$.

93. Доказати да за сваки природан број n $(n \geqslant 8)$, постоји полиедар са тачно n ивица.

94. Доказати да постоји сфера која додирује све ивице тетраедра $ABCD$ ако и само ако је $|AB| + |CD| = |AC| + |BD| = |AD| + |BC|$.

95. Вишецифрен број је ***доминантан*** ако се пребацивањем ма које групе цифара с почетка на крај (не мењајући распоред цифара унутар групе) добија број мањи од почетног. Колико има доминантних петоцифрених бројева у којима учествују само цифре 1, 2, 3, 4, 5?

96. У квадратну таблицу $n \times n$ уписано је на произвољан начин $n-1$ јединица. Остало су нуле. Дозвољено је заменити места две врсте или две колоне. Доказати да се коначним бројем таквих операција може добити таблица у којој су све јединице испод главне дијагонале. (Главна дијагонала је она која води из левог горњег у десни доњи угао.)

97. Стари Тамас живи на Кавказу са својом децом, унуцима, праунуцима и прапраунуцима. Укључујући Тамаса укупно их је 2801. Прапраунуци немају деце, а сви остали имају исти број деце. Колико деце има Тамас?

98. Ако су a, b, c позитивни бројеви и $a+b+c=1$ доказати да је

$$\frac{a+b}{ab} + \frac{b+c}{bc} + \frac{c+a}{ca} \geqslant 18.$$

99. Нека су x_1 и x_2 корени једначине $x^2 - 4ax + 5a^2 - 6a = 0$. Одредити све вредности параметра a за које је $|x_1 - x_2|$ максимално.

100. Доказати да се за сваки природан број n, $n \geqslant 3$, могу наћи n различитих природних бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$, таквих да је

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1.$$

101. У конвексном четвороуглу $ABCD$ дијагонала AC полови дуж MN, где су M и N редом средине страница BC и AD. Доказати да дијагонала AC полови и површину четвороугла $ABCD$.

102. У равни је дато $2n+1$ $(n \geqslant 1)$, правих $l_1, l_2, \ldots, l_{2n+1}$ од којих никоје две нису нормалне и све пролазе кроз тачку O. На правој l_1 уочена је произвољна тачка A_1 $(A_1 \neq O)$. Доказати да се на правама $l_2, l_3, \ldots, l_{2n+1}$ могу изабрати редом тачке $A_2, A_3, \ldots, A_{2n+1}$, такве да је $A_1A_3 \perp l_2$, $A_2A_4 \perp l_3$, $\ldots$, $A_{i-1}A_{i+1} \perp l_i$, $\ldots$, $A_{2n}A_1 \perp l_{2n+1}$, $A_{2n+1}A_2 \perp l_1$.

103. У једном темену коцке налазе се два паука, а у њему дијагоналном темену мува. Пауци и мува крећу се искључиво по ивицама коцке једнаким константним брзинама. У сваком тренутку пауцима је позната позиција муве и муви је позната позиција паука. Доказати да пауци могу да ухвате муву. (Сматра се да је мува ухваћена уколико се нађе у истој тачки са бар једним пауком.)

104. Колико је најмање боја потребно за бојење свих страница и дијагонала конвексног n–угла, тако да сваке две од тих дужи које имају заједничких тачака буду различито обојене?

105. Играчи A и B узимају наизменично од 1 до 10 жетона са гомиле на којој има n жетона. Игра се завршава кад се покупе сви жетони са гомиле, тј. када је $a+b=n$, где је a број жетона које је покупио играч A, а b број жетона које је покупио играч B. Играч A почиње први и он је победник ако су бројеви a и b узајамно прости; у противном је победник играч B. Који играч има победничку стратегију

(а) ако су сви прости фактори броја n већи од 5?

(б) ако је $n = 5^k$, за неки природан број k?

106. Нека је $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Одредити број пресликавања $f : S \to S$, таквих да је f транзитивна релација у скупу S.

107. Доказати да је у троуглу са дужинама страница 10, 8 и 3, један угао три пута већи од другог.

108. Доказати да ако за неки реалан број x важи $\{8x\} = \{15x\}$, онда је и $\{26x\} = \{75x\}$. (Са $\{x\}$ означавамо разломљени део броја x, тј. $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, где је $\lfloor x \rfloor$ највећи цео број који није већи од x.)

109. На страницама AB и CD конвексног четвороугла $ABCD$ могу се изабрати редом тачке M и P, такве да је $MC \parallel AP$ и $MD \parallel BP$. Доказати да је четвороугао $ABCD$ трапез.

110. Решити у скупу целих бројева једначину $x^3 + 24 = 2^x$.

111. Доказати да при било каквом бојењу равни са две боје (свака тачка равни обојена је једном од те две боје) у тој равни може да се нађе троугао чија су сва темена исте боје, а однос величина углова је $1 : 2 : 4$.

112. Дато је шест бесконачних аритметичких прогресија са члановима из скупа природних бројева. Познато је да међу сваких 100 узастопних природних бројева постоји бар један члан неке од ових прогресија. Доказати да бар једна од прогресија има разлику која није већа од 600.

113. (*Архимед из Сиракузе,* 287 – 212. *п. н. е.*) Из тачке B полукружнице над пречником AC спуштена је нормала BD на тај пречник. Над дужима AD и DC као пречницима, конструисане су полукружнице, које леже у унутрашњости прве. Доказати да је површина области ограничене са три полукружнице једнака површини круга над пречником BD.

114. (*Пап из Александрије,* 3. *век н. е.*) Кроз тачку D на симетрали датог угла конструисати праву на којој краци угла одсецају дуж подударну датој дужи.

115. (*Сабит ибн–Кора,* 836 – 901.) За природне бројеве m и n кажемо да су ***пријатељски бројеви*** ако је сваки од њих једнак збиру правих делилаца другог. Доказати следеће тврђење: Ако су $p = 3\cdot 2^{k-1}-1$, $q = 3\cdot 2^k - 1$ и $r = 9\cdot 2^{2k-1}-1$ прости бројеви, онда су $A = 2^k pq$ и $B = 2^k r$ пријатељски бројеви.

116. (*Бхаскара,* 1114 – 1185.) Решити једначину $x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$.

117. (*Николо Тартаља,* 1500 – 1557.) Дата је дуж AB. Конструисати једнакостраничан троугао ABC, користећи само лењир и шестар са фиксним отвором (различитим од $|AB|$).

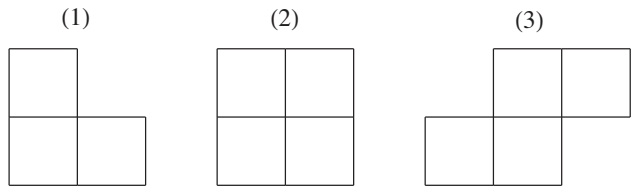
118. (*Исак Њутн,* 1643 – 1727.) Неки трговац сваге године увећава свој капитал за једну трећину, умањену за 100 фунти, колико износе трошкови његове породице. После 3 године констатовао је да се његов капитал удвостручио. Колики је био његов капитал на почетку?

119. (*Јаков Бернули,* 1654 – 1705.) Ако су прва два члана аритметичке прогресије позитивна и различита, и поклапају се са прва два члана геометријске прогресије, онда су сви чланови аритметичке прогресије, почев од трећег, мањи од одговарајућих чланова геометријске прогресије. Доказати.

120. (*Јаков Штајнер,* 1796 – 1863.) Над датом дужи AB, као пречником, конструисана је полукружница. Користећи само лењир, конструисати нормалу на праву AB из дате тачке M, која не припада тој правој.

121. Доказати једнакост $\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 70^\circ + \operatorname{tg} 80^\circ = \operatorname{tg} 85^\circ$.

122. Квадрат 1999×1999 поплочан је фигурама три типа (слика 5). Доказати да у поплочавању учествује бар 3999 фигура типа (1).



Слика 5.

123. Два играча играју следећу игру. Први изговори било који природан број, Други додаје томе броју 54 или 77 и изговара добијени збир. У наставку играчи наизменично додају било који од бројева 54 или 77 и изговарају збир тога броја са претходним збиром. Други постиже победу ако било који од играча изговори број чији је остатак при дељењу са 100 прост број. Може ли Први да онемогући победу Другом играчу?

124. У шестоуглу $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ постоји тачка O, из које се све странице шестоугла виде под углом од $60°$. Доказати да ако је

$$OA_1 > OA_3 > OA_5 \quad \text{и} \quad OA_2 > OA_4 > OA_6,$$

онда је и

$$A_1A_2 + A_3A_4 + A_5A_6 < A_2A_3 + A_4A_5 + A_6A_1.$$

125. Грађевинском предузећу „Светла будућност“ поверена је изградња пута дужине $100\,\mathrm{km}$ између градова Забити и Недоступни. Према плану, у првој години изградиће се $1\,\mathrm{km}$ пута, а ако је на почетку неке године већ изграђено $A\,\mathrm{km}$, онда ће се у току те године изградити још $\dfrac{1}{A^{10}}\,\mathrm{km}$. Доказати да ће пут бити изграђен за мање од 10^{22} година.

126. Једанаест ученика учлањени су у 5 секција. Доказати да међу њима постоје два ученика A и B, таква да је B члан свих секција у које је учлањен A.

127. Одредити природан број n за који важи да се конвексан n–угао може разбити на троуглове на

(а) 2^n (б) n^2

различитих начина са $n-3$ дијагонала без заједничких унутрашњих тачака, тако да сваки троугао има бар једну заједничку страницу са n–углом.

128. За округлим столом седи $2n$ људи, међу којима је n физичара и n хемичара. Неки од њих увек говоре истину, а остали увек лажу. Познато је да је број лажова међу физичарима једнак броју лажова међу хемичарима. На питање:„Шта је ваш сусед са десне стране?“ сви присутни су одговорили:„Хемичар“. Доказати да је n паран број.

129. Сви могући низови од по 7 цифара (од 0000000 до 9999999) исписани су један иза другог у произвољном поретку. На тај начин добијен је запис неког 700000000–цифреног броја. Доказати да је тај број дељив са 4649.

130. Може ли се раван покрити, без препокривања, квадратима са дужинама страница $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ ако се сваки квадрат може користити највише 4 пута?

131. Са речима над азбуком $\{0, 1\}$ дозвољено је вршити следеће операције:

(1) убацити на произвољно место између два суседна слова, на почетку или на крају речи, реч облика ppp;

(2) избрисати било коју подреч облика ppp.

Тако се, на пример, из речи 0001 могу добити речи 0111001 и 1. Да ли се наведеним операцијама из речи 01 може добити реч 10?

132. Пуж се креће у равни, скрећући после сваког метра пређеног пута под правим углом. Између два скретања пуж се креће праволинијски. Које је максимално растојање од полазне тачке после пређених 300 метара, ако је било 99 левих и 200 десних скретања?

133. Дат је конвексан четвороугао $ABMC$, у коме је $AB = BC$, $\sphericalangle BAM = 30°$, $\sphericalangle ACM = 150°$. Доказати да је AM симетрала угла BMC.

134. Над страницом AB троугла ABC у спољашњости је конструисан квадрат $ABDE$ са центром O. Тачке M и N су средишта страница BC и AC, а дужине тих страница су редом a и b. Одредити максималну вредност збира $OM + ON$ када се угао ACB мења.

135. Дат је троугао ABC. Кружница са центром D пролази кроз тачке A, B и O, где је O центар кружнице споља уписане у троугао ABC (која додирује страницу BC и продужетке страница AB и AC). Доказати да је четвороугао $ABCD$ тетиван.

136. Из квадратне табле 32×32 изрезано је једно поље. Доказати да се добијена фигура може поплочати плочицама облика као на слици 6 (свака плочица покрива тачно 3 поља).

Слика 6.

137. Доказати следећа тврђења:

(а) Сваки n–угао има бар једну унутрашњу дијагоналу, тј. такву која цела лежи у унутрашњости многоугла.

(б) Тај n–угао може се разложити на троуглове унутрашњим дијагоналама које немају заједничких тачака у унутрашњости троугла.

(в) Темена тако триангулисаног n–гона могу се обојити правилно са три боје, тј. тако да се свако теме обоји једном од три дате боје и да свака два темена спојена страницом или дијагоналом буду различито обојена.

(г) Области овако добијене триангулације могу се правилно обојити са две боје, тј. тако да се свака област обоји једном од две дате боје и да сваке две области које се граниче буду обојене различитим бојама.

138. Доказати неједнакости

(а) $h_a h_b h_c \geqslant 27r^3$;

(б) $a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma \geqslant 9r$,

где су a, b и c странице троугла ABC; α, β и γ њима одговарајући углови; h_a, h_b и h_c њима одговарајуће висине, а r полупречник кружнице уписане у тај троугао.

139. Доказати неједнакост

$$a + b + c \leqslant \frac{2a^3}{a^2+b^2} + \frac{2b^3}{b^2+c^2} + \frac{2c^3}{c^2+a^2},$$

где су a, b и c позитивни реални бројеви.

140. Нека је S скуп тачака (x, y) у равни, таквих да су x и y цели бројеви, по апсолутној вредности мањи од 10. Наћи највећи природан број n који задовољава следећи услов:

За свако пресликавање скупа S у скуп $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ могуће је наћи паралелограм $ABCD$ позитивне површине, са теменима у тачкама скупа S, симетричан у односу на координатни почетак, тако да је збир слика темена A и C једнак збиру слика темена B и D.

141. Једна страница конвексног четвороугла два пута је дужа од њој наспрамне странице. Свака дијагонала је нормална на једну од преостале две странице. Одредити угао између дијагонала.

142. У једнакокраком троуглу ABC $(AB = BC)$ је $\sphericalangle B = 80°$. Нека је P унутрашња тачка троугла таква да је $\sphericalangle PAC = 40°$, $\sphericalangle ACP = 30°$. Одредити $\sphericalangle BPC$.

143. За природне бројеве a, b, c, d важи $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Да ли је $a + b + c + d$ сложен број?

144. За које природне бројеве n је број $n(n+1)(n+2)\ldots(n+7) + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 7$ могуће представити као збир квадрата два природна броја?

145. У троуглу ABC повучене су висина AH $(H \in BC)$ и симетрала угла BE $(E \in AC)$. Ако је $\sphericalangle BEA = 45°$, доказати да је и $\sphericalangle EHC = 45°$.

146. У троуглу ABC је $\sphericalangle ABC = 60°$. Нека су AD и CE симетрале углова ($D \in BC$, $E \in AB$) и нека се оне секу у тачки O. Доказати да је $|OD| = |OE|$.

147. На страници AB квадрата $ABCD$ дата је тачка E, а на страници CD тачка F, тако да је $\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{1}{2}$, $CF = FD$. Дијагонала AC сече дуж ED у тачки M, а дуж BF у тачки N. Доказати да су троуглови AME и CFN слични.

148. Кружница додирује две странице троугла и две његове тежишне линије. Доказати да је тај троугао једнакокрак.

149. Одредити најмањи природан број који је тачно 100 пута већи од броја својих делитеља, укључујући 1 и сам тај број.

150. Величине свих углова неког десетоугла изражавају се бројем степени дељивим са 20. Доказати да у том десетоуглу постоји пар паралелних страница.

151. Нека је $a_1, a_2, a_3, \ldots$ низ различитих природних бројева такав да је $a_n < 100n$, за сваки природан број n. Доказати да у том низу постоји број у чијем се декадном запису појављује 2000 узастопних јединица.

152. Доказати да се природан број n може представити у облику збира неколико (бар два) узастопних природних бројева ако и само ако n није степен двојке.

153. Од 10 карата са цифрама $0, 1, 2, \ldots, 9$ сложен је десетоцифрен број 1980237456, а затим је одређен збир свих двоцифрених бројева које образују две суседне цифре. Добијен је збир $19 + 98 + 80 + \cdots + 56 = 434$.
За коју пермутацију цифара (карата) је тако добијени збир

(а) највећи; (б) најмањи?

154. Доказати да је $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ рационалан број.

155. (а) Одредити највећи заједнички делитељ бројева $1998! + 1$ и $1999!$.

(б) Доказати да су бројеви $1999! + 1$ и $2000!$ узајамно прости.

156. Ненад и Милош заљубили су се у исту девојку – Ану. Она је одлучила да поклони своје срце ономе који победи у следећој игри:

Играчи треба да наизменично уписују по једно слово из скупа $\{A, N\}$ у слободна поља траке 1×2000. Победник је играч који први постигне да на нека три узастопна поља траке буду уписана слова ANA. Жребом је одлучено да Ненад почиње први.

(а) Да ли неки од играча, и који, има победничку стратегију, тј. може да осигура победу, без обзира на начин игре његовог противника?

(б) Исто питање, ако се игра на траци 1×1999?

(в) Исто питање, ако се игра на кружној траци са 2000 поља?

(г) Исто питање, ако се игра на кружној траци са 1999 поља?

157. У равни су дате четири тачке које не леже ни на истој кружници ни на истој прави. Да ли бар једна од њих мора бити унутар кружнице одређене са преостале три?

158. Тачка M припада унутрашњости троугла ABC. Праве $p(A, M)$, $p(B, M)$ и $p(C, M)$ секу редом дужи BC, AC и AB у тачкама D, E и F. Обележимо са N, P и Q тачке симетричне са M у односу на D, E и F. Доказати да важи:

$$\frac{AN}{MD} \cdot \frac{BP}{ME} \cdot \frac{CQ}{MF} \geqslant 64.$$

Када важи једнакост?

159. Из тачке O која лежи у унутрашњости конвексног n-угла $A_1A_2\ldots A_n$ повучене су дужи OA_1, OA_2,... OA_n ка теменима. Испоставило се да су сви углови које те дужи заклапају са страницама n-угла оштри, и притом $\sphericalangle OA_1A_n \leqslant \sphericalangle OA_1A_2$, $\sphericalangle OA_2A_1 \leqslant \sphericalangle OA_2A_3$, $\ldots$, $\sphericalangle OA_nA_{n-1} \leqslant \sphericalangle OA_nA_1$. Доказати да је O центар кружнице уписане у тај n-угао.

160. (а) Права l образује с трима, по паровима нормалним правама, у простору углове α, β и γ. Доказати: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

(б) Дата је коцка ивице a. Наћи збир квадрата дужина пројекција свих њених ивица на произвољну раван.

161. Производ два позитивна броја већи је од њихове суме. Доказати да је та сума већа од 4.

162. Доказати неједнакост:

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \leqslant 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \cdots + \frac{s^n}{n!},$$

где су $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

163. Показати да постоји бесконачно много природних бројева који се не могу представити као сума квадрата три природна броја.

164. Нека су a, b и c цели бројеви такви да важи $a+b+c \mid a^2+b^2+c^2$. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n за које

$$a+b+c \mid a^n+b^n+c^n.$$

165. Шпил од 52 карте, обележене бројевима од 1 до 52 промешан је тако да се i–та карта не налази на i–тој позицији ($i = 1, 2, \ldots, 52$). Показати да је шпил могуће пресећи тако да најмање две карте доспеју на своју позицију (тј. позицију са бројем којим су означене).

166. Табела $(2n+1)\times(2n+1)$ попуњена је бројевима од 1 до $2n+1$ тако да се у свакој врсти и свакој колони појављују сви ти бројеви. Доказати, да ако је табела симетрична у односу на главну дијагоналу, онда се и на главној дијагонали појављују сви ти бројеви.

167. Неко село има 1000 житеља. Сваке вечери сваки од њих саопштава новости свим својим познаницима. Познато је да свака вест (потекла од било кога) стигне до сваког мештанина. Доказати да је могуће изабрати 90 житеља тог села тако да, ако им истовремено саопштимо неку новост, она ће у року од 10 дана бити позната свим мештанима.

168. Неки скуп геометријских фигура у равни нумерисан је природним бројевима. Нумерацију називамо „покривајућом“ ако важи: фигуру A можемо прекрити фигуром подударном фигури B ако и само ако је број B дељив бројем A. Одговорити на бар четири од ових питања:

(а) Да ли за сваки коначан скуп многоуглова постоји покривајућа нумерација?

(б) Може ли се сваки бесконачан низ многоуглова покривајуће нумерисати?

(в) Може ли сваки коначан скуп природних бројева послужити за покривајућу нумерацију неког скупа многоуглова?

(г) Постоји ли низ многоуглова, покривајуће нумерисан свим природним бројевима?

(д) Који се минимални скуп многоуглова не може покривајуће нумерисати бројевима не већим од 100?

169. (*Ерицинусов парадокс*) Дат је троугао ABC с правим углом код темена A. Доказати да за сваку тачку S дужи AB постоје тачка T дужи AB и тачка E у унутрашњости троугла тако да је $SE + ET > AC + CB$.

170. На столу лежи 50 тачних и навијених часовника. Доказати да ће у неком тренутку збир растојања од центра стола до врхова минутних казаљки бити већи од збира растојања од центра стола до центара часовника.

171. Доказати да није могуће прекрити раван троугловима тако да из сваког темена полази тачно пет страница неких од тих троуглова, притом теме једног троугла не сме лежати на страници другог.

172. Може ли се на коцки начинити отвор кроз који може да прође друга коцка са истом ивицом?

173. Град има 10 улица које су међусобно паралелне, и још 10 улица које секу ове прве под правим углом. Колики најмањи број скретања треба да садржи затворена аутобуска линија која пролази кроз све раскрснице?

174. У таблици 10×10

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & 9 \\ 9 & 0 & 1 & \dots & 8 \\ 8 & 9 & 0 & \dots & 7 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 \end{array}$$

заокружено је 10 елемената, у свакој врсти и колони по један. Доказати да су међу њима барем два једнака.

175. Низ од 36 нула и јединица почиње са пет нула. Међу узастопним петорками у том низу јављају се све 32 петорке нула и јединица. Открити последњих пет цифара низа.

176. Нека је $\mathbb{N}_0$ скуп ненегативних целих бројева и $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ функција таква да је скуп $A = \{k \mid f(k) \leqslant k\}$ коначан, тј. да се само коначно много природних бројева слика у не веће од себе. Доказати да је за сваку функцију $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ скуп $B = \{k \mid g(f(k)) \geqslant k\}$ бесконачан.

177. Нека је m реалан број, такав да су корени x_1 и x_2 једначине

$$x^2 + (m-4)x + m^2 - 3m + 3 = 0$$

реални. Наћи све вредности m за које је $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

178. Доказати да број од 1000 цифара које су све петице осим можда једне не може бити потпун квадрат.

179. Природан број n има два проста делитеља, а број n^2 има укупно 15 делитеља. Колико делитеља има број n^3?

180. Наћи све природне бројеве n који задовољавају једнакост:

(а) $n = \sum\limits_{\substack{k^2<n \\ k\in\mathbb{N}}} k^2$ (n је једнак збиру свих потпуних квадрата мањих од њега);

(б) $n = \sum\limits_{\substack{k^3<n \\ k\in\mathbb{N}}} k^3$ (n је једнак збиру свих потпуних кубова мањих од њега).

181. Две кружнице секу се у тачкама A и B. Кроз тачку A пролази права a која сече кружнице још и у тачкама P и Q. Наћи геометријско место средина дужи PQ када a заузима све могуће положаје кроз A.

182. На страницама BC, CA и AB троугла ABC изабране су тачке A_1, B_1 и C_1. Доказати да површина бар једног од троуглова AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C није већа од:

(а) четвртине површине троугла ABC;

(б) површине троугла $A_1B_1C_1$.

183. Нека су M и N средишта страница CD и DE правилног шестоугла $ABCDEF$, а P пресечна тачка дужи AM и BN.

(а) Одредити угао који заклапају праве AM и BN.

(б) Доказати да су површине троугла ABP и четвороугла $MDNP$ једнаке.

184. Дат је паралелопипед $ABCDA'B'C'D'$ (AA', BB', CC' и DD' су паралелне ивице). Доказати:

(а) да дијагонала AC' пролази кроз тежишта троуглова BDA' и $D'B'C$;

(б) да равни BDA' и $D'B'C$ деле дијагоналу AC' на три подударне дужи.

Сада се подсетите чувеног доказа да тежишна линија XX_1 троугла XYZ није већа од $\frac{1}{2}(XY + XZ)$, који се изводи допуњавањем троугла до паралелограма. Сада докажите и:

(в) ако је S тежиште пљосни ABC тетраедра $ABCD$, тада важи неједнакост $DS < \frac{1}{3}(DA + DB + DC)$.

185. Нека су x, y и z позитивни реални бројеви за које важи $xyz = x + y + z + 2$. Доказати да је тада:

$$\frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} + \frac{z}{z^2+1} \leqslant \frac{6}{5}.$$

186. Решити по x једначину

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}} = \sqrt{1993},$$

где се корен на левој страни појављује бесконачно много пута.

187. На карти Европе сваки град је спојен са њему најближим. Притом не постоје два једнака растојања међу паровима градова. Доказати да ниједан град није спојен са више од пет других.

188. Доказати да за сваки природан број n већи од 5 постоји скуп M од n тачака у равни тако да за сваку тачку $P \in M$ постоје бар три тачке из M на јединичном растојању од P.

189. Нека је скуп $M = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ представљен у облику: $M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$, где је $n \geqslant k^3 + 1$. Тада постоје $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ (може бити $i = j$) и $k+1$ различитих парних бројева $2r_1, \ldots, 2r_{k+1} \in M_i$ тако да $2r_1 - 1, \ldots, 2r_{k+1} - 1 \in M_j$.

190. Назовимо доминама правоугаонике 2×1: Одредити за које природне бројеве M и N је могуће поплочати доминама:

(а) правоугаоник $M \times N$;

(б) правоугаоник $M \times N$ из кога је исечено једно поље (1×1);

(в) правоугаоник $M \times N$ коме је додато једно поље.

У задацима (б) и (в) размотрити све могуће положаје тог поља.

191. ε–***околином*** броја $r \in \mathbb{R}$ називамо интервал

$$(r - \varepsilon, r + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid r - \varepsilon < x < r + \varepsilon\}, \quad \text{где је } \varepsilon > 0.$$

Уопште, ***околина*** броја $r \in \mathbb{R}$ је сваки интервал $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ такав да $r \in (a, b)$. Даље, кажемо да је a ***тачка нагомилавања*** неког скупа $A \subset \mathbb{R}$ ако у свакој околини тачке a постоји бесконачно много елемената скупа A. Доказати:

(а) ако у свакој околини броја a постоји бар један елемент скупа A, онда је a тачка нагомилавања за A;

(б) ако у свакој ε–околини броја a постоји бар један елемент скупа A, онда је a тачка нагомилавања скупа A.

192. Нека је R^n скуп свих n-торки реалних бројева. Дефинишимо сабирање: ако је $r = (r_1, \ldots, r_n)$ и $q = (q_1, \ldots, q_n)$ онда је $r+q = (r_1+q_1, \ldots, r_n+q_n)$, и множење реалним бројем: ако $a \in \mathbb{R}$ и $r = (r_1, \ldots, r_n)$, онда је $ar = (ar_1, \ldots, ar_n)$. За функцију $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ кажемо да је ***линеарна*** ако су испуњени услови:

(1) за $r, q \in \mathbb{R}^n$ је $T(r+q) = T(r) + T(q)$;

(2) за $a \in \mathbb{R}$ и $r \in \mathbb{R}^n$ је $T(ar) = aT(r)$.

Доказати:

(а) функција $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ је линеарна ако и само ако за $a, b \in \mathbb{R}$ и $r, q \in \mathbb{R}^n$ важи $T(ar + bq) = aT(r) + bT(q)$;

(б) ако је T линеарна функција и постоји T^{-1}, онда је и она линеарна (подсетимо се, T^{-1} је таква функција да важи $T(T^{-1}(x)) = x$ и $T^{-1}(T(x)) = x$).

193. Међу свим многоугловима уписаним у дату кружницу наћи онај с максималним збиром квадрата дужина страница.

194. Кружница k додирује кружнице k_1 и k_2 у тачкама A_1 и A_2. Доказати да права A_1A_2 пролази кроз пресечну тачку заједничких спољашњих или заједничких унутрашњих тангенти на k_1 и k_2.

195. Кроз заједничку тачку A кружница k_1 и k_2 конструисати праву l такву да је разлика дужина тетива, које на l одсецају k_1 и k_2 једнака датој дужини a.

196. Доказати да се у сваком конвексном $2n$–углу може наћи дијагонала која није паралелна ни са једном страницом.

197. Доказати да позитивни корен полинома $x^5 + x - 10$ мора бити ирационалан.

198. Решити у скупу рационалних бројева једначину $x^2 + y^2 = x + y$.

199. Има ли једначина $x^2 + y^3 = z^2$ у скупу природних бројева бесконачно много решења?

200. Ако су p и q различити прости бројеви, доказати: $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$.

201. Квадратна таблица 3×3 попуњена је бројевима као на слици:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}.$$

Таблица се може трансформисати у нову тако што се два броја из суседних поља умање за вредност мањег од та два броја, док се остали бројеви не мењају. Да ли се оваквим трансформацијама може добити таблица попуњена нулама?

202. У једној држави неки градови су спојени међусобно авионским линијама. Из главног града иде 1985 линија, из града Удаљеног једна, а из осталих градова по 20 линија. Доказати да се из главног града може стићи до Удаљеног.

203. Бесконачан збир $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ обележавамо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и зовемо ***ред***. Доказати примером да унутар реда не мора да важи асоцијативни закон, тј. да збир може зависити од редоследа сабирања.

204. ***Мрежа*** је скуп L коме је придружена релација поретка ρ (тј. рефлексивна, антисиметрична и транзитивна) тако да за свака два елемента из L постоје супремум и инфимум. ***Инфимум*** два броја a и b је њихово највеће доње ограничење, тј. највећи број који је мањи или једнак и од a и од b (сада „x је мање или једнако од y“ значи $x\rho y$). Аналогно, ***супремум*** два броја је нихово најмање горње ограничење, тј. најмањи број већи или једнак од оба. Да ли је скуп природних бројева мрежа ако му придружимо:

(а) релацију $\leqslant$ са уобичајеним значањем;

(б) релацију $|$ дељивости;

(в) релацију ρ дефинисану са: $x\rho y$ акко је збир цифара броја x мањи од збира цифара броја y.

205. Ако је p полуобим троугла са страницама a, b, c и угловима α, β, γ; r полупречник уписане, а r_a спољa уписане (приписане) кружнице код a, доказати:

(а) $rp = r_a(p - a)$;

(б) $\dfrac{a+b-c}{a+b+c} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$.

206. Тачке A и B леже на истом пречнику дате кружнице. Конструисати две тетиве те кружнице исте дужине и са једним заједничким крајем, једну кроз A, другу кроз B.

207. Нека су $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ вектори дужине не веће од 1. Доказати да се у збиру $\overrightarrow{c} = \pm\overrightarrow{a_1} \pm \overrightarrow{a_2} \pm \cdots \pm \overrightarrow{a_n}$ знакови могу изабрати тако да буде $|\overrightarrow{c}| \leqslant \sqrt{2}$.

208. На страницама BC и CD квадрата $ABCD$ изабране су тачке M и N тако да важи $CM + CN = AB$. Дужи AM и AN деле дијагоналу BD на три дела. Доказати да се из њих увек може саставити троугао чији је један угао $60°$.

209. Наћи све просте бројеве p за које је $p^3 - p + 1$ потпун квадрат.

210. Доказати да за сваки природан број $n > 2$ важи

$$n^n + (n+1)^n + \cdots + (2n-1)^n \geqslant (2n)^n.$$

211. Решити у скупу реалних бројева систем:

$$\begin{aligned}
(x_3 + x_4 + x_5)^5 &= 3x_1,\\
(x_4 + x_5 + x_1)^5 &= 3x_2,\\
(x_5 + x_1 + x_2)^5 &= 3x_3,\\
(x_1 + x_2 + x_3)^5 &= 3x_4,\\
(x_2 + x_3 + x_4)^5 &= 3x_5.
\end{aligned}$$

212. Нека је $\{a_n\}_{n\geqslant 2}$ низ природних бројева дефинисан са: $a_n = n^6+5n^4-12n^2-36$. Доказати:

(а) сваки прост број дели бар један члан тог низа;

(б) постоји природан број који не дели ниједан члан тог низа.

213. На кружници је дата 2001 тачка, од којих је једна означена. Посматрајмо све конвексне многоуглове с теменима у тим тачкама. Којих има више: оних који садрже означену тачку или оних који је не садрже?

214. У правилном $6n$–углу по $2n$ темена је обојено сваком од 3 дате боје. Затим је свака дуж која спаја темена исте боје обојена том бојом (остале дужи нису обојене). Доказати да постоје две подударне дужи обојене различитим бојама.

215. Доказати да функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ дефинисана са $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, и за $n \geqslant 3$:

$$f(n) = \min\{f(a) + f(b) \mid a, b \in \mathbb{N} \wedge (a + b = n \vee (b \neq 1 \wedge ab = n) \\ \vee (b \neq 1 \wedge a^b = n))\}$$

задовољава услове:
(i) $\max\{f(a + b), f(ab), f(a^b)\} \leqslant f(a) + f(b)$ за све $a, b \in \mathbb{N}$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} f(n) = +\infty$.

216. (а) Уређени пар се најчешће дефинише овако: $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Доказати да је $(a, b) = (c, d)$ акко је $a = c$ и $b = d$. (Имати на уму да су два скупа једнака акко су им елементи једнаки.)

(б) Директан производ скупова A и B је $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$. Доказати примером да не важи $A\times B = B\times A$, а затим наћи једну бијекцију између $A \times B$ и $B \times A$.

217. Унутар квадрата $ABCD$ лежи квадрат $PQRS$. Дужи AP, BQ, CR и DS не секу се међусобно нити секу квадрат $PQRS$. Доказати да је збир површина четвороуглова $ABQP$ и $CDSR$ једнак збиру површина четвороуглова $BCRQ$ и $DAPS$.

218. Колико се највише тачака може сместити у унутрашњост правилног шестоугла странице 1 тако да сваке две буду на растојању бар $\sqrt{2}$?

219. Дат је конвексан четвороугао чија су темена чворови целобројне мреже (тачке са целобројним координатама у равни), а на његовим страницама нема других чворова те мреже. Ако се унутар њега налази тачно један чвор мреже доказати да важи једна од следеће две тврдње:

(а) тај четвороугао је паралелограм;

(б) продужеци наспрамних страница тог четвороугла секу се у чворовима мреже.

220. По циркуској арени кружног облика и полупречника 10 метара трчи лав. Крећући се по изломљеној линији он је претрчао 30 километара. Доказати да сума углова за које се ротира лав у теменима те изломљене линије није мања од 2998 радијана (π радијана $= 180°$).

221. Три сфере имају заједничку тачку P, и притом ниједна права кроз P није тангента све три сфере. Доказати да оне имају бар још једну заједничку тачку.

222. Решити једначину $\log_a^4 x - 3\sqrt{3\log_a^2 x + 4} = 4$.

223. Наћи све полиноме p са реалним коефицијентима за које важи

$$p(x^2 - 2x) = (p(x-2))^2 \quad \text{за све } x \in \mathbb{R}.$$

224. Нека је l природан број и низ $\{a_n\}$ дефинисан са

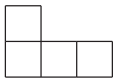
$$a_{n+1} = (-1)^n a_n + \sqrt{2a_n^2 + l} \quad \text{за } n \in \mathbb{N} \quad (a_1 \text{ произвољно}).$$

Доказати да не могу сви чланови овог низа бити цели бројеви.

225. Ако за пермутацију $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ важи $\dfrac{1 + a_k}{a_{k+1}} < 1 + \dfrac{2}{k}$, за све $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, доказати да је $a_k = k$ за све $k = 1, 2, \ldots, n$.

226. Доказати идентитет $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}\binom{2k}{k} 2^{2n-2k} = \binom{4n}{2n}$.

227. (*Видан Говедарица*) Нека су m и n природни бројеви већи од 1. Доказати да се правоугаона табла формата $m \times n$ може покрити фигурама састављеним од четири јединична квадрата, као на слици 7, акко $8 \mid mn$.



Слика 7.

228. Неки скуп G је ***група*** у односу на неку операцију $* : G \times G \to G$ ако важи:

(а) $*$ је асоцијативна операција, тј. за $a, b, c \in G$ важи $(a * b) * c = a * (b * c)$;

(б) G има јединични елемент, тј. постоји $e \in G$ такво да за све $g \in G$ важи $g * e = g$ и $e * g = g$;

(в) сваки елемент $g \in G$ има инверзни, тј. $h \in G$ такво да је $g * h = e$ и $h * g = e$.

Доказати: ако је A произвољан скуп, његов ***партитивни скуп*** $\mathcal{P}(A)$ (скуп свих његових подскупова) је група у односу на операцију $\triangle$ ***симетричне разлике*** дефинисане овако: за $X, Y \subseteq A$ је $X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$.

229. Дат је троугао ABC. Тачка M, смештена унутар троугла, помера се паралелно страници BC до пресека са страницом CA, затим од тог пресека даље паралелно са страницом AB до пресека са BC, затим од тог пресека даље паралелно са AC до пресека са AB, итд. Доказати да ће се после коначног броја описаних корака путања тачке M затворити (тј. да ће доспети у почетни положај).

230. На луку CD кружнице описане око квадрата $ABCD$ изабрана је тачка P. Доказати да је $PA + PC = \sqrt{2}PB$.

231. Доказати да је немогуће у конвексном n–углу изабрати више од n дијагонала тако да сваке две од њих имају заједничку тачку.

232. У тетраедру $ABCD$ углови (пљосни) код темена A су прави и важи $AB = AC + AD$. Доказати да је збир углова (пљосни) код темена B једнак $90°$.

233. Одредити све тројке (p, q, r), $q \leqslant r$ простих бројева за које важи $p^2 + qr = 1996^2$.

234. За дати број $n \in \mathbb{N}$ наћи бројеве $x, y \in \mathbb{N}$ за које важи $x^2 - 5y^2 = 1996^n$.

235. Доказати да једначина $ax^2 + bx + c = 0$ нема рационалних решења ако су a, b и c цели непарни бројеви.

236. Дат је скуп од 2001 тачке, од којих је једна означена. Посматрајмо све подскупове тог скупа. Којих има више: оних који садрже означену тачку или оних који је не садрже? (Упоредити са задатком **213.**)

237. Посматрајмо све регуларне (конвексне или звездасте) n–стране полигоне уписане у дату кружницу. Два таква полигона зовемо еквивалентним ако се један од другог могу добити ротацијом око центра дате кружнице. Колико класа еквиваленције постоји, тј. колико највише таквих полигона се може изабрати тако да међу њима не постоје два еквивалентна?

238. Дата је коцка $6 \times 6 \times 6$. Наћи највећи могући број правоуглих паралелопипеда $4 \times 1 \times 1$ (са ивицама паралелним ивицама коцке) које можемо сместити у ту коцку тако да се међусобно не секу. Дозвољено је да се паралелопипеди секу по ивицама и странама.

239. Наћи све функције $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ за које важи $f(1) = 2$ и

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x + y) + 1 \quad \text{за све } x, y \in \mathbb{Q}.$$

240. Да ли постоји низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ природних бројева такав да за свако $n \in \mathbb{N}$ једначина $a_{n+2}x^2 + a_{n+1}x + a_n = 0$ има реалан корен?

241. Ако кружница уписана у четвороугао $ABCD$ има полупречник r доказати да је $AB + CD \geqslant 4r$.

242. Правоугли троугао T подељен је висином h из темена правог угла на два троугла T_1 и T_2. Показати да је збир полупречника кружница уписаних у T, T_1 и T_2 једнак висини троугла T.

243. Доказати: ако су четири странице конвексног петоугла паралелне наспрамним дијагоналама (наспрамна дијагонала странице је она која нема с њом заједничко теме) онда то важи и за пету страницу.

244. Планета облика сфере има пречник d. Може ли се на њену површину сместити осам истраживачких станица, тако да свако небеско тело на удаљености d од површине планете буде видљиво са бар две станице?

245. Доказати да за произвољне реалне бројеве $a_1, a_2, \ldots, a_n$ важи

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij\cos(a_i - a_j) \geqslant 0.$$

246. Доказати да су у декадном запису броја $\left(6+\sqrt{37}\right)^{999}$ првих 999 цифара после децималног зареза нуле.

247. Полином $P(x)$ има бар један негативан коефицијент. Могу ли у свим полиномима $P^n(x)$ за $n > 1$ сви коефицијенти бити позитивни?

248. За које природне бројеве n је $2^n - 1$ дељиво са 7?

249. Бројеви $1, 2, \ldots, 25$ распоређени су у таблицу 5×5 тако да су у свакој врсти бројеви у растућем поретку. Која је највећа, а која најмања вредност збира бројева у трећој колони?

250. Око неког града изграђен је кружни пут. Све улице тог града имају почетак и крај на том путу, у не постоје две међу њима које се секу више од једном. Делови на које улице (и пут) деле град називају се квартови. У целом граду уведен је пропис да све улице (и кружни пут) морају бити једносмерне. Доказати да се бар један кварт може цео обићи (проћи свим деловима улица које га ограничавају) крећући се правилно.

251. У игри ***потапање подморница*** на таблу 10×10 смешта се (између осталог) једна „подморница“ димензија 4×1. Који је минималан број потеза у којем ће она сигурно бити „погођена“? (Потез је уствари бирање једног поља на табли, а подморница је погођена ако покрива то поље.)

252. Десет жетона поређано је на кружници. Они су с горње стране црвени, а с доње плави. Дозвољено је преврнути четири жетона која стоје један до другог, или четири која су распоређена у виду $xxoxx$, тј. два која се преврћу – један који остаје недирнут – два која се преврћу. Могу ли се таквим операцијама сви жетони преврнути на плаву страну?

253. На страницама BC, CA, AB троугла ABC дате су тачке A_1, B_1, C_1 редом. Могу ли средишта дужи AA_1, BB_1, CC_1 лежати на једној правој?

254. Дата је права p и тачке $A, B \in p$. Две кружнице додирују p у A, односно B, а међусобно се додирују у тачки M. Наћи геометријско место тачака M.

255. Дата је кружница k и тачке A и B. Конструисати на k тачке C и D такве да буде $AC \parallel BD$ и да дуж CD буде задате дужине a.

256. Тетраедар $ABCD$ уписан је у сферу полупречника R с центром O. Праве AO, BO, CO, DO секу наспрамне стране тетраедра у тачкама A_1, B_1, C_1 и D_1 редом. Доказати да важи $AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1 \geqslant \frac{16}{3}R$.

257. Нека су a и b узајамно прости природни бројеви и n произвољан природан број. Доказати: ако је (x_0, y_0) решење једначине $ax + by = a^n + b^n$ онда је

$$\left\lfloor \frac{x_0}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y_0}{a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a^{n-1}}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b^{n-1}}{a} \right\rfloor.$$

258. Доказати да је број чији декадни запис има 2187 јединицу (и ниједну другу цифру) дељив са 2187.

259. Доказати да су бројеви $2^m - 1$ и $2^n - 1$ узајамно прости ако и само ако су m и n узајамно прости.

260. Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 9, \\ xyz + xy + yz + zx + x + y + z &= 59, \\ xy + yz + zx + 2(x + y + z) &= 44. \end{aligned}$$

261. Низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ задовољава рекурентну формулу $a_{n+1} = 1 - |1 - 2a_n|$ и сви чланови су му између 0 и 1. Доказати да је a_1 рационалан број ако и само ако је низ почевши од неког члана периодичан.

262. Нека су a и b природни бројеви. Доказати: ако је број $\frac{a+1}{b} + \frac{b}{a}$ цео, он је једнак 3.

263. У сваком од три темена квадрата седи по један скакавац. Сваке минуте један од њих прескочи неког од преостале двојице сместивши се у тачку симетричну оној из које је скочио у односу на скакавца ког је прескочио. Може ли бар један од њих после коначно много таквих потеза стићи у четврто теме квадрата?

264. Сваки од 450 чланова скупштине мрко је погледао тачно једног свог колегу (члана скупштине). Доказати да је могуће изабрати комисију од 150 чланова скупштине међу којима нико никог није мрко погледао.

265. Троугао ABC је такав да је $\sphericalangle BAC = 60°$. Доказати да је његова површина једнака $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 - (b-c)^2)$, где су a, b, c странице наспрам темена A, B, C редом.

266. Конструисати трапез ако су му дате дужине кракова, угао између њих и угао који заклапају дијагонале. (Угао између неке две дужи је у ствари угао између њихових продужетака.)

267. Од три кружнице сваке две се секу. Кроз тачке пресека сваке две од њих провучена је права. Доказати да су те три праве или све паралелне, или се све секу у једној тачки.

268. Дат је троугао ABC. Нормално на раван троугла повучене су праве кроз тачке A, B, C и на њима редом изабране тачке A', B', C' такве да је $AA' = BC$, $BB' = CA$, $CC' = AB$, и све су са исте стране равни троугла. Ако је H ортоцентар троугла ABC, а O центар описане кружнице троугла $A'B'C'$, доказати да је права HO нормална на раван троугла $A'B'C'$.

269. За које природне бројеве a, b, m, n је могуће таблицу $a \times b$ попунити нулама и јединицама, тако да у свакој врсти буде тачно m, а у свакој колони тачно n нула?

270. Доказати да сваки прост број n дели збир $\sum_{k=1}^{n-3} k(k!)$.

271. Решити у скупу позитивних реалних бројева систем једначина

$$\begin{aligned} xyz &= \frac{y^3+z^3+t^3}{3}, \\ yzt &= \frac{z^3+t^3+x^3}{3}, \\ ztx &= \frac{t^3+x^3+y^3}{3}, \\ txy &= \frac{x^3+y^3+z^3}{3}. \end{aligned}$$

272. Доказати да је број $0,1248163264128\ldots$ ирационалан. (Иза децималне запете исписани су редом степени двојке.)

273. Два играча играју следећу игру. Први изговара један од бројева 54 или 77. Други додаје томе броју 54 или 77 и изговара добијени збир. У наставку играчи наизменично додају један од бројева 54 или 77 и изговарају збир тога броја са претходним збиром. Који играч има победничку стратегију, ако:

(а) победник је играч који први изговори број чији је остатак при дељењу са 100 прост број;

(б) губи играч који први изговори број чији је остатак при дељењу са 100 прост број?

274. Ходник ширине d скреће под правим углом. Која је најмања ширина d, таква да кроз ходник може да се креће кревет на точкићима дужине 2 и ширине 1?

275. Два играча играју следећу игру: први запише на папир двоцифрен број, затим му други додаје још две цифре на почетак или две цифре на крај. У сваком следећем потезу први играч дописује на почетак или на крај по једну, а други играч по две цифре. Може ли први играч да спречи да после неког потеза другог играча на папиру буде записан потпун квадрат?

276. Да ли је могуће изабрати 5 темена правилног 21–угла тако да петоугао са изабраним теменима има све странице и дијагонале различите дужине?

277. Два брода плове праволинијски константним брзинама према истој луци. У подне су лука и бродови били у теменима једнакостраничног троугла. Кад је други брод прешао 90 km, бродови и лука налазили су се у теменима правоуглог троугла. Кад је први брод упловио у луку, другоме је остало да пређе још $37,5$ km. Одредити растојање између бродова у подне.

278. Доказати да је дужина странице правилног деветоугла једнака разлици дужина најдуже и најкраће дијагонале.

279. Да ли постоји природан број n такав да је $n^n + 1$ потпун квадрат?

280. Конвексан седмоугао уписан је у кружницу и има тачно три угла од по $120°$. Доказати да су у том седмоуглу неке две странице једнаке.

281. Правоугаона трака 1×25 издељена је на 25 јединичних квадратића (поља). Да ли је могуће исписати у та поља бројеве од 1 до 25, без понављања, тако да је збир бројева у свака два суседна поља потпун квадрат?

282. Доказати да је за сваки природан број n полином $x^{3n-1}+x+1$ дељив полиномом $x^2 + x + 1$.

283. Доказати да је број $a = 0, a_1a_2a_3\ldots$ ирационалан, где је $a_n = 1$, ако је број делитеља броја n непаран, а $a_n = 0$, у противном случају.

284. Два 2002–цифрена броја m и n су потпуни седми степени. Да ли 4004–цифрен број који се добија исписивањем броја n иза броја m може бити потпун седми степен?

285. Основа тростране пирамиде је правоугли троугао са катетама дужине 12 и 35. Све бочне стране заклапају са равни основе угао од $60°$. Одредити површину пирамиде.

286. Доказати идентитет

$$\sin 10° \sin 20° \sin 30° \sin 40° \sin 50° \sin 60° \sin 70° \sin 80° = \frac{3}{256}.$$

287. Десет темена правилног 100–угла обојено је црвено, а десет других плаво. Доказати да бар једна тетива која спаја два црвена темена има исту дужину као и нека тетива која спаја два плава темена.

288. Нека су a, b и c реални бројеви такви да је $0 < a, b, c < 1$ и $a + b + c = 1$. Доказати неједнакост

$$\frac{a^5+b^5}{a^2+b^2}+\frac{b^5+c^5}{b^2+c^2}+\frac{c^5+a^5}{c^2+a^2}<3(a^2+b^2+c^2)-(a^3+b^3+c^3).$$

289. Доказати да за сваки реалан број x важи неједнакост $\sin(\sin x+\cos x) < \cos\dfrac{\pi}{24}$.

290. Доказати да је полупречник кружнице уписане у Питагорин троугао цео број.

291. Коначно много равни деле простор на неколико области. Доказати да се могу одабрати две области које се налазе са разних страна сваке од тих равни.

292. Нека су a и b катете, c хипотенуза правоуглог троугла и α реалан број. Доказати неједнакост:

$$c^2\left(\frac{ab}{c}\right)^{\alpha-2} < a^\alpha + b^\alpha < c^\alpha \quad \text{за} \quad \alpha > 2.$$

Доказати да за $\alpha < 2$ важе супротне неједнакости.

293. Колики је најмањи могући збир цифара неког природног броја дељивог са 59?

294. Колико има аритметичких низова природних бројева са бар два члана и са збиром чланова 2002?

295. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ такви да је $\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2 + \cdots + \operatorname{tg} x_n \leqslant n$. Доказати да је $\sin x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \ldots \cdot \sin x_n \leqslant 2^{-\frac{n}{2}}$.

296. У унутрашњости квадрата $ABCD$ постоји тачка M таква да је $MA = 7$, $MB = 13$, $MC = 17$. Одредити површину квадрата.

297. Дат је правоугли троугао ABC ($\sphericalangle ACB = 90°$). Нека је X подножје висине из темена C на хипотенузу AB, а Y средиште дужи AX. Ако је D тачка на правој CB таква да је $C - B - D$ и $CB = BD$, доказати да је $DX \perp CY$.

298. Нека је $A_1B_1C_1$ троугао и нека тачке B_1, B_2, B_3, различите од темена троугла, леже редом на страницама A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2. Доказати да симетрале дужи A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 нису конкурентне.

299. Означимо са $\sigma(n)$ збир свих позитивних делитеља природног броја n. Доказати да је за сваки природан број $n > 1$ производ $\sigma(n-1)\sigma(n)\sigma(n+1)$ паран.

300. Одредити најмањи непаран природан број n такав да је n^2 збир непарног броја (већег од 1) квадрата узастопних природних бројева.

301. Доказати да за све позитивне реалне бројеве a и b важи неједнакост

$$\frac{1}{a^5}+\frac{1}{b^5}\leqslant\frac{\sqrt{a}}{b^5\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{a^5\sqrt{a}}.$$

302. Наћи најмањи природан број n $(n>1)$ за који је број $\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n}$ потпун квадрат.

303. Дијагонале AC и BD конвексног четвороугла $ABCD$ секу се у тачки S. Ако је $\sphericalangle SAB=\sphericalangle SBC=30^\circ$ и $\sphericalangle SCD=\sphericalangle SDA=45^\circ$, одредити величину угла $\sphericalangle ASD$.

304. Доказати идентитет $\operatorname{tg}40^\circ+\operatorname{tg}60^\circ+\operatorname{tg}80^\circ=3\operatorname{tg}70^\circ$.

305. Одредити све целе бројеве n за које је $n^4-4n^3+14n^2-20n+10$ потпун квадрат.

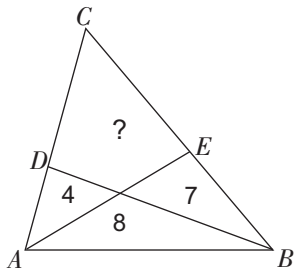
306. Тачке E, D и F су редом средишта страница BC, CA и AB троугла ABC. Нека је L тачка која полови изломљену линију BAC, тј. дели је на два дела једнаких дужина. Исто тако тачка M полови изломљену линију CBA, а тачка N изломљену линију ACB. Доказати да су праве LE, DM и FN конкурентне.

307. Дат је скуп од 10 природних бројева мањих од 107. Доказати да се из тог скупа могу изабрати два дисјунктна подскупа A и B тако да је збир бројева из A једнак збиру бројева из B.

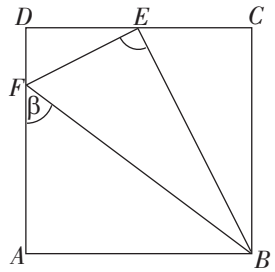
308. Кружница је страницама датог конвексног четвороугла исечена на осам лукова. Четири лука су у унутрашњости, а четири у спољашњости четвороугла. Означимо дужине унутрашњих лукова са a, b, c, d (у смеру супротном кретању казаљке на сату). Доказати да је дати четвороугао тетивни, ако је $a+c=b+d$.

309. Темена 12−угла означена су бројевима од 1 до 12 произвољним редом. Доказати да се могу наћи три узастопна темена тако да је збир бројева којима су означена та темена већи од 20.

310. Дужи AE и BD деле троугао ABC на 4 области. Површине 3 области су означене на слици 8. Одредити површину четврте области.



Слика 8.



Слика 9.

311. Квадрат је подељен на правоугле троуглове као на слици 9, при чему је $CE = DE$ и $\sphericalangle BEF = 90°$. Означимо $\beta = \sphericalangle BFA$. Одредити $\operatorname{tg}\beta$?

312. У тетивном четвороуглу $PQRS$ је $\sphericalangle PSR = 90°$; H и K су редом подножја нормала из Q на PR и PS. Доказати да права HK полови дуж QS.

313. Дата је нека пермутација бројева $1, 2, 3, \ldots, 2002$. Ако је први елемент пермутације број k, онда је дозвољено променити редослед првих k елемената, тако да се они узму у обрнутом поретку. Да ли се увек може вишеструком применом наведене операције постићи да број 1 дође на прво место?

314. Нека су b и c природни бројеви такви да је b делитељ од $c^2 + 1$ и c делитељ од $b^2 + 1$. Одредити вредност израза $\dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{1}{bc}$.

315. Нека су E и F редом тачке на страницама AB и BC квадрата $ABCD$ такве да је $BE = BF$. Нека је N подножје нормале из B на CE. Доказати да је $\sphericalangle DNF$ прав угао.

316. Познато је да на једном такмичењу међу било која четири учесника постоји бар један који познаје осталу тројицу. Доказати да

(а) постоји бар један учесник који познаје све остале;

(б) постоје највише три учесника који не познају све остале.

317. У троугао ABC са правим углом код темена A уписана је полукружница са центром на катети AC, која пролази кроз A и додирује хипотенузу BC у тачки D. E је друга тачка полукружнице на катети AC, а F је тачка пресека правих DE и AB. Доказати да је $AB = BF$.

318. Углови конвексног многоугла образују аритметичку прогресију $x, \dfrac{4}{3}x, \dfrac{5}{3}x, \ldots$. Колико највише страница може имати такав многоугао?

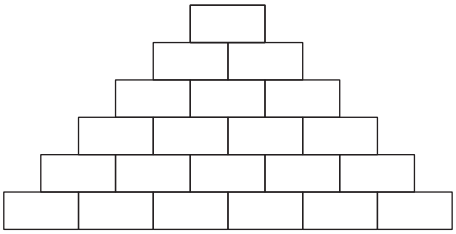
319. Нека је D произвољна тачка на страници BC троугла ABC. Доказати да однос полупречника кружница описаних око троуглова ABD и ACD не зависи од избора тачке D на страници BC.

320. У правоугаонику $ABCD$ је $AB = a$, $AD = b$, E је тачка на страници AB и $\sphericalangle CED = \sphericalangle AED$. Одредити дужину дужи AE.

321. На катети AC једнакокраког правоуглог троугла ABC изабрана је тачка P тако да полукружница са пречником PC додирује хипотенузу AB. У ком односу та полукружница дели дуж PB?

322. Колики је најмањи могући збир цифара неког природног броја дељивог са 2003?

323. Два играча играју следећу игру. Они наизменично уписују ненегативне целе бројеве у поља последње врсте $n-$тостране „пирамиде“. (На слици 10 је представљен случај $n = 6$.)



Слика 10.

Бројеви се могу понављати. Поља се не морају попуњавати редом. Кад се попуне све поља последње врсте онда се израчунавају бројеви у осталим пољима по правилу да је збир свака два броја из суседих поља исте врсте једнак броју који се налази непосредно изнад њих. Ако се на врху „пирамиде“ добије број дељив са 2003, победник је Први играч, у противном – Други. Који играч има победничку стратегију?

324. Наћи све парове реалних бројева (x, y) који задовољавају једначине

$$|x + y - 4| = 5, \quad |x - 3| + |y - 1| = 5.$$

325. Одредити највећи број група у које можемо поделити бројеве $1, 2, 3, \ldots, 20$, тако да производ бројева сваке групе буде потпун квадрат, а да се притом сваки појединачни број може наћи само у једној групи.

326. Наћи све седмоцифрене бројеве који су дељиви и са 3 и са 7, а чије су цифре једино тројке и седмице.

327. (а) Може ли се произвољни троугао поделити на 2004 троугла који су му слични?

(б) Да ли се иста подела може учинити и на 2003 троугла?

328. Ученик има 67 дана за припреме за такмичење из математике. Он планира да дневно уради бар један задатак, али не више од 100 задатака током свих дана припреме. Доказати да ће у том случају постојати низ дана током којих ће он урадити тачно 33 задатка.

329. Дата је једначина $x^2 + (a - 2)x - 2a^2 + 5a - 3 = 0$, где је a реални параметар.

(а) Решити једначину.

(б) Наћи a за које је апсолутна вредност једног корена два пута већа од апсолутне вредности другог корена.

330. Решити једначину $(x^2 + 3x - 4)^3 + (2x^2 - 5x + 3)^3 = (3x^2 - 2x - 1)^3$.

331. Одредити све парове реалних бројева (a, b) који задовољавају једначине

$$2a^2 - 2ab + b^2 = a, \quad 4a^2 - 5ab + 2b^2 = b.$$

332. Наћи вредности параметра p за које једначина $x^4-(3p+2)x^2+p^2=0$ има четири реална решења која образују аритметичку прогресију.

333. Доказати да су сви чланови низа дефинисаног са

$$y_0=1,\quad y_{n+1}=\frac{1}{2}\left(3y_n+\sqrt{5y_n^2-4}\right),\quad n\geqslant 0$$

цели бројеви.

334. Решити једначину $\log_3\dfrac{1}{\sqrt{\log_3 x}}=\log_9\log_9\dfrac{x}{3}$.

335. Доказати да у сваком тетраедру постоји теме, такво да се од ивица које из њега излазе може конструисати троугао.

336. Нека је $ABCD$ тетраедар, такав да важе једнакости

$$AB\cdot CD=BC\cdot AD=CA\cdot BD.$$

Сфера $\mathcal{S}$ садржи темена A, B, C и сече ивице DA, DB, DC редом у тачкама A_1, B_1, C_1. Доказати да је троугао $A_1B_1C_1$ једнакостраничан.

337. Нека су α, β и γ оштри углови, које дијагонала квадра $ABCDA_1B_1C_1D_1$ гради редом са ивицама AA_1, AB и AD. Доказати да је $\alpha+\beta+\gamma<\pi$.

338. Одредити максималну вредност површине нормалне пројекције коцке на раван.

339. (а) Доказати да је $\log_{\sqrt{2}}3$ ирационалан број.

(б) Ако су x и y ирационални бројеви да ли број x^y може бити рационалан?

340. Наћи сва реална решења једначине $\left(2+\sqrt{3}\right)^x+1=\left(2\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x$.

341. Доказати да је за сваки природан број $n>1$,

$$\left[6\left(1-1,\underbrace{00\ldots0}_{n-1}1^{-10^n}\right)\right]=3.$$

342. Функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ задовољава услов

$$f(x^2-y^2)=(x-y)(f(x)+f(y))\quad \text{за свако } x,\,y\in\mathbb{R}.$$

(а) Наћи бар једну овакву функцију?

(б) Наћи све функције са овом особином?

343. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева x који се не могу представити у облику $x=x_1^3+x_2^5+x_3^7+x_4^9+x_5^{11}$, где су x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5 такође природни бројеви.

344. Ако су x, y, z реални бројеви такви да су xy, yz и zx рационални бројеви различити од нуле. Доказати:

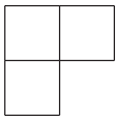
(а) број $x^2+y^2+z^2$ је рационалан;

(б) ако је $x^3+y^3+z^3$ рационалан број различит од нуле, тада су и бројеви x, y, z рационални.

345. Одредити све просте бројеве p, q, r за које важи $3(p+q+r)=pqr$.

346. Доказати да је $4^{545}+545^4$ сложен број.

347. Доказати да се свака табла димензија $3n\times 3n$, $n>1$ може поплочати фигурама облика као на слици 11.



Слика 11.

348. Низ $\{a_n\}$ је дат на следећи начин: $a_1=1$, $a_2=3$ и

$$a_{n+2}=(n+3)a_{n+1}-(n+2)a_n$$

за све природне бројеве n. Наћи све чланове низа који су дељиви са 11.

349. Наћи сва реална решења система једначина:

$$x^3+y^3=1, \quad x^4+y^4=1.$$

350. Систем једначина другог степена

$$x^2-y^2=0, \quad (x-a)^2+y^2=1.$$

у општем случају има четири решења. За које вредности реалног параметра a се број решења система смањује на 3, односно 2?

351. Решити систем једначина

$$\begin{aligned} y^3-6x^2+12x-8 &= 0,\\ z^3-6y^2+12y-8 &= 0,\\ x^3-6z^2+12z-8 &= 0. \end{aligned}$$

352. У равни је дато 100 тачака, таквих да међу свим дужима, чије су оне крајеви, најдужа има дужину 1. Доказати да је дужина d, најкраће међу овим дужима, мања од $\frac{2}{9}$.

353. Повезане су ти очи, а испред тебе на столу налази се гомила од x новчића. Саопштено ти је да се међу њима налази тачно y новчића који су окренути писмом горе. Да ли можеш, повезаних очију, поделити новчиће на две гомиле тако да у свакој буде исти број новчића окренутих писмом горе?

354. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$x^z = y^{\frac{8}{3}}, \quad y^z = x^{\frac{2}{3}}, \quad z = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{9y}.$$

355. За које вредности реалног параметра a једначина $1 + \sin^2 ax = \cos x$ има јединствено решење?

356. На кругу описаном око правоуглог троугла ABC ($\sphericalangle C = 90^\circ$) дата је тачка M таква да је $AM > BM$, $\dfrac{AM}{BM} + \dfrac{BM}{AM} = 2\sqrt{2}$ и тачке C и M су са различитих страна праве AB. Доказати да је $\sphericalangle ABM = 3\sphericalangle BCM$.

357. Дат је троугао ABC и тачке D, E, F редом на страницама BC, CA, AB (различите од темена). Ако је четвороугао $AFDE$ тетиван, доказати да је

$$\frac{4P_{\triangle DEF}}{P_{\triangle ABC}} \leqslant \left(\frac{EF}{AD}\right)^2.$$

358. Одредити максималну вредност коју може имати површина нормалне пројекције правилног тетраедра ивице a на произвољну раван.

359. Претпоставимо да смо реалну функцију ψ увели на следећи начин

$$\psi(x) = \begin{cases} x, & x > 2, \\ 2, & 1 < x \leqslant 2, \\ 2x, & x \leqslant 1. \end{cases}$$

Решити следеће формуле по $x \in \mathbb{R}$:

(а) $\psi(x) < x$;

(б) $\psi(x) + \psi(1-x) + \psi(\psi(x)) = 2$.

360. Бројеви 2^{2003} и 5^{2003} написани су један за другим. Колико цифара има тако добијен број?

361. Свака дијагонала конвексног петоугла одсеца троугао јединичне површине. Израчунати површину тог петоугла.

362. Одредити углове једнакокраког троугла у коме је дужина симетрале угла на основици једнака двострукој дужини висине која одговара основици.

363. Доказати да не постоји квадрат чија се темена налазе на четири концентрична круга, а да при томе полупречници тих кругова образују аритметичку прогресију.

364. Доказати да ако n дели $(n-1)!+1$, онда је n прост број.

365. Однос висине и тежишне дужи које одговарају хипотенузи правоуглог троугла једнак је $\frac{40}{41}$. Одредити однос катета тог троугла.

366. Дванаест хлебова подељено је на дванаест људи. Сваки мушкарац добио је по два хлеба, жена по пола хлеба, а свако дете по четвртину хлеба. Колико је било мушкараца, колико жена, а колико деце?

367. Дат је тетиван четвороугао $ABCD$. Нека је $AD \cap BC = \{H\}$ и $CD \cap AB = \{E\}$. Симетрала угла $\sphericalangle DEA$ сече странице DA и CB у тачкама P и M, а симетрала угла $\sphericalangle DHC$ сече странице DC и BA у тачкама N и L. Доказати да је $LMNP$ ромб.

368. Наћи један пар природних бројева a, b за које важи:
(а) производ $ab(a+b)$ није дељив са 7 и
(б) број $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ је дељив са 7^7.

369. Доказати импликацију: $x^2 + y^2 \leqslant 2 \Rightarrow |x+y| \leqslant 2$.

370. Ако су x_1 и x_2 решења једначине $x^2 + ax + bc = 0$, а x_2 и x_3 решења једначине $x^2 + bx + ac = 0$, при чему је $ac \neq bc$, доказати да су x_1 и x_3 решења једначине $x^2 + cx + ab = 0$.

371. Кроз тачку у унутрашњости троугла ABC површине P конструисане су три праве паралелне страницама троугла. Оне са сраницама троугла образују три нова троугла чије су површине P_1, P_2 и P_3. Доказати да је $P_1 + P_2 + P_3 \geqslant \frac{1}{3}P$.

372. Доказати да за произвољне природне бројеве m и n важи неједнакост:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} > 1.$$

373. Ако су a, b, c, d, e, f реални бројеви такви да важи $a+b+c+d+e+f = 10$, и

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 + (d-1)^2 + (e-1)^2 + (f-1)^2 = 6,$$

одредити максималну вредност броја f.

374. Решити једначину $(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)(2 + \sin y) = 2$.

375. Наћи највећу вредност функције

$$f(x) = \frac{x}{x^2+9} + \frac{1}{x^2-6x+21} + \cos 2\pi x$$

на интервалу $(0, +\infty)$.

376. Одредити највећу вредност израза $\log_2^4 x + 12\log_2^4 2x \cdot \log_2\left(\frac{8}{x}\right)$, ако променљива x варира у интервалу $[0, 64]$.

377. Од свих четвороуглова са датим сраницама највећу површину има тетивни четвороугао. Доказати.

378. За унутрашње углове α и β троугла $\triangle ABC$ $(\sphericalangle BAC = \alpha, \sphericalangle ABC = \beta)$ важи

$$\sin^{23}\frac{\alpha}{2}\cos^{48}\frac{\beta}{2} = \sin^{23}\frac{\beta}{2}\cos^{48}\frac{\alpha}{2}.$$

Наћи однос $AC : BC$.

379. Наћи све парове реалних бројева x, y такве да је

$$\max\{x^2 + y^2,\, 2\} = \min\{-2x,\, 2y\}.$$

380. Наћи све реалне бројеве a, b за које је функција

$$f(x) = x^6 - 4x^5 + bx^4 + 8x^3 + ax^2 - 4x + 4$$

ненегативна.

381. Решити једначину $\left[\frac{x-2}{3}\right] = \left[\frac{x-3}{2}\right]$, где $[x]$ означава цео део броја x.

382. Наћи сва реална решења система

$$ax + by = (x-y)^2, \quad by + cz = (y-z)^2, \quad cz + ax = (z-x)^2,$$

где су a, b, c задати позитивни реални бројеви.

383. Нека су $d_1, d_2, \ldots, d_k$ сви делиоци природног броја n, такви да је

$$1 = d_1 < d_2 < d_3 < \cdots < d_k = n.$$

Наћи све бројеве n за које је $k \geqslant 4$ и важи $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n$.

384. Одредити последње три цифре броја $2^{2009} - 2^{2007} + 2^{2004}$.

385. Ако реални бројеви a, b, c и d задовољавају једнакости

$$\left(1 + \frac{a}{bc}\right)\left(1 + \frac{b}{ac}\right)\left(1 + \frac{c}{ba}\right)d^2 = 1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1,$$

израчунати $a + b + c$.

386. Који је број већи $4^{4^{4^{4}}}$ или $5^{5^{5^{5}}}$?

387. Наћи све природне бројеве n такве да је број $2^4 \cdot 3^{16} + 5^2 \cdot 3^{14} + 3^n$ потпун квадрат.

388. Збир 49 природних бројева једнак је 999. Наћи највећу могућу вредност њиховог највећег заједничког делиоца.

389. Постоје ли реални бројеви b и c такви да свака од једначина $x^2 + bx + c = 0$ и $2x^2 + (b+1)x + c + 1 = 0$ има по два целобројна корена?

390. Доказати да ма како сместили 10 тачака у круг пречника 5, међу њима се могу наћи две на растојању мањем од 2.

391. Доказати да је за $1 < a < b < c$: $\log_a(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_c(\log_c a) > 0$.

392. Доказати да између било која четири различита броја из интервала $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ могу да се изаберу два, x и y, тако да важи неједнакост

$$8\cos x \cos y \cos(x-y) + 1 > 4(\cos^2 x + \cos^2 y).$$

393. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned} ||x-y| + x + y - 2z| + |x-y| + x + y + 2z &= 16, \\ 2x + y + z - |y-z| - |2x - y - z + |y-z|| &= 8, \\ |x| + |y| + |z| &= 9. \end{aligned}$$

394. За природан број кажемо да је симетричан ако је једнак броју записаном истим цифрама у обрнутом редоследу. Наћи највећи заједнички делилац свих симетричних десетоцифрених бројева.

395. Кружница уписана у троугао ABC додирује његове странице AB, BC и CA у тачкама M, N и K редом. Права кроз тачку A, паралелна са NK, сече праву NM у тачки D. Права кроз тачку A, паралелна са NM, сече праву NK у тачки E. Доказати да права DE садржи средњу линију троугла ABC.

396. Пресек равни са коцком је петоугао. Доказати да је површина тог петоугла мања од производа две његове најдуже странице.

397. Одредити минималну вредност функције $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5} + \sqrt{x^2 - 6x + 25}$.

398. Низ a_n задовољава услове

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_m = \frac{a_{m-1}}{2m \cdot a_{m-1} + 1}, \ m > 1.$$

Одредити збир $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ за произвољан природан број k.

399. Колико има петоцифрених бројева чије су све цифре различите, а да се прва и последња разликују за 3?

400. Одредити максималну вредност производа

$$\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cdots \sin\alpha_n,$$

где су $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ реални бројеви такви да је $\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 \cdots \operatorname{tg}\alpha_n = 1$.

401. Дат је полином са реалним коефицијентима $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 1$ који има три реална позитивна корена, не обавезно различита. Одредити минималну вредност збира $a + b$.

402. Функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дата је са

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < -1, \\ -x-2, & -1 \leqslant x < 0, \\ 2x-2, & 0 \leqslant x < 1, \\ 2x-4, & 1 \leqslant x. \end{cases}$$

Нацртати график функције $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задате са $g(x) = |f(|x-2|)| + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

403. Наћи све функције f, такве да за произвољне реалне бројеве x и y важи једнакост $f(x-y) = f(x) + f(y) - 2xy$.

404. Збир цифара броја x једнак је y, а збир цифара броја y једнак је z. Одредити x ако је $x + y + z = 60$.

405. Одредити све целе бројеве a за које су изрази $96 + a$ и $5 + a$ кубови целих бројева.

406. За природан број кажемо да је палиндром ако је једнак броју записаном истим цифрама у обрнутом редоследу.

(а) Наћи највећи петоцифрен палиндром који је дељив са 101.

(б) Наћи највећи број узастопних петоцифрених бројева међу којима нема палиндрома.

407. Наћи све тројке (x, y, z) природних бројева таквих да је $x! + y! = 15 \cdot 2^{z!}$.

408. У скупштини има 30 посланика. Сваки од посланика је у свађи са тачно десет других посланика. На колико начина може бити формирана трочлана комисија посланика тако да су свака два члана комисије међусобно у свађи или да никоја два члана комисије нису у свађи?

409. Одредити број међусобно неподударних троуглова чија се темена поклапају са теменима задатог правилног $n-$тоугла.

410. У равни је дат скуп од $n \geqslant 7$ тачака, таквих да се од сваких пет тачака датог скупа могу изабрати четири које леже на једној кружници. Доказати да се све, осим можда једне тачке датог скупа налазе на једној кружници.

411. Дата су два троугла са паралелним страницама чије су површине P_1 и P_2 при чему је један од њих уписан у троугао ABC (његова темена се налазе на страницама $\triangle ABC$), а други описан око истог троугла (странице $\triangle ABC$се налазе на овом троуглу). Наћи површину троугла ABC.

412. У равни су дате тачке A_1, B_1, C_1. Конструисати троугао ABC тако да су A_1, B_1, C_1 центри квдрата конструисаних над страницама BC, CA, AB, редом.

413. Располажемо инструментом који може да изврши следеће две операције:

(1) конструкцију праве кроз две дате тачке;

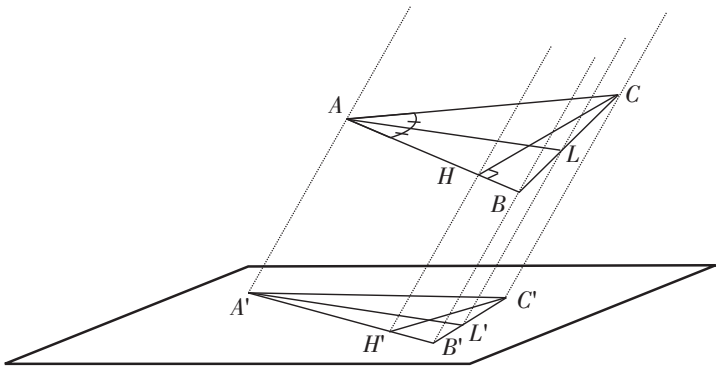
(2) конструкцију тачке симетричне датој тачки у односу на дату праву.

Дат је троугао ABC у равни. Користећи инструмент, конструисати:

(а) тежиште троугла ABC;

(б) центар кружнице описане око троугла ABC.

414. Троугао $A'B'C'$ (слика 12) је паралелна пројекција неког троугла ABC смештеног у простору; $C'H'$ и $A'L'$ су при томе паралелне пројекције висине CH и симетрале угла AL редом.



Слика 12.

Помоћу шестара и лењира (у равни троугла $A'B'C'$) конструисати:

(а) паралелну пројекцију ортоцентра троугла ABC;

(б) паралелну пројекцију центра кружнице описане око троугла ABC.

415. У тетраедру $ABCD$ дужина ивице AB је већа или једнака 1, док су остале ивице дужине мање или једнаке 1. Доказати да је $V_{ABCD} \leqslant \dfrac{1}{8}$.

416. Дат је конвексан полиедар Π са 9 темена $OA_1A_2\ldots A_8$. Нека су $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_8$ полиедри добијено транслацијом полиедра Π за вектор $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \ldots, \overrightarrow{OA_8}$. Доказати да бар два од полиедара $\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_8$ морају имати бар једну заједничку унутрашњу тачку.

417. Одредити максимални вредност функције

$$f(x) = \left|x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)\right|$$

за $x \in [3, 4]$.

418. Наћи све реалне бројеве a, такве да су неједначине

$$|x+1| + |2-x| < a \quad \text{и} \quad \frac{5a-8}{6x-5a+5} < -\frac{1}{2}$$

еквивалентне.

419. Одредити коефицијенте a, b, c квадратне функције $f(x) = ax^2 + bx + c$, ако је $f(1) = -\dfrac{2}{3}$ најмања вредност функције, а њене нуле x_1, x_2 задовољавају релацију:

$$\frac{x_1^4 + 2x_1^3x_2 + 2x_1x_2^3 + x_2^4}{(x_1-x_2)^3 - 2x_2^2(3x_1-x_2)} = \frac{83}{54}.$$

420. Решити једначину $(a^2-a+1)^3(x^2-x)^2 = (a^2-a)^2(x^2-x+1)^3$, где је a реалан параметар.

421. У скупу комплексних бројева решити једначину $z + a|z+1| + i = 0$, за разне вредности ненегативног реалног параметра a.

422. Нека је $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Наћи број различитих реалних корена једначине $f(f(x)) = 0$.

423. Наћи све реалне бројеве x такве да бројеви $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{12} - x\right)$, $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}$ и $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{12} + x\right)$ образују геометријски низ.

424. Постоје ли цели бројеви x и y такви да задовољавају једнакост

$$x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y?$$

425. Нека је O центар описаног круга $\triangle ABC$, D средиште дужи AB и E тежиште $\triangle ACD$. Доказати да је $CD \perp OE$ ако и само ако је $AB = AC$.

426. Доказати да број који се у декадном запису пише коришћењем једино цифара 2 и 6 није разлика квадрата два цела броја.

427. Нека су m и n природни бројеви такви да је број $A = \dfrac{(m+3)^n + 1}{3m}$ цео. Доказати да је A непаран број.

428. У скупу природних бројева решити једначину $x^2 + y^2 = 8425109$.

429. У координантној равни нацртати скуп

$$M = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ [x]y = x\{y\}\}.$$

430. Ако природни бројеви a и b задовољавају неједнакост $\sqrt{7} - \dfrac{a}{b} > 0$, доказати да важи неједнакост $\sqrt{7} - \dfrac{a}{b} > \dfrac{1}{ab}$.

431. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$x^{17} + y^{17} = 1, \quad x^{19} + y^{19} = xy.$$

432. Решити једначину $\sqrt[3]{2 - x} = 1 - \sqrt{x - 1}$ у скупу реалних бројева.

433. За које вредности параметра a једначина

$$ax^2 + (3a + 2)y^2 + 4axy - 2ax + (4 - 6a)y + 2 = 0$$

има јединствено решење из скупа $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$?

434. Израчунати збир $\binom{2000}{2} + \binom{2000}{5} + \binom{2000}{8} + \ldots + \binom{2000}{2000}$.

435. У равни је дато милион правих таквих да важи:

(а) никоје две од датих правих нису паралелне,

(б) пресек произвољне две од датих правих припада бар још једној од тих правих.

Доказати да се све те праве секу у једној тачки.

436. Наћи $\sphericalangle ACB$ оштроуглог $\triangle ABC$ ако је познато да дуж HN, која спаја подножја висина AH и BH, полови симетралу $\sphericalangle ACB$.

437. Нека је $\triangle ABC$ правоугли с правим углом код темена A, а D подножје висине из A. Права која пролази кроз средишта кругова уписаних у $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$ сече странице AB и AC у тачкама K и L. Ако је S, односно T, површина $\triangle ABC$, односно $\triangle AKL$, доказати да је $S \geqslant 2T$.

438. У скупу природних бројева решити једначину $(3+\sqrt{2})^x - (5-3\sqrt{2})^y = 6+9\sqrt{2}$.

439. Ако је n природан број, а реалан број $2^n x$ није цео умножак броја π, доказати да је

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x.$$

440. Решити једначину $\log(\alpha x + \beta) = 2\log(x + 1)$, где су α и β реални параметри.

441. Ако су a, b, c странице троугла и α, β, γ одговарајући углови (изражени у радијанима) доказати да је

$$\frac{\pi}{3} \leqslant \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c} < \frac{\pi}{2}.$$

442. Дата је елипса $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, коју права p паралелна оси Oy сече у тачкама M и N, при чему M има позитивну, а N негативну ординату. Одредити геометријско место пресечне тачке P правих AM и BN и пресечне тачке Q правих AN и BM, где су $A(-a, 0)$ и $B(a, 0)$ темена елипсе, када се права креће остајући паралелна оси Oy.

443. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ које задовољавају следећа два услова за свако $x, y \in \mathbb{R}$:

(1) $f(x) \leqslant x$, (2) $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$.

444. Доказати да ни за један природан број n број $1^{2005} + 2^{2005} + \cdots + n^{2005}$ није дељив са $n+2$.

445. Наћи све природне бројеве који се завршавају двема истим цифрама којима се завршавају њихови квадрати.

446. Наћи све природне бројеве $m, n \geqslant 2$ такве да је $\dfrac{1 + m^{3^n} + m^{2\cdot 3^n}}{n}$ цео број.

447. Доказати да ако четвороугао има осу симетрије да се тада око њега може описати или се у њега може уписати круг.

448. Постоје фигуре које имају бесконачно много центара симетрије (нпр. област у равни између две паралелне праве). Да ли постоји фигура која има више од једног, али коначно много центара симетрије?

449. Решити систем једначина

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 &= 50, \\ x^2 - y^2 + z^2 - t^2 &= -40, \\ xy - zt &= 0, \\ x - y + z + t &= 0. \end{aligned}$$

450. Ако су a, b, c реални бројеви такви да је $(b-1)^2 - 4ac < 0$, доказати да систем једначина

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= y, \\ ay^2 + by + c &= z, \\ az^2 + bz + c &= x \end{aligned}$$

нема реалних решења.

451. Одредити све вредности реалног параметра m за које систем

$$\frac{1}{x+y}+x=m-1, \quad \frac{x}{x+y}=m-2,$$

има јединствено решење?

452. Свака од задатих девет правих дели један квадрат на два четвороугла чије се површине односе као $2:3$. Доказати да бар три од ових девет правих пролазе кроз једну тачку.

453. Дати су реални бројеви $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ и $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, такви да важи $1 \leqslant \frac{a_i}{b_i} \leqslant 2$, $i=1,2,3$. Доказати да важи неједнакост

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+2(b_1^2+b_2^2+b_3^2) \leqslant 3(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3).$$

454. Доказати:

(а) $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ = \sin 70^\circ$;

(б) $\frac{1}{\sin 10^\circ}+\frac{1}{\sin 50^\circ}=\frac{1}{\sin 70^\circ}+6$;

(в) $8\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = 1$.

455. Израчунати површину троугла ABC ако подножја његових висина образују нови троугао чије су странице 13, 14, 15.

456. Одредити тачку P која припада кружном луку полукруга конструисаног, са спољашње стране, над страницом AB квадрата $ABCD$, тако да збир AP^2+CP^2 буде максималан.

457. Доказати да је конвексан четвороугао $ABCD$ квадрат ако и само ако у унутрашњости овог четвороугла постоји тачка M таква да је

$$AM^2+BM^2+CM^2+DM^2=2P,$$

при чему је P површина четвороугла $ABCD$.

458. Одредити све природне бројеве n, $2 \leqslant n \leqslant 20$, са следећом особином: постоји подскуп X скупа $\{1,2,3,\ldots,20\}$ који има n елемената, такав да сваки елемент скупа X не дели остале елементе скупа X.

459. Доказати да не постоји функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ таква да важи:

$$(f\circ f)(x)=\begin{cases}\sqrt{2}, & \text{за } x\in\mathbb{Q},\\ 1, & \text{за } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

460. Функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дефинисана је на следећи начин:

$$f(x)=\begin{cases}\log_2(|x|-1), & |x|\geqslant 2\\ x(|x|-2), & |x|<2.\end{cases}$$

Одредити број решења једначине $f(x)=a$, ако је a реалан параметар.

461. Квадратна таблица $n\times n$ попуњена је бројевима $1,2,3,\ldots,n^2$ на следећи начин:

1	2	3	$\cdots$	n
$n+1$	$n+2$	$n+3$	$\cdots$	$2n$
$2n+1$	$2n+2$	$2n+3$	$\cdots$	$3n$
		$\cdots$		
$(n-1)n+1$	$(n-1)n+2$	$(n-1)n+3$	$\cdots$	n^2

.

Небојша је изабрао један број из ове таблице (запамтио га и означио са a_1), а затим је прецртао врсту и колону у којој се налази изабрани број. Након тога је међу преосталим (непрецртаним) бројевима изабрао један број (a_2) и прецртао врсту и колону у којој се налази тај број. Поступак је понављао све док није остао тачно један непрецртан број (a_n), којег је био принуђен да изабере као последњег. Колики је збир свих бројева које је Небојша изабрао?

462. Квадратна таблица $n\times n$ попуњена је бројевима. Број који се налази у i-тој врсти и j-тој колони те таблице означен је са x_{ij}. Ако за све i,j,k $(1\leqslant i,j,k\leqslant n)$ важи једнакост $x_{ij}+x_{jk}+x_{ki}=0$, доказати да постоји n бројева $t_1,t_2,\ldots,t_n$ таквих да је $x_{ij}=t_i-t_j$.

463. На колико начина је могуће црвеном и плавом обојити природне бројева тако да важе следећи услови:

- број 6 је црвен,
- постоји број који је обојен плавом бојом,
- за свака два различито обојена броја њихов збир је плав, а производ црвен број?

464. Правоугаона таблица $m\times n$ попуњена је бројевима, различитим од нуле, тако да је производ збира бројева произвољне колоне и збира бројева произвољне врсте једнак броју који се налази у пресеку те колоне и те врсте. Наћи збир свих бројева таблице.

465. Нека су a,b,c и d реални бројеви, такви да важи:

$$\left(a^2+b^2-1\right)\left(c^2+d^2-1\right)>\left(ac+bd-1\right)^2.$$

Доказати да је $a^2+b^2>1$ и $c^2+d^2>1$.

466. Наћи све уређене парове $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, који су решења система једначина:

$$(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right) = 1+y^7,$$
$$(1+y)\left(1+y^2\right)\left(1+y^4\right) = 1+x^7.$$

467. Нека су a, b, c, d, e позитивни реални бројеви такви да је $abcde = 1$. Доказати неједнакост:

$$\frac{a+abc}{1+ab+abcd} + \frac{b+bcd}{1+bc+bcde} + \frac{c+cde}{1+cd+cdea} + \frac{d+dea}{1+de+deab} + \frac{e+eab}{1+ea+eabc} \geqslant \frac{10}{3}.$$

468. Доказати да за све позитивне реалне бројеве a и b важи неједнакост:

$$\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{a}} + \sqrt[3]{b+\sqrt[3]{b}} \leqslant \sqrt[3]{a+\sqrt[3]{b}} + \sqrt[3]{b+\sqrt[3]{a}}$$

469. Ако ограничена равна фигура има више од једне осе симетрије, доказати да се све осе симетрије секу у једној тачки.

470. Између страница троугла постоји релација $a-b = b-c \geqslant 0$. Доказати да други по величини угао не прелази $60°$.

471. Нека су a и b дати реални бројеви. Решити систем једначина у скупу $\mathbb{R}$:

$$\frac{x - y\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}} = a, \quad \frac{y - x\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}} = b.$$

472. У правилном полигону странице 1 налази се тачка M. Нека су $d_1, d_2, \ldots, d_n$ растојања тачке M од страница полигона. Доказати да важи:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_n} > 2\pi.$$

473. Дијагонале конвексног четвороугла $ABCD$ секу се у тачки S. Површина $\triangle ASB$ је $4\,\mathrm{cm}^2$, а површина $\triangle CDS$ је $9\,\mathrm{cm}^2$. Колико је минимално могућа површина четвороугла $ABCD$?

474. Одредити све реалне бројеве x и y за које важи $x^2 - 2x\cos(xy) + 1 = 0$.

475. Дата је функција $f(x) = a\cos x + b\sin x$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Ако постоје $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ такви да је

$$f(x_1) = 0, \quad f(x_2) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x_1 - x_2}{\pi} \notin \mathbb{Z},$$

тада је $a = b = 0$. Доказати.

476. Нека је M произвољна тачка хиперболе $xy = 1$ и нека је N тачка симетрична тачки M у односу на координатни почетак O. Ако су A, B, C тачке, различите од N, у којима кружница, са центром у M полупречника MN, сече хиперболу, доказати да је $\triangle ABC$ једнакостраничан троугао.

477. Конвексан четвороугао $ABCD$ својим дијагоналама, које се секу у тачки O, подељен је на четири троугла AOB, BOC, COD, DOA. Ако су T_1 и T_2 тежишта првог и трећег траоугла, а H_1 и H_2 ортоцентри преостала два троугла, доказати да је $H_1H_2 \perp T_1T_2$.

478. Доказати да за произвољан природан број n постоји непразан коначан скуп S тачака у равни са следећом особином: *Свака тачка из скупа S је на јединичном растојању од тачно n других тачака из S.*

479. Доказати да постоји потпун квадрат природног броја чији децимални запис почиње са 200520062007.

480. У игри ЛОТО 7/39, који део од укупног броја могућих комбинација (у процентима, на две децимале) чине комбинације у којима постоји пар суседних бројева?

481. Колико подскупова скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ не садржи два суседна броја?

482. Наћи све функције $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ које задовољавају следеће услове: $f(1) = 1$ и $f(a + b) = f(a) + f(b) + ab(a + b),\ a, b \in \mathbb{Q}$.

483. Коцка се баца више пута и са x_i означава се број који падне у $j-$том бацању. За природан број n означимо са $p(n)$ вероватноћу да постоји k такво да је

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n.$$

Одредити n за које је $p(n)$ највеће.

2. Р Е Ш Е Њ А

1. Након n година број часописа ће бити бар $4n$. То значи да ће после извесног броја година број „Тангенте“ бити већи од године у којој је изашао. На пример после 666 година, тј. 2661. године, тај број ће бити бар $4 \cdot 666 = 2664$.

Нека је у k–тој години први пут наступио тренутак када је број „Тангенте“ био већи од k. Тај број је очигледно $k+1$. Заиста, ако је $(k+1)$–ви број изашао у $(k-l)$–тој години, где је $l \geqslant 1$, тада је $k+1 > k-l$, а то је у супротности са претпоставком о броју k. Сада k–ти број, због минималности k, није могао да изађе у $(k-m)$–тој години ($m \geqslant 1$), па остаје да је изашао баш у k-тој години.

2. Нека је $(m+1)^3 - m^3 = n^2$, где је m неки природан број. Тада је n^2, а отуда и n, непаран број. Дакле $(m+1)^3 - m^3 = (2p+1)^2$. То се даље може представити у облику

$$\begin{aligned} 3m^2+3m+1 &= (2p+1)^2 \\ 4(3m^2+3m+1)-1 &= 4(2p+1)^2-1 \\ 3(4m^2+4m+1) &= (2(2p+1)-1)\,(2(2p+1)+1) \\ 3(2m+1)^2 &= (4p+1)(4p+3). \end{aligned}$$

Како су бројеви $4p+1$ и $4p+3$ узајамно прости, а њихов производ једнак $3(2m+1)^2$, један од њих је потпун квадрат. То не може да буде $4p+3$, јер квадрат сваког непарног броја даје остатак 1 при дељењу са 4. Отуда је $4p+1 = (2t+1)^2$, односно

$$\begin{aligned} 4p+1 &= 4t^2+4t+1 \\ 2p+\frac{1}{2} &= 2t^2+2t+\frac{1}{2} \\ 2p+1 &= t^2+t^2+2t+1 \\ 2p+1 &= t^2+(t+1)^2. \end{aligned}$$

3. Претпоставимо да тврђење није тачно. Тада се $P(x)$ и $Q(x)$ могу представити у облику

$$\begin{aligned} P(x) &= P^{'}(x)+P^{''}(x) \\ Q(x) &= Q^{'}(x)+Q^{''}(x), \end{aligned}$$

где су сви коефицијенти од $P^{'}(x)$ и $Q^{'}(x)$ дељиви са 5, а ниједан коефицијент од $P^{''}(x)$ и $Q^{''}(x)$ није дељив са 5.
На пример: $18x^3 - 7x^2 + 3x + 11 = (15x^3 - 5x^2 + 10) + (3x^3 - 2x^2 + 3x + 1)$. Тада је

$$\begin{aligned} P^{''}(x)Q^{''}(x) &= \Big(P(x) - P^{'}(x)\Big)\Big(Q(x) - Q^{'}(x)\Big) \\ &= P(x)Q(x) - P(x)Q^{'}(x) - P^{'}(x)Q(x) + P^{'}(x)Q^{'}(x). \end{aligned}$$

Према конструкцији $P^{''}(x)$ и $Q^{''}(x)$, коефицијенти уз водећи и слободан члан на левој страни нису дељиви са 5, док су на десној страни сви коефицијенти дељиви са 5. Контрадикција.

4. Доказаћемо прво неједнакост за $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Нека је $\cos x = y$. Како је $\sin z < z$ за $0 < z < 1$, то је

$$\sin(\cos x) < \cos x. \tag{1}$$

На интервалу $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ функција $\cos x$ је опадајућа, па из $\sin x \leqslant x$ следи

$$\cos x \leqslant \cos(\sin x). \tag{2}$$

Из (1) и (2) следи $\sin(\cos x) < \cos(\sin x)$ за свако $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

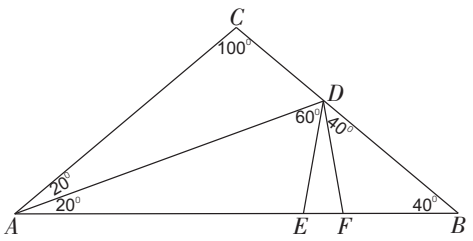
За $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ је $\sin(\cos x) \leqslant 0 < \cos(\sin x)$, тј. неједнакост важи. С обзиром да су $\sin(\cos x)$ и $\cos(\sin x)$ парне функције, неједнакост важи на интервалу $[-\pi, \pi]$. А како су оне и периодичне, с периодом 2π, неједнакост важи за свако $x \in \mathbb{R}$.

5. Поставимо координатни систем, тако да центри поља имају координате (i, j), $1 \leqslant i, j \leqslant 8$ и поделимо таблу на 16 квадрата димензије 2×2. Нека су координате тачке $A(u, v)$ и нека је K било који од поменутих 2×2 квадрата. Центри јединичних квадрата садржаних у K су тачке (x, y), $(x+1, y)$, $(x, y+1)$, $(x+1, y+1)$. Два дијагонална јединична квадрата су бела, а друга два су црна. Узмимо да су $(x + 1, y)$ и $(x, y + 1)$ центри белих, а (x, y) и $(x + 1, y + 1)$ центри црних квадрата. Ако са b_K и c_K обележимо збирове квадрата растојања тачке A од центара белих, односно црних квадрата из K, тада је

$$\begin{aligned} b_K &= (u - (x + 1))^2 + (v - y)^2 + (u - x)^2 + (v - (y + 1))^2 \\ c_K &= (u - x)^2 + (v - y)^2 + (u - (x + 1))^2 + (v - (y + 1))^2, \end{aligned}$$

тј. $b_K = c_K$. Отуда је $b = \sum_K b_K = \sum_K c_K = c$, где је сумирање по 16 наведених 2×2 квадрата.

6. На страници AB уочимо тачке E и F, такве да је $\sphericalangle ADE = 60^\circ$ и $\sphericalangle BDF = 40^\circ$ (слика 13).

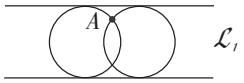


Слика 13.

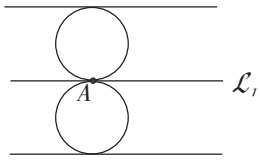
Тада је $\triangle ADC \cong \triangle ADE$ (страница AD заједничка, углови налегли на њу $20°$ и $60°$). С обзиром да је $\sphericalangle EDF = 20°$ и $\sphericalangle DEF = \sphericalangle EFD = 80°$, троуглови ADF, EFD и FBD су једнакокраки са основицама DF, EF и BD редом. Отуда је $|DC| = |DE| = |DF| = |FB|$ и $|AD| = |AF|$ и према томе

$$|AD| + |DC| = |AF| + |FB| = |AB|.$$

7. Може. Нека је ℓ_1 произвољна права. Обележимо са $\mathcal{L}_1$ бесконачан скуп правих паралелних са ℓ_1, при чему су сваке две суседне на растојању, рецимо, 1. Тиме је раван разбијена на паралелне „траке“.



Слика 14.



Слика 15.

Нека је $\mathcal{K}_1$ скуп свих кружница пречника 1 које додирују суседне праве из скупа $\mathcal{L}_1$. Тада кроз сваку тачку равни пролазе тачно две кружнице из скупа $\mathcal{K}_1$. Заиста, кроз тачку која лежи унутар неке траке пролазе тачно две кружнице из $\mathcal{K}_1$; оне које леже у истој траци секу се у уоченој тачки (слика 14).

Кроз тачку која лежи на некој од правих из $\mathcal{L}_1$ такође пролазе тачно две кружнице из $\mathcal{K}_1$; то су оне које леже у суседним тракама и додирују се у тој тачки (слика 15).

Уочимо сада 997 правих $\ell_1, \ldots, \ell_{997}$ од којих никоје две нису паралелне и конструишимо скупове $\mathcal{L}_i$ и $\mathcal{K}_i$ $(i = 1, \ldots, 997)$. При томе за било која два различита скупа $\mathcal{L}_i$ и $\mathcal{L}_j$, растојања између две суседне паралелне праве треба да буду различита. Тада кроз сваку тачку равни пролазе тачно $997 \cdot 2 = 1994$ кружнице.

Напомена. Могуће је и да све кружнице буду подударне са пречником 1. Тада треба узети да су праве $\ell_1, \ldots, \ell_{997}$ паралелне и да је највеће растојање између њих мање од 1.

8. Петоугао не постоји. За $n \geqslant 6$ постоји просторни једнакостранични $n-$угао чији су сви углови прави.

Претпоставимо да постоји просторни петоугао $ABCDE$, такав да је

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EA| = 1$$

и

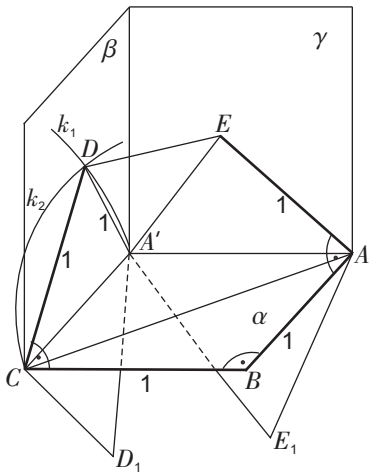
$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = \sphericalangle CDE = \sphericalangle DEA = \sphericalangle EAB = 90^\circ.$$

Очигледно, све дијагонале су подударне и дужина им је $\sqrt{2}$. Означимо са α раван ABC и са A' тачку равни α, такву да је $ABCA'$ квадрат (слика 16).

Нека је β раван која садржи тачку C и нормална је на BC. Како је $\sphericalangle BCD = 90^\circ$ и $|CD| = 1$, тачка D лежи у равни β на кружници $k_1(C, 1)$. С друге стране је $|AD| = \sqrt{2}$, па D припада и кружници основе праве кружне купе чији је врх тачка A. То је кружница $k_2(A', 1)$. Дакле, $CA'D$ је једнакостраничан троугао у равни β, па у обзир долазе само две тачке D и D_1, симетричне у односу на праву CA' (слика 16). Слично, тачка E лежи у равни γ која садржи тачке A и A' и нормална је на AB (такође и на α) и при томе је $\triangle AA'E$ једнакостраничан. За E постоје две могућности, E и E_1 (слика 16). Међутим, лако се проверава да је $|DE| = |D_1E_1| = \dfrac{1}{2}|AC| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$ и

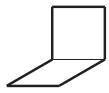
$$|DE_1| = |D_1E| = \sqrt{|DD_1|^2 + |D_1E_1|^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2} > 1.$$

Контрадикција.

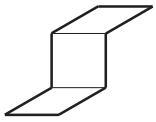


Слика 16.

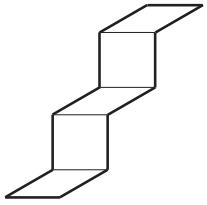
Просторни 6−угао чије су све странице једнаке и сви углови прави једноставно се конструише. Уоче се два јединична квадрата који имају заједничку страницу и који леже у две нормалне равни (слика 17). Шест слободних страница образују тражени 6−угао. Додајући степенасто још један квадрат добијамо једнакостранични правоугли 8−угао (слика 18). Понављајући тај поступак можемо добити једнакостраничан правоугли $2k$−угао за свако $k \geqslant 3$ (слика 19).



Слика 17.

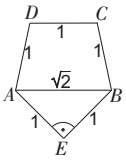


Слика 18.

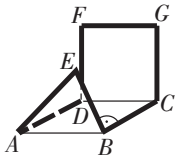


Слика 19.

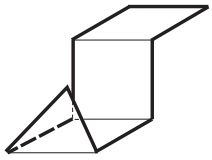
Једнакостранични правоугли 7−угао добија се на следећи начин. У равни се уочи једнакокраки трапез $ABCD$ чија је већа основица AB једнака $\sqrt{2}$, док су краци и мања основица једнаки 1. Над основицом AB као над хипотенузом конструише се у спољашњости трапеза једнакокрако–правоугли троугао ABE (слика 20). Очигледно је $|AE| = |BE| = 1$.



Слика 20.



Слика 21.



Слика 22.

Затим се $\triangle ABE$ ротира око праве AB, док не дође у положај да је $\sphericalangle EAD = \sphericalangle EBC = 90°$. На крају се на основицу CD „прикачи“ јединични квадрат $CDFG$ који лежи у равни нормалној на раван трапеза (слика 21). Просторни 7−угао $AEBCGFD$ је тражени. Горе наведеном „степенастом“ конструкцијом из 7−угла добијамо 9−угао (слика 22) и уопште $(2k+1)$−угао за свако $k \geqslant 3$.

9. Први путник. Нека су t_1 и t_2 времена која су први, односно други путник провели на путу и s растојање између места A и B. Тада је $a \cdot \dfrac{t_1}{2} + b \cdot \dfrac{t_1}{2} = s$, одакле добијамо

$$t_1 = \frac{2s}{a+b}\,. \tag{1}$$

Ако са t_2' и t_2'' означимо времена која је други путник провео на првој, односно другој половини пута, тада је $t_2' = \dfrac{s}{2a}$ и $t_2'' = \dfrac{s}{2b}$, одакле је

$$t_2 = \frac{(a+b)s}{2ab}\,. \tag{2}$$

Како је $a \neq b$ из (1) и (2) следи

$$t_2 - t_1 = \frac{s(a-b)^2}{2ab(a+b)} > 0.$$

Дакле, у место B је први стигао први путник.

10. Не постоји. Природан број и збир његових цифара дају исте остатке при дељењу са 3. С друге стране лако се показује да квадрат природног броја при дељењу са 3 даје остатак 0 или 1. Међутим, 1994 даје остатак 2 при дељењу са 3.

11. Функција f задовољава идентитет $f(x)+f(1-x)=1$. Отуда је

$$\begin{aligned} &f\left(\frac{1}{1995}\right)+f\left(\frac{2}{1995}\right)+\cdots+f\left(\frac{1994}{1995}\right)\\ &=\left(f\left(\frac{1}{1995}\right)+f\left(\frac{1994}{1995}\right)\right)+\left(f\left(\frac{2}{1995}\right)+f\left(\frac{1993}{1995}\right)\right)\\ &\quad+\cdots+\left(f\left(\frac{997}{1995}\right)+f\left(\frac{998}{1995}\right)\right)=997. \end{aligned}$$

12. За $n=3$ имамо

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}-\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_3}{x_2}-\frac{x_1}{x_3}=\frac{(x_2-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)}{x_1x_2x_3}\geqslant 0.$$

Примењујући ову неједнакост на тројке

$$(x_1,x_2,x_3),\ (x_1,x_3,x_4),\ \ldots,(x_1,x_{n-1},x_n)$$

добијамо

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1} &\geqslant \frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\frac{x_1}{x_3}\\ \frac{x_1}{x_3}+\frac{x_3}{x_4}+\frac{x_4}{x_1} &\geqslant \frac{x_3}{x_1}+\frac{x_4}{x_3}+\frac{x_1}{x_4}\\ &\vdots\\ \frac{x_1}{x_{n-1}}+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1} &\geqslant \frac{x_{n-1}}{x_1}+\frac{x_n}{x_{n-1}}+\frac{x_1}{x_n}\,. \end{aligned}$$

Сабирањем ових неједнакости добијамо тражену.

13. Уочимо скуп S од n врста које имају највише звездица. Показаћемо да S садржи $\geqslant 2n$ звездица.

Претпоставимо супротно, тј. да S има $<2n$ звездица. Тада у S постоји врста са $\leqslant 1$ звездица. С друге стране преосталих n врста садрже $\geqslant n$ звездица, па међу њима постоји бар једна са $\geqslant 2$ звездица. То је контрадикција са избором скупа S.

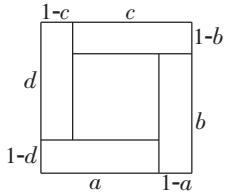
Дакле, S садржи $\geqslant 2n$ звездица, док преосталих n врста садрже $\leqslant n$ звездица. Те звездице се могу уклонити брисањем највише n колона.

14. Нека су a, b, c странице $\triangle ABC$, t_a тежишна линија AD и $k(O, r)$ уписана кружница. Обележимо још са h растојање центра O од праве AD. Како је $|AC| > |AB|$, то је $\sphericalangle BAD > \sphericalangle CAD$, па тачка O лежи унутар $\triangle ABC$. Отуда је

$$P(ABD) = \frac{1}{2}\left(cr + \frac{a}{2}r + t_a h\right).$$

Како је $P(ABC) = 2P(ABD)$ и $P(ABC) = \frac{1}{2}(a+b+c)r$, из горње једнакости добијамо $h = \frac{r}{2}$. Из тога следи $\sphericalangle MON = 120°$.

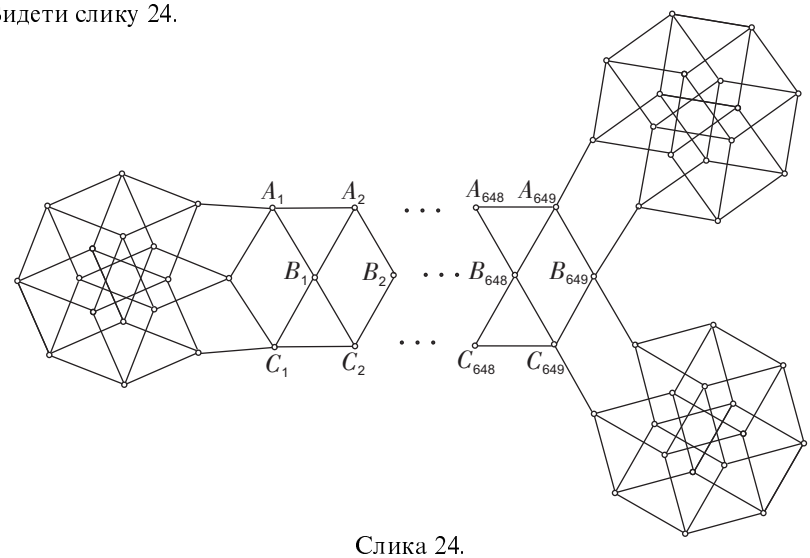
15. Нека је дати квадрат јединични.



Слика 23.

Обележимо странице правоугаоника као на слици 23 и узмимо на пример да је $a = \max\{a, b, c, d\}$. Тада је $a \geqslant b$ и $1 - d \geqslant 1 - a$. Како је $a(1 - d) = b(1 - a)$, то је $a = b$ и $1 - d = 1 - a$, тј. $a = d$. Слично се показује да је $b = c$, одакле је $a = b = c = d$. Из тога следи да је „унутрашњи“ правоугаоник квадрат.

16. Видети слику 24.



Слика 24.

Три многоугла су правилни 8−углови.
Укупан број тачака је $3 \cdot 16 + 3 \cdot 649 = 1995$.

17. Нека је $\varepsilon = 0,000001 = 10^{-6}$. Тада је

$$\begin{aligned} a &= (1+\varepsilon)^{1-\varepsilon}\cdot(1-\varepsilon)^{1+\varepsilon} = (1+\varepsilon)^{-2\varepsilon}\cdot(1+\varepsilon)^{1+\varepsilon}\cdot(1-\varepsilon)^{1+\varepsilon} \\ &= \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{2\varepsilon}\cdot(1-\varepsilon^2)^{1+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Како је $\dfrac{1}{1+\varepsilon} < 1$ и $1-\varepsilon^2 < 1$, следи $a < 1$.

18. Увођењем смене $x = \sqrt[3]{2}$ добијамо

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+3\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}} &= \frac{1}{1+3x+2x^2} \\ &= \frac{1}{(x+1)(2x+1)}\cdot\frac{x^2-x+1}{x^2-x+1}\cdot\frac{4x^2-2x+1}{4x^2-2x+1} \\ &= \frac{(x^2-x+1)(4x^2-2x+1)}{(x^3+1)(8x^3+1)} = \frac{7\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{2}-11}{51}. \end{aligned}$$

19. Користићемо чињеницу да бројеви x и $S(x)$ дају једнаке остатке при деоби са 3, тј. $x \equiv S(x) \pmod 3$. Отуда је $a_n \equiv 2a_{n-1} \pmod 3$, односно $a_1 \equiv 1 \pmod 3$, $a_2 \equiv 2 \pmod 3$, $a_3 \equiv 1 \pmod 3$, $a_4 \equiv 2 \pmod 3$, $\ldots$, одакле индуктивно следи $a_{2k-1} \equiv 1 \pmod 3$ и $a_{2k} \equiv 2 \pmod 3$ за свако $k \geqslant 1$. Како је $1995 \equiv 0 \pmod 3$, број 1995 није члан датог низа.

20. Индукцијом по n. За $n = 4$ имамо

$$\frac{x_1}{x_4+x_2}+\frac{x_2}{x_1+x_3}+\frac{x_3}{x_2+x_4}+\frac{x_4}{x_3+x_1} = \frac{x_1+x_3}{x_2+x_4}+\frac{x_2+x_4}{x_1+x_3} \geqslant 2$$

с обзиром да је $a + \dfrac{1}{a} \geqslant 2$ за $a > 0$.

Нека је $n > 4$. Уведимо следеће ознаке

$$\begin{aligned} P &= \frac{x_1}{x_{n+1}+x_2}+\frac{x_2}{x_1+x_3}+\cdots+\frac{x_n}{x_{n-1}+x_{n+1}}+\frac{x_{n+1}}{x_n+x_1} \\ Q &= \frac{x_1}{x_n+x_2}+\frac{x_2}{x_1+x_3}+\cdots+\frac{x_n}{x_{n-1}+x_1}. \end{aligned}$$

По индуктивној претпоставци је $Q \geqslant 2$. Показаћемо да је $P > Q$. Ако се у изразу P замени x_1 са x_i, x_2 са x_{i+1}, $\ldots$, x_{n+1} са x_{i-1} добија се исти збир. Због тога можемо узети, не умањујући општост, да је x_{n+1} најмањи, или један од најмањих, међу бројевима $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Сада је

$$P-Q = \left(\frac{x_1}{x_{n+1}+x_2}-\frac{x_1}{x_n+x_2}\right)+\left(\frac{x_n}{x_{n-1}+x_{n+1}}-\frac{x_n}{x_{n-1}+x_1}\right)+\frac{x_{n+1}}{x_n+x_1} > 0.$$

(Из $x_{n+1} \leqslant x_n$ и $x_{n+1} \leqslant x_1$ следи $\dfrac{x_1}{x_{n+1}+x_2}-\dfrac{x_1}{x_n+x_2} \geqslant 0$ и $\dfrac{x_n}{x_{n-1}+x_{n+1}}-\dfrac{x_n}{x_{n-1}+x_1} \geqslant 0$.)

21. Претпоставимо да су одређеним бројем притисака сва дугмад угашена. Нека је при томе $p_{i,j}$ пута притиснуто дугме које се налази у i–тој врсти и j–тој колони; то дугме зваћемо (i,j)– дугме. Обележимо још са r_i и c_j укупан број притисака на дугмад i–те врсте, односно j–те колоне. Укупан број промена стања (i,j)–дугмета износи $r_i + c_j - p_{i,j}$ и тај број је непаран јер је дугме угашено. Дакле

$$r_i + c_j - p_{i,j} \equiv 1 \pmod 2\,. \tag{1}$$

Слично је $r_i + c_k - p_{i,k} \equiv 1 \pmod 2$. Из ове две конгруенције следи

$$c_j - p_{i,j} \equiv c_k - p_{i,k} \pmod 2.$$

Тако је

$$\begin{aligned} c_j - p_{1,j} &\equiv c_k - p_{1,k} \pmod 2 \\ c_j - p_{2,j} &\equiv c_k - p_{2,k} \pmod 2 \\ &\vdots \\ c_j - p_{10,j} &\equiv c_k - p_{10,k} \pmod 2\,. \end{aligned}$$

Сабирањем ових конгруенција и имајући у виду да је

$$p_{1,j} + p_{2,j} + \cdots + p_{10,j} = c_j \quad \text{и} \quad p_{1,k} + p_{2,k} + \cdots + p_{10,k} = c_k$$

добијамо $9c_j \equiv 9c_k \pmod 2$, односно $c_j \equiv c_k \pmod 2$. Када се то уврсти у горњи систем добијамо $p_{i,j} \equiv p_{i,k} \pmod 2$. То значи да су за сва дугмад једне врсте бројеви притисака исте парности. Слично се показује да исто важи и за дугмад исте колоне, одакле следи да су бројеви притисака на сва дугмад табле исте парности. Дакле $p_{i,j} \equiv p \pmod 2$ за свако $i \in \{1,2,\ldots,10\}$ и свако $j \in \{1,2,\ldots,10\}$. Када то уврстимо у (1) добијамо $19p \equiv 1 \pmod 2$, односно $p \equiv 1 \pmod 2$. Дакле, свако дугме је непаран број пута притиснуто. Минималан број притисака је према томе 100; свако дугме притиснуто је тачно једанпут. Заиста, при томе се стање сваког дугмета промени 19 пута.

22. Нека је O пресек дијагонала паралелограма $ABCD$. Растојање x тачке O од заједничких спољашњих тангенти кружница k_A и k_C је средња линија правоуглог трапеза A_1C_1CA (A_1 и C_1 – тачке додира заједничке спољашње тангенте кружница k_A и k_C), одакле је $x = \frac{r_A+r_C}{2}$. Слично за растојање y тачке O од заједничких спољашњих тангенти кружница k_B и k_D имамо $y = \frac{r_B+r_D}{2}$. Како је $r_A + r_C = r_B + r_D$, следи $x = y$ и кружница са центром O и полупречником x додирује све четири тангенте. Како је O унутрашња тачка четвороугла који образују наведене тангенте, $k(O;x)$ је уписана кружница у тај четвороугао.

23. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_8$ узастопне странице осмоугла. Како су углови осмоугла по $135°$, наспрамне странице a_1 и a_5, a_2 и a_6, $\ldots$, a_4 и a_8 су паралелне. С друге стране странице a_1 и a_3 су нормалне из чега следи да се праве одређене страницама a_1, a_3, a_5, a_7 образују правоугаоник „описан“ око осмоугла. (Осмоугао се фактички добија тако што се од сваког „ћошка“ тог правоугаоника

„одсече“ по један једнакокрако–правоугли троугао.) Уочимо наспрамне странице правоугаоника на којима леже странице a_1 и a_5. Добијамо

$$\frac{a_8}{\sqrt{2}} + a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{2}} = \frac{a_6}{\sqrt{2}} + a_5 + \frac{a_4}{\sqrt{2}} \ ,$$

односно $(a_1 - a_5)\sqrt{2} = a_4 + a_6 - a_8 - a_2$. Како је на десној страни цео број, а $\sqrt{2}$ је ирационалан, ова једнакост је тачна само за $a_1 - a_5 = 0$, тј. $a_1 = a_5$. Аналогно се показује да је $a_2 = a_6$, $a_3 = a_7$ и $a_4 = a_8$.

24. (а) не постоји; (б) не постоји. Како је (а) специјалан случај од (б) дајемо решење за (б).

Претпоставимо да такав полиедар P постоји. Нека је d његова највећа ивица. Према услову задатка на d належе прав или туп угао. Обележимо са T онај троугао, страну полиедра P са ивицом d, који садржи тај угао. Страница наспрам тог угла је ивица полиедра. Истовремено то је највећа страница троугла T и самим тим већа од d (страница наспрам правог или тупог угла у троуглу је највећа страница троугла). Контрадикција.

25. Претпоставимо да тврђење није тачно. Тада је бели за свој 1. потез утрошио мање од $1\,\mathrm{min}\,51\,\mathrm{s} = 111\,\mathrm{s}$. Црни је за свој 1. утрошио $< 222\,\mathrm{s}$. Даље, бели је за 1. и 2. потез утрошио $< 333\,\mathrm{s}$, а црни $< 444\,\mathrm{s}$ итд. Резонујући на овај начин констатујемо да је бели за 40 потеза потрошио $< 79 \cdot 111\,\mathrm{s} = 8769\,\mathrm{s} < 8800\,\mathrm{s} = 2\,\mathrm{h}\,30\,\mathrm{s}$. Контрадикција.

26. Не постоји. Претпоставимо супротно. Нека је $\overline{a_{2k}a_{2k-1}\ldots a_2a_1 11}$ један такав број, где је $a_{2k-1} \neq 0$, док је могуће $a_{2k} = 0$, $k \geqslant 1$. Из услова задатка и критеријума за дељивост са 11 следи

$$(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2k-1}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k}) = 9 \tag{1}$$

и

$$(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2k-1}) - (a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k}) = 11t\,,$$

где је t неки цео број. Апсолутна вредност разлике два природна броја није већа од њиховог збира. Отуда је $t = 0$ и

$$(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2k-1}) - (a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k}) = 0\,. \tag{2}$$

Једнакости (1) и (2) су контрадикторне, јер су збир и разлика два цела броја исте парности.

27. Систем је симетричан, па без утицаја на општост можемо узети да је $x \geqslant y \geqslant z$. Следи $(y+z)^3 = x \geqslant y = (z+x)^3$, односно $(y+z)^3 \geqslant (z+x)^3$. То даље повлачи $y + z \geqslant z + x$ и $y \geqslant x$. Слично се показује да је $z \geqslant y$, што с обзиром на претпоставку $x \geqslant y \geqslant z$ даје $x = y = z$. Тако се систем своди на једначину

$8x^3 = x$ чија су решења $x_1 = 0$, $x_2 = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $x_3 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Дакле решења датог система једначина су

$$(0,0,0),\ \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\ \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

28. Претпоставимо да су сви различити и да је $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Тада је $a_1 \geqslant 2$, $a_2 \geqslant 3, \ldots, a_n \geqslant n+1$, па имамо

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_1^2} + \cdots + \frac{1}{a_1^2} \leqslant \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &< \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1\,. \end{aligned}$$

Контрадикција.

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1} - \dfrac{a_n}{2}\right) = 0$ значи да за свако $\varepsilon > 0$ постоји n_0, тако да је $\left|a_{n+1} - \dfrac{a_n}{2}\right| < \varepsilon$ кад год је $n \geqslant n_0$. Даље, за то a_{n_0} постоји природан број k, такав да је $\dfrac{|a_{n_0}|}{2^k} < \varepsilon$. Сада из познате неједнакости $|x| - |y| \leqslant |x-y|$ добијамо да за $n \geqslant n_0$ важи

$$|a_{n+1}| - \frac{|a_n|}{2} \leqslant \left|a_{n+1} - \frac{a_n}{2}\right| < \varepsilon,$$

односно $|a_{n+1}| < \dfrac{|a_n|}{2} + \varepsilon$. Примењујући сукцесивно ову неједнакост добијамо за $m \geqslant n_0 + k$

$$\begin{aligned} |a_m| &< \frac{|a_{m-1}|}{2} + \varepsilon < \frac{|a_{m-2}|}{2^2} + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon \\ &< \frac{|a_{m-3}|}{2^3} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon \\ &\ \ \vdots \\ &< \frac{|a_{n_0}|}{2^{m-n_0}} + \frac{\varepsilon}{2^{m-n_0+1}} + \frac{\varepsilon}{2^{m-n_0}} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon \\ &< \frac{|a_{n_0}|}{2^k} + 2\varepsilon < 3\varepsilon\,, \end{aligned}$$

тј. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

30. $n = 9$. Нека је $A_1A_2\ldots A_n$ правилан n–угао и нека су a_n, D_n, d_n редом дужине његових страница, највећих, односно најмањих дијагонала. За $n = 6$ и $n = 7$ из

неједнакости троугла добијамо у оба случаја $|A_1A_4|-|A_1A_3| < |A_3A_4|$, односно $D_6 - d_6 < a_6$ и $D_7 - d_7 < a_7$.

За $n = 8$ уочимо дијагонале A_1A_5 и A_2A_4 правилног 8–угла $A_1A_2\ldots A_8$ и обележимо са P и Q редом нормалне пројекције тачака A_2 и A_4 на A_1A_5. Како је $|A_1A_5| = D_8$, $|A_2A_4| = d_8$ и $A_1A_5 \parallel A_2A_4$, PQA_4A_2 је правоугаоник из чега следи $|PQ| = d_8$. Даље се лако добија $\sphericalangle A_1A_2P = \sphericalangle A_5A_4Q = 22,5^\circ$, што повлачи

$$|A_1P| < \frac{|A_1A_2|}{2} = \frac{a_8}{2} \quad \text{и} \quad |A_5Q| < \frac{|A_5A_4|}{2} = \frac{a_8}{2}.$$

Стога је

$$D_8 - d_8 = |A_1A_5| - |A_2A_4| = |A_1A_5| - |PQ| = |A_1P| + |A_5Q| < a_8.$$

За $n = 9$ уочимо у правилном 9–углу $A_1A_2\ldots A_9$ паралелне дијагонале A_1A_5 и A_2A_4. Уз исте ознаке као у претходном случају сада имамо

$$|A_1A_5| = D_9, \quad |A_2A_4| = |PQ| = d_9, \quad \sphericalangle A_1A_2P = \sphericalangle A_5A_4Q = 30^\circ,$$

одакле је $|A_1P| = |A_5Q| = \dfrac{a_9}{2}$. То даље повлачи $D_9 - d_9 = a_9$.

За $n > 9$ је $D_n > D_9$, $d_n < d_9$, $a_n < a_9$, па је $D_n - d_n > D_9 - d_9 = a_9 > a_n$.

Значи само правилан 9-угао има особину да је разлика дужина највеће и најмање дијагонале једнака дужини странице многоугла.

31. И у једном и у другом случају показаћемо да у равни постоји тачка S чија су растојања од датих тачака међусобно различита.

(a) Нека су $A_1, A_2, \ldots, A_n$ дате тачке. Уочимо све парове $\{A_i, A_j\}$, $\{i, j\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ и све симетрале тако добијених дужи. Парова има $\binom{n}{2}$, а симетрала не више од $\binom{n}{2}$. (Неке дужи могу да имају заједничку симетралу.) Коначно много правих не могу да покрију целу раван (зашто?), па постоји тачка S која не лежи ни на једној симетрали. Њена растојања од тачака $A_1, A_2, \ldots, A_n$ су сва различита.

Не умањујући општост можемо узети да је $|SA_i| = d_i$ и $d_1 < d_2 < \ldots < d_n$. Уочимо реалне бројеве $r_1, r_2, \ldots, r_n$, такве да је

$$0 < r_0 < d_1 < r_1 < d_2 < r_2 < \ldots < r_{n-1} < d_n < r_n$$

и означимо са k_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, кружницу са центром S и полупречником r_i. Очигледно кружница k_i садржи у својој унутрашњости тачно првих i тачака скупа $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.

(б) Показаћемо да је $S\left(\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right)$ тражена тачка. Претпоставимо супротно. Тада постоје две тачке $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, где је $a_1 \neq b_1$ или $a_2 \neq b_2$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$, такве да је $|SA| = |SB|$. Следи

$$\left(a_1 - \sqrt{2}\right)^2 + \left(a_2 - \frac{1}{3}\right)^2 = \left(b_1 - \sqrt{2}\right)^2 + \left(b_2 - \frac{1}{3}\right)^2,$$

односно

$$a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - \frac{2}{3}(a_2 - b_2) = \sqrt{2}(2a_1 - 2b_1)\,. \tag{1}$$

Како је $\sqrt{2}$ ирационалан број, а сви остали цели, ова једнакост је могућа само ако је десна страна једнака 0, тј. $a_1 = b_1$. Када то уврстимо у (1) добијамо

$$a_2^2 - b_2^2 - \frac{2}{3}(a_2 - b_2) = 0\,,$$

односно

$$(a_2 - b_2)\left(a_2 + b_2 - \frac{2}{3}\right) = 0\,.$$

Други фактор је различит од 0, јер је $a_2 + b_2$ цео број. Остаје $a_2 - b_2 = 0$ и $a_2 = b_2$. Када се узме у обзир да је и $a_1 = b_1$, следи $A \equiv B$. Контрадикција.

32. Нека су $ABC\ldots$ и $ABD\ldots$ две суседне пљосни полиедра и нека су $k_1(O_1)$ и $k_2(O_2)$ око њих описане кружнице. Кружнице $k_1(O_1)$ и $k_2(O_2)$, а самим тим и темена пљосни $ABC\ldots$ и $ABD\ldots$, леже на лопти L чији је центар пресек нормала повучених на равни $ABC\ldots$ и $ABD\ldots$ у тачкама O_1 и O_2. Како кроз четири некомпланарне тачке (темена једног тетраедра) пролази јединствена лопта, L је одређена тачкама A, B, C, D. Према услову задатка BA, BC и BD су једине ивице полиедра које излазе из темена B. Кружница k_3 – описана око пљосни $CBD\ldots$ има три тачке, C, B и D на L. Следи $k_3 \subset L$, односно L садржи и сва темена пљосни $CBD\ldots$.

Резонујући на исти начин показујемо да и темена свих пљосни које су суседне са пљосни $ABC\ldots$ леже на L. Штавише, на исти начин показујемо да темена пљосни које су суседне суседима од $ABC\ldots$ такође леже на L. С обзиром да је полиедар повезан, на овај начин се може „стићи“ до свих његових пљосни. То значи да сва темена полиедра леже на лопти L.

33. Обележимо са x, y, z бројеве задатака које је редом решио само први, само други и само трећи ученик. Даље, обележимо са p, q, r бројеве задатака које су решила само прва двојица, само други и трећи, односно само трећи и први ученик. Најзад обележимо са s број задатака које су решила сва три ученика. Према условима задатка важе следеће једнакости

$$\begin{aligned} x + y + z + p + q + r + s &= 100, \\ x + p + r + s &= 60, \\ y + p + q + s &= 60, \\ z + q + r + s &= 60. \end{aligned}$$

Лаких задатака има s, а тешких $x+y+z$. Ако прву једнакост помножимо са 2 и од тога одузмемо другу, трећу и четврту, добијамо $x+y+z-s = 200-180 = 20$, одакле следи тврђење задатка.

34. Трансформишимо дату једначину у

$$\left(\sqrt{\frac{x-7}{1989}}-\sqrt{\frac{x-1989}{7}}\right)+\left(\sqrt{\frac{x-6}{1990}}-\sqrt{\frac{x-1990}{6}}\right)+$$
$$\left(\sqrt{\frac{x-5}{1991}}-\sqrt{\frac{x-1991}{5}}\right)=0\,.$$

Очигледно је $x \geqslant 1991$. Ако је $b > a > 0$ и $a+b = 1996$, тада израз

$$\sqrt{\frac{x-a}{b}}-\sqrt{\frac{x-b}{a}}$$

има исти знак као и

$$\frac{x-a}{b}-\frac{x-b}{a}=\frac{(a-b)(x-a-b)}{ab}\,.$$

Како је $a-b<0$, последњи израз има исти знак као $a+b-x = 1996-x$.

Отуда за $x < 1996$ сва три сабирка на левој страни су негативна, а за $x > 1996$ сва три су позитивна. У оба случаја лева страна не може бити једнака 0. Остаје $x = 1996$, што и јесте решење.

35. (а) Постоје. Рецимо $a = 2+\sqrt{2}$ и $b = -\sqrt{2}$. Тада је

$$a+b = 2 \in \mathbb{Q}, \quad (\mathbb{Q} \text{ – скуп рационалних бројева}),$$

док је за $n \geqslant 2$

$$a^n+b^n = p+q\sqrt{2} \notin \mathbb{Q},$$

где су p и q цели бројеви, $q \neq 0$.

(б) Не постоје. Претпоставимо да постоје бројеви a и b, такви да $a+b \notin \mathbb{Q}$ и $a^n+b^n \in \mathbb{Q}$ за свако $n \geqslant 2$, $n \in \mathbb{N}$. Очигледно је $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Тада је $(a^2+b^2)^2 = a^4+b^4+2a^2b^2 \in \mathbb{Q}$. Како су a^2+b^2 и a^4+b^4 рационални бројеви, рационалан је и

$$a^2b^2 = \frac{(a^2+b^2)^2-(a^4+b^4)}{2}\,.$$

То повлачи да је и број

$$a+b = \frac{(a^2+b^2)(a^3+b^3)-(a^5+b^5)}{a^2b^2}$$

рационалан. Контрадикција.

36. Позната је неједнакост

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geqslant H(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

где су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ реални позитивни бројеви, а

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

и

$$H(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

њихова геометријска, односно хармонијска средина. Отуда је

$$G(\underbrace{a, \ldots, a}_{a}, \underbrace{b, \ldots, b}_{b} \underbrace{c, \ldots, c}_{c}) \geqslant H(\underbrace{a, \ldots, a}_{a}, \underbrace{b, \ldots, b}_{b} \underbrace{c, \ldots, c}_{c}),$$

односно

$$\sqrt[a+b+c]{a^a \cdot b^b \cdot c^c} \geqslant \frac{a+b+c}{\underbrace{\frac{1}{a} + \cdots + \frac{1}{a}}_{a} + \underbrace{\frac{1}{b} + \cdots + \frac{1}{b}}_{b} + \underbrace{\frac{1}{c} + \cdots + \frac{1}{c}}_{c}}.$$

Из тога следи:

$$a^{\frac{a}{a+b+c}} \cdot b^{\frac{b}{a+b+c}} \cdot c^{\frac{c}{a+b+c}} \geqslant \frac{a+b+c}{a \cdot \frac{1}{a} + b \cdot \frac{1}{b} + c \cdot \frac{1}{c}} = \frac{1}{3} \cdot (a+b+c).$$

37. Доказаћемо општије тврђење:

Из сваког $(2n+1)$–цифреног броја у чијем се декадном запису појављују само цифре a и b, може се одстранити једна цифра, тако да добијени $2n$–цифрени број буде дељив са 11.

Доказ се базира на следећој чињеници. Ако неки број садржи две једнаке суседне цифре, онда се њиховим брисањем добија број који даје исти остатак при деоби са 11 као и почетни. Ово следи из добро познатог тврђења да број даје исти остатак при деоби са 11 као и разлика збирова његових цифара које стоје на непарним и парним местима, тј.

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} \equiv (a_0 + a_2 + \cdots) - (a_1 + a_3 + \cdots) \pmod{11}.$$

Нека је A произвољан $(2n+1)$–цифрен број састављен искључиво од цифара a и b. Ако A има пар једнаких суседних цифара, тада њиховим брисањем добијамо $(2n-1)$–цифрен број A_1, такав да је $A \equiv A_1 \pmod{11}$. На A_1 применимо исту операцију коју понављамо све до појаве броја A_k који нема једнаких суседних цифара. A_k такође има непаран број цифара и облика је $aba \ldots ba$ или $bab \ldots ab$. Брисањем последње цифре у A_k, означимо је са x, добијамо број A_{k-1} облика $abab \ldots ab$ или $baba \ldots ba$. A_{k-1} је очигледно дељив са 11.

Извршимо сад инверзну операцију, тј. „вратимо натраг“, један по један, парове избрисаних једнаких цифара. Очигледно, сви тако добијени бројеви дељиви су са 11. У ствари, сваки се може сматрати да је настао од неког A_i брисањем цифре x. Последњи у низу добијен је на тај начин од A. Закључак: у броју A треба одстранити цифру x.

38. (а) Не мора. Уочимо једнакостраничан $\triangle ABC$ странице 2. Сваку страницу узмимо за основицу једног једнакокраког троугла чији је врх у спољашњости $\triangle ABC$. Нека су то $\triangle BCP$, $\triangle CAQ$ и $\triangle ABR$. Нека су њихове висине на основице $\dfrac{1}{10}$. Све странице конвексног 6-угла $ARBPCQ$ су > 1, док су дијагонале једнаке 2 и $\sqrt{3} + \dfrac{1}{10} < 2$.

(б) Мора. Међу дијагоналама AD, BE и CF постоје две које образују угао $\geqslant 60^\circ$. Заиста, ако уочимо три праве које пролазе кроз једну тачку и које су паралелне наведеним дијагоналама, оне деле пун угао на 6 углова. Бар један од њих је $\geqslant 60^\circ$.

Узмимо да је угао између дијагонала AD и BE једнак $\varphi \geqslant 60^\circ$ и транслирајмо дијагоналу BE за $\overrightarrow{ED}$. Она прелази у положај GD, где је $BGDE$ паралелограм. У $\triangle AGD$ је $\sphericalangle ADG = \varphi \geqslant 60^\circ$. Следи $\sphericalangle AGD \leqslant 60^\circ$ или $\sphericalangle GAD \leqslant 60^\circ$, односно $\sphericalangle AGD \leqslant \varphi$ или $\sphericalangle GAD \leqslant \varphi$. Отуда је $2 < |AD| \leqslant |DG|$ или $2 < |BE| = |GD| \leqslant |AG|$. У сваком случају је $|AG| > 2$. Како је $|AB| + |BG| \geqslant |AG| > 2$ (једнакост важи само ако су A, B, G колинеарне и B је између A и G), то је $|AB| > 1$ или $|BG| = |ED| > 1$.

39. Највише $2n$. Нека је $A_1A_2\ldots A_{2n}$ правилан $2n$–угао и нека је O центар описане кружнице k. Све странице и дијагонале $2n$–угла разбићемо на следећих n дисјунктних класа. У класу C_1 спадају све странице, у класу C_2 све дијагонале подударне са A_1A_3, у класу C_3 све дијагонале подударне са A_1A_4, $\ldots$, у класу C_n све дијагонале подударне са A_1A_{n+1}. Лако се показује да свака класа C_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ има $2n$ дужи чије су средине све различите и леже на кружници k_i концентричној са k. Последња класа C_n састоји се од „великих“ дијагонала које имају заједничку средину – тачку O.

Нека је k' произвољна кружница. Ако се поклапа са неком од кружница k_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, она тада садржи тачно $2n$ средина. Уколико је $k' \neq k_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, тада са сваке од кружница $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ „узима“ највише две средине. Ако се томе прикључи и тачка O добија се да k' садржи $\leqslant 2(n-1)+1 = 2n-1$ средина.

Дакле максималан број средина страница и дијагонала правилног $2n$–угла које леже на једној кружници једнак је $2n$.

40. Нека су кругови K_α и K_β нормалне пројекције тела F на равни α и β, редом. Показаћемо да је $K_\alpha \cong K_\beta$.

Ако су равни α и β паралелне тврђење тривијално следи. Претпоставимо да је α и β секу по правој s. Нека ω_α, ω_β и ω_s буду ознаке за нормално пројектовање

на равни α, β и праву s, редом. (Нормална пројекција тачке M на праву ℓ је пресечна тачка ℓ и равни која садржи M и нормална је на ℓ.) Очигледно је $\omega_s(F) = d$, где је d дуж. На основу теореме о три нормале је $\omega_s(\omega_\alpha(F)) = \omega_s(F) = d$ и $\omega_s(\omega_\beta(F)) = \omega_s(F) = d$, тј. $\omega_s(K_\alpha) = \omega_s(K_\beta) = d$. Како је нормална пројекција круга на праву која с њим лежи у истој равни – пречник круга, то је $K_\alpha \cong K_\beta$.

41. Не. Претпоставимо да је у посуди A већи проценат соли него у посуди B. Пресипањем из A у B проценат соли у A се не мења, док се у B повећава. То иде све дотле док се проценти не изједначе. Након тога се проценти соли у A и B не мењају, без обзира где и колико се пресипа.

Ако се на почетку пресипа из B у A, проценат соли у A се смањује, док се у B не мења. Даље је слично као у првом случају.

Дакле, ма како пресипали, проценат соли у посуди A не може бити мањи од процента соли у B.

Пређимо сада на доказ тврђења. Претпоставимо да се путем пресипања у првој посуди може добити $1,5\%$ раствор соли. Нека је у том тренутку у тој посуди x литара течности. Тада је у другој посуди $2 - x$ литара течности у којој је $\frac{2}{100} - \frac{1,5x}{100}$ грама соли, тј. у посуди је $\frac{2-1,5x}{2-x}$–процентни раствор. На основу претходно реченог важи $\frac{2-1,5x}{2-x} \geqslant 1,5$ из чега следи $2 \geqslant 3$. Контрадикција која обара нашу претпоставку.

42. Нека су x и y природни бројеви, такви да је $x + y = a = 30030$, $x, y < a$. Претпоставимо да је $xy = x(a - x) = ka$, где је k такође природан број. Тада је $x^2 = a(x - k)$, па је x^2 дељиво са a. Из тога следи да сваки прост фактор од a дели x^2. Како је $a = 30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, a дели x. Следи $x \geqslant a$. Контрадикција.

43. Из дефиниције логаритма следи да је $xy > 0$. То повлачи $xy + \frac{1}{xy} \geqslant 2$, при чему једнакост важи само за $xy = 1$. Даље је

$$\log_2\left(xy + \frac{1}{xy}\right) \geqslant 1. \tag{1}$$

Како је

$$1 - (x + y - 2)^2 \leqslant 1, \tag{2}$$

лева страна једначине једнака је десној ако и само ако и у (1) и у (2) стоји једнакост. Дакле,

$$xy + \frac{1}{xy} = 1 \quad \text{и} \quad 1 - (x + y - 2)^2 = 1.$$

Тако добијамо систем једначина

$$xy = 1, \quad x + y = 2,$$

који има јединствено решење $x = y = 1$. То је уједно решење дате једначине.

44. Нека је $a = \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}}$ и $b = \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}}$. Тада је

$$(*) \qquad a^3 + b^3 = 6.$$

Из $a - b > 0$ и $(a - b)^2 > 0$ следи $a^2 - ab + b^2 > ab$ и

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) > ab(a + b).$$

Отуда је

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) < a^3 + b^3 + 3(a^3 + b^3) = 4(a^3 + b^3),$$

што с обзиром на $(*)$ даје

$$\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}.$$

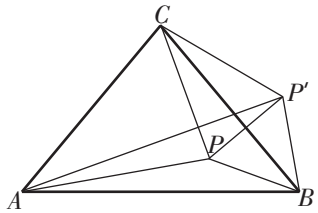
45. Нека трисектрисе из темена C секу страницу AB у тачкама D и E, тако да је $(A - D - E)$ и $(D - E - B)$. При томе је $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCE = \sphericalangle ECB = \dfrac{\gamma}{3}$. Уведимо следеће ознаке: $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\delta = \sphericalangle CDE$, $\varepsilon = \sphericalangle DEC$.

Претпоставимо да је $|DE| > |AD|$ и $|DE| > |BE|$. Примењујући теорему:

Ако је X_1 тачка у којој симетрала $\sphericalangle ZXY$ сече страницу YZ троугла XYZ, тада је $|YX_1| : |ZX_1| = |XY| : |XZ|$

на $\triangle AEC$ и $\triangle DBC$ добијамо $|CE| > |CA|$ и $|CD| > |CB|$. Из тога следи $\alpha > \varepsilon$ и $\beta > \delta$. Како је $\varepsilon > \beta$ и $\delta > \alpha$ (спољашњи углови за $\triangle EBC$ и $\triangle ADC$) из прве неједнакости добијамо $\alpha > \beta$, а из друге $\beta > \alpha$. Очигледна контрадикција.

46. Уочимо тачку P' симетричну тачки P у односу на праву BC (слика 25). Како је $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC = 50^\circ$ и $\sphericalangle PBA = 20^\circ$, следи $\sphericalangle PBC = \sphericalangle P'BC = 30^\circ$. Како је због симетрије $|PB| = |P'B|$, $\triangle PBP'$ је једнакостраничан.



Слика 25.

Даље се лако добија да је $\sphericalangle APB = \sphericalangle APP' = 150^\circ$ и с обзиром да је $|PB| = |PP'|$, следи $\triangle APB \cong \triangle APP'$. Отуда је $\sphericalangle AP'P = \sphericalangle ABP = 20^\circ$ и $\sphericalangle AP'B = 80^\circ$. Сада имамо $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AP'B = 80^\circ$ из чега следи да је $ABP'C$ тетивни четвороугао. То повлачи $\sphericalangle BCP' = \sphericalangle BAP' = 20^\circ$. Како је због симетрије $\sphericalangle BCP' = \sphericalangle BCP$, то је $\sphericalangle ACP = \sphericalangle ACB - \sphericalangle BCP = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$.

47. Нека је OB (O-врх пирамиде) најкраћа бочна ивица или једна од њих ако их је више. Нека су A и C темена основе суседна са B. Показаћемо да је $\triangle OAB \cong \triangle OCB$.

Уочимо на правој OA тачку D, такву да је $|BD| = |AB| = |BC|$. Рецимо да је $(A - D - O)$. (Остале распореде тачака A, D и O препуштамо читаоцима.) Тада је или $\triangle OAB \cong \triangle OCB$ или $\triangle ODB \cong \triangle OCB$. Претпоставимо да је $\triangle ODB \cong \triangle OCB$. Како је $\triangle ADB$ једнакокрак са основицом AD, то је $\sphericalangle ODB > 90^\circ$. Следи $\sphericalangle OCB = \sphericalangle ODB > 90^\circ$ и страница OB је највећа у $\triangle OCB$. Дакле, $|OB| > |OC|$, што је контрадикција с претпоставком да је OB најкраћа бочна ивица. Тако остаје $\triangle OAB \cong \triangle OCB$, што је и требало да се докаже.

48. Доделимо пољима шаховске табле координате на следећи начин. Поља првог реда, с лева на десно, имају редом координате $(1,1), (1,2), \ldots, (1,8)$. Слично, поља другог реда имају координате $(2,1), (2,2), \ldots, (2,8)$, поља трећег реда $(3,1), (3,2), \ldots, (3,8)$, итд, поља осмог реда $(8,1), (8,2), \ldots, (8,8)$. Уобичајено је да је лево доње угаоно поље, тј. поље $(1,1)$ црно. При оваквом обележавању координате црних поља су исте, а координате белих поља различите парности.

Према томе, збир координата сваког црног поља је паран, а сваког белог непаран број. Нека су координате поља на којима стоје топови

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_8, y_8).$$

Како се никоја два топа не нападају, никоја два нису нити у истом реду, нити на истој вертикали. То значи да је

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_8\} = \{y_1, y_2, \ldots, y_8\} = \{1, 2, \ldots, 8\},$$

па важи

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \cdots + (x_8 + y_8) = 2 \cdot (1 + 2 + \cdots + 8) = 72.$$

Како је збир паран, број непарних сабирака облика $(x_i + y_i)$ је паран број. Из тога следи да је број топова који стоје на белим пољима паран. С обзиром да их је укупно 8 и број топова на црним пољима је такође паран.

49. Из услова задатка следи да 30% учесника нема браон очи, 25% нема црну косу, 15% није више од 175 cm и 10% није теже од 80 kg. Остатак поседује све четири карактеристике. Њих ће бити најмање када је број наведених учесника највећи, а то ће бити у случају када су сви скупови дисјунктни. Према томе, најмањи проценат учесника који имају све четири особине износи

$$100\% - 30\% - 25\% - 15\% - 10\% = 20\%.$$

50. Не може. Нека је f цена фломастера и h цена хемијске оловке. Тада је $125h < 175f < 126h$ из чега следи $7f > 5h$, односно $25f < 18h$. Како су цене изражене

целим бројем динара следи $7f \geqslant 5h+1$ и $25f \leqslant 18h-1$. Множећи прву неједнакост са 25, а другу са 7, добијамо $25\cdot 7 \geqslant 25\cdot 5h+25$ и $7\cdot 25 \leqslant 7\cdot 18h-7$, односно

$$125h+25 \leqslant 175f \leqslant 126h-7.$$

Упоређујући први и последњи члан добијамо $h \geqslant 32$. С обзиром на $7f \geqslant 5h+1$, то повлачи $f \geqslant 23$. Отуда је $3f+h \geqslant 3\cdot 23+32 = 101 > 100$, што значи да се за 100 динара не могу купити 3 фломастера и 1 хемијска оловка.

51. Означимо непознате цифре са x и y. Тада је

$$109^{10} = 23673xy67459211723401.$$

Како је

$$109^{10}-1 = (9\cdot 12+1)^{10}-1 = 9k$$

и

$$109^{10}-1 = (11\cdot 10-1)^{10}-1 = 11\ell,$$

број $109^{10}-1$ је дељив и са 9 и са 11. Из дељивости са 9 следи да је $x+y+72$ дељиво са 9, а из дељивости са 11 да је $y-x-8$ дељиво са 11, јер је број дељив са 11 ако му је разлика збирова цифара на непарним и парним местима дељива са 11. С обзиром да $x,y \in \{0,1,\ldots,9\}$ у обзир долазе следеће могућности: $x+y=9$ или $x+y=18$ и $y-x-8=0$ или $y-x-8=-11$. Провером се констатује да је једино решење $x=6$ и $y=3$.

52. Ако између 1 и 2 нема нула имамо број 12 за који се лако проверава да није збир кубова неколико узастопних природних бројева. Стога се ограничимо на бројеве облика $10\ldots02$.

Претпоставимо да је $10\ldots02 = (k+1)^3+(k+2)^3+\cdots+n^3$ за неке природне бројеве k и n. Како је

$$\begin{aligned}(k+1)^3+(k+2)^3+\cdots+n^3 &= \left(1^3+2^3+\cdots+n^3\right)-\left(1^3+2^3+\cdots+k^3\right)\\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2,\end{aligned}$$

то је

$$10\ldots02 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

На левој страни је паран број који није дељив са 4 (завршава се са 02), а на десној разлика квадрата два природна броја. Међутим, лако се показује да је разлика квадрата два природна броја или непаран број или паран број дељив са 4. Контрадикција.

53. Нула очигледно није решење дате једначине. Узмимо да је α $(\alpha \neq 0)$ решење, тј. $f\left(19\alpha-\dfrac{96}{\alpha}\right)=0$. Тада је

$$f\left(19\cdot\left(-\frac{96}{19\alpha}\right)-\frac{96}{-\frac{96}{19\alpha}}\right) = f\left(19\alpha-\frac{96}{\alpha}\right)=0,$$

што значи да је $-\dfrac{96}{19\alpha}$ такође решење. Приметимо да је $\alpha \neq -\dfrac{96}{19\alpha}$ јер су различитог знака. Тако се решења дате једначине јављају у паровима. Како је ученик нашао 11 решења, постоји бар још једно.

54. Претпоставимо да такво пресликавање постоји. Из $f(f(x)) = x+1$ следи $f(f(f(x))) = f(x)+1$, односно $f(x+1) = f(x)+1$. Дакле, $f(x) = f(x-1)+1$. Нека је $f(0) = m$, $m \in \mathbb{Z}$. Тада је $f(m) = f(f(0)) = 0+1 = 1$. Даље је

$$\begin{aligned} f(m) &= f(m-1)+1 \\ f(m-1) &= f(m-2)+1 \\ &\vdots \\ f(1) &= f(0)+1 \\ f(0) &= m. \end{aligned}$$

Сабирањем левих и десних страна добијамо $f(m) = 2m$, односно $1 = 2m$. Контрадикција. Не постоји пресликавање са наведеном особином.

55. Само $n = 1$. Претпоставимо да $n \mid 2^n - 1$. Како је $2^n - 1$ непаран број и $n \mid 2^n - 1$, n је непаран број. Узмимо прво да је $n \geqslant 3$. Нека је p најмањи прост фактор од n. С обзиром да је n непаран број $\geqslant 3$, p је такође непаран број $\geqslant 3$. Из услова задатка следи $p \mid 2^n - 1$, а на основу Фермаове теореме $p \mid 2^{p-1} - 1$. Нека је (a, b) ознака за највећи заједнички фактор бројева a и b. Користећи Еуклидов алгоритам лако се показује да је

$$(2^n - 1, 2^{p-1} - 1) = 2^{(n,p-1)} - 1.$$

Из $p \mid 2^n - 1$ и $p \mid 2^{p-1} - 1$ следи $p \mid 2^{(n,p-1)} - 1$. Међутим, $(n, p-1) = 1$, јер је p најмањи прост фактор од n. Дакле, $p \mid 1$, а то је контрадикција, јер је $p \geqslant 3$. За $n = 1$ услов је очигледно испуњен.

56. Показаћемо да се за сваки природан број n могу наћи n чланова низа $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots$ који чине n узастопних чланова аритметичке прогресије.

Низ $\dfrac{1}{n!}, \dfrac{2}{n!}, \ldots, \dfrac{n}{n!}$ очигледно је аритметичка прогресија са диференцијом $\dfrac{1}{n!}$. Како је за $1 \leqslant i \leqslant n$,

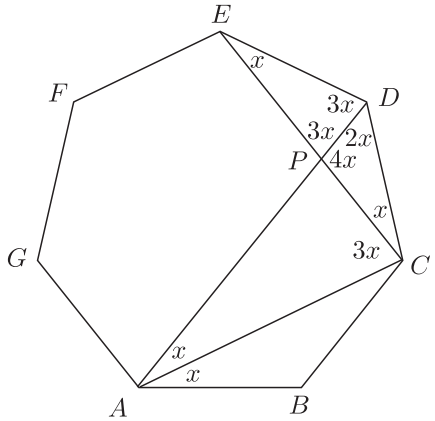
$$\frac{i}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (i-1) \cdot (i+1) \cdot \ldots \cdot n}$$

сваки члан прогресије је члан низа $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots$. За $n = 5$, односно $n = 1997$ имамо случајеве (а) и (б).

57. Ако са $\rho_B^{90^\circ}$ означимо ротацију око тачке B за 90°, тада је $\rho_B^{90^\circ}(A) = C$, $\rho_B^{90^\circ}(B) = B$, $\rho_B^{90^\circ}(C) = C'$, $\rho_B^{90^\circ}(D) = D'$, $\rho_B^{90^\circ}(E) = E'$. $BC'D'C$ је квадрат

у чијој унутрашњости је тачка E' и који је подударан са квадратом $ABCD$. Даље је $|BE'| = |BE| = 1$, $|CE'| = |AE| = \sqrt{3}$ и $\sphericalangle EAB = 90°$. Из $\triangle ABE'$ је $|EE'| = \sqrt{2}$ и $\sphericalangle BE'E = 45°$. Како је $|EC| = \sqrt{5}$, $|EE'| = \sqrt{2}$ и $|E'C| = \sqrt{3}$, $\triangle EE'C$ је правоугли са правим углом код E'. Тако је $\sphericalangle CE'B = 135°$. Када се још узме у обзир да је $\rho_B^{90°}(\sphericalangle AEB) = \sphericalangle CE'B$, следи $\sphericalangle AEB = \sphericalangle CE'B = 135°$.

58. Нека је $x = \dfrac{2\pi}{7}$ (слика 26).



Слика 26.

Није тешко уочити (и доказати) да је $\triangle DPE$ једнакокраки при чему је $PE = ED = 1$. Даље, из сличности троуглова CDP и ADC следи једнакост

$$\frac{CD}{AD} = \frac{CP}{AC}, \quad \text{односно} \quad \frac{1}{AD} = \frac{CD}{AD},$$

одакле је $CP = \dfrac{AC}{AD}$. Како је $AC = CE = CP + PE = \dfrac{AC}{AD} + 1$, добијамо да важи тражена једнакост $\dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AD} = 1$.

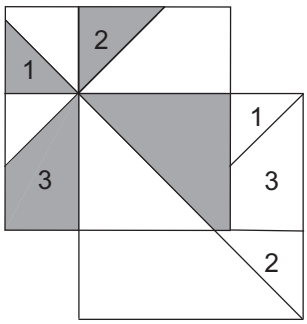
59. Нека су $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (n – природан број) дате праве и нека је R произвољан позитиван реалан број. Обележимо са P_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), „паралелну пругу“ ширине $2R$, чија је оса права p_i. Тада унија $P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n$ не покрива читаву раван.

Заиста, уочимо праву p која није паралелна ни са једном од правих $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Пресек праве p са сваком од пруга је дуж. Како коначан број дужи не покрива праву, постоји тачка O праве p која је ван свих пруга.

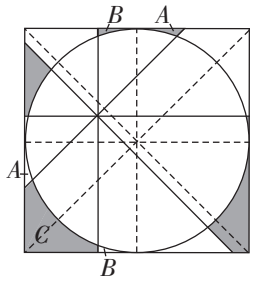
Кружница са центром O, полупречника R, очигледно не сече ниједну од правих $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

60. Око круга се опише квадрат чије су странице паралелне једном пару нормалних правих. Ако се области обоје исто као код круга (слика 1), лако се показује да је површина белих области једнака површини сивих (слика 27).

Уочимо сада део, тачније делове, квадрата који су ван круга (слика 28). Услед симетрије, из сивих делова A, B и C може се сложити један криволинијски „ћошак“. Сиви делови A и B иду на бела места A и B. Исто тако из преостала три сива дела може да се сложи други „ћошак“. Отуда су збирови белих и сивих површина једнаки.



Слика 27.



Слика 28.

Бела површина pizze једнака је разлици белих површина квадрата и белих површина „рестлова“. Исто важи и за сиве површине. Према томе збир белих површина једнак је збиру сивих.

61. Нека су $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ коцке уписане у лопту са центром O и полупречником R. Како је O пресек дијагонала коцки и $\sphericalangle APC_1 = 90°$, то је

$$|PA|^2 + |PC_1|^2 = |AC_1|^2 = 4R^2.$$

Слично је

$$\begin{aligned} |PB|^2 + |PD_1|^2 = |BD_1|^2 &= 4R^2, \\ |PC|^2 + |PA_1|^2 = |CA_1|^2 &= 4R^2, \\ |PD|^2 + |PB_1|^2 = |DB_1|^2 &= 4R^2. \end{aligned}$$

Сабирајући ове четири једнакости добијамо

$$|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 + |PA_1|^2 + |PB_1|^2 + |PC_1|^2 + |PD_1|^2 = 16R^2.$$

Исто важи за збирове квадрата растојања тачака $Q, R, S, P_1, Q_1, R_1, S_1$ од темена коцке $ABCA_1B_1C_1D_1$. Ако са σ обележимо збир свих 64 квадрата растојања, тада је $\sigma = 8 \cdot 16R^2 = 128R^2$, што очито не зависи од међусобног положаја коцки.

62. Може. Нека је $ABCD$ правилан тетраедар и O центар описане лопте. Обележимо са k_A, k_B, k_C, k_D кружнице описане око троугла BCD, CDA, DAB, ABC

респективно. Нека су $\mathcal{K}_A, \mathcal{K}_B, \mathcal{K}_C, \mathcal{K}_D$ редом конусне површи заједно са својим унутрашњим тачкама са врховима A, B, C, D и генератрисама (водиљама) k_A, k_B, k_C, k_D, редом. Очигледно $\mathcal{K}_A \cup \mathcal{K}_B \cup \mathcal{K}_C \cup \mathcal{K}_D$ покрива цео простор.

Уочимо 4 непрозирне дисјунктне кугле (различитих полупречника), при чему је свака уписана у по један конус. Те кугле заклањају тачкасти извор светлости у тачки O. Заиста, сваки зрак који излази из O удара једну од кугли, ону која лежи у истом конусу у којем је и зрак.

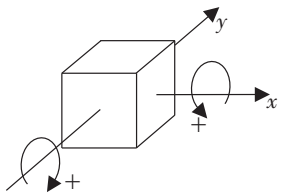
63. Побеђује играч B. Игру губи онај играч који први узме непаран број жетона. Наиме у том тренутку на гомили остаје непаран број жетона и следећи играч узимајући један жетон диригује, сходно правилима игре, узимање по једног жетона све до краја игре. Како након његовог потеза остаје паран број жетона, он ће бити тај који ће узети последњи жетон. Дакле, за оба играча је најбоље да у сваком потезу узимају паран број жетона.

Ако је на почетку било $2n$ жетона и први играч могао да узме највише $2k$, тада је крајњи резултат, уз оптималну игру, исти као да је на гомили било n жетона, а први могао да узме највише k. Заиста, сваком потезу у првој игри одговара потез са узимањем упола мање жетона у другој. Треба додати да уколико је n паран, а k непаран број, тада се за горњу границу код почетног потеза може узети $k-1$, јер као што је речено за првог играча не ваља да узме непаран број жетона. Ако са $s(2n, 2k)$ означимо исход прве игре, тада је $s(2n, 2k) = s(n, k)$. С обзиром да је $1998^{11} = 2^{11} \cdot 999^{11}$ следи

$$\begin{aligned} s(1998^{11}, 1998) &= s(2^{10} \cdot 999^{11}, 999) = s(2^{10} \cdot 999^{11}, 998) \\ &= s(2^{9} \cdot 999^{11}, 499) = s(2^{9} \cdot 999^{11}, 498) \\ &= \cdots = s(2 \cdot 999^{11}, 1). \end{aligned}$$

Како је $s(2 \cdot 999^{11}, 1) = B$, играч B побеђује и у почетној игри.

64. За произвољну коцку K уочимо хоризонталну осу x и вертикалну осу y које пролазе кроз центар коцке (слика 29). Ротације око оса x и y одговарају ротацијама редова, односно колона. Са $+$ су означени позитивни смерови. Нека су, даље, X^+ и X^- ознаке за ротације око осе x за $90°$ и $-90°$, редом. Слично је и за Y^+ и Y^-.



Слика 29.

Предњу страну коцке K обележимо са A, задњу са A', леву са B, десну са B',

доњу са C и горњу са C'. Нека су f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 следеће трансформације:

$$\begin{aligned} f_1 &= Y^+ \circ X^+ \circ Y^- \circ X^- \\ f_2 &= Y^- \circ X^- \circ Y^+ \circ X^+ \\ f_3 &= X^- \circ Y^- \circ X^+ \circ Y^+ \\ f_4 &= X^- \circ Y^+ \circ X^+ \circ Y^- \\ f_5 &= Y^+ \circ X^+ \circ Y^- \circ X^- \circ X^- \circ Y^- \circ X^+ \circ Y^+. \end{aligned}$$

Лако се проверава да је

$$f_1(A) = f_2(A') = f_3(B) = f_4(B') = f_5(C) = C'.$$

Даље, ниједна од трансформација f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 не мења положај страна коцке која је у истој врсти или колони са K. Заиста, на оне које су у истој врсти са K делују само Y^+ и Y^- са истим ефектом. На остале коцке наведене трансформације уопште не делују.

Према томе, ако је страна A коцке K обојена црно примењујемо трансформацију f_1. Црна страна долази горе, док све остале коцке задржавају стари положај. Уколико је у питању нека од страна A', B, B' или C примењујемо f_2, f_3, f_4 или f_5. Разуме се, ако је црна страна C', не дира се ништа. Примењујући ову операцију на сваку од 64 коцке постижемо да све црне стране дођу горе.

65. Ако су се бициклисти срели после t времена тада је $30t + 20t = 60$, односно $t = \frac{6}{5}$ h. Исто толико времена је летео голуб, па је прешао пут од

$$50 \cdot \frac{6}{5}\,\mathrm{km} = 60\,\mathrm{km}.$$

66. Претпоставимо да је $n > 1$. Тада су у збиру $1! + 2! + \cdots + n!$ сви сабирци, сем првог, парни. Стога је збир непаран, па је и $m!$ непаран број. То је могуће само за $m = 1$. Међутим, за $n > 1$ је $m > 1$. Отуда је $m = n = 1$ и једнакости тривијално важе.

67. Нека је $\sqrt[3]{2} = x$. Тада је горња једнакост еквивалентна са

$$9(x-1) = (1 - x + x^2)^3.$$

Имајући у виду да је $x^3 = 2$, директном провером добија се да је лева страна једнака десној.

68. Показаћемо да за $0 \leqslant a \leqslant 1$ важи неједнакост

$$\frac{a}{1+a^2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{16}(1+a^2). \tag{1}$$

За $a = 0$ неједнакост (1) очигледно важи. Узмимо да је $0 < a \leqslant 1$ Тада је неједнакост (1) еквивалентна са

$$\frac{\left(1+a^2\right)^2}{a} \geqslant \frac{16}{3\sqrt{3}}. \tag{2}$$

Сада је

$$\frac{\left(1+a^2\right)^2}{a} = a^3 + 2a + \frac{1}{a} = \left(a^3 + \frac{a}{3}\right) + \left(3a + \frac{1}{a}\right) - \frac{4}{3}a.$$

Из неједнакости аритметичке и геометријске средине следи

$$\begin{aligned}\left(a^3 + \frac{a}{3}\right) + \left(3a + \frac{1}{a}\right) - \frac{4}{3}a &\geqslant 2\sqrt{a^3 \cdot \frac{a}{3}} + 2\sqrt{3a \cdot \frac{1}{a}} - \frac{4}{3}a \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(a^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}a + 3\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\left(a - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{8}{3}\right).\end{aligned}$$

Како је

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\left(a - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{8}{3}\right) \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{3\sqrt{3}},$$

следи неједнакост (2), а из ње неједнакост (1).

Из услова $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ следи $0 < x \leqslant 1$, $0 < y \leqslant 1$, $0 < z \leqslant 1$, па $\dfrac{x}{1+x^2}$, $\dfrac{y}{1+y^2}$ и $\dfrac{z}{1+z^2}$ задовољавају неједнакост (1). Отуда је

$$\begin{aligned}\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} &\leqslant \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(1+x^2\right) + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(1+y^2\right) + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(1+z^2\right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(3 + x^2 + y^2 + z^2\right) = \frac{3\sqrt{3}}{16} \cdot 4 = \frac{3\sqrt{3}}{4}.\end{aligned}$$

69. Уведимо следеће ознаке: $l_1 = \overset{\frown}{AB}$, $l_2 = \overset{\frown}{CD}$, $l_3 = \overset{\frown}{FE}$, $l_1' = \overset{\frown}{BD}$, $l_2' = \overset{\frown}{DE}$, $l_3' = \overset{\frown}{EB}$, $p = \overset{\frown}{AE}$, $q = \overset{\frown}{CB}$, $r = \overset{\frown}{FD}$. Из подударности кружница следи подударност лукова ABD и AED, CDE и CBE, FEB и FDE, па је

$$l_1 + l_1' = p + l_2', \quad l_2 + l_2' = q + l_3', \quad l_3 + l_3' = r + l_1'.$$

Из тога следи

$$l_1 + l_2 + l_3 = p + q + r. \tag{1}$$

С друге стране користећи чињеницу да је периферијски угао два пута мањи од одговарајућег централног добијамо

$$\begin{aligned}l_1 + q &= 2(\sphericalangle AFB + \sphericalangle BFC) = 2\sphericalangle AFC, \\ l_2 + r &= 2(\sphericalangle CAD + \sphericalangle DAF) = 2\sphericalangle CAF, \\ l_3 + p &= 2(\sphericalangle FCE + \sphericalangle ECA) = 2\sphericalangle FCA,\end{aligned}$$

одакле је

$$(2) \qquad l_1 + l_2 + l_3 + p + q + r = 2(\sphericalangle AFC + \sphericalangle CAF + \sphericalangle FCA) = 360^\circ.$$

Из (1) и (2) следи $l_1 + l_2 + l_3 = 180^\circ$.

70. Доказаћемо да је $\sphericalangle BMC = 150^\circ$. Означимо са $\rho_A^{60^\circ}$ ротацију око тачке A за 60°. Тада је $\rho_A^{60^\circ}(B) = C$, $\rho_A^{60^\circ}(C) = C'$, $\rho_A^{60^\circ}(M) = M'$. При том је $\triangle AMM'$ једнакостраничан, што повлачи $|MM'| = |MA| = 5$ и $|M'C| = |MB| = 4$. Тако у $\triangle MCM'$ имамо $|MC| = 3$, $|CM'| = 4$ и $|MM'| = 5$. На основу обрнуте Питагорине теореме $\triangle MCM'$ је правоугли, при чему је $\sphericalangle MCM' = 90^\circ$. Имајући то у виду добијамо

$$\begin{aligned}
\sphericalangle BMC &= 180^\circ - \sphericalangle MBC - \sphericalangle MCB \\
&= 180^\circ - (60^\circ - \sphericalangle MBA) - (60^\circ - \sphericalangle MCA) \\
&= 180^\circ - (60^\circ - \sphericalangle M'CA) - (60^\circ - \sphericalangle MCA) \\
&= 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ.
\end{aligned}$$

Помоћу косинусне теореме из $\triangle BCM$ добијамо

$$|BC| = \sqrt{3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 150^\circ} = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}.$$

71. Претпоставимо супротно, тј. да се неки конвексан $n-$угао може исећи на k неконвексних четвороуглова. Сваки од k четвороуглова има по један неконвексан угао (већи од 180°). Због конвексности, сва темена при којима су неконвексни углови су унутрашње тачке $n-$угла. Свака таква тачка је теме неконвексног угла највише једног четвороугла. Тако бар k темена четвороуглова лежи у унутрашњости $n-$угла. Услед тога збир углова свих четвороуглова је $\geqslant k \cdot 360^\circ + (n-2) \cdot 180^\circ$. С друге стране, збир углова k четвороуглова је $k \cdot 360$. Очигледна контрадикција.

72. Нека је A почетна таблица и нека су у i–тој врсти таблице A бројеви

$$a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

при чему је $a_{i,1} > a_{i,2} > \cdots > a_{i,n}$. После уређења колона добија се таблица B, код које су у i–тој врсти бројеви $b_{i,1}, b_{i,2}, \ldots, b_{i,n}$. Треба да се докаже да је $b_{i,1} > b_{i,2} > \cdots > b_{i,n}$.

Претпоставимо супротно. Тада је у некој врсти таблице B, рецимо i–тој, нарушен поредак, тј. $b_{i,j} < b_{i,j+1}$ за неко $1 \leqslant j \leqslant m-1$. Посматрајмо низ $b_{1,j+1}, b_{2,j+1}, \ldots, b_{i,j+1}, b_{i,j}, b_{i+1,j}, \ldots, b_{m,j}$. Како су колоне таблице B уређене по величини, важи

$$(*) \qquad b_{1,j+1} > b_{2,j+1} > \cdots > b_{i,j+1} > b_{i,j} > b_{i+1,j} > \cdots > b_{m,j}.$$

Ти бројеви су из i–те и $(i+1)$–ве колоне таблице A. Како их има $m+1$, а свака колона садржи тачно m бројева, два од њих су у истој врсти. Рецимо да су то $a_{k,j}$ и $a_{k,j+1}$ из k–те врсте. Но тада

$$a_{k,j} \in \{b_{i,j}, b_{i+1,j}, \ldots, b_{m,j}\} \quad \text{и} \quad a_{k,j+1} \in \{b_{1,j+1}, b_{2,j+1}, \ldots, b_{i,j+1}\},$$

па с обзиром на $(*)$ важи $a_{k,j} < a_{k,j+1}$. То значи да је у таблици A нарушен поредак. Контрадикција са условом задатка.

73. Угаона брзина минутне казаљке је $v_m = 6^\circ/\text{min}$, а сатне $v_s = \left(\frac{1}{2}\right)^\circ/\text{min}$. Након времена t прва опише угао од $(6t)^\circ$, а друга од $\left(\frac{t}{2}\right)^\circ$. Нека је Јован почео са доручком у 7 сати и t_1 минута. Разликоваћемо два случаја.

(а) *Казаљке су у том тренутку биле са разних страна од цифре* 6. Према услову задатка је

$$180 - 6t_1 = 30 + \frac{t_1}{2},$$

па је $t_1 = \dfrac{300}{13}\,\text{min}$.

Јован је завршио са доручком у 7 сати и t_2 минута, када су се казаљке први пут поклопиле. У том случају је

$$6t_2 - \frac{t_2}{2} = 210,$$

одакле је $t_2 = \dfrac{420}{11}\,\text{min}$.

Према томе, Јован је доручковао

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{420}{11} - \frac{300}{13} = 15\,\frac{15}{143}\,\text{min}.$$

(б) *Казаљке су се поклапале.* Према (а) то се десило у $7\,\text{h}\,38\dfrac{2}{11}\,\text{min}$. Ако са t означимо време које ће протећи до првог наредног поклапања, тада је

$$6t - \frac{t}{2} = 180,$$

из чега следи $t = \dfrac{720}{11}\,\text{min} = 65\,\dfrac{5}{11}\,\text{min}$. Толико времена је Јован провео за доручком у овом случају.

74. Нека је $f(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$. Да би квадратни трином $f(x)$ имао реалне нуле потребно је и довољно да његов график има бар једну заједничку тачку са x–осом, тј. да постоји реалан број x_0, такав да је $f(x_0) = 0$. С обзиром на параметре a, b и c, има неколико карактеристичних случајева.

(а) $a = b = c$. Тада је $f(x) = 3(x-a)^2$, па је $f(a) = 0$.

(б) $a = b \neq c$. Тада је $f(x) = (x-a)(3x-a-2c)$ и опет је $f(a) = 0$.

(в) $a = c \neq b$. Као (б).

(г) $b = c \neq a$. Као (б).

(д) $a \neq b, b \neq c, c \neq a$. Због очигледне симетрије можемо узети да је $a < b < c$. Тада је

$$f(a) = (a-b)(a-c) > 0 \quad \text{и} \quad f(b) = (b-c)(b-a) < 0.$$

Како је $f(x)$ непрекидна функција, то постоји реалан број x_0, $a < x_0 < b$, такав да је $f(x_0) = 0$.

Напомена. Задатак се може решити и тако што се покаже да је дискриминанта тринома $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$ ненегативна.

75. Прво ћемо показати да за свака два реална броја x и y важи неједнакост

$$x^x y^y \geqslant x^y y^x. \tag{1}$$

Због симетрије може се узети да је $x \geqslant y$. Тада је $x - y \geqslant 0$ и $\dfrac{x}{y} \geqslant 1$. Неједнакост (1) еквивалентна је са неједнакошћу

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{x-y} \geqslant 1,$$

која очигледно важи.

Примењујући (1) на a и b, b и c и c и a, добијамо

$$a^a b^b \geqslant a^b b^a, \quad b^b c^c \geqslant b^c c^b, \quad c^c a^a \geqslant c^a a^c.$$

Множењем левих и десних страна ових неједнакости добијамо

$$\left(a^a b^b c^c\right)^2 \geqslant a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b}.$$

Множењем леве и десне стране последње неједнакости са $a^a b^b c^c$ добијамо

$$\left(a^a b^b c^c\right)^3 \geqslant a^{a+b+c} b^{a+b+c} c^{a+b+c},$$

одакле очигледно следи

$$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

76. Користићемо следеће тврђење које се лако доказује:

Ако је збир цифара некоī броја наīисаноī у сисīему са основом b, $(b > 1)$, дељив са m и $b - 1$ дељиво са m, īада је и сам број дељив са m.

На пример, из наведене теореме следе критеријуми дељивости са 3 и 9 у декадном систему.

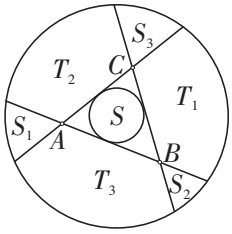
Нека је n двадесетоцифрен број у систему са основом 1997. Како цифре, узете неким редом, образују аритметичку прогресију, збир цифара броја n је

$$a + (a + d) + \cdots + (a + 19d) = 20a + 190d = 2(10a + 95d),$$

дакле, дељив је са 2. Међутим, са 2 је дељиво и $1997 - 1 = 1996$. На основу наведеног тврђења и број n је дељив са 2.

77. Како је $\sphericalangle AMC = 30^\circ = \frac{1}{2}\sphericalangle ABC$, тачка M лежи на кружници са центром у тачки B, а која пролази кроз тачке A и C (теорема о централном и периферијском углу). Дакле, $\triangle BCM$ је једнакокрак са основицом CM. Стога је $\sphericalangle BCM = \sphericalangle BMC = 70^\circ$ и $\sphericalangle CBM = 40^\circ$. Из тога следи да је $\sphericalangle ABM = 100^\circ$ и $\sphericalangle ACM = 130^\circ$.

78. Обележимо са T_1, T_2 и T_3 површине преостала три дела већег круга (слика 30) Сви кружни одсечци које тангенте малог круга одсецају од великог су међусобно подударни, како они који су мањи, тако и они који су већи од полукруга.



Слика 30.

Ако површине мањих обележимо са P_1, а већих са P_2, тада је

$$S_1 + T_3 + S_2 = S_2 + T_1 + S_3 = S_3 + T_2 + S_1 = P_1$$

и

$$T_2 + S_1 + T_3 + S = T_3 + S_2 + T_1 + S = T_1 + S_3 + T_2 + S = P_2.$$

Отуда је

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + S_3 - S &= (S_1 + T_3 + S_2) + (S_2 + T_1 + S_3) \\ &\quad - (T_3 + S_2 + T_1 + S) \\ &= 2P_1 - P_2 = const. \end{aligned}$$

79. Доказаћемо општије тврђење:

Сваки конвексан $2n$−угао чије су све страницe подударне и чије су наспрамне странице међусобно паралелне, може да се исече на ромбове.

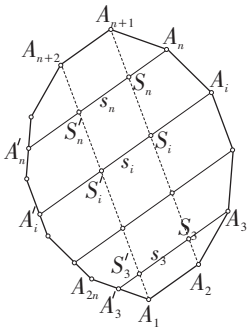
Доказаћемо наведено тврђење индукцијом по n, $n \geqslant 2$. За $n = 2$ имамо ромб и тврђење тривијално важи. Претпоставимо да се сваки конвексан $2k$−угао

$(k < n,\ n > 2)$, чије су све странице подударне и чије су наспрамне странице међусобно паралелне, може исећи на ромбове.

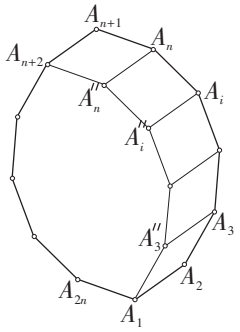
Нека је $A_1A_2\ldots A_{2n}$ $(n > 2)$ конвексан једнакостраничан $2n-$угао са паралелним наспрамним страницама (слика 31). Уочимо наспрамне странице A_1A_2 и $A_{n+1}A_{n+2}$. С обзиром да су паралелне и подударне, четвороугао $A_1A_2A_{n+1}A_{n+2}$ је паралелограм. Уочимо даље праве $s_3, s_4, \ldots, s_n$ које пролазе редом кроз темена $A_3, A_4, \ldots, A_n$ и паралелне су са A_1A_2, односно $A_{n+1}A_{n+2}$. Обележимо са $A_3', A_4', \ldots, A_n'$ њихове друге тачке пресека са многоуглом. Тврдимо да је за $n > 2$ и $i = 3, 4, \ldots, n$

$$(*) \qquad |A_iA_i'| > |A_1A_2| = |A_{n+1}A_{n+2}|\,.$$

Ова неједнакост је очигледна последица следећих чињеница. A_2A_{n+1} је дијагонала конвексног многоугла и као таква лежи у његовој унутрашњости. Услед конвексности, темена $A_3, A_4, \ldots, A_n$ леже с једне, а темена $A_{n+2}, A_{n+3}, \ldots, A_{2n}$, A_1 с друге стране праве A_2A_{n+1}. Слично, темена $A_2, A_3, \ldots, A_{n+1}$ леже с једне, а темена $A_{n+3}, A_{n+4}, \ldots, A_{2n}$ с друге стране праве A_1A_{n+2}. То повлачи да су тачке A_i и A_i' $(i = 3, 4, \ldots, n)$ са разних страна „траке“ оивичене паралелним правама A_1A_{n+2} и A_2A_{n+1}. Ако са S_i и S_i' означимо редом тачке пресека праве s_i са правама A_2A_{n+1} и A_1A_{n+2}, тада је $|A_iA_i'| > |S_iS_i'|$. Како је, због паралелности, $|S_iS_i'| = |A_1A_2| = |A_{n+1}A_{n+2}|$, следи неједнакост $(*)$.



Слика 31.



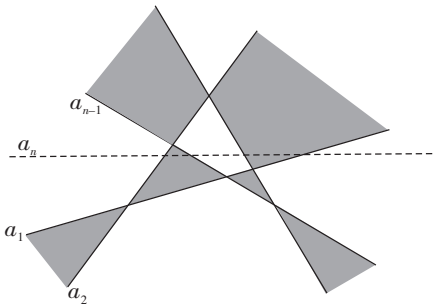
Слика 32.

Транслацијом тачака $A_3, A_4, \ldots, A_n$ за вектор $\overrightarrow{A_2A_1} = \overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}}$ добијају се редом тачке $A_3'', A_4'', \ldots, A_n''$ (слика 32).

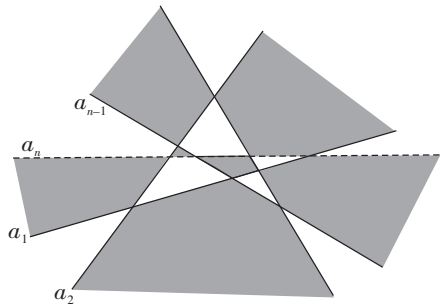
На основу $(*)$ све тачке $A_3'', A_4'', \ldots, A_n''$ леже унутар многоугла $A_1A_2\ldots A_{2n}$. Лако се види да су четвороуглови $A_1A_2A_3A_3''$, $A_3''A_3A_4A_4''$, $\ldots$, $A_{n-1}''A_{n-1}A_nA_n''$ ромбови и да је $A_1A_3''A_4''\ldots A_n''A_{n+2}A_{n+3}\ldots A_{2n}$ конвексан $2(n-1)-$угао чије су странице међусобно подударне и чије су наспрамне странице паралелне. Као такав може се, на основу индукцијске претпоставке, исећи на ромбове. Према томе, многоугао $A_1A_2\ldots A_{2n}$ може да се исече на ромбове.

80. За n $(n \geqslant 1)$ правих у равни од којих никоје две нису паралелне и никоје три не пролазе кроз исту тачку рећићемо да су у *општем положају*. Прво ћемо

показати да се области на које n $(n \geqslant 1)$ правих у општем положају деле раван могу обојити са две боје, тако да су сваке две суседне области различито обојене. (Области су суседне ако имају заједничку ивицу; дуж, полуправу или праву.) Такво бојење зваћемо *правилним*.



Слика 33.



Слика 34.

Доказ ћемо дати индукцијом по n. За $n = 1$ тврђење очигледно важи. Једна полураван боји се бело, а друга црно. Претпоставимо да тврђење важи за сваки скуп од k правих у општем положају, где је $k < n$ и $n > 1$. Посматрајмо скуп од n правих у општем положају. Нека су то праве $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$. Тада су праве $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ такође у општем положају. Према индукцијској претпоставци области на које оне деле раван могу се правилно обојити белом и црном бојом (слика 33) По услову задатка права a_n сече сваку од правих $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Стога она пролази кроз n области. Извршимо сада ново бојење. У једној полуравни с обзиром на a_n задржимо старо бојење, а у другој извршимо замену боја. Области које су биле беле обојимо црно, а оне које су биле црне обојимо бело (слика 34). Лако се види да је такво бојење такође правилно. Тиме је тврђење доказано.

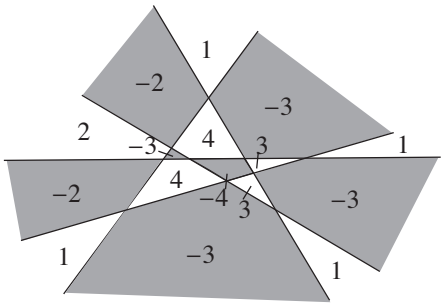
Приступимо сада решењу задатка. Области на које n правих у општем положају деле раван најпре обојимо правилно белом и црном бојом. (Области су или конвексни многоуглови или бесконачне конвексне фигуре ограничене са две полуправе и неколико дужи. У последњем случају тих дужи може да и нема. То значи да је дотична област унутрашњост једног угла.) Како се сваке две праве секу, на рубу сваке области лежи одређен број тачака пресека. Разуме се, не више од n. Областима додељујемо целе бројеве према следећем правило. Ако на рубу лежи k тачака и област је бела, додељује јој се број k. Ако је под истим условима област црна, тада добија број $-k$ (слика 35). Покажимо да је таква нумерација тражена.

Нека је a_i произвољна права уоченог скупа. Уочимо једну од полуравни с обзиром на a_i. Нека је M тачка пресека неке две праве из скупа $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ која лежи у уоченој полуравни. Карактеристична су следећа два случаја.

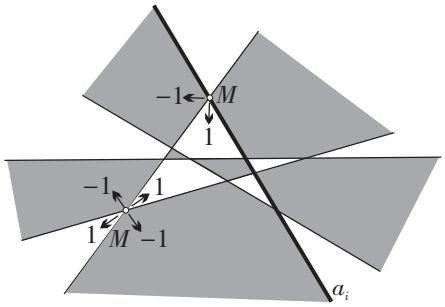
(а) $M \notin a_i$ (слика 36). Тада је M заједничка тачка за четири области: две унакрсне беле и две унакрсне црне. Свакој од белих области тачка M доноси

по једно 1, а свакој од црних по једно -1. Тако је укупан допринос тачке M једнак 0.

(б) $M \in a_i$ (слика 36). Тада је M заједничка тачка за једну белу и једну црну област. Како првој доприноси 1, а другој -1, укупан допринос је опет 0.



Слика 35.



Слика 36.

Из (а) и (б) следи да је збир свих бројева додељеним областима у уоченој полуравни једнак 0. Исто важи и за другу полураван. Тиме је доказ завршен.

81. Нека Петар станује на спрату $x+1$ $(x \geqslant 0)$. Тада је број његовог стана $10x+y$, где је $0 \leqslant y \leqslant 9$. Наташа станује у стану број $x+1$. Према услову задатка је $10x+y+x+1=239$, односно $11x=238-y$. С обзиром да је $0 \leqslant y \leqslant 9$, једино целобројно решење ове једначине је $x=21$, $y=7$. Дакле, Петар станује у стану број 237.

82. Нека је

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=\frac{D}{d}=k.$$

Тада је

$$A=ka,\ B=kb,\ C=kc \quad \text{и} \quad k=\frac{A+B+C+D}{a+b+c+d}.$$

Отуда је

$$\begin{aligned}\sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}+\sqrt{Dd} &= = \sqrt{k}(a+b+c+d)\\ &= \sqrt{\frac{A+B+C+D}{a+b+c+d}}\cdot(a+b+c+d)\\ &= \sqrt{(A+B+C+D)(a+b+c+d)}\,.\end{aligned}$$

83. Показаћемо да је

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}<2 \quad \text{и} \quad \sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}}<3.$$

То следи из следећих очигледних неједнакости:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}} < \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{4}}} = 2$$

и

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}} < \sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{9}}} = 3.$$

84. Како су оба решења позитивна следи $x_1x_2 = \dfrac{-4}{a} > 0$, односно $a < 0$. Дакле, парабола која представља график функције

$$f(x) = ax^2 + (7a+4)x - 4$$

окренута је врхом нагоре.

Како је $1 < x_1 < 2$ и $x_2 > 2$, то је $f(1) < 0$ и $f(2) > 0$. Тако је

$$\begin{aligned} a + (7a+4) - 4 &< 0, \\ 4a + 2(7a+4) - 4 &> 0. \end{aligned}$$

Прва неједнакост даје $a < 0$, што је већ констатовано, а друга $a > -\dfrac{2}{9}$. Према томе, решења ће испуњавати наведене услове за $a \in \left(-\dfrac{2}{9}, 0\right)$.

85. Дата једначина еквивалентна је са

$$(2^x - 3^x)^2 + (2^x - 1)^2 + (3^x - 1)^2 = 0.$$

С обзиром да су сви сабирци на левој страни ненегативни, њихов збир је једнак 0 ако и само ако је сваки од њих 0. То је могуће једино за $x = 0$.

86. Сваки лист нумерисан је бројевима $2n-1$ и $2n$ за неко $1 \leqslant n \leqslant 50$. Њихов збир је $4n-1$. Обележимо са k број листова који су остали. Тада је

$$(4n_1 - 1) + (4n_2 - 1) + \cdots + (4n_k - 1) = (1 + 2 + \cdots + 100) - 4949,$$

односно $4(n_1 + n_2 + \cdots + n_k) - k = 101$.

Како је $101 \equiv 3 \pmod 4$, то је $k \equiv 3 \pmod 4$. Дакле, $k \in \{3, 7, 11, \ldots, 97\}$. Како је $4(n_1 + n_2 + \cdots + n_k) - k \geqslant 105 > 101$ за $k \geqslant 7$, остаје $k = 3$. То је могуће, јер је на пример збир бројева којима су нумерисане странице првог, другог и 23. листа, $(1,2)$, $(3,4)$, $45, 46)$ управо 101. Дакле, остала су 3 листа, тј. истргнуто је 47.

87. Нека је p тражени број. Тада је

$$\frac{1}{p} = 0, a_1a_2\ldots a_n(b_1b_2\ldots b_7).$$

Из тога следи да је

$$\begin{aligned} q &= 10^{n+7}\cdot\frac{1}{p}-10^{n}\cdot\frac{1}{p}\\ &= \overline{a_1a_2\ldots a_nb_1b_2\ldots b_7},(b_1b_2\ldots b_7)-\overline{a_1a_2\ldots a_n},(b_1b_2\ldots b_7)\\ &= \overline{a_1a_2\ldots a_nb_1b_2\ldots b_7}-\overline{a_1a_2\ldots a_n} \end{aligned}$$

цео број. Дакле,

$$10^n\cdot(10^7-1)\cdot\frac{1}{p}=10^n\cdot 9999999\cdot\frac{1}{p}=q,$$

одакле је

$$p=\frac{10^n\cdot 9999999}{q}=\frac{2^n\cdot 5^n\cdot 3^2\cdot 239\cdot 4649}{q}.$$

Како је p прост број, q је производ неких од наведених фактора. Другим речима, $p\in\{2,3,5,239,4649\}$. Могућност $p=4649$ отпада због услова задатка. Такође отпадају $p=2,3,5$, јер њихове реципрочне вредности немају периоде 7; $\frac{1}{2}=0,5$, $\frac{1}{3}=0,(3)$, $\frac{1}{5}=0,2$. Тако остаје $p=239$, што и јесте решење с обзиром да је $\frac{1}{239}=0,(0041841)$.

88. Нека је $h_c=h_a+h_b$. Ако са S обележимо површину троугла, тада је

$$\frac{2S}{c}=\frac{2S}{a}+\frac{2S}{b},$$

односно

$$ab-bc-ca=0.$$

Но тада је

$$(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab-bc-ca)=a^2+b^2+c^2.$$

89. Без умањења општости, претпоставимо да је дати квадрат јединични. Тада је $|AB|=1$, $|AE|=p$, $|BE|=1-p$, $|A'E|=p$, $\frac{1}{2}<p<1$. Следи да је $|BA'|=\sqrt{2p-1}$, $|CA'|=1-|BA'|=1-\sqrt{2p-1}$. Из сличности троуглова $A'CG$ и EBA' добијамо

$$|CG|=\frac{\sqrt{2p-1}(1-\sqrt{2p-1})}{1-p}\quad\text{и}\quad|A'G|=\frac{p(1-\sqrt{2p-1})}{1-p}.$$

Даље је

$$D'G=A'D'-A'G=1-A'G=\frac{p\sqrt{2p-1}-2p+1}{1-p},$$

па је обим троугла $A'CG$, $O = 2$, а његова површина

$$P = \frac{p\sqrt{2p-1} - 2p + 1}{1-p}.$$

С друге стране, $P = \frac{1}{2}Or$, одакле је

$$r = \frac{2P}{O} = \frac{p\sqrt{2p-1} - 2p + 1}{1-p} = |D'G|.$$

90. Нека је дат тангентни четвороугао $ABCD$, пресек његових дијагонала тачка O и нека је $a = |AO|$, $b = |BO|$, $c = |CO|$, $d = |DO|$. Како је $ABCD$ тангентан, то је $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$, односно,

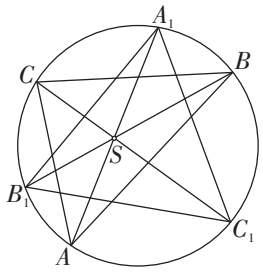
$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{a^2+d^2} + \sqrt{b^2+c^2},$$

одакле се квадрирањем добија

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (a^2+d^2)(b^2+c^2),$$
$$c^2(b^2-d^2) = a^2(b^2-d^2).$$

Ако је $b = d$, $ABCD$ је делтоид, а ако је $b \neq d$, мора бити $a = c$, па опет добијамо да је дати четвороугао делтоид.

91. Означимо са A_1, B_1 и C_1 темена добијеног једнакостраничног троугла (слика 37).



Слика 37.

Нека је

$$\sphericalangle CAA_1 = \phi,\ \sphericalangle CBB_1 = \theta,\ \sphericalangle CAB = \alpha,\ \sphericalangle ABC = \beta,\ \sphericalangle BCA = \gamma.$$

Тада је $\sphericalangle CC_1A_1 = \phi$, а $\sphericalangle CC_1B_1 = \theta$ (углови над одговарајућим луковима). Следи да је $\phi + \theta = 60^\circ$, па је

$$\begin{aligned}\sphericalangle ASB &= 180^\circ - (\alpha - \phi) - (\beta - \theta) = (180^\circ + \phi + \theta) - (\alpha + \beta)\\ &= \gamma + \phi + \theta = \gamma + 60^\circ,\end{aligned}$$

односно, $\gamma < 120^\circ$. Слично, $\sphericalangle BSC = \alpha + 60^\circ$, па је $\alpha < 120^\circ$. Дакле, S се налази у пресеку два геометријска места тачака, постоји за $\alpha, \beta, \gamma < 120^\circ$ и јединствено је.

92. Нека је $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

1. случај. *Све четири тачке леже на једној правој.*

Претпоставимо да је $(A_1 - A_2 - A_3)$ и $(A_2 - A_3 - A_4)$, а слично се разматрају и остали случајеви. Тада је $A = \{A_1, A_3\}$. Приметимо да сваки круг који садржи тачке A_1 и A_3 садржи сваку тачку дужи A_1A_3, па специјално и A_2 $(B(A_1, A_2, A_3))$, јер је круг конвексна фигура. Одавде следи да не постоји круг који садржи само тачке A_1 и A_3 скупа S, тј. за сваки круг K, $K \cap S \neq A$.

2. случај. *Не припадају све четири тачке једној правој.*

1) Претпоставимо да неке три тачке припадају једној правој. На пример, $A_1, A_2, A_3 \in p$, $A_4 \notin p$, $(A_1 - A_2A_3)$, а слично се разматрају и остали случајеви. Тада је $A = \{A_1, A_3\}$, а слично као у претходном случају се доказује да сваки круг K који садржи A_1 и A_3 садржи и A_2, односно, за сваки круг K важи $K \cap S \neq A$.

2) Тачке A_1, A_2, A_3, A_4 образују четвороугао.

(а) $A_1A_2A_3A_4$ је неконвексан четвороугао. Приметимо да код сваког неконвексног четвороугла се теме неконвексног угла налази унутар троугла који образују преостала темена, а самим тим и унутар круга описаног око тог троугла. Са друге стране сваки круг који садржи темена троугла је надскуп кругу описаном око троугла. На основу претходних разматрања се примећује да за сваки круг важи $K \cap S \neq A$, где је A скуп темена неконвексног четвороугла у којима није неконвексан угао, јер би у супротном A садржао и четврто теме четвороугла, што је контрадикција.

(б) $A_1A_2A_3A_4$ је конвексан четвороугао. Нека је K_1 круг описан око троугла $A_1A_2A_3$, K_2 круг описан око троугла $A_2A_3A_4$, K_3 круг описан око троугла $A_3A_4A_1$, K_4 круг описан око троугла $A_4A_1A_2$,

Претпоставимо да $A_4 \notin K_1, A_1 \notin K_2, A_2 \notin K_3, A_3 \notin K_4$. Нека су k_1, k_2, k_3, k_4 одговарајуће кружнице кругова K_1, K_2, K_3, K_4 и нека је $A_1A_2 \cap k_2 = \{P\}$. Тада је $A_2A_3A_4P$ тетиван четвороугао и ако су углови у теменима A_1, A_2, A_3, A_4 редом $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, тада је $\sphericalangle A_2PA_4 = 180^\circ - \alpha_3$. Посматрајмо $\triangle A_1PA_4$. У том троуглу је $\sphericalangle A_2PA_4$ спољашњи угао , дакле

$$\sphericalangle A_2PA_4 = \alpha_1 + \sphericalangle A_1A_4P = 180^\circ - \alpha_3,$$

па следи

$$\alpha_1 = 180^\circ - \alpha_3 - \sphericalangle A_1A_4P < 180^\circ - \alpha_3.$$

Слично се доказује: $\alpha_2 < 180^\circ - \alpha_4$. Тада је збир углова у четвороуглу $A_1A_2A_3A_4$ једнак

$$360^\circ = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 < 180^\circ - \alpha_3 + 180^\circ - \alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_4 = 360^\circ.$$

Контрадикција. Дакле, једно од темена припада једном од одговарајућих кругова описаних око троуглова. Тада је A скуп темена одговарајућег троугла око којег је описан круг. Како је сваки круг који садржи темена неког троугла

надскуп круга описаног око троугла, па дакле свака тачка која припада кругу описаном око троугла припада и било ком кругу који садржи темена тог троугла. Дакле, очигледно за сваки круг K и на описан начин одабран скуп A важи $K \cap S \neq A$. Овим смо размотрили све случајеве, чиме је доказ завршен.

93. Очигледно је да за $n = 2k$, $k \geqslant 3$, тражени полиедар постоји (најједноставније: правилна k–страна пирамида). За n облика $2k+1$, $k \geqslant 4$, уочимо правилну $(k-1)$–страну пирамиду. Сада „над“ неким троуглом из омотача (троуглом ABC) уочимо тачку D коју спојимо са тачкама A, B, C. Нови полиедар има $2(k-1)+3 = 2k+1$ ивица. Како је $k \geqslant 4$ следи да за свако непарно $n \geqslant 9$ тражени полиедар постоји.

94. ($\Rightarrow$) Нека постоји сфера која додирује све ивице тетраедра $ABCD$. Означимо са P, Q, R, P_1, Q_1, R_1 тачке додира сфере и тетраедра, при чему наведене тачке припадају ивицама BC, CA, AB, AD, BD, CD, редом. Тада је, на основу особина тангентних дужи,

$$|AP_1| = |AQ| = |AR| = a, \quad |BP| = |BQ_1| = |BR| = b,$$

$$|CP| = |CQ| = |CR_1| = c, \quad |DP_1| = |DQ_1| = |DR_1| = d.$$

Следи да је

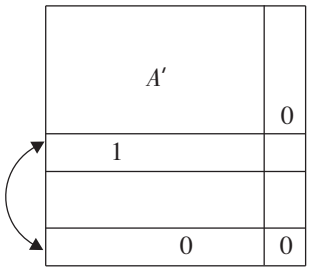
$$|AB| + |CD| = |AC| + |BD| = |AD| + |BC| = a + b + c + d.$$

($\Leftarrow$) Нека је $|AB| + |CD| = |AC| + |BD| = |AD| + |BC|$. Тада се кружнице уписане у троуглове ABC и BCD додирују у некој тачки K на дијагонали BC. Обележимо са O_1 и O_2 центре тих кружница. Центар тражене сфере добијамо у пресеку нормала на равни $r(A, B, C)$ и $r(B, C, D)$ у тачкама O_1 и O_2, респективно.

95. Петоцифрених бројева у којима учествују само цифре 1, 2, 3, 4 и 5 има укупно $5^5 = 3125$. Бројеви у којима се појављује тачно једна од ових цифара се не мењају, па нису доминантни. За сваки од преосталих бројева уочимо да постоји пет цикличних пермутација, при чему је највећи број међу њима доминантан (на пр. 21312, 13122, 31221, 12213, 22131, доминантан је 31221). Према томе, број доминантних бројева је $(3125 - 5) : 5 = 624$.

96. Доказ ћемо дати индукцијом по n. За $n = 2$ тражена таблица се добија после највише једне операције. Нека је $n \geqslant 3$. Како таблица A садржи $n-1$ јединица, то постоје бар једна врста и бар једна колона без јединица, тј. од самих нула. Преместимо их на последњу врсту, односно, колону (слика 38).

У таблици A' формата $(n-1) \times (n-1)$ уочимо врсту са бар једном јединицом и заменимо јој место са последњом у таблици A. Добијамо таблицу A'' формата $(n-1) \times (n-1)$ која има највише $n-2$ јединице, које се по индуктивној претпоставци могу поставити испод главне дијагонале. Тиме се добија премештање свих јединица таблице A испод главне дијагонале.



Слика 38.

97. Нека Тамас има x деце. Тада је број његових унука x^2, праунука x^3, а прапраунука x^4. Дакле,

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = 2801.$$

Ово је еквивалентно са

$$(x-7)(x^3 + 8x^2 + 57x + 400) = 0$$

одакле следи да Тамас има седморо деце. Решење је јединствено јер је

$$x^3 + 8x^2 + 57x + 400 > 0,$$

за сваки природан број x.

98. Из неједнакости између аритметичке и хармонијске средине, узимајући у обзир да је $a + b + c = 1$, добијамо

$$\frac{1}{3} \geqslant \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

тј.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 9.$$

После множења са 2 имамо

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) \geqslant 18,$$

одакле следи тражена неједнакост.

99. Примењујући Виетове формуле добијамо $x_1 + x_2 = 4a$ и $x_1x_2 = 5a^2 - 6a$ одакле је

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 16a^2 - 20a^2 + 24a \\ &= 24a - 4a^2 = 4\left(9 - (a-3)^2\right).\end{aligned}$$

Последњи израз има максималну вредност за $a = 3$.

100. Доказ изводимо индукцијом по n. За $n = 3$ важи $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$. Нека тврђење важи за $n = k$, и то за бројеве $b_1 < b_2 < \cdots < b_k$. Тада бирамо

$$a_1 = b_1, \ldots, a_{k-1} = b_{k-1}, a_k = b_k + 1, a_{k+1} = b_k(b_k + 1).$$

Очигледно важи $a_1 < a_2 < \cdots < a_{k+1}$, као и

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{k+1}} = 1.$$

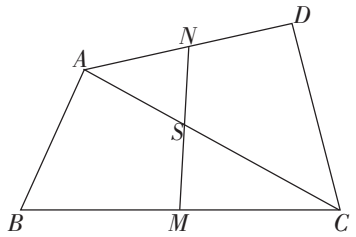
Напомена. Ево још неких идеја:

(1) У индукцијском кораку могли смо узети $a_1 = 2$, $a_2 = 2b_1, \ldots, a_{k+1} = 2b_k$. Доказ се спроводи као горе.

(2) Решити засебно још случај $n = 4$, па доказ извести индукцијом са кораком 2, тј. са k на $k + 2$: $a_1 = b_1, \ldots, a_{k-1} = b_{k-1}, a_k = 2b_k, a_{k+1} = 3b_k$, $a_{k+2} = 6b_k$.

101. Означимо са S пресек дужи AC и MN (слика 39). Приметимо да су површине троуглова ASN и ASM једнаке (подударне су странице NS и MS и одговарајуће висине).

Слично закључујемо да важи $S(\triangle CSN) = S(\triangle CSM)$, дакле и $S(\triangle ACN) = S(\triangle ACM)$.



Слика 39.

На крају, једнаке су и површине троуглова ANC и DNC (опет $AN \cong DN$, а подударне су и одговарајуће висине), и аналогно $S(\triangle BMA) = S(\triangle CMA)$, па $S(\triangle ACD) = 2S(\triangle ANC) = 2S(\triangle CMA) = S(\triangle ACB)$.

102. За праву ћемо рећи да је висина $(2n+1)$–угла ако она пролази кроз једно његово теме и нормална је на дијагоналу одређену његовим суседним теменима.

Лема. *Ако $2n$ висина $(2n + 1)$–угла пролазе кроз једну тачку онда и $(2n + 1)$–ва висина пролази кроз ту тачку.*

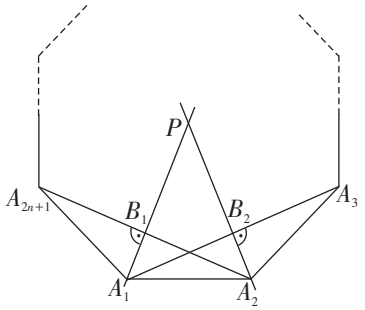
Доказ. Нека је P тачка пресека висина $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_{2n}B_{2n}$ датог $(2n+1)$–угла. Уведимо ознаке (слика 40): $\overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{PA_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{PA_n}$. Ако је $(\vec{x}, \vec{y})$ скаларни производ вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$, важи:

$$(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_{2n+1}} - \overrightarrow{a_2}) = (\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_3}) = \cdots = (\overrightarrow{a_{2n}}, \overrightarrow{a_{2n+1}} - \overrightarrow{a_{2n-1}}) = 0$$

одакле произилази

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_{2n+1}}) &= (\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})\\ (\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_1}) &= (\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3})\\ &\vdots\\ (\overrightarrow{a_{2n}}, \overrightarrow{a_{2n-1}}) &= (\overrightarrow{a_{2n}}, \overrightarrow{a_{2n+1}}).\end{aligned}$$

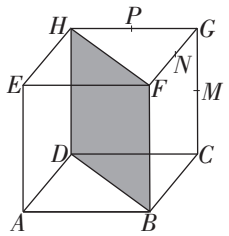
Одавде следи $(\overrightarrow{a_{2n+1}}, \overrightarrow{a_1}) = (\overrightarrow{a_{2n+1}}, \overrightarrow{a_{2n}})$, и наравно $(\overrightarrow{a_{2n+1}}, \overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_{2n}}) = 0$ тј. $PA_{2n+1} \perp A_{2n}A_1$ односно $(2n+1)$—ва висина пролази кроз P.



Слика 40.

Нека је дата тачка A_1. Тачку A_3 одређујемо као пресек l_3 са нормалом n_1 из A_1 на праву l_2. Тај пресек постоји, јер би из $n_1 \parallel l_3$ следило $l_2 \perp l_3$, што је нетачно. На исти начин добијамо и $A_5, A_7, \ldots, A_{2n+1}$, а затим и $A_2, A_4, \ldots, A_{2n}$. Приметимо да су $l_1, l_2, \ldots, l_{2n}$ висине $(2n+1)$–угла $A_1A_2\ldots\ A_{2n+1}$, и да све пролазе кроз O. По леми и преостала висина (она кроз A_{2n+1}) пролази кроз O, па је то управо права l_{2n+1}, односно $l_{2n+1} \perp A_{2n}A_1$. Доказ је завршен.

103. Обележимо темена коцке са A, B, C, D, E, F, G, H, и нека су пауци у темену A, а мува у темену G (слика 41).



Слика 41.

Слика 42.

Стратегија за паукове је следећа: први паук креће се симетрично муви у односу на центар коцке све док она (евентуално) не стигне до средишта неке од ивица GC, GF, GH, обележимо их са M, N, P редом. Тада он (ако је мува рецимо у M) наставља кретање симетрично муви у односу на раван $BFHD$ и тиме њено

кретање ограничава на контуру са слике 42. За то време други паук креће према темену G, и када тамо стигне лако хвата муву, како у случају да она не пређе ни једно од темена M, N, P, тако и у преосталом случају.

104. Потребно је n боја. Означимо темена нашег n-угла редом са $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Дужи $A_1A_2, A_1A_3, \ldots, A_1A_n$ и A_2A_n морају све бити обојене различитим бојама, јер сваке две од њих имају заједничку тачку. Дакле, потребно је бар n боја. Даље претпоставимо да је n–угао правилан (то ништа не мења, јер то да ли ће се A_iA_j и A_kA_l сећи зависи само од индекса i, j, k, l; заиста, потребан и довољан услов да се оне не секу, уз претпоставку $i < j$, је: $i < k < j$ акко $i < l < j$). Поделимо све странице и дијагонале у класе еквиваленције у односу на релацију паралелности, и обојимо све дужи исте класе једном бојом. Јасно је да се никоје две дужи исте класе не секу,јер су паралелне. Ових класа има n; ако је n непарно оне су одређене свим страницама, а ако је парно $(n = 2k)$, рецимо, страницама $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_kA_{k+1}$ и дијагоналама $A_1A_3, A_2A_4, \ldots, A_kA_{k+2}$.

105. Уочимо да важи еквиваленција

$$p \mid a \wedge p \mid b \Leftrightarrow p \mid (a+b) \wedge p \mid (a-b).$$

Дакле, интересују нас само делитељи броја $n = a + b$, и посматрамо да ли су дељиви са $a - b$.

(а) Овде је $p \geqslant 7$, па играч A сигурно побеђује ако је $-6 \leqslant a - b \leqslant 6$, (јер n није паран број па не може бити $a - b = 0$). Он треба да у првом потезу узме 6 жетона, а у сваком следећем узима исти број жетона као и његов супарник. Када то више није могуће, тј. остало је премало жетона, он их узима све. На тај начин разлика $a - b$ увек остаје између -4 и 6, па играч A има победничку стратегију.

(б) Играчу A и овде одговарају исте позиције као и под (а), осим случаја $a - b = 5$. Ево како ће га он избећи. На почетку опет узме 6 жетона. (Ако је $n < 6$, тј. $n = 5$ играч A побеђује било да узме 1, 2, 3 или 4 жетона.) Нека је после његовог потеза на гомили остало $2x + 1$ жетона, $x > 1$.

1. случај: ако B узме мање од $x - 1$ жетона, и A учини исто.

2. случај: ако B узме баш $x - 1$ жетона, тада: ако је $x \leqslant 8$, A узима све преостале жетоне и $a - b = 9$. Ако $x = 9$, играч A треба да узме 10 жетона, а B онда узима један, па $a - b = 7$. Иначе, A узима $x - 2$ жетона, а на столу их остаје 4, па играч A једноставно избегава да узме два жетона, и опет $a - b \neq 5$.

3. случај: ако B узме x жетона, A узима $x+1$ и $a - b = 7$. Он то не може да изведе само када је $x = 10$, па у том случају узима 8 жетона. На гомили их остаје три, па без обзира на потез играча B он може да узме највише један од њих. Значи, $a - b = 3$ или $a - b = 1$.

4. случај: ако B узме $x + 1$ жетон, A узима $x - 1$, па је коначна разлика $a - b = 3$.

5. случај: ако B узме више од $x+1$ жетона, A узима преостале и $a-b \leqslant 3$.

106. Одредимо најпре колико има пресликавања при којим се тачно k елемената, $(1 \leqslant k \leqslant n)$, сликају сами у себе. Прво, тих k елемената можемо бирати на $\binom{n}{k}$ начина. Затим, сваки од преосталих елемената слика се у једног од њих; заиста, ако $f(a) = b$ и $f(b) = c$ онда због транзитивности $f(a) = c$ па $b = c$, тј. $f(b) = b$. Значи, слике преосталих $n - k$ елемената можемо бирати на k^{n-k} начина. Пресликавања при којим се тачно k елемената сликају сами у себе има дакле $\binom{n}{k}k^{n-k}$, па је тражени број пресликавања

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^{n-k} = n + \binom{n}{2} 2^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1}(n-1) + 1.$$

107. Нека се у датом троуглу углови α, β и γ налазе редом наспрам страница са дужинама $a = 10$, $b = 8$ и $c = 3$.

Из косинусне теореме добијамо $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, одакле је

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{9}{16}$$

и слично

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{3}{4}.$$

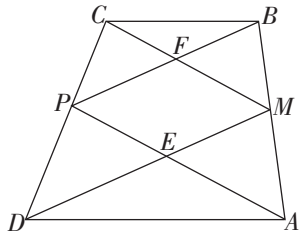
Међутим,

$$\cos 3\beta = 4\cos^3\beta - 3\cos\beta = -\frac{9}{16} = \cos\alpha,$$

па пошто је $\beta < 60^\circ$ имамо $3\beta < 180^\circ$ и $\alpha < 180^\circ$, и коначно $3\beta = \alpha$.

108. Приметимо да за произвољне бројеве $a = \lfloor a \rfloor + \{a\}$ и $b = \lfloor b \rfloor + \{b\}$ важи: $\{a\} = \{b\}$ акко $a - b = \lfloor a \rfloor - \lfloor b \rfloor$ акко $a - b \in \mathbb{Z}$. Дакле, $\{8x\} = \{15x\}$ даје $7x \in \mathbb{Z}$, одакле имамо и $49x \in \mathbb{Z}$ и $\{26x\} = \{75x\}$.

109. Означимо $\{E\} = AP \cap MD$ и $\{F\} = MC \cap PB$, као на слици 43. Четвороугао $MEPF$ је очигледно паралелограм.



Слика 43.

Означимо $MF = PE = x$ и $ME = PF = y$. Из сличности троуглова AME и MFB следи $\dfrac{AE}{y} = \dfrac{x}{BF}$, па је $xy = AE \cdot BF$. Даље, из сличности DEP и PFC имамо $\dfrac{DE}{x} = \dfrac{y}{FC}$, па је $xy = DE \cdot CF$. Дакле, $AE \cdot BF = DE \cdot CF$,

тј. $\dfrac{AE}{DE} = \dfrac{CF}{BF}$. То заједно са $\sphericalangle AED = \sphericalangle MEP = \sphericalangle MFP = \sphericalangle BFC$ даје сличност троуглова AED и BFC. Одатле је $\sphericalangle ADE = \sphericalangle CBF$, па из $MD \parallel PB$ следи $AD \parallel CB$, те је $ABCD$ трапез.

110. Једино решење је $x = 10$. Заиста, за $x < 0$ десна страна једначине није цео број, а лева јесте. За $x = 0, 1, \ldots, 9$ провером добијамо да нису решења, а за $x > 10$ докажимо индукцијом да је $x^3 + 24 < 2^x$. (Читаоци који су упознати са основама диференцијалног рачуна могу показати да је $f'(x) > 0$ за $x \geqslant 10$, где је $f(x) = 2^x - x^3 - 24$.) За $x = 11$ тврђење важи. Нека је тачно и за произвољно $x \geqslant 11$. Тада

$$\begin{aligned}(x+1)^3 + 24 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 24 \\ &= (x^3 + 24) + (3x^2 + 3x + 1) < 2^x + 2^x = 2^{x+1}.\end{aligned}$$

Ово следи из $3x^2 + 3x + 1 < 2^x$, што опет доказујемо индукцијом: за $x = 11$ је испуњено, а ако важи за ма које $x \geqslant 11$, онда

$$3(x+1)^2 + 3(x+1) + 1 = (3x^2 + 3x + 1) + (6x + 10) < 2^x + 2^x < 2^{x+1}.$$

(За доказ неједнакости $6x + 10 < 2^x$, за $x \geqslant 11$, поново користимо индукцију; то остављамо читаоцу за вежбу.)

111. Уочимо правилан седмоугао $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Он је уписан у кружницу и периферијски углови над сваком од његових страница–тетива те кружнице су једнаки, обележимо их са α. Бар четири од ових седам тачака су обојене истом (нпр. плавом) бојом, а бар две од те четири су суседне, рецимо A_1 и A_2.

1. случај: ако се међу преосталим плавим тачкама налази A_4 или A_6, рецимо A_4, троугао $A_1A_2A_4$ је тражени. Заиста, $\sphericalangle A_2A_4A_1 = \alpha$, $\sphericalangle A_4A_1A_2 = 2\alpha$, и $\sphericalangle A_1A_2A_4 = 4\alpha$. Слично поступамо ако је у питању A_6.

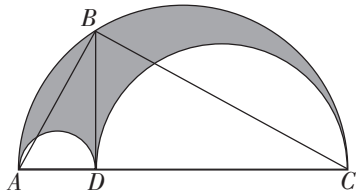
2. случај: ако је још једна од плавих тачака A_5, а друга рецимо A_3 (или, аналогно, A_7), онда је тражени троугао $A_2A_3A_5$.

3. случај: ако су плаве и тачке A_3 и A_7, узимамо троугао $A_2A_3A_7$.

112. Нека су први чланови тих прогресија $x_1, x_2, \ldots, x_6$ и нека су $y_1, y_2, \ldots, y_6$ њихови други чланови. Даље, нека је нпр. x_1 најмањи од тих бројева. Тада се међу бројевима $x_1, x_1 + 1, \ldots, x_1 + 600$ мора налазити бар 7 чланова ових прогресија, тј. бар два члана исте прогресије. Ако су то x_i и y_i, онда јасно важи $y_i - x_i \leqslant 600$.

113. Обележимо $r_1 = \dfrac{AD}{2}$ и $r_2 = \dfrac{DC}{2}$ (слика 44). Тада је површина ограничена са три полукружнице једнака

$$P = \frac{1}{2}\left((r_1 + r_2)^2 - r_1^2 - r_2^2\right)\pi = r_1 r_2 \pi.$$



Слика 44.

С друге стране, из сличности троуглова ADB и BDC добијамо $2r_1 : BD = BD : 2r_2$, односно $BD^2 = 4r_1r_2$. Зато је површина круга над пречником BD

$$P = \left(\frac{BD}{2}\right)^2 \pi = r_1r_2\pi.$$

Ове површине су, дакле, једнаке.

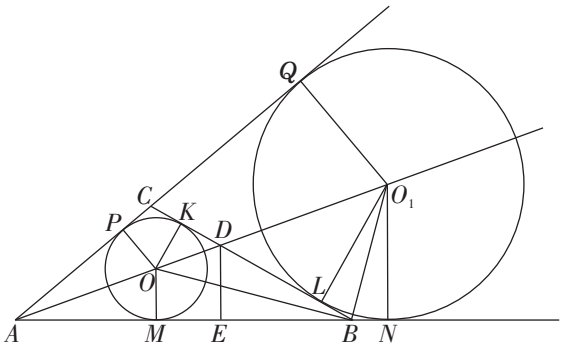
114. Нека су B и C пресеци тражене праве са крацима угла, чије теме ћемо означити са A. Нека је O центар круга k уписаног у троугао ABC, а O_1 центар круга k_1 споља приписаног том троуглу, а у унутрашњости датог угла. Даље, нека k и k_1 додирују редом праву AB у M и N, праву AC у P и Q и праву BC у K и L. Коначно, нека је E подножје нормале из D на AB (слика 45). Из једнакости тангентних дужи имамо

$$MB + CP = BK + CK = BC \quad \text{и} \quad BN + CQ = BL + CL = BC.$$

Дакле, $MN + PQ = MB + BN + PC + CQ = 2BC$.
Опет из једнакости тангентних дужи добијамо

$$MN = AN - AM = AQ - AP = PQ,$$

што са претходно показаним даје $MN = PQ = BC$.



Слика 45.

Посматрајмо троугао ABD. BO је симетрала унутрашњег, а BO_1 одговарајућег спољашњег угла, па следи да су парови тачака A, D и O, O_1 хармонијски спрегнути, тј. $AD : DO = AO_1 : DO_1$. Према Талесовој теореми је и $AM : EM = AN : EN$.

Сада можемо да конструишемо редом:

1. тачку E као подножје нормале из D на један крак угла;
2. произвољну кружницу $\mathcal{K}$ кроз тачке A и E;
3. пречник RS круга $\mathcal{K}$ нормалан на AE;
4. праву кроз R паралелну са AE;
5. на њој тачку T такву да RT буде једнако датој дужи и да су полуправе AE и RT исто оријентисане;
6. тачку N која је пресек крака AE и кружнице описане око троугла RTS;
7. тачке M и F, као пресеке праве кроз R паралелне са TN редом са краком AE и кружницом $\mathcal{K}$;
8. тачку O као пресек симетрале датог угла са нормалом на крак AE кроз M;
9. кружницу k са центром O и полупречником OM и тангенту на њу из тачке D – то је тражена права.

Треба још доказати да заиста важи $AM : EM = AN : EN$. Пошто је R средиште лука $\overset{\frown}{AE}$ важи $\sphericalangle AFR = \sphericalangle RFE$. Како је $TN \perp NS$ и $RF \parallel TN$ следи $RF \perp NS$. То заједно са $\sphericalangle RFS = 90^\circ$ даје $F \in SN$. Дакле, у троуглу AEF је FR симетрала унутрашњег, а FN спољашњег угла код F, па су парови тачака A, E и M, N хармонијски спрегнути, што је и требало доказати.

115. Подсетимо се најпре формуле за збир свих делилаца броја $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$. Она гласи

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{\alpha_i} p_i^j \,.$$

Тако збир делилаца броја A износи

$$\sigma(A) = \left(1 + 2 + \cdots + 2^k\right)(1+p)(1+q) = \left(2^{k+1} - 1\right) \cdot 9 \cdot 2^{2k-1}.$$

Збир свих делилаца броја B је исти:

$$\sigma(B) = \left(1 + 2 + \cdots + 2^k\right)(1+r) = \left(2^{k+1} - 1\right) \cdot 9 \cdot 2^{2k-1}.$$

С друге стране је

$$\begin{aligned} A + B &= 2^k(pq + r) = 2^k\left(\left(3 \cdot 2^{k-1} - 1\right)\left(3 \cdot 2^k - 1\right) + 9 \cdot 2^{2k-1} - 1\right) \\ &= 2^k\left(9 \cdot 2^{2k} - 9 \cdot 2^{k-1}\right) = 2^{2k-1} \cdot 9 \cdot \left(2^{k+1} - 1\right). \end{aligned}$$

Збир правих делилаца броја A је дакле $\sigma(A) - A = (A + B) - A = B$, а правих делилаца броја B: $\sigma(B) - B = (A + B) - B = A$. Значи A и B су пријатељски бројеви.

116. Дату једначину можемо трансформисати на следећи начин:

$$\begin{aligned}
& x^4 - 2x^2 - 400x - 9999 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(x^4 + 2x^2 + 1\right) - \left(4x^2 + 400x + 10000\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(x^2 + 1\right)^2 - (2x + 100)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(x^2 + 1 - (2x + 100)\right)\left(x^2 + 1 + (2x + 100)\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(x^2 - 2x - 99\right)\left(x^2 + 2x + 101\right) = 0.
\end{aligned}$$

Тако добијамо две квадратне једначине:

$$x^2 - 2x - 99 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + 2x + 101 = 0.$$

Решења прве једначине су $x_1 = -9$ и $x_2 = 11$, а решења друге $x_3 = -1 - 10i$ и $x_4 = -1 + 10i$.

Уместо горњег растављања, могла се применити Хорнерова шема за откривање прва два решења, а друга два би се опет лако добила из преостале квадратне једначине.

117. Помоћу лењира и шестара са фиксираним отвором једноставно се конструише угао од $60°$. Наносећи њега на полуправу AB, а затим на полуправу BA (у истој полуравни одређеној са AB) лако добијамо тачку C.

118. Ако трговчев капитал на почетку означимо са x, онда ће капитал на крају прве године износити

$$x + \frac{x}{3} - 100 = \frac{4}{3}x - 100,$$

на крају друге

$$\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}x - 100\right) - 100 = \frac{16}{9}x - \frac{700}{3},$$

а на крају треће

$$\frac{4}{3}\left(\frac{16}{9}x - \frac{700}{3}\right) - 100 = \frac{64}{27}x - \frac{3700}{9},$$

а то би требало да буде једнако $2x$. Решавајући тако добијену једначину добијамо $x = 1110$.

119. **Прво решење.** Обележимо прва два члана наших прогресија са x и y. Тада је општи члан аритметичке прогресије $a_n = (n-1)y + (n-2)x$, а геометријске $g_n = \dfrac{y^{n-1}}{x^{n-2}}$. Докажимо индукцијом да важи $a_n < g_n$.

За $n = 3$ је $2y - x < \dfrac{y^2}{x}$ еквивалентно са $(y - x)^2 > 0$, што је тачно.

Нека тврђење важи неко $n \geqslant 3$. Тада је

$$(n-1)y - (n-2)x < \frac{y^{n-1}}{x^{n-2}}$$

па је

$$ny-(n-1)x<\frac{y^{n-1}}{x^{n-2}}+y-x=\frac{y^{n-1}+yx^{n-2}-x^{n-1}}{x^{n-2}}<\frac{y^n}{x^{n-1}}\,.$$

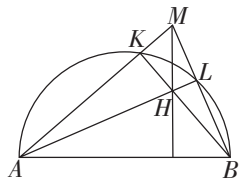
Последња неједнакост важи јер је еквивалентна са $y^{n-1}x+yx^{n-1}-x^n<y^n$, односно са $\left(y^{n-1}-x^{n-1}\right)(y-x)>0$, што је тачно. Дакле, важи $a_n>g_n$ за све $n\in\mathbb{N}$.

Друго решење. Нека је први члан прогресије a, а разлика аритметичке d. Тада је општи члан аритметичке прогресије $a_n=a+(n-1)d$, а геометријске $g_n=a\left(\frac{a+d}{a}\right)^{n-1}$. Обележимо $h=\frac{d}{a}$ и приметимо да је због $a+d>0$ и $h>-1$. Зато можемо искористити Бернулијеву неједнакост:

$$g_n=a(1+h)^{n-1}\geqslant a(1+(n-1)h)=a+(n-1)d=a_n.$$

Приметимо да ће строга неједнакост бити на снази за $n-1>1$, тј. за $n\geqslant 3$. Тиме је доказ завршен.

120. Нека праве MA и MB секу полукружницу у тачкама K и L редом (слика 46). Тада је $\sphericalangle AKB=\sphericalangle ALB=90^\circ$. Тако, ако са H обележимо пресечну тачку правих AL и BK, она ће бити ортоцентар троугла ABM, па ће права MH бити нормална на AB.



Слика 46.

121. Крећемо од очигледне једнакости

$$2\cdot\sin 30^\circ\cdot\cos 10^\circ=\cos 10^\circ$$

$$\sin 40^\circ+\sin 20^\circ=\cos 10^\circ$$

$$\cos 50^\circ=\sin 40^\circ=\cos 10^\circ-\sin 20^\circ$$

$$\cos 10^\circ+\cos 50^\circ=2\cos 10^\circ-\sin 20^\circ$$

$$\frac{1}{2}(\cos 10^\circ+\cos 50^\circ)=\cos 10^\circ-\sin 10^\circ\cos 10^\circ=\cos 10^\circ(1-\sin 10^\circ)$$

$$\frac{1-\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ}=\frac{\cos 30^\circ\cos 20^\circ}{\cos 10^\circ\sin 10^\circ}=\frac{\sqrt{3}\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}=\sqrt{3}\operatorname{ctg}20^\circ=\sqrt{3}\operatorname{tg}70^\circ$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}45^\circ + \operatorname{tg}60^\circ \operatorname{tg}70^\circ &= 1+\sqrt{3}\operatorname{tg}70^\circ = \frac{1}{\sin 10^\circ} \\
&= \frac{\sin 5^\circ}{\sin 10^\circ \sin 5^\circ} = \frac{\sin(85^\circ - 80^\circ)}{\frac{1}{2}(\cos 5^\circ + \cos 165^\circ)} \\
&= \frac{\sin 85^\circ \cos 80^\circ - \sin 80^\circ \cos 85^\circ}{\cos 85^\circ \cos 80^\circ} \\
&= \frac{\sin 85^\circ}{\cos 85^\circ} - \frac{\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ} = \operatorname{tg}85^\circ - \operatorname{tg}80^\circ,
\end{aligned}$$

одакле следи тражена једнакост.

122. Нумеришимо поља табле на следећи начин: поља непарних врста обележимо наизменично бројевима 1 и 2, а поља парних врста наизменично бројевима 3 и 4. Значи, имамо укупно 1000^2 јединица, $1000 \cdot 999$ двојки, $999 \cdot 1000$ тројки и 999^2 четворки. Приметимо да фигуре типа (2) и (3) покривају по један од тих бројева, ма како да су постављене. Нека су x, y, z редом бројеви фигура типа (1), (2), (3) који учествују у поплочавању и x_1, x_2, x_3, x_4 бројеви фигура типа (1) које покривају редом бројеве $2,3,4$; $1,3,4$; $1,2,4$; $1,2,3$. Као што већ знамо:

$$\begin{aligned}
x_2 + x_3 + x_4 + y + z &= 1000^2, \\
x_1 + x_3 + x_4 + y + z &= 1000 \cdot 999, \\
x_1 + x_2 + x_4 + y + z &= 999 \cdot 1000, \\
x_1 + x_2 + x_3 + y + z &= 999^2.
\end{aligned}$$

Одузимајући прву једнакост редом од друге, треће и четврте, добијамо

$$x_2 - x_1 = 1000, \quad x_3 - x_1 = 1000, \quad x_4 - x_1 = 1999,$$

и према томе

$$\begin{aligned}
x &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 + (x_1 + 1000) + (x_1 + 1000) + (x_1 + 1999) \\
&= 4x_1 + 3999 \geqslant 3999.
\end{aligned}$$

123. Не. Наиме, стратегија Другог је следећа: нека Први на почетку изабере број n. Други бира рецимо 54. Затим у сваком следећем потезу бира број који Први није бирао у истом потезу. Тако се након k–тог потеза добија број

$$n + 54 + 77k + 54k = n + 54 + 131k.$$

Постојање броја k таквог да $n + 54 + 131k \equiv p \pmod{100}$, где је $p < 100$ прост, следи из чињенице да је $(100, 131) = 1$, јер то значи да постоје $k, l \in \mathbb{Z}$ такви да важи $131 \cdot k + 100 \cdot l = 1$. Одавде је $131k \cdot (p - n - 54) \equiv p - n - 54 \pmod{100}$, па, штавише, за свако p имамо по једно такво k. Тиме је доказ завршен.

124. Приметимо да је

$$\sphericalangle A_1OA_4 = \sphericalangle A_1OA_2 + \sphericalangle A_2OA_3 + \sphericalangle A_3OA_4 = 180^\circ.$$

Значи да права A_1A_4 (а слично и A_2A_5 и A_3A_6) пролази кроз O. Ради боље прегледности посматрајмо угао од 60° са теменом O'. Уочимо на једном његовом краку тачке A_1', A_3', A_5', а на другом A_2', A_4', A_6' тако да буде $OA_i = O'A_i'$ за $i = 1, 2, \ldots, 6$. Тада важи и $A_iA_j = A_i'A_j'$ за $i, j = 1, 2. \ldots, 6$ (слика 47).

Обележимо још са M и N пресеке дужи $A_1'A_4'$ и $A_2'A_3'$, односно дужи $A_4'A_5'$ и $A_6'A_1'$. Имамо:

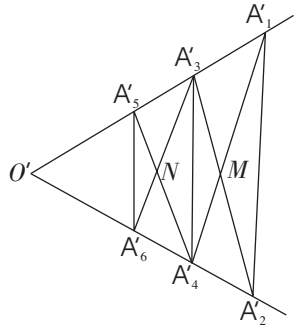
$$A_1'A_4' + A_2'A_3' = (A_1'M + MA_2') + (A_3'M + MA_4') > A_1'A_2' + A_3'A_4'$$

и слично

$$A_6'A_1' + A_4'A_5' > A_5'A_6' + A_1'A_4'$$

одакле коначно следи

$$A_2'A_3' + A_6'A_1' + A_4'A_5' > A_2'A_3' + A_1'A_4' + A_5'A_6' > A_1'A_2' + A_3'A_4' + A_5'A_6'.$$



Слика 47.

125. Означимо $a_1 = 1$ и $a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{a_{n-1}^{10}}$. Ако је $a_{10^{22}-1} \geqslant 100$ онда је очигледно $a_{10^{22}} > 100$. У супротном је $\dfrac{1}{a_k^{10}} > \dfrac{1}{10^{20}}$ за све $k < 10^{22}$ па је

$$a_{10^{22}} = 1 + \frac{1}{a_1^{10}} + \frac{1}{a_2^{10}} + \cdots + \frac{1}{a_{10^{22}-1}^{10}} > 10^{22} \cdot \frac{1}{10^{20}} = 100.$$

126. **Прво решење.** У овом доказу користи се тзв. Шпернерова лема:

Ако су $A_1, A_2, \ldots, A_k$ подскупови скупа $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, такви да ниједан од њих није подскуп другог, тада важи неједнакост $k \leqslant \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

(Видети нпр. Р. Тошић: „Комбинаторика“.)

Ако сада ученике посматрамо као скупове чији су елементи секције у које су они учлањени, и претпоставимо да ниједан није „подскуп“ другог, добијамо: $11 \leqslant \binom{5}{\lfloor \frac{5}{2} \rfloor} = \binom{5}{2} = 10$. Контрадикција.

Друго решење. Нумеришимо секције бројевима од 1 до 5. Има укупно 32 подскупа скупа свих секција. Разбијмо те подскупове на 10 класа:

$\emptyset$, $\{1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,3,4,5\}$;

$\{2\}$, $\{2,5\}$, $\{1,2,5\}$, $\{1,2,3,5\}$;

$\{3\}$, $\{1,3\}$, $\{1,3,4\}$, $\{1,3,4,5\}$;

$\{4\}$, $\{1,4\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,4,5\}$;

$\{5\}$, $\{3,5\}$, $\{3,4,5\}$, $\{2,3,4,5\}$;

$\{1,5\}$, $\{1,3,5\}$;

$\{2,3\}$, $\{2,3,5\}$;

$\{2,4\}$, $\{2,4,5\}$;

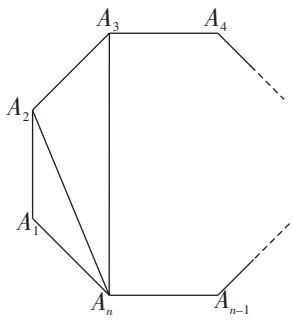
$\{3,4\}$, $\{2,3,4\}$;

$\{4,5\}$, $\{1,4,5\}$.

Приметимо да за свака два подскупа из исте класе важи да је један садржан у другом.

За сваког ученика посматрајмо скуп секција чији је члан. Како има 11 ученика, нека два од тих скупова су у истој класи, што значи да је један садржан у другом.

127. Пребројимо пре свега на колико начина се разбијање у складу са условима задатка може извршити. Учинићемо то за $n > 3$, јер $n = 3$ није решење, што се непосредно проверава. Као што је познато, n–угао се разбија на $n-2$ троугла. Притом два од њих имају са n-углом две заједничке (наравно, суседне) странице, а остали по једну. Прво на n начина бирамо теме (нпр. A_1) n–угла инцидентно са две странице (A_nA_1 и A_1A_2) заједничке за n–угао и један од та два троугла. Други троугао чија је страница A_nA_2 можемо бирати на два начина: то могу бити троуглови $A_{n-1}A_nA_2$ и $A_nA_2A_3$ (слика 48).



Слика 48.

У ствари, ми бирамо једно од два темена: A_{n-1} или A_3. Ако је изабрано теме A_3, даље бирамо између темена A_{n-1} и A_4 итд. Пошто је након избора почетног троугла остало још $n-3$ темена, имамо још $n-4$ таква „двојна“ избора (последње теме је одређено избором претпоследњег). Број начина још треба поделити са два јер бисмо до истог разбијања дошли да смо кренули од оног другог троугла који има две странице заједничке са n–углом. Дакле, број начина за разбијање је $n \cdot 2^{n-4} \cdot \dfrac{1}{2} = n \cdot 2^{n-5}$.

(а) Из $n2^{n-5} = 2^n$ следи $n = 2^{n-(n-5)} = 2^5 = 32$.

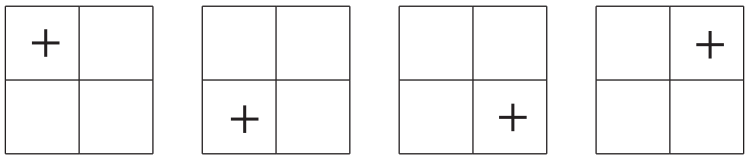
(б) Из $n2^{n-5} = n^2$ следи $2^{n-5} = n$. За $n < 8$ директно проверавамо да једнакост није испуњена, док $n = 8$ јесте решење. За $n \geqslant 9$ лако се индукцијом доказује $2^{n-5} > n$, па је то решење јединствено.

128. Пошто има n хемичара, на постављено питање тачно је одговорило n људи, а n је слагало. Значи, број лажова је n, а како међу њима има исти број физичара и хемичара, рецимо k, следи $n = 2k$.

129. Приметимо прво да је $4649 \mid 9999999$, и стога $10^7 \equiv 1 \pmod{4649}$, а самим тим и $10^{7k} \equiv 1 \pmod{4649}$ за све $k \geqslant 1$. Ако дати 700000000–цифрени број обележимо са n, биће

$$n \equiv 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + \cdots + 9999999 \cdot 1 = 5000000 \cdot 999999 \equiv 0 \pmod{4649}.$$

130. Може. Изаберимо у равни произвољан координатни систем. Лако се види да се од четири квадрата странице a може саставити квадрат странице $2a$. Тако, од четири квадрата странице 1 састављамо квадрат странице 2, и смештамо га тако да му центар буде у координатном почетку. Даље, ако смо од квадрата страница мањих од 2^k добили квадрат странице 2^k, „учетвороструучујемо“ га као на слици 49 на један од четири начина, редом: доле–десно, горе–десно, горе–лево и доле–лево. Притом ова четири начина користимо у цикличном редоследу: почетни квадрат странице 2 „учетвороструучујемо“ доле–десно, добијени квадрат странице 4 горе–десно итд.



Слика 49.

Напомена. При поплочавању не сме бити коришћен само један начин „учетвороструучавања“, па чак ни два ако нису „супротна“ (нпр. доле–десно и горе–лево), и то сваки бесконачно много пута. Наиме, неки делови равни неће бити прекривени. Који?

131. Речи над датом азбуком посматрајмо као бинарне записе бројева. Посматрајмо реч

$$a = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$$

и реч

$$b = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_k pppa_{k-1} a_{k-2} \cdots a_0}$$

добијену убацивањем ppp. (Брисање се разматра аналогно.)

$$\begin{aligned} b - a &= \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_k} \cdot 2^{k+3} + \overline{ppp} \cdot 2^k + \overline{a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_0} - \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_0} \\ &= 2^n \left(7\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_k} + \overline{ppp} \right). \end{aligned}$$

Како $\overline{ppp}$ може бити или 0 или 7, ова разлика је увек дељива са 7, па ако је број c добијен од броја d наведеним операцијама, важи $c \equiv d \pmod 7$, а то није случај са бројевима $\overline{01} = 1$ и $\overline{10} = 2$.

132. Поделимо пут на 100 деоница које су омеђене левим скретањима. У свакој од њих дозвољено је само десно скретање, и очигледно је да притом пређени пут не може бити већи од $\sqrt{2}$. Дакле, укупан пређени пут не може бити дужи од $100\sqrt{2}$ метара. Ова дужина се и достиже ако се нпр. првих 199 скретања врше наизменично (десно, лево, десно, лево,...) а затим се изврши преосталих 100 десних скретања.

133. Нека је $D \in p(C, M)$, $BD = BC = AB$ и $D \neq C$, као на слици 50. Означимо $\delta = \sphericalangle CAM$. Пошто је $AB = BC$, следи

$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle ACB = 30^\circ + \delta.$$

Такође имамо

$$\sphericalangle ACD = 180^\circ - \sphericalangle ACM = 30^\circ$$

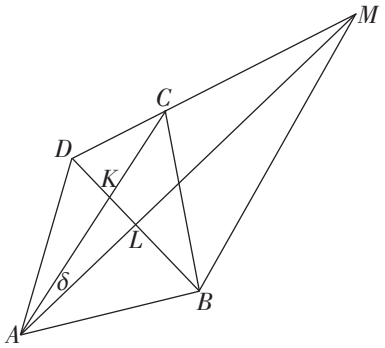
и

$$\sphericalangle CDB = \sphericalangle DCB = 30^\circ + (30^\circ + \delta) = 60^\circ + \delta.$$

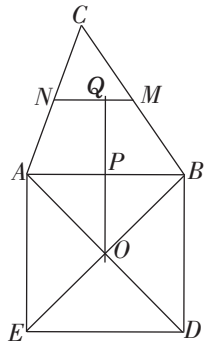
Обележимо са K и L редом пресеке правих $p(A, C)$ и $p(A, M)$ са $p(B, D)$. Како је $\sphericalangle CKB$ спољашњи угао за троуглове CDK и ABK, имамо

$$(60^\circ + \delta) + 30^\circ = \sphericalangle CKB = (30^\circ + \delta) + \sphericalangle KBA,$$

па закључујемо $\sphericalangle KBA = 60^\circ$. Троугао DAB је, дакле, једнококраки са углом од 60°, па и једнакостранични. AL је зато симетрала угла, а самим тим и тежишна дуж и висина у том троуглу, те је $BL = DL$ и $BD \perp AM$. Али то значи да је ML истовремено тежишна дуж и висина у троуглу DBM. Тај троугао је стога једнакокрак, па му је ML, односно MA, симетрала угла.



Слика 50.



Слика 51.

134. Нека је P средиште дужи AB, а Q пресечна тачка правих $p(O,P)$ и $p(M,N)$ (слика 51). Јасно је да важи: $MP = \frac{b}{2}, NP = \frac{a}{2}, OP = \frac{c}{2}$, где је $c = AB$. Ако са h_c обележимо висину из C у $\triangle ABC$, биће $PQ = \frac{h_c}{2}$. Примењујући Питагорину теорему добијамо редом:

$$QM^2 = PM^2 - PQ^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{h_c}{2}\right)^2$$

$$QN^2 = PN^2 - PQ^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{h_c}{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned} OM^2 = QM^2 + QO^2 &= \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{h_c}{2}\right)^2 + \left(\frac{h_c}{2} + \frac{c}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \frac{c \cdot h_c}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ON^2 = QN^2 + QO^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{h_c}{2}\right)^2 + \left(\frac{h_c}{2} + \frac{c}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \frac{c \cdot h_c}{2}. \end{aligned}$$

Како из косинусне теореме следи $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, а из израза за површину троугла ABC, $\frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{ab\sin\gamma}{2}$, можемо писати

$$\begin{aligned} OM^2 &= \left(\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{ab}{2}\left(\sin\gamma - \cos\gamma\right) \\ ON^2 &= \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{ab}{2}\left(\sin\gamma - \cos\gamma\right). \end{aligned}$$

Како су a и b фиксирани, преостаје да нађемо максималну вредност функције $f(\gamma) = \sin\gamma - \cos\gamma$. То је лако учинити изједначавањем првог извода те функције с нулом, али може и овако:

$$f(\gamma) = \sin\gamma - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\gamma - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\gamma - \frac{\pi}{4}\right).$$

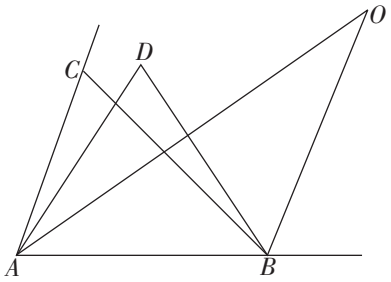
То је очигледно максимално када је $\gamma = \dfrac{3\pi}{4}$ и у том случају важи

$$OM + ON = \sqrt{\left(\frac{a + b\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2} + b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2}\right)(a + b).$$

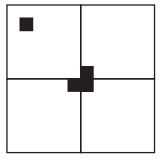
135. Угао $\sphericalangle CBO$ је половина спољашњег угла код B за троугао ABC (слика 52), па је $\sphericalangle CBO = \dfrac{1}{2}(180^\circ - \beta) = 90^\circ - \dfrac{\beta}{2}$. Зато је, из троугла ABO,

$$\sphericalangle AOB = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - (90^\circ - \frac{\beta}{2} + \beta) = \frac{\gamma}{2}.$$

То је периферијски угао над тетивом AB, а њему одговарајући централни је $\sphericalangle ADB = \gamma = \sphericalangle ACB$. Дакле, A, B, C и D припадају једној кружници.



Слика 52.

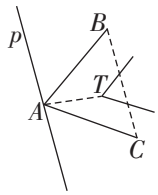


Слика 53.

136. Докажимо општије тврђење: ако из квадратне табле $2^n \times 2^n$ изрежемо једно поље, добијена фигура може се поплочати плочицама наведеног облика. Доказ ћемо спровести индукцијом. За $n = 1$ тврђење очигледно важи. Нека оно важи и за све $k < n$. Тада полазни квадрат $2^n \times 2^n$ поделимо на четири квадрата $2^{n-1} \times 2^{n-1}$. Нека се нпр. изрезано поље налази у горњем левом (слика 53). Покријмо централна три поља из преостала три квадрата $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ једном плочицом. Сада на сва четири квадрата $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ можемо применити индукцијску хипотезу и поплочати их. Тиме је поплочан и велики квадрат.

137. (а) Посматрајмо један оштар унутрашњи угао нашег многоугла, рецимо са теменом A. (Зашто он постоји?) Нека су B и C темена многоугла суседна са A. Ако ни у троуглу ABC ни на страници BC не постоје друга темена

многоугла, онда је BC унутрашња дијагонала. Ако то није случај онда у унутрашњости угла $\sphericalangle BAC$ уочимо теме T које је најближе правој p, која пролази кроз A и паралелна је са BC (слика 54). Дуж која спаја то теме са A је унутрашња дијагонала.



Слика 54.

(б) Доказујемо индукцијом по броју темена. За троугао је тврђење очигледно. Нека оно важи за све k–углове, $k < n$, и нека је дат произвољан n–угао. Унутрашњом дијагоналом из (а) њега поделимо на два многоугла са мањим бројем темена. На основу индукцијске хипотезе њих можемо поделити на троуглове. Тиме је и n–угао подељен на троуглове.

(в) Поново индукција по броју темена. Опет је за троугао доказ лак. Претпоставимо да тврђење важи за све k–углове, $k < n$. Нека је n–угао подељен на l–угао и m–угао, $l, m < n$, као у (б). Обојимо темена сваког од њих као у поставци задатка. Сада се може десити да темена – крајеви дијагонале којом смо делили не буду једнако обојена у l–углу и m–углу, нпр. да у l–углу буду обојена плаво и црвено, а у m–углу редом зелено и плаво. У том случају у m–углу сва зелена темена променимо у плава, сва плава у црвена, а сва црвена у зелена. Тиме се добија тражено бојење.

(г) Опет доказујемо индукцијом по броју темена. Доказ је потпуно аналоган оном под (в): поделимо n–угао на l–угао и m–угао, сваки од њих обојимо у складу са условима задатка, и по потреби у m–углу заменимо боје.

138. (а) Из образаца за површину троугла:

$$P = \frac{r}{2}(a+b+c) = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$$

добијамо

$$r = \frac{2P}{a+b+c} \quad \text{и} \quad h_a h_b h_c = \frac{2P}{a} \cdot \frac{2P}{b} \cdot \frac{2P}{c} = \frac{8P^3}{abc}\,.$$

Из неједнакости између аритметичке и геометријске средине

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$$

лако налазимо

$$\frac{1}{abc} \geqslant \frac{27}{(a+b+c)^3}\,.$$

Одатле лако следи тражена неједнакост.

(б) Поново из формула за површину троугла:

$$P = \frac{r}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$

закључујемо

$$r = \frac{2P}{a+b+c}$$

и

$$\begin{aligned} a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma &= a\frac{2P}{bc} + b\frac{2P}{ca} + c\frac{2P}{ab} \\ &= 2P\frac{a^2+b^2+c^2}{abc} \\ &= r(a+b+c)\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}\,. \end{aligned}$$

Остаје још да употребимо два пута неједнакост између аритметичке и геометријске средине:

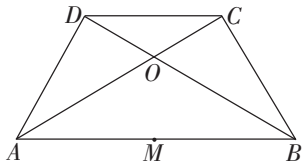
$$\begin{aligned} a+b+c &\geqslant 3\sqrt[3]{abc} \\ a^2+b^2+c^2 &\geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\,. \end{aligned}$$

139. Како је $x^2+y^2 \geqslant 2xy$ за произвољне реалне бројеве x и y, имамо

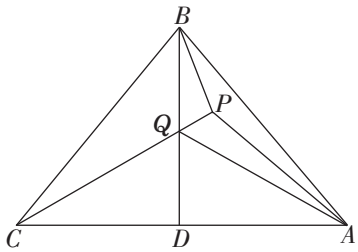
$$\begin{aligned} \frac{2a^3}{a^2+b^2} + \frac{2b^3}{b^2+c^2} + \frac{2c^3}{c^2+a^2} &= 2a - \frac{2ab^2}{a^2+b^2} + 2b - \frac{2bc^2}{b^2+c^2} + 2c - \frac{2ca^2}{c^2+a^2} \\ &\geqslant 2(a+b+c) - \frac{2ab^2}{2ab} - \frac{2bc^2}{2bc} - \frac{2ca^2}{2ca} \\ &= 2(a+b+c) - a - b - c = a+b+c. \end{aligned}$$

140. Поделимо све тачке скупа S осим координатног почетка O у парове тако да две тачке чине пар ако су симетричне у односу на O. (То заправо значи да су те две тачке кандидати за наспрамна темена паралелограма). Различитих правих одређених двема тачкама из неког пара има тачно 112. (Избројте их сами! Две су координатне осе, а по 55 их пролази кроз први и трећи, односно други и четврти квадрант.) Дати услов уствари каже да n мора бити довољно мало да би постојале две међу тим правим које садрже по један пар са истим збиром. (Наравно, под збиром пара (x,y) подразумевамо број $x+y$.) Како је број тих збирова $2n-1$, јер они могу бити од 2 до $2n$, то је $2n-1 < 112$, тј. $n \leqslant 56$ па је $n_{\max} = 56$.

141. Нека је рецимо $AB = 2CD$ и M средиште странице AB (слика 55). Лако се закључује да морају баш углови $\sphericalangle ADB$ и $\sphericalangle ACB$ бити прави. (Зашто?) Тачке A, B, C и D леже на кружници са центром у M, којој је пречник AB. Зато је $DC = \frac{AB}{2} = MD = MC$, па је троугао MCD једнакостраничан. Дакле, $\sphericalangle DMC = 60^\circ$. То је централни угао над тетивом DC, а над истом тетивом периферијски је $\sphericalangle DBC$, па је он једнак 30°. Из $\triangle OBC$ сада видимо: $\sphericalangle BOC = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.



Слика 55.



Слика 56.

142. Обележимо са D подножје висине из темена B, а са Q пресек те висине са дужи CP (слика 56). Ево мало рачуна: $\sphericalangle CQD = \sphericalangle AQD = 60^\circ$, па и $\sphericalangle AQP = 60^\circ$ (њихов суплемент) и $\sphericalangle PQB = 60^\circ$ (унакрсни са $\sphericalangle CQD$). Даље, $\sphericalangle QAP = \sphericalangle CAP - \sphericalangle CAQ = 10^\circ$ и самим тим $\sphericalangle PAB = \sphericalangle CAB - \sphericalangle CAP = 10^\circ$. Закључујемо да су QP и AP симетрале углова у $\triangle AQB$, па је и BP симетрала угла $\sphericalangle QBA$, тј. $\sphericalangle PBQ = \frac{1}{2}\sphericalangle ABQ = 20^\circ$. Коначно, из $\triangle BPQ$ имамо $\sphericalangle BPQ = 180^\circ - 20^\circ - 60^\circ = 100^\circ$.

143. Важи:

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^2 &= a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd\\ &= 2(a^2+b^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd).\end{aligned}$$

Значи, $(a+b+c+d)^2$ је паран број, па је и $a+b+c+d$ паран, дакле сложен.

144. Ни за једно n. Заиста, нека је за $n, m, k \in \mathbb{N}$

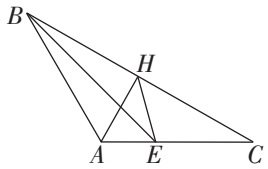
$$n(n+1)(n+2)\ldots(n+7) + 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot 7 = m^2 + k^2.$$

Број $n(n-1)(n-2)\ldots(n+7)$ дељив је са 2^7, јер су четири фактора дељива са 2, од тога два са 4, а један и са 8. Број $1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot 7$ дељив је са 2^4, али не и са 2^5. Значи, лева страна горње једнакости дељива је са 16, па мора бити и десна. Како су остаци при дељењу квадрата природног броја са 16 само 0, 1, 4 и 9, следи да су и m^2 и k^2 дељиви са 16, тј. $m = 4m_1, k = 4k_1$. Делећи горњу једнакост са 16 на левој страни добијамо број конгруентан са 3 по модулу 4, а са десне $m_1^2 + k_1^2$, што не може бити конгруентно са 3 по модулу 4. Контрадикција.

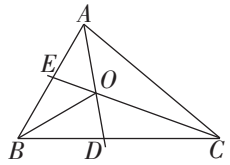
145. Користићемо познату чињеницу да је BE симетрала угла акко важи $\dfrac{BA}{BC} = \dfrac{EA}{EC}$. Означимо унутрашње углове код темена A, B, C редом са α, β, γ. Из троуглова AEB и ECB (слика 57) имамо $\alpha + \dfrac{\beta}{2} = 135^\circ$ и $\gamma + \dfrac{\beta}{2} = 45^\circ$, па је $\alpha = 90^\circ + \gamma$. Ако је R полупречник описане кружнице за $\triangle ABC$, тада је

$$\frac{EA}{EC} = \frac{BA}{BC} = \frac{2R\sin\gamma}{2R\sin\alpha} = \frac{\sin\gamma}{\sin(90^\circ+\gamma)} = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \operatorname{tg}\gamma.$$

Међутим, из $\triangle ACH$ видимо $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{HA}{HC}$, тј. $\dfrac{HA}{HC} = \dfrac{EA}{EC}$, па је HE симетрала угла код H, односно $\sphericalangle EHC = \dfrac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.



Слика 57.



Слика 58.

146. Једноставним рачуном добијамо (слика 58):

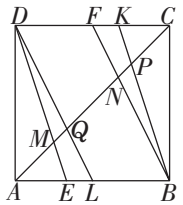
$$\sphericalangle DOE = \sphericalangle AOC = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

па због $\sphericalangle DBE = 60^\circ$ следи да је четвороугао $BDOE$ тетиван. Како је BO симетрала угла $\sphericalangle DBE$, имамо $\sphericalangle DBO = \sphericalangle OBE = 30^\circ$, па су и тетиве које одговарају тим угловима у кружници описаној око $BDOE$ једнаке, тј. $|OD| = |OE|$.

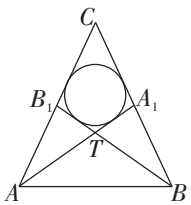
147. Обележимо са K тачку која дели страницу CD у односу $1:2$, а са L средиште странице AB. Нека су још P и Q пресеци дијагонале AC са дужима BK и DL (слика 59). По Талесовој теореми је

$$AM : MP = AE : EB = 1 : 2 \quad \text{и} \quad CP : PM = CK : KD = 1 : 2,$$

одакле следи $AM : MP : PC = 1 : 2 : 1$, тј. $AM = \dfrac{AC}{4} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, где је a дужина ивице квадрата. Слично је $CN : NQ : QA = 1 : 1 : 1$, односно $CN = \dfrac{AC}{3} = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. Дакле, $\dfrac{AM}{AE} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4} = \dfrac{FC}{CN}$, што је, заједно са $\sphericalangle MAE = \sphericalangle FCN$, довољно за сличност троуглова AME и CNF.



Слика 59.



Слика 60.

148. Нека је T тежиште троугла ABC, а A_1 и B_1 средишта страница BC и AC (слика 60). Како је четвороугао CB_1TA_1 тангентан, важи $CB_1 + TA_1 = CA_1 + TB_1$,

тј. $\frac{b}{2}+\frac{t_a}{3}=\frac{a}{2}+\frac{t_b}{3}$. Потребно је, а и довољно, још доказати да у троуглу већој страници одговара мања тежишна дуж, тј. да би из $a>b$ следило $t_b>t_a$, што је у супротности са добијеном једнакошћу. Али то тврђење директно следи, нпр. из Стјуартове теореме, која каже: $t_a=\frac{b^2}{2}+\frac{c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$, као и $t_b=\frac{a^2}{2}+\frac{c^2}{2}-\frac{b^2}{4}$.

149. Број делитеља броја $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ је $\tau(n)=\prod_{i=1}^{k}(\alpha_i+1)$. Из те формуле и услова задатка добијамо:

$$(*)\qquad n=2^{\alpha_1}5^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\dots p_k^{\alpha_k}=2^2\cdot 5^2(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_k+1).$$

Посматрајмо прво случај када су 2 и 5 једини прости делитељи броја n. Из $(*)$ следи

$$2^{\alpha_1}\cdot 5^{\alpha_2}=2^2\cdot 5^2(\alpha_1+1)(\alpha_2+1).$$

Очигледно је $\alpha_1\geqslant 2$ и $\alpha_2\geqslant 2$, али ниједан од ових бројева не може бити 2, јер би тада лева страна била дељива са 3. Дакле, $\alpha_1\geqslant 3$ и $\alpha_2\geqslant 3$. За $\alpha_2=3$ имамо решење $\alpha_1=4$, тј. $n=2000$, што је очигледно најмање решење у овом случају.

Нека n сада има и простих делитеља различитих од 2 и 5. Интересује нас може ли бити $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_k+1)<20$. Ако је $\alpha_1>2$ или $\alpha_2>2$ неједнакост не може бити испуњена, јер је тада број са леве стране бар $4\cdot 3\cdot 2=24$. Значи, остаје могућност $\alpha_1=\alpha_2=2$ и $\alpha_3=1$, па се $(*)$ претвара у

$$2^2\cdot 5^2p_3=100\cdot 3\cdot 3\cdot 2.$$

Међутим, ово је немогуће, јер је десна страна дељива са 9, а лева није. Значи тражени број је 2000.

150. Нека су тачке $A_1,A_2,\dots,A_{10}$ темена десетоугла. Обележимо са p_i праву кроз A_1 која је паралелна страници A_iA_{i+1} (узимамо $A_{11}\equiv A_1$). Углови које међусобно заклапају тих 10 правих изражавају се бројем степени дељивим са 20, тј. они могу бити $0^\circ,20^\circ,\dots,160^\circ$. Дакле, по Дирихлеовом принципу, или се нека од правих $p_2,p_3,\dots,p_{10}$ поклапа са p_1, или неке две заклапају са њом исти угао, па се оне поклапају. У сваком случају, нашли смо p_i и p_j, такве да је $p_i\equiv p_j$, па следи да су странице A_iA_{i+1} и A_jA_{j+1} паралелне.

151. Доказаћемо најпре следеће тврђење: *у датом низу постоји члан у чијем се декадном запису појављује бар једна јединица.*

Претпоставимо супротно. Тада се међу првих 10^c природних бројева може налазити највише 9^c чланова низа. Међутим, ако ставимо $n=10^c$, из услова $a_{10^c}<100\cdot 10^c=10^{c+2}$ видимо да се 10^c чланова низа налази међу првих 10^{c+2} природних бројева. Али међу првих 10^{c+2} природних бројева може бити највише 9^{c+2} чланова низа. Сада из чињенице да за довољно велико c важи $10^c>9^{c+2}$ (доказати!) долазимо до контрадикције.

Имитирајући тај доказ можемо показати општије тврђење: ако низ природних бројева задовољава услов $a_n<kn$, за неко $k\in\mathbb{N}$ онда за свако $m\in\mathbb{N}$ и свако

$l < m$ постоји члан тог низа у чијем се запису са бројном основом m јавља цифра l. Заиста, претпоставимо супротно, тј. да постоји цифра која се у запису са основом m не јавља ни у једном члану низа. Међу свим природним бројевима са највише c цифара (у том запису), којих има m^c, може бити највише $(m-1)^c$ чланова низа. Нека је $d \in \mathbb{N}$ такво да је $m^d > k$. Тада из услова $a_n < kn$ закључујемо да је $a_n < m^d n$, тј. за $n = m^c$, да важи $a_{m^c} < m^{c+d}$. Дакле, првих m^c чланова низа налази се међу првих m^{c+d} природних бројева, а ту их може бити највише $(m-1)^{c+d}$. Сада још остаје да приметимо да за довољно велико c важи $m^c > (m-1)^{c+d}$. Контрадикција.

Сада посматрајмо запис чланова низа у систему са основом $m = 10^{2000}$. По горњем тврђењу бар један члан низа има у свом запису цифру која одговара броју $\underbrace{11\ldots1}_{2000}$ у декадном запису. Тај члан садржи и 2000 узастопних јединица.

152. ($\Rightarrow$) Број који може да се представи у задатом облику изгледа овако:

$$\begin{aligned} n &= m + (m+1) + \cdots + (m+k-1) \\ &= km + (1 + 2 + \cdots + (k-1)) \\ &= km + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{k(2m+k-1)}{2}. \end{aligned}$$

Како су k и $2m+k-1$ различите парности, и оба већа од 1, закључујемо да n садржи непаран чинилац већи од 1, па не може бити степен двојке.

($\Leftarrow$) Нека је $n = 2^p q$, где је $q > 1$ непаран број. Можемо, за $m = 2^p$ и $q = 2k+1$, записати:

$$n = (m-k) + (m-k+1) + \cdots + (m+k).$$

Могуће је наравно и да је $m - k \leqslant 0$. У том случају из записа избацујемо првих $k-m$ (негативних) бројева, нулу и следећих $k-m$ бројева (који су позитивни). Крај доказа.

153. (а) Посматрајмо пермутацију цифара $a_1 a_2 \ldots a_{10}$. Посматрани збир је

$$\begin{aligned} &(10a_1 + a_2) + (10a_2 + a_3) + \cdots + (10a_9 + a_{10}) \\ = \; &10a_1 + 11\sum_{i=1}^{9} a_i + a_{10} = 11\sum_{i=1}^{10} a_i - (a_1 + 10a_{10}). \end{aligned}$$

Он је највећи када је израз $a_1 + 10a_{10}$ најмањи, тј. када је $a_{10} = 0$ и $a_1 = 1$. Пример такве пермутације је 1234567890. Укупан број таквих пермутација једнак је $8! = 40320$.

(б) Као под (а) закључујемо да израз $a_1 + 10a_{10}$ треба да буде што већи, па је $a_{10} = 9$ и $a_1 = 8$. То је испуњено нпр. за пермутацију 8765432109. Укупан број таквих пермутација једнак је $8! = 40320$.

154. Нека је $p = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$ и $q = \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$. Ако је $x = p - q$, тада је

$$x^3 = p^3 - q^3 - 3pq(p-q) = 4 - 3x.$$

Како полином $x^3 + 3x - 4 = 0$ има само један реалан корен $x_0 = 1$ (остала два су комплексни бројеви) следи да је $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 1$.

155. (а) Како за сваки прост број $p < 1999$ важи $p \mid 1998!$, не може бити $p \mid 1998!+1$. Али по Вилсоновој теореми знамо да је $1999 \mid 1998! + 1$. Како 1999! нема простих чинилаца већих од 1999, следи да је највећи заједнички делитељ бројева $1998! + 1$ и $1999!$ једнак 1999.

(б) Аналогно као под (а) видимо да за просте бројеве p мање од 2000 не може важити $p \mid 1999! + 1$. Међутим, број 2000! нема простих чинилаца већих од 1999, па је узајамно прост са $1999! + 1$.

156. (а) Милош има победничку стратегију. Он лако постиже да се на траци појаве два слова A између којих су тачно два слободна поља. Нека су то i-то и $(i+1)$-во поље. У току игре може да се појави више таквих четворки узастопних поља. За такве четворке кажемо да одређују *добру домину* (пар узастопних слободних поља ограничених са сваке стране словом A), за поље у оквиру такве домине кажемо да је *добро поље*, а за поља ван таквих домина кажемо да су *ничија поља*. Играч који је принуђен да упише слово у добро поље губи, јер његов противник у следећем потезу постиже реч ANA. Све док Ненад попуњава ничија поља, Милош игра на следећи начин: Ако постоји ничије поље ограничено са два поља A, он у то поље уписује N и добија. Ако не постоји такво поље, а постоји бар једно слово N, Милош у суседно поље уписује N. У противном, уписује слово A у неко ничије поље суседно са неким словом A. Како је после сваког Милошевог потеза број ничијих поља паран, уколико Милош пре не постигне победу, Ненад ће бити приморан да упише слово у неко добро поље.

(б) У овом случају Ненад има победничку стратегију. Он примењује Милошеву стратегију из дела под (а).

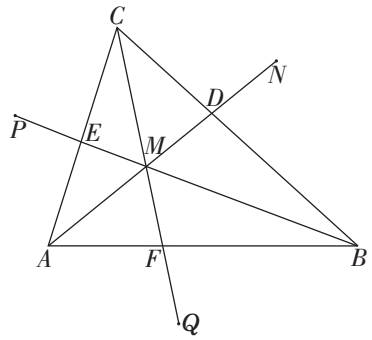
Решења су потпуно аналогна и у преостала два случаја. У случају (в) победничку стратегију има Милош, а у случају (г) Ненад.

157. Нека су у питању тачке A, B, C и D. Ако су неке три од њих колинеарне, нпр. B је између A и C, очигледно ће B бити унутар кружнице одређене са A, C и D. Такође, ако је једна од њих унутар троугла који чине преостале, она је и унутар кружнице коју оне одређују. Размотримо, дакле, случај када наше четири тачке образују конвексан четвороугао $ABCD$. Како он није тетиван, или је $\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD > 180^\circ$ или је $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA > 180^\circ$. Нека је испуњено ово прво. Тада A лежи унутар кружнице одређене са B, C и D, јер се тетива BC види из A под углом већим од $180^\circ - \sphericalangle CDA$. (Зашто?)

158. Како је (слика 61)

$$\frac{MD}{AD} = \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}, \quad \frac{ME}{BE} = \frac{S_{AMC}}{S_{ABC}}, \quad \frac{MF}{CF} = \frac{S_{AMB}}{S_{ABC}},$$

то је
$$\frac{MD}{AD}+\frac{ME}{BE}+\frac{MF}{CF}=\frac{S_{BMC}+S_{AMC}+S_{AMB}}{S_{ABC}}=1\,.$$



Слика 61.

Уведимо ознаке
$$a=\frac{MD}{AD}\,,\quad b=\frac{ME}{BE}\,,\quad c=\frac{MF}{CF}\,.$$
Тада је

(1) $$a+b+c=1\,.$$

С друге стране,
$$\frac{AN}{MD}=\frac{DN+AD}{MD}=\frac{MD+AD}{MD}=1+\frac{1}{a}$$
и аналогно
$$\frac{BP}{ME}=1+\frac{1}{b}\,,\quad \frac{CQ}{MF}=1+\frac{1}{c}\,.$$
Тражена неједнакост сада постаје
$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\geqslant 64\,,$$
што је еквивалентно са

(2) $$\frac{a+1}{a}\cdot\frac{b+1}{b}\cdot\frac{c+1}{c}\geqslant 64\,.$$

Међутим, на основу (1) и неједнакости између средина добијамо
$$\frac{a+1}{a}=\frac{a+a+b+c}{a}\geqslant 4\sqrt[4]{\frac{a^2bc}{a^4}}\,,$$
тј.
$$\frac{a+1}{a}\geqslant 4\sqrt[4]{\frac{bc}{a^2}}\,.$$

Аналогно, имамо:

$$\frac{b+1}{b} \geqslant 4\sqrt[4]{\frac{ac}{b^2}}\,, \quad \frac{c+1}{c} \geqslant 4\sqrt[4]{\frac{ab}{c^2}}\,,$$

одакле је

$$\frac{a+1}{a}\cdot\frac{b+1}{b}\cdot\frac{c+1}{c} \geqslant 64\sqrt[4]{\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2c^2}} = 64\,,$$

дакле, тачна је неједнакост (2).

Једнакост се реализује само за $a = b = c$ и, према (1), тада је $a = b = c = \dfrac{1}{3}$, тј. тачка M је тежиште троугла ABC.

159. Нека су подножја нормала из O на странице A_iA_{i+1} тачке M_i, за $i = 1, 2, \ldots, n$ (притом $A_{n+1} \equiv A_1$). Како је

$$OM_i = OA_{i+1}\sin(\sphericalangle OA_{i+1}A_i) \quad \text{и} \quad OM_{i+1} = OA_{i+1}\sin(\sphericalangle OA_{i+1}A_{i+2}),$$

из услова задатка добијамо $OM_i \leqslant OM_{i+1}$, за све $i = 1, 2, \ldots, n$, тј.

$$OM_1 \leqslant OM_2 \leqslant \cdots \leqslant OM_n \leqslant OM_1,$$

што је могуће једино ако је $OM_1 = OM_2 = \cdots = OM_n$, одакле следи да кружница с центром O и полупречником OM_1 додирује све странице n–угла.

160. (а) Уведимо координатни систем чије осе ће бити три дате по паровима нормалне праве. Нека је $O \in l$ координатни почетак, а M тачка на l на јединичној удаљености од O. Ако су M_x, M_y, M_z пројекције тачке M на одговарајуће осе (које заклапају са l редом углове α, β, γ), имаћемо $OM_x = \pm OM\cos\alpha$, $OM_y = \pm OM\cos\beta$, $OM_z = \pm OM\cos\gamma$. По просторном аналогону Питагорине теореме (квадрат дијагонале квадра једнак је збиру квадрата његових страница) добијамо

$$OM^2 = OM_x^2 + OM_y^2 + OM_z^2,$$

одакле лако следи тражена једнакост.

(б) Нека су α, β и γ углови које три ивице повучене из произвољно изабраног темена коцке заклапају са правом кроз то теме нормалном на дату раван. То је ситуација из дела (а), па имамо $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Међутим, пројекције те три ивице на дату раван имају дужине $a\sin\alpha$, $a\sin\beta$ и $a\sin\gamma$, па је збир њихових квадрата

$$a^2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) = a^2(3 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma) = 2a^2.$$

Ако саберемо ове једнакости за сва темена коцке и поделимо са 2 (јер смо сваку ивицу рачунали двапут) добијамо жељени резултат : $8a^2$.

161. Из услова задатка имамо $ab > a + b$, а из неједнакости између аритметичке и геометријске средине $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$. Дакле,

$$(a+b)^2 \geqslant 4ab > 4(a+b),$$

одакле скраћивањем са $a + b$ следи решење.

162. Из неједнакости између аритметичке и геометријске средине следи

$$\sqrt[n]{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} \leqslant \frac{(1+a_1)+(1+a_2)+\cdots+(1+a_n)}{n}$$

па за $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$:

$$\begin{aligned}(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) &\leqslant \left(1+\frac{s}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{s^k}{n^k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\frac{s^k}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{s^k}{k!}\,.\end{aligned}$$

163. Квадрат природног броја може при дељењу са 8 давати остатке 0, 1 и 4. Ниједна комбинација три од ових бројева не може у збиру дати 7, па збир квадрата три природна броја не може бити облика $8k + 7$, а природних бројева тог облика има бесконачно много.

164. Докажимо индукцијом по броју k да је за све природне бројеве облика $n = 2^k$ испуњено:

$$a+b+c \mid a^n+b^n+c^n, \quad a+b+c \mid 2(a^nb^n+b^nc^n+c^na^n).$$

За $k = 1$ прво тврђење је очигледно, а друго следи из

$$2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2).$$

Нека тврђење важи за неко k. Из

$$a^{2^{k+1}}+b^{2^{k+1}}+c^{2^{k+1}} = \left(a^{2^k}+b^{2^k}+c^{2^k}\right)^2 - 2\left(a^{2^k}b^{2^k}+b^{2^k}c^{2^k}+c^{2^k}a^{2^k}\right)$$

добијамо прво тврђење и за $k + 1$, а из

$$\begin{aligned}&a^{2^{k+1}}b^{2^{k+1}}+b^{2^{k+1}}c^{2^{k+1}}+c^{2^{k+1}}a^{2^{k+1}}\\ &= \left(a^{2^k}b^{2^k}+b^{2^k}c^{2^k}+c^{2^k}a^{2^k}\right)^2 - 2\left(a^{2^k}+b^{2^k}+c^{2^k}\right)a^{2^k}b^{2^k}c^{2^k}\end{aligned}$$

и друго.

165. Приметимо да свака карта доспева на своју позицију при тачно једном сечењу, јер за разна сечења она заузима свих 52 могућих позиција у шпилу, осим оне коју има на почетку. Како карата има 52, а сечења 51, бар две карте ће доспети на своју позицију при истом сечењу, а то је оно што смо тражили.

166. Уочимо да се због услова задатка сваки од бројева у таблици појављује тачно $2n+1$ пута. Због симетричности број појављивања ван главне дијагонале мора бити паран (сваком појављивању испод ње одговара једно појављивање изнад ње). Стога се сваки број мора на главној дијагонали појавити непаран број пута, значи бар једном (наравно, и само једном).

167. Посматрајмо граф који одговара ситуацији из задатка: чворови нека му буду мештани, а гране познанства међу њима. Он је повезан: од сваког мештанина може се стићи до сваког другог. Ако у графу постоји циклус (затворен пут који почиње и завршава у истом темену), избацимо било коју грану тог циклуса, и граф остаје повезан. Понављамо тај поступак док год граф садржи бар један циклус. Ако докажемо да у новодобијеном графу можемо изабрати 90 чворова тако да од сваког чвора постоји пут дужине највише 10 до бар једног од њих, исто ће важити и за полазни граф.

Нека је $A_1A_2\ldots A_k$ најдужи пут у том графу (A_i, $i=1,2,\ldots,k$ су чворови). Ако је $k<11$ онда ниједан чвор није удаљен за више од 10 од чвора A_1, и довољно је изабрати само њега. Иначе, изаберимо чвор A_{11} и избацимо из графа све чворове за које пут од њих до A_{11} не прелази преко ниједног од чворова A_i, $i>11$ (пут између свака два чвора у графу без циклуса је јединствен), укључујући и сам A_{11}. Избацили смо бар 11 чворова: A_i, $i\leqslant 11$. Добијени граф опет је повезан. Заиста, претпоставимо да нека два чвора B_1 и B_2 нису повезана, тј. пут између њих прелазио је преко неког од избачених чворова. Ако је прелазио преко A_{11}, бар један од путева $B_1\ldots A_{11}A_{12}\ldots A_k$, $B_2\ldots A_{11}A_{12}\ldots A_k$ биће дужи од k, што је контрадикција. Иначе ће оба пута бити дужи од k, опет контрадикција. Значи, нови граф јесте повезан.
Применимо сад овај поступак на њега (узимамо најдужи пут, бирамо једанаести чвор у њему, и одбацујемо бар још 10 других) док год имамо пут дужине бар 11, а највише 89 пута. Избацили смо бар $89\cdot 11=979$ чворова. Међу преосталима најдужи пут је дужине највише 21, па узимамо 11. чвор у њему. Сви остали су на удаљености не већој од 10 од њега. Тиме је доказ завршен.

168. (а) Да. Нека су у питању многоуглови M_1, M_2, $\ldots$, M_n. Нека су p_1, p_2, $\ldots,p_n$ првих n простих бројева. Нумеришимо многоугао M_k бројем $b_k=\prod_{i\in I_k}p_i$, где је $I_k\subset\{1,2,\ldots,n\}$ скуп индекса i таквих да M_k може прекрити M_i. Та нумерација је покривајућа.

(б) Не. Узмимо низ правоугаоника $M_i=1\times\left(1-\frac{1}{i}\right)$, $i=1,2,\ldots$ Ако би он могао да се покривајуће нумерише бројевима b_i, $i=1,2,\ldots$ број b_1 морао би бити дељив свим осталим, значи са бесконачно много природних бројева. Контрадикција.

(в) Да, следи из (г).

(г) Да. Обележимо са M_n, $n>2$ правилан n–угао уписан у јединичну кружницу (с центром у $(0,0)$ и полупречником 1), такав да му је једно од темена тачка $(1,0)$. M_2 нека нам буде дуж која спаја тачке $(-1,0)$ и $(1,0)$, M_1 само тачка $(1,0)$.

(д) Нека су M_1, $M_2, \ldots, M_6$ правоугаоници димензија 6×60, 1×60, 2×30, 3×20, 5×12, 6×10, тј. ниједан од последњих пет не покрива ниједан други, а први међу њима покрива све остале. Лако је проверити да најмањи заједнички садржалац за пет бројева од којих ниједан није делитељ другог мора бити већи од 100, па би M_1 морао бити нумерисан бројем већим од 100. С друге стране, сваких 5 многоуглова могу се покривајуће нумерисати бројевима не већим од 100.

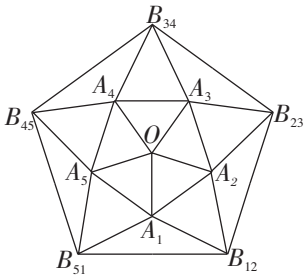
169. На дужи SC изаберимо тачку P такву да $SP = AC$. Нека је E средиште дужи PC. Важи:

$$SE + EB = SP + PE + EB = AC + CE + EB > AC + CB.$$

Изаберимо тачку T на дужи AB тако да $BT < (SE + EB) - (AC + CB)$. Биће $SE + ET > SE + EB - BT > AC + CB$, што смо и желели да постигнемо.

170. Изаберимо тренутак у коме врх ниједне минутне казаљке није на правој OO_i, где је O центар стола, а O_i центар одговарајућег часовника. Обележимо још са A_i тај положај врха, а са B_i њему дијаметрално супротан (тј. положај врха за 30 минута). Јасно је да тада важи $2OO_i < OA_i + OB_i$ (дијагонала паралелограма мања је од збира две суседне странице) за сваки часовник, па је и $2(OO_1 + OO_2 + \cdots + OO_{50}) < OA_1 + OA_2 + \cdots + OA_{50} + OB_1 + OB_2 + \cdots + OB_{50}$, одакле лако закључујемо да је збир $OO_1 + OO_2 + \cdots + OO_{50}$ мањи од бар једног од збирова $OA_1 + OA_2 + \cdots + OA_{50}$ и $OB_1 + OB_2 + \cdots + OB_{50}$.

171. Посматрајмо тачку O у равни из које полази пет страница: $OA_1, OA_2, \ldots, OA_5$. Троуглови OA_1A_2,..., OA_5A_1, јасно, учествују у покривању равни (слика 62). За сваку страницу A_iA_j петоугла $A_1A_2A_3A_4A_5$ постоји одговарајућа тачка B_{ij} таква да троугао $A_iA_jB_{ij}$ учествује у покривању равни. Такође, из сваке од тачака A_i полазе још по две странице, што значи да су тачке B_{ij} различите међу собом. Јасно је да и троуглови $B_{12}B_{23}A_2, \ldots, B_{51}B_{12}A_1$ учествују у покривању равни (јер из A_i не може излазити више од 5 страница).

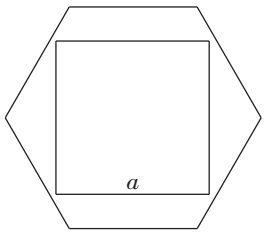


Слика 62.

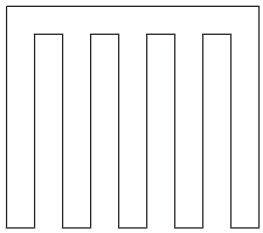
Сада посматрајмо петоугао $B_{12}B_{23}B_{34}B_{45}B_{51}$. За сваку од његових страница $B_{ij}B_{jk}$ постоји по тачка C_j, са оне стране те странице са које није тачка A_j, таква да $\triangle B_{ij}B_{jk}C_j$ учествује у покривању равни. Међутим, из сваког темена

B_{ij} већ полазе по 4 странице, па мора бити $C_1 \equiv C_2 \equiv \cdots \equiv C_5 \equiv C$. Међутим, тада тачка C не сме бити у унутрашњости ниједног од углова $B_{ij}B_{jk}B_{kl}$, а они покривају целу раван. Контрадикција.

172. Пројектујмо коцку на раван нормалну на једну њену велику дијагоналу. Коцка се пројектује у шестоугао странице $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, где је a дужина странице коцке. Лако се показује да се у унутрашњости тога шестоугла може сместити квадрат странице a (слика 63) тако да су му странице паралелне двема страницама шестоугла, а да му се центар налази у центру шестоугла. Померајући тај квадрат паралелно великој дијагонали добијамо отвор кроз који може проћи коцка.



Слика 63.



Слика 64.

173. Једна линија са 20 скретања приказана је на слици 64. Претпоставимо да постоји линија са мање од 20 скретања која пролази кроз све раскрснице. Како она мора пролазити кроз једнак број хоризонталних и вертикалних улица, јер оне у путањи долазе наизменично, следи да је број хоризонталних (вертикалних) улица највише 9. Али тада постоје хоризонтална и вертикална улица кроз које аутобус не пролази, а у њиховом пресеку добијамо раскрсницу која неће бити пређена. Контрадикција.

174. Приметимо да је у таблици сваки број конгруентан по модулу 10 са збиром првог броја у његовој врсти и првог броја у његовој колони. Дакле, збир заокружених елемената је по модулу 10 конгруентан са

$$(0+1+\cdots+9)+(0+9+8+\cdots+1)=90\equiv 0 \pmod{10}.$$

Међутим, ако би сви елементи били различити, тај збир би био $0+1+\cdots+9=45\equiv 5 \pmod{10}$.

175. Како у датом низу има укупно 32 петорке, следи да су све оне међусобно различите. Прва петорка је 00000, па друга мора бити 00001. Ако би се петорка 10000 јављала било где осим на крају низа, иза ње би следила једна од петорки 00000 и 00001, што није могуће. Дакле, низ се завршава са 10000.

176. Из претпоставке о функцији f следи да постоји $n_0 \in \mathbb{N}_0$ такав да за сваки $k \geqslant n_0$ важи $f(k) > k$. Претпоставимо да, супротно тврђењу задатка, постоји фукција $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ таква да је скуп $B = \{k \mid g(f(k)) \geqslant q(k)\}$ коначан. Следи

да постоји $n_1 \in \mathbb{N}_0$, такав да за сваки $k \geqslant n_1$ важи $g(f(k)) < g(k)$. Нека је $m_1 \in \mathbb{N}_0$, $m_1 \geqslant \max\{n_0, n_1\}$. Тада је

$$m_2 = f(m_1) > m_1 \quad \text{и} \quad g(f(m_1)) < g(m_1)\,.$$

Из $m_2 = f(m_1) > \max\{n_0, n_1\}$ имамо

$$f(m_2) > m_2 \quad \text{и} \quad g(f(m_2)) < g(m_2) < g(m_1).$$

Индукцијом се добија бесконачан опадајући низ

$$g(m_1) > g(m_2) > g(m_3) > \cdots > g(m_k) > g(m_{k+1}) > \cdots$$

у коме је $m_{k+1} = f(m_k) > m_k$, што је контрадикција.

177. Помоћу Виетових правила добијамо

$$6 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (m-4)^2 - 2(m^2 - 3m + 3)$$

односно $m^2 + 2m - 4 = 0$. Решења ове једначине су $m_{1,2} = -1 \pm \sqrt{5}$. Међутим, дискриминанта дате једначине $D = -3m^2 + 4m + 4$ је позитивна само за $m = -1 + \sqrt{5}$, па је то једино решење.

178. Обележимо дати број са n. Ако би све цифре броја биле петице, или би једна била различита од 5, а налазила се на неком од првих 998 места, број не би био потпун квадрат, јер би био дељив са 5, али не и са 25. Нека је та цифра на претпоследњем месту. Ако је она различита од 2 и 7, резонујемо као горе. Ако би она била двојка, имали бисмо $n \equiv 2 \pmod 9$, а за седмицу $n \equiv 7 \pmod{16}$, а ни једно ни друго није могуће за квадрат природног броја. Нека је, дакле, цифра различита од 5 на последњем месту. Ако је она 0, 4 или 8, важи $n \equiv 2 \pmod 4$, ако је једнака 1, 5 или 9, имамо $n \equiv 3 \pmod 4$, за тројку и шестицу $n \equiv 3 \pmod 9$, а ништа од тога не може важити за квадрате. Коначно, $55\ldots57 \equiv 5 \pmod{16}$, а $55\ldots52$ је дељиво са 32, а није дељиво са 64, тако да и ови случајеви не долазе у обзир. Тврђење је дакле тачно.

179. Број n има облик $p^a q^b$, где су p и q прости бројеви, а $a, b \in \mathbb{N}$. Зато је $n = p^{2a}q^{2b}$, а овај број има укупно $\tau(n^2) = (2a+1)(2b+1)$ делитеља. Како овај број мора бити једнак 15, једина могућност је да један од a, b буде 1, а други 2. Дакле, број делитеља броја $n^3 = p^{3a}q^{3b}$ је $\tau(n^3) = (3a+1)(3b+1) = 28$.

180. (а) Нека је s највећи број чији је квадрат мањи од n. Значи,

$$n = \sum_{k=1}^{s} k^2 = \frac{s(s+1)(2s+1)}{6} \leqslant (s+1)^2.$$

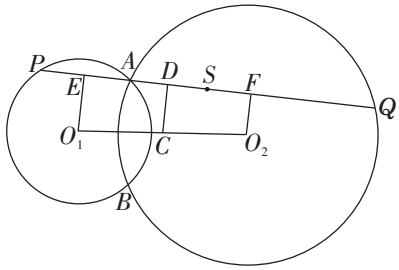
Ова неједнакост се своди на $2s^2 - 5s - 6 \leqslant 0$, чија су решења $s \in \{1, 2, 3\}$. Међутим, $s = 1$ не задовољава услове задатка, док $s = 2$ и $s = 3$ дају решења $n = 5$ и $n = 14$.

(б) Аналогно поступку под (а), добијамо $n \in \{9, 36, 100\}$.

181. Обележимо са O_1 и O_2 центре тих кружница, са S средиште дужи PQ, са D средиште дужи AS, а са E и F подножја висина из O_1 и O_2 на PQ (слика 65). Нека је C пресек O_1O_2 са симетралом дужи AS. Та тачка је центар кружнице описане око ABS. Важи:

$$SF = SQ - FQ = \frac{PQ}{2} - \frac{AQ}{2} = \frac{PA}{2} = EA,$$

па је D и средиште дужи EF.



Слика 65.

Дакле, DC је средња линија трапеза EO_1O_2F, па је C средиште дужи O_1O_2. Дакле, тачка S мора се налазити на кружници с центром у C и полупречником CA. Лако је доказати и да свакој тачки те кружнице одговара једна права a која задовољава услове задатка.

182. Користићемо следећу лему, чији се доказ оставља за вежбу: *ако троуглови PQR и XYZ имају једнаке углове код темена Q и Y, онда важи:*

$$\frac{P(\triangle PQR)}{P(\triangle XYZ)} = \frac{PQ \cdot QR}{XY \cdot YZ}.$$

Сада обележимо: $\alpha = \dfrac{BA_1}{CA_1}$, $\beta = \dfrac{CB_1}{AB_1}$, $\gamma = \dfrac{AC_1}{BC_1}$.

На основу леме добијамо да су површине троуглова AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C, $A_1B_1C_1$ једнаке редом:

$$P_1 = \frac{\gamma}{(1+\beta)(1+\gamma)}P, \qquad P_2 = \frac{\alpha}{(1+\gamma)(1+\alpha)}P,$$
$$P_3 = \frac{\beta}{(1+\alpha)(1+\beta)}P, \qquad P_0 = \frac{1+\alpha\beta\gamma}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}P,$$

где је P површина троугла ABC. Замењујући добијене једнакости, лако добијамо да важи

$$P_0 \geqslant \frac{3}{\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3}},$$

односно

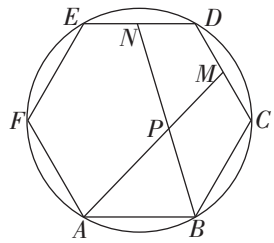
$$\alpha\beta(1+\beta)(\alpha\gamma-1)^2+\beta\gamma(1+\gamma)(\beta\alpha-1)^2+\gamma\alpha(1+\alpha)(\gamma\beta-1)^2 \geqslant 0.$$

Одатле следи $P_0 \geqslant \min\{P_1, P_2, P_3\}$, па је тачка (б) доказана, а из ње лако следи и тврђење (а).

183. (а) Троуглови ACM и BDN су подударни. Зато је $\sphericalangle DNB = \sphericalangle CMA$ (слика 66). Одатле је

$$\sphericalangle DNP + \sphericalangle DMP = \sphericalangle AMC + \sphericalangle DMP = 180^\circ,$$

па је четвороугао $PMDN$ тетиван, и $\sphericalangle NPM = 180^\circ - \sphericalangle MDN = 60^\circ$.



Слика 66.

(б) Четвороуглови $ABCM$ и $BCDN$ су подударни (други се добија од првог ротацијом за 60° о односу на центар шестоугла), па важи

$$P_{ABP} = P_{ABCM} - P_{BCMP} = P_{BCDN} - P_{BCMP} = P_{MDNP}.$$

184. (а), (б) Ако је T тежиште троугла XYZ, важи $\overrightarrow{XT} + \overrightarrow{YT} + \overrightarrow{ZT} = 0$, што се једноставно доказује. Обележимо сада са S тежиште троугла BDA'. Имамо:

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{AS} &= \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BS}\right)+\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DS}\right)+\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'S}\right) \\ &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'}. \end{aligned}$$

Аналогно се доказује да тежиште троугла $D'B'C$ дели дијагоналу AC у односу $2:1$.

(в) Обележимо са A_1, B_1, C_1 средишта дужи AS, BS, CS, а са A_2, B_2, C_2 средишта ивица BC, CA, AB. Користећи тврђење наведено у тексту задатка, добијамо:

$$2DS < DA_1 + DA_2, \quad 2DS < DB_1 + DB_2, \quad 2DS < DC_1 + DC_2,$$

затим

$$2DA_2 < BD + BC, \quad 2DB_2 < DC + DA, \quad 2DC_2 < DA + DB,$$

и на крају

$$2DA_1 < DS + DA, \quad 2DB_1 < DS + DB, \quad 2DC_1 < DS + DC.$$

Следи:

$$\begin{aligned} 3DS &< \frac{1}{2}(DA_1 + DB_1 + DC_1 + DA_2 + DB_2 + DC_2) \\ &< \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(3DS + DA + DB + DC) + (DA + DB + DC)\right), \end{aligned}$$

одакле после сређивања закључујемо $DS < \frac{1}{3}(DA + DB + DC)$.

185. Лако се доказује да постоје позитивни реални бројеви a, b, c такви да важи $x = \frac{b+c}{a}$, $y = \frac{c+a}{b}$, $z = \frac{a+b}{c}$. Сада можемо доказати неједнакост

$$xy + yz + zx \geqslant 2(x + y + z),$$

јер се она своди на

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geqslant a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2,$$

што је еквивалентно са

$$a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) + c(c-a)(c-b) \geqslant 0,$$

а то је посебан случај Шурове неједнакости. Једнакост се постиже само за $a = b = c$, тј. за $x = y = z = 2$.
Ако сада изразимо тражену неједнакост преко основних симетричних полинома: $T_1 = x + y + z$, $T_2 = xy + yz + zx$, $T_3 = xyz$, она се своди на

$$3T_2^2 - (5T_1 + 11)T_2 + 5T_1 + 30 \geqslant 0.$$

Дакле, довољно је показати да је

$$T_2 \geqslant \frac{5T_1 + 11 + \sqrt{25T_1^2 + 50T_1 - 239}}{6}.$$

Већ смо показали $T_2 \geqslant 2T_1$, па нам још треба

$$2T_1 \geqslant \frac{5T_1 + 11 + \sqrt{25T_1^2 + 50T_1 - 239}}{6},$$

односно

$$24\left(T_1 - \frac{5}{2}\right)(T_1 - 6) \geqslant 0.$$

Користећи неједнакост између аритметичке и геометријске средине добијамо

$$\frac{xyz - 2}{3} = \frac{x + y + z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz},$$

па уводећи смену $t = \sqrt[3]{xyz}$ добијамо $(t+1)^2(t-2) \geqslant 0$, тј. $t \geqslant 2$. Дакле, $xyz \geqslant 8$ и $x + y + z \geqslant 6$, тј. $T_1 \geqslant 6$. Крај доказа.

186. **Прво решење.** Ако обележимо

$$A = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}},$$

видимо да је $A = \sqrt{xA}$. Међутим, $A = \sqrt{1993}$, па следи $x = A = \sqrt{1993}$.

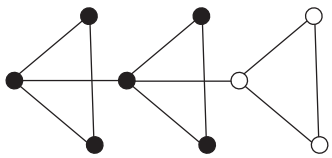
Друго решење. Како је

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots} = x^1$$

то је $x = \sqrt{1993}$.

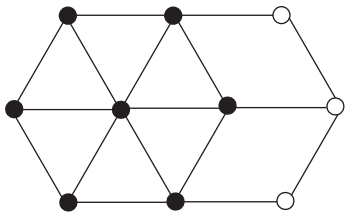
187. Претпоставимо да је град P спојен са градовима $P_1, P_2, \ldots, P_6$. Нека су, без умањења општости, полуправе $PP_1, PP_2, \ldots, PP_6$ постављене тим редом и граду P је најближи P_1. Тада је градовима $P_2, \ldots, P_6$ најближи P. У сваком од троуглова P_iPP_{i+1}, $i = 2, 3, 4, 5$ је $P_iP < P_iP_{i+1}$ и $P_{i+1}P < P_iP_{i+1}$, па $\sphericalangle P_iPP_{i+1} > 60°$. Слично, у троуглу PP_1P_2 је $PP_1 < PP_2 < P_1P_2$, и опет $\sphericalangle P_1PP_2 > 60°$. Исто тако, $\sphericalangle P_1PP_6 > 60°$. Дакле, $\sphericalangle P_1PP_2 + \cdots + \sphericalangle P_6PP_1 > 360°$, што је немогуће, па је претпоставка погрешна.

188. За $n = 6$ решење је дато црним тачкама на слици 67. За све n облика $3k$, $k \geqslant 3$, решење добијамо додајући по три „беле“ тачке као на истој слици.

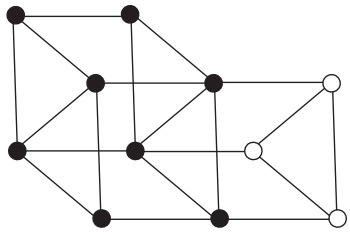


Слика 67.

Аналогно, за $n = 3k+1$, $k \geqslant 2$, решење је приказано на слици 68, при чему црне тачке представљају случај $n = 7$. За $n = 3k+2$, $k \geqslant 2$, решење је приказано на слици 69. Притом, сваке две тачке које су на сликама спојене, на јединичном су растојању.



Слика 68.



Слика 69.

189. У скупу M има бар k^3+1 парних бројева. По Дирихлеовом принципу, бар један од скупова $M_1, \ldots, M_k$ садржи бар k^2+1 парних бројева, нпр. скуп M_i. Посматрајмо бројеве за један мање од њих. Бар $k+1$ од тих бројева налазе се, опет по Дирихлеовом принципу, у истом скупу, рецимо M_j. Тражени бројеви су i и j.

190. (а) Очигледно, поплочавање је могуће акко је бар један од бројева M и N паран.

(б) Добијена табла има $MN-1$ поља, па и M и N морају бити непарни бројеви. Обојимо поља табле као у шаху, и нека су нпр. угаона поља црне боје. Тада пре избацивања црних поља има за једно више, па избачено поље мора бити црно (тј. збир редног броја врсте и колоне избаченог поља мора бити паран). Доказаћемо да је тај услов и довољан. Доказ спроводимо индукцијом по $M+N$. За $M+N=2$ доказ је тривијалан. Нека тврђење важи за све непарне M и N за које $M+N<k$ и дата је табла са $M+N=k$. Ако је избачено поље са ивице табле (нпр. из прве врсте), и лево и десно од њега у тој врсти остао је паран број поља, па можемо најпре поплочати ту врсту, а затим и преостали правоугаоник са парним бројем поља. Иначе, поплочајмо прву и последњу врсту и прву и последњу колону. Остаје табла са $M+N=k-4$ која се по индукцијској хипотези може поплочати. Доказ је завршен.

(в) Опет је поплочавање могуће акко су M и N непарни и додато је поље поред црног. Услов је потребан да би број црних и белих поља био исти. Поплочавање можемо извршити тако што најпре покријемо додато поље и њему суседно и тиме сводимо на задатак под (б).

191. (а) Претпоставимо да је услов задовољен, али a није тачка нагомилавања за A. Тада у некој околини тачке a постоји само коначно много елемената скупа A, нпр. $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Нека је

$$r = \min\{|a-a_1|, |a-a_2|, \ldots, |a-a_k|\}.$$

У околини $(a-r, a+r)$ тачке a не налази се ниједна тачка скупа A, што је контрадикција.

Напомена. Задатак је могуће решити и конструисањем бесконачног низа тачака из A у произвољној околини O тачке a: једна постоји по услову задатка, означимо је са a_1; нађемо околину која је подскуп од O, а не садржи a_1, и по услову задатка, у њој постоји тачка скупа A, означимо је са a_2; затим нађемо околину која је подскуп од O, а не садржи ни a_1 ни a_2 итд.

(б) Нека у свакој ε-околини броја a постоји бар један елемент скупа A, али постоји околина (b,c) за коју то не важи. Тада за $\varepsilon = \min\{a-b, c-a\}$ имамо $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq (b,c)$, па смо добили ε–околину у којој се не налази ни један елемент из A. Контрадикција. Дакле, свака околина тачке садржи бар један елемент скупа A, што је по (а) довољно да a буде тачка нагомилавања тог скупа.

192. (а) ($\Rightarrow$) $T(ar+bq)=T(ar)+T(bq)=aT(r)+bT(q)$.
($\Leftarrow$) За $a=b=1$ из претпоставке добијамо $T(r+q)=T(r)+T(q)$, а за $b=0$: $T(ap)=aT(p)$.

(б) Ако постоји T^{-1}, T је бијекција, па за произвољне $p,q\in\mathbb{R}^n$ постоје $x,y\in\mathbb{R}^n$ такви да $T(x)=p$ и $T(y)=q$. Зато је

$$\begin{aligned} T^{-1}(ap+bq) &= T^{-1}(aT(x)+bT(y))=T^{-1}(T(ax+by)) \\ &= ax+by=aT^{-1}(p)+bT^{-1}(q). \end{aligned}$$

193. Тражени многоугао $A_1A_2\ldots A_n$ не може имати туп угао. Заиста, ако би неки $\sphericalangle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ био туп, важило би $A_{i-1}A_{i+1}^2 > A_{i-1}A_i^2+A_iA_{i+1}^2$, па би $A_1A_2\ldots A_{i-1}A_{i+1}\ldots A_n$ имао већи збир квадрата страница. Закључујемо: $n\leqslant 4$. За $n=4$ у обзир долази само правоугаоник, а и он има збир квадрата страница једнак збиру квадрата страница правоуглог троугла чија су темена – темена тог правоугаоника. Дакле, разматрамо само троуглове. По Лајбницовој теореми, ако је T тежиште троугла, а P произвољна тачка, имамо

$$3PT^2=PA_1^2+PA_2^2+PA_3^2-\frac{1}{3}(A_1A_2^2+A_1A_3^2+A_2A_3^2).$$

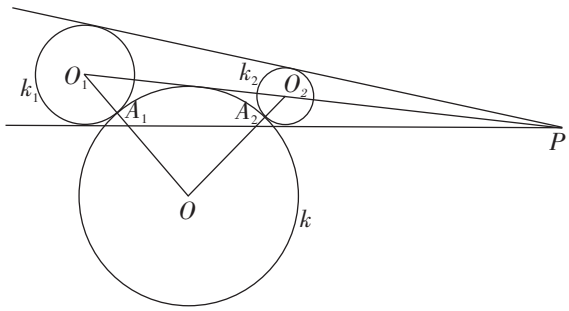
Ако је $P\equiv O$ центар описаног круга, добијамо

$$A_1A_2^2+A_1A_3^2+A_2A_3^2=9R^2-3OT^2\leqslant 9R^2.$$

Једнакост се достиже само када $O\equiv T$, тј. за једнакостраничан троугао.

Напомена. У завршници су, уместо Лајбницове теореме, могле бити коришћене нпр. и тригонометријске методе.

194. Нека су O, O_1, O_2 центри, а r,r_1,r_2 полупречници кружница k,k_1,k_2. Размотримо прво случај када су тачке A_1 и A_2 са исте стране праве O_1O_2 (тј. k_1 и k_2 су или обе унутар k или обе ван ње) (слика 70).



Слика 70.

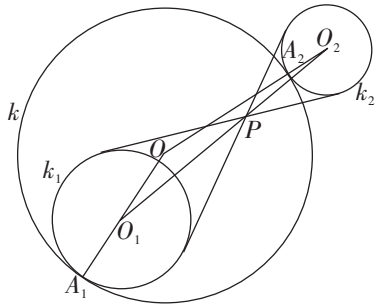
Нека је P пресечна тачка заједничких спољашњих тангенти на k_1 и k_2. Она лежи и на правој O_1O_2. Из сличности одговарајућих правоуглих троуглова налазимо

$PO_1 : PO_2 = r_1 : r_2$. Како су P, A_1 и A_2 тачке на правама које одређују странице троугла O_1O_2O и важи

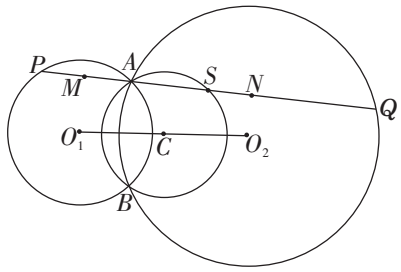
$$\frac{PO_1}{PO_2} \cdot \frac{A_2O_2}{A_2O} \cdot \frac{A_1O}{A_1O_1} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r} \cdot \frac{r}{r_1} = 1,$$

по Менелајевој теореми тачке P, A_1 и A_2 припадају једној правој, што је и требало доказати.

У случају када су A_1 и A_2 са различитих страна O_1O_2, поступа се слично, али се за P узима пресечна тачка заједничких унутрашњих тангенти (слика 71). Ако је једна од тачака A_1, A_2 на правој O_1O_2 лако се показује да и друга мора бити на њој. Тада се и пресечна тачка унутрашњих и пресечна тачка спољашњих тангенти налази на A_1A_2.



Слика 71.



Слика 72.

195. Нека су P и Q друге тачке пресека праве l са кружницама, а M и N средишта дужи PA и AQ (слика 72). На основу задатка **181.** средиште S налази се на кружници с центром C (средиште дужи O_1O_2) и полупречником CA. Такође,

$$\begin{aligned} AS &= AN - SN = AN - (SQ - NQ) = \frac{AQ}{2} - \frac{1}{2}(PQ - AQ) \\ &= \frac{AQ}{2} - \frac{PA}{2} = \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Дакле, S налазимо у пресеку поменуте кружнице и кружнице с центром A и полупречником $\frac{a}{2}$. l је права кроз A и S.

196. Укупан број дијагонала у конвексном $2n$–углу је $n(2n-3)$. Свака од $2n$ страница може бити паралелна највише са $n-2$ дијагонале (кроз свако од $2n-2$ преостала темена пролази највише по једна, свака „заузима“ по два од тих темена, а не може их бити $n-1$, јер би једна од њих тада била баш страница). Како је

$$2n(n-2) = 2n^2 - 4n < 2n^2 - 3n = n(2n-3),$$

мора постојати дијагонала која није паралелна ниједној страници.

197. Ако је $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ $(NZD(p,q)=1)$ корен полинома

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

мора важити $p \mid a_0$ и $q \mid a_n$. Из $\left(\frac{p}{q}\right)^5 + \frac{p}{q} - 10 = 0$ множењем са q^5 добијамо $p^5 + pq^4 = 10q^5$. Следи $q \mid p^5$ одакле, пошто $NZD(p,q)=1$, следи $q=1$. Слично добијамо $p \mid 10q^5$ одакле опет $p \mid 10$. Сада је лако проверити да $1, 2, 5, 10$ нису корени датог полинома.

198. Дата једначина се трансформише у једначину $(x+y-1)^2 + (x-y)^2 = 1$. Један начин да се ово реши је да се уведе $\cos\theta = x+y-1$, $\theta \in [0, 2\pi)$, одакле је $x - y = \sin\theta$. За $\theta = \pi$ добијамо решење $x = y = 0$, а за $\theta \neq \pi$ можемо увести смену $t = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, па имамо

$$x + y - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{и} \quad x - y = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Ако је t ирационалан, бар један од бројева $x - y = \frac{2t}{1+t^2}$ и $x + y = \frac{2}{1+t^2}$ је ирационалан, па је и бар један од бројева x и y ирационалан. Дакле, сва решења су

$$\left\{\left(\frac{1+t}{1+t^2}, \frac{1-t}{1+t^2}\right) : t \in \mathbb{Q}\right\} \cup \{(0,0)\}.$$

199. Да би (x,y,z) било решење, довољно је да задовољава на пример $z - x = y$ и $z + x = y^2$. Одатле је $x = \frac{y^2-y}{2}$ и $z = \frac{y^2+y}{2}$. Пошто су y и y^2 увек исте парности, један бесконачан скуп решења је

$$\left\{\left(\frac{n^2-n}{2}, n, \frac{n^2+n}{2}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

200. Према малој Фермаовој теореми је $p^{q-1} - 1 = kq$ и $q^{p-1} - 1 = lp$, где су k и l неки природни бројеви. Одатле је

$$p^{q-1} + q^{p-1} - 1 = p^{q-1} + lp = p(p^{q-2} + l)$$

и

$$p^{q-1} + q^{p-1} - 1 = kq + q^{p-1} = q(k + q^{p-2}).$$

Због $NZD(p,q) = 1$ из $p \mid (p^{q-1} + q^{p-1} - 1)$ и $q \mid (p^{q-1} + q^{p-1} - 1)$ следи $pq \mid (p^{q-1} + q^{p-1} - 1)$.

201. Описаном трансформацијом парност збира свих елемената се не мења. Како је тај збир у почетку 45, он никада не може постати нула.

202. Нека је G скуп градова до којих се може стићи из главног. Пребројаћемо све линије које постоје између нека два града из G (не постоје линије између градова из G и неког града који није у G јер би се тада и до тог града могло стићи из главног). Из главног полази 1985 линија, а ако Удаљени не би припадао скупу G, из преосталих k градова полази по 20 линија. Пошто смо сваку линију бројали двапут (по једном за оба града које спаја) број линија у G је $\dfrac{1985+20k}{2}$, а то није цео број. Контрадикција.

Напомена. Читаоци који помало познају теорију графова препознаће да је овде реч о специјалном случају следећег тврђења: број чворова непарног степена у свакој компоненти повезаности графа је паран.

203. Ставимо $a_i = 1$ за парно $i \in \mathbb{N}$ и $a_i = -1$ за непарно $i \in \mathbb{N}$. Тада имамо

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0$$

и, с друге стране,

$$a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1.$$

Дакле, резултат зависи од редоследа сабирања.

204. (а) Да. Пошто су свака два броја упоредива овом релацијом, њихов инфимум је мањи од њих, а њихов супремум већи од њих. Да је $\leqslant$ релација поретка лако се проверава.

(б) Да. Опет је провера да је $\mid$ релација поретка једноставна. Инфимум два броја је њихов највећи заједнички делилац, а супремум њихов најмањи заједнички садржалац. Заиста, $NZD(a,b) \mid a$, $NZD(a,b) \mid b$, а ако $d \mid a$ и $d \mid b$, важи и $d \mid NZD(a,b)$, па је $NZD(a,b)$ заиста инфимум за a и b. Сличан је доказ и за постојање супремума.

(в) Не. Релација ρ није чак ни рефлексивна. Чак и ако би се у њеној дефиницији заменила реч „мањи“ са „мањи или једнак“, бројеви 100 и 10 не би имали инфимум (а и изгубила би се антисиметричност).

205. (а) Означимо са S и S_a редом центре уписане и приписане код a кружнице. Имамо:

$$P_{ABC} = P_{ASB} + P_{BSC} + P_{CSA} = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = rp.$$

С друге стране је

$$\begin{aligned} P_{ABC} &= P_{ABS_a} + P_{ACS_a} - P_{BCS_a} = \frac{cr_a}{2} + \frac{br_a}{2} - \frac{ar_a}{2} \\ &= r_a\left(\frac{a+b+c}{2} - a\right) = r_a(p-a). \end{aligned}$$

(б) Применом синусне формуле и адиционих формула добијамо:

$$\begin{aligned}
\frac{a+b-c}{a+b+c} &= \frac{2R\sin\alpha + 2R\sin\beta - 2R\sin\gamma}{2R\sin\alpha + 2R\sin\beta + 2R\sin\gamma} \\
&= \frac{\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} \\
&= \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} \\
&= \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}} \\
&= \frac{-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(-\frac{\beta}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.
\end{aligned}$$

Напомена. Задатак се може решити и тако што се изрази

$$r = \frac{a\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \quad \text{и} \quad r_a = \frac{a\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

а затим то уврсти у једнакост из (а).

206. Нека су XP и XQ тражене тетиве, O центар кружнице, и Y тачка дијаметрално супротна тачки X. Нека је прво $AO \neq BO$. Углови $\sphericalangle XYP$ и $\sphericalangle XYQ$ су једнаки (над једнаким тетивама), па су и њима комплементни $\sphericalangle YXP$ и $\sphericalangle YXQ$ једнаки. Дакле, у троуглу XAB је XO симетрала угла, па важи $AX : BX = AO : BO$. Геометријско место тачака X за које важи последња једнакост је тзв. Аполонијева кружница. Њен центар можемо наћи нпр. тако што конструишемо тачку R на удаљености $2AO$ од A и $2BO$ од B, а затим конструишемо симетралу дужи OR. Тачка S, пресек те симетрале са правом AB је центар Аполонијеве кружнице, а њен полупречник је $SO = SR$. У пресеку те кружнице са датом добијамо тачку X (два решења).

У случају $AO = BO$, опет добијамо два решења, овај пут у пресеку дате кружнице са нормалом кроз O на праву AB.

207. Доказ спроводимо индукцијом по n. Случај $n = 1$ је јасан. За $n = 2$ бар два од вектора $\overrightarrow{a_1}, -\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, -\overrightarrow{a_2}$ формирају угао не већи од $\dfrac{\pi}{2}$, па њихова разлика има дужину не већу од $\sqrt{2}$ (доказ нпр. косинусном теоремом).

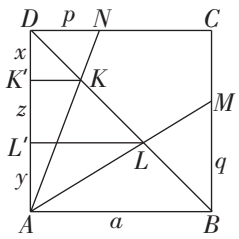
Нека за сваку n–торку тврђење важи, и нека су дати вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_{n+1}}$ сагласно условима задатка. Међу векторима $\overrightarrow{a_1}, -\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_{n+1}}, -\overrightarrow{a_{n+1}}$ бар два заклапају угао не већи од $\dfrac{2\pi}{2(n+1)} \leqslant \dfrac{\pi}{3}$, па је њихова разлика вектор дужине највише 1. Примењујући индуктивну претпоставку на тај вектор и преосталих $n-1$ датих вектора добијамо тражено тврђење.

208. Обележимо са K и L пресеке AN и AM са BD и $a = AB, p = DN, q = BM$. Нека су K' и L' пројекције K и L редом на AD, и $x = DK'$, $z = K'L'$, $y = L'A$ (слика 73). Докажимо да је

$$(*) \qquad z^2 = x^2 + y^2 - xy.$$

Замењујући $z = a - x - y$, добијамо да је $(*)$ еквивалентно са

$$(**) \qquad a^2 - 2ax - 2ay + 3xy = 0.$$



Слика 73.

Из сличности троуглова ALL' и MAB добијамо

$$\frac{q}{y} = \frac{a}{a-y}, \quad \text{тј.} \quad y = \frac{qa}{q+a}.$$

Слично је и $x = \dfrac{pa}{p+a}$, па замењујући добијамо да је $(**)$, после сређивања, еквивалентно са $a = p + q$, што је тачно. Дакле, $(*)$ је доказано.

Из $(*)$ сада добијамо $z^2 < x^2+y^2+2xy = (x+y)^2$, па је $z < x+y$. Делећи са $\sqrt{2}$ добијамо $KL < DK+LB$. С друге стране, очигледно је $DK < KB = KL+LB$ и $LB < DL = DK + KL$, па се од датих дужи заиста може саставити троугао. Из косинусне теореме добијамо, ако је угао наспрам странице подударне са KL једнак φ, да важи

$$KL^2 = DK^2 + LB^2 - 2DK \cdot LB \cos\varphi,$$

тј. дељењем са $\sqrt{2}$:

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\varphi.$$

Упоређујући са $(*)$, добијамо $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$, тј. $\varphi = 60^\circ$.

209. Нека је $p^3 - p + 1 = n^2$, тј. $p(p^2-1) = (n-1)(n+1)$. Имамо два случаја:

1° $p \mid n-1$. Тада је $n - 1 = kp$ за неко $k \in \mathbb{N}$ па добијамо $p(p-k^2) = 2k+1$. Одатле следи $p - k^2 \geqslant 1$ и $p \leqslant 2k+1$, одакле је $k^2 + 1 \leqslant 2k+1$, односно $k = 1$ или $k = 2$. За $k = 2$ добијамо $p = 5$, а $k = 1$ не даје решење.

2° $p \mid n+1$. Тада је $n+1 = lp$ за неко $l \in \mathbb{N}$ па добијамо $2l-1 = p(l^2-p)$. Пошто је $p \geqslant 3$ (директно проверавамо) и $l^2-p \geqslant 1$, следи $l \geqslant 2$ и $p \leqslant 2l-1$ па имамо

$$2l-1 = p(l^2-p) \geqslant p(l^2-2l+1) \geqslant 3(l-1)^2 \geqslant 3(l-1) \geqslant 2l-1.$$

Значи, све те неједнакости морају бити једнакости, па је $l=2$ и $p=3$.

210. Тражена неједнакост је еквивалентна са

$$\left(\frac{n}{2n}\right)^n + \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n \geqslant 1,$$

тј. са $\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{i}{2n}\right)^n \geqslant 1$. На основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине је

$$\left(1-\frac{i}{2n}\right)^n \cdot 1 < \left(\frac{n\left(1-\frac{i}{2n}\right)+1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{i}{2(n+1)}\right)^{n+1}.$$

Значи, низ са општим чланом $x_n = \left(1-\frac{i}{2n}\right)^n$ је строго растући па следи

$$\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{i}{2n}\right)^n \geqslant \sum_{i=1}^{3}\left(1-\frac{i}{6}\right)^3 = 1.$$

211. Постоји неколико суштински различитих случајева које треба посматрати (остали се на њих могу свести цикличним пермутовањем и обртањем редоследа непознатих). То су:

1° $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_5$; из прве и друге једначине, због $x_1 \leqslant x_2$ добијамо $x_3+x_4+x_5 \leqslant x_4+x_5+x_1$, тј. $x_3 \leqslant x_1$. Слично, из треће и четврте добијамо $x_5 \leqslant x_3$. Значи, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$.

2° $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_5 \leqslant x_4$; из прве и друге једначине имамо $x_3 \leqslant x_1$, а из друге и треће $x_4 \leqslant x_2$, па поново $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$.

3° $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_4 \leqslant x_5 \leqslant x_3$; из прве и друге једначине је $x_3 \geqslant x_1$, и опет $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$.

4° $x_1 \leqslant x_3 \leqslant x_5 \leqslant x_2 \leqslant x_4$; из четврте и пете једначине је $x_4 \leqslant x_1$, па $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$.

Према томе, све непознате морају бити једнаке, па се систем своди на $(3x)^5 = 3x$. Једно решење је $x=0$, а за $x \neq 0$ дељењем са $3x$ сводимо на $(3x)^4 = 1$, тј. $3x = 1$ или $3x = -1$. Дакле, сва решења су $x=0$, $x=\frac{1}{3}$, $x=-\frac{1}{3}$.

212. (а) Увођењем смене $x = n^2$ лако добијамо $a_n = (n^2+6)(n^2+2)(n^2-3)$. Уведимо тзв. Лежандров симбол $\left(\frac{a}{p}\right)$, који има вредност 1 ако је a квадратни остатак по модулу p, тј. ако постоји $m \in \mathbb{N}$ такво да $m^2 \equiv a \pmod p$, а у супротном има вредност -1. Претпоставимо да постоји прост број p такав да $p \nmid a_n$, тј.

$$\left(\frac{-2}{p}\right) = \left(\frac{3}{p}\right) = \left(\frac{-6}{p}\right) = -1.$$

Лежандрова функција је мултипликативна, што значи да за узајамно просте a и b важи $\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right)$. Али то значи да је

$$\left(\frac{-2}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right) = \left(\frac{-6}{p}\right).$$

Контрадикција.

(б) То је нпр. $n = 8$. Квадратни остаци по модулу 8 су 0, 1 и 4, а a_n је конгруентно са 4 или 6 по модулу 8, па не може бити дељиво са 8.

213. Број конвексних k–углова који не садрже означену тачку (нпр. A), је $\binom{2000}{k}$, јер је тетиван конвексан многоугао потпуно одређен ако му је дат скуп темена. Значи, број конвексних многоуглова који не садрже A је

$$\binom{2000}{3} + \binom{2000}{4} + \cdots + \binom{2000}{2000}.$$

Слично, број конвексних k–углова који садрже означену тачку је $\binom{2000}{k-1}$, јер је једно теме A, а од преосталих 2000 треба изабрати још $k-1$. Укупан број конвексних многоуглова који садрже A је, дакле

$$\binom{2000}{2} + \binom{2000}{3} + \cdots + \binom{2000}{2000}.$$

Дакле, има више многоуглова који садрже теме A.

214. Укупан број обојених дужи је очигледно $3 \cdot \binom{2n}{2} = 6n^2 - 3n$. У $6n$–углу укупно има $3n$ врста дужи по дужини, и те дужине означимо са $d_1, d_2, \ldots, d_{3n}$ (редом, од најкраће ка најдужој). Даље, имамо по $6n$ дужи дужина $d_1, d_2, \ldots, d_{3n-1}$, и $3n$ дужи дужине d_{3n}. Нека не постоје две подударне дужи обојене различитим бојама.

Претпоставимо прво да темена ниједне боје не одређују правилни $2n$–угао. Тада дужи дужине d_i, $1 \leqslant i \leqslant 3n-1$, а исте боје, може бити највише $2n-1$, а дужи дужине d_{3n} највише n. Обојених дужи има, дакле, највише

$$(3n-1)(2n-1) + n = 6n^2 - 4n + 1,$$

што је мање од $6n^2 - 3n$ за $n > 1$, контрадикција (случај $n = 1$ је тривијалан).

Ако темена неке боје сачињавају правилни $2n$–угао, та темена одређују по $2n$ дужи $n-1$ различитих дужина. Од преосталих $2n$ дужина можемо опет имати највише по $2n-1$ дуж. Највећи могући број дужи је сада

$$(2n-1)2n+(n-1)2n+n=6n^2-3n.$$

Међутим, тај број се не достиже: ако би било обојено свих $2n-1$ дужи дужине a_1, то би значило да имамо $2n$ „узастопних“ темена обојених истом бојом, али тада би само $2n-2$ дужи дужине a_2 било обојено том бојом. Контрадикција.

215. Из дефиниције функције директно следи да је први услов испуњен. Претпоставимо да не важи (ii). Тада тај лимес не постоји или је коначан; у сваком случају постоји $M>0$ такво да

$$(\forall n_0\in\mathbb{N})(\exists n>n_0)f(n)\leqslant M.$$

Нека је M_0 минимално M за које то важи и $A_0=\{n\in\mathbb{N}:f(n)\leqslant M_0\}$. Очигледно је A_0 бесконачан скуп. Даље, постоји $n\in\mathbb{N}$ такво да $f(n)=M_0$, иначе M_0 не би било минимално. Нека је $A_1=\{n\in\mathbb{N}:f(n)=M_0\}$. Скуп $A_0\setminus A_1=\{n\in\mathbb{N}:f(n)\leqslant M_0-1\}$ је коначан, опет због минималности M_0.

Нека је $m\in A_1$. По дефиницији f постоје $a,b\in\mathbb{N}$ такви да је $f(m)=f(a)+f(b)$ и важи један од услова $a+b=m, ab=m, a^b=m$. Ако би било $a\in\mathbb{N}\setminus A_0$ имали бисмо $f(a)>M_0$, и дакле $f(m)>M_0$, што је немогуће због $m\in A_1$. Ако би, међутим, важило $a\in A_1$ имали бисмо $f(a)=M_0$, а затим и $f(m)\geqslant M_0+1$, јер је $f(b)\geqslant 1$. Дакле, $a\in A_0\setminus A_1$, и слично $b\in A_0\setminus A_1$. Скуп A_1 је бесконачан јер је A_0 бесконачан, а $A_0\setminus A_1$ коначан. Међутим, у претходном делу доказа сваком елементу скупа A_1 доделили смо два елемента скупа $A_0\setminus A_1$, и притом сваки такав пар може бити придружен уз највише три елемента из A_1, што значи да и скуп $A_0\setminus A_1$ мора бити бесконачан. Контрадикција.

216. (а) Нека је прво $(a,b)=(c,d)$. То значи $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$. Ово је могуће у неколико случајева:

1° Та два скупа су једноелементни, тј. $\{a\}=\{a,b\}=\{c\}=\{c,d\}$, одакле $a=b=c=d$;

2° $\{a\}=\{c,d\}$ и $\{a,b\}=\{c\}$. То значи $a=c=d$ и $a=b=c$, тј. $a=b=c=d$;

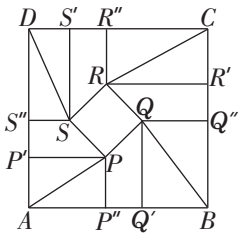
3° $\{a\}=\{c\}$ и $\{a,b\}=\{c,d\}$. Из прве једнакости следи $a=c$, а из друге, ако су посматрани скупови једноелементни, да $a=b=c=d$, а ако су двоелементни да $a=c$ и $b=d$.

Обратно, ако $a=c$ и $b=d$, тада $\{a\}=\{c\}$ и $\{a,b\}=\{c,d\}$, одакле $(a,b)=(c,d)$.

(б) Нека је нпр. $A=\{a\}$ и $B=\{b\}$, где $a\neq b$. Тада $(a,b)\in A\times B$ али $(a,b)\notin B\times A$. Дефинишимо сада функцију $f:A\times B\to B\times A$ овако: $f((a,b))=(b,a)$. Она је очигледно бијекција.

217. Нека су P' и P'' пројекције тачке P на странице DA и AB, Q' и Q'' пројекције тачке Q на AB и BC, R' и R'' пројекције тачке R на BC и CD, а S' и S'' пројекције тачке S на CD и DA редом (слика 74). Очигледно је $P''Q' = R''S' = Q''R' = S''P'$. Зато је

$$\begin{aligned}
P(P''Q'QP) + P(R''S'SR) &= P''Q' \cdot \frac{PP'' + QQ'}{2} + R''S' \cdot \frac{RR'' + SS'}{2} \\
&= P''Q' \cdot \frac{(PP'' + SS') + (QQ' + RR'')}{2} \\
&= P''Q' \cdot \frac{(AD - P'S'') + (BC - Q''R')}{2} \\
&= Q''R' \cdot \frac{(AB - P''Q') + (CD - R''S')}{2} \\
&= Q''R' \cdot \frac{(PP' + QQ'') + (SS'' + RR')}{2} \\
&= S''P' \cdot \frac{PP' + SS''}{2} + Q''R' \cdot \frac{QQ'' + RR'}{2} \\
&= P(S''P'PS) + P(Q''R'RQ).
\end{aligned}$$



Слика 74.

Како је уз то и

$$P(AP'P) = P(AP''P), \quad P(BQ'Q) = P(BQ''Q),$$

$$P(CR'R) = P(CR''R), \quad P(DS'S) = P(DS''S),$$

тврђење је доказано.

218. Јасно је да се унутар правилног шестоугла $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ могу сместити три тачке (како су тачке A_1, A_3 и A_5 на растојању $\sqrt{3}$, треба тражене тачке само ставити довољно близу овим теменима). Претпоставимо да је могуће сместити у унутрашњост шестоугла тачке B_1, B_2, B_3, B_4 на описани начин. Нека је S конвексни омотач скупа тачака $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$. Разматраћемо следеће случајеве:

1° S је дуж. Нека је распоред тачака $B_1 - B_2 - B_3 - B_4$. Тада $B_1B_4 \leqslant 2$, па је бар једна од дужи B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4 краћа од $\sqrt{2}$.

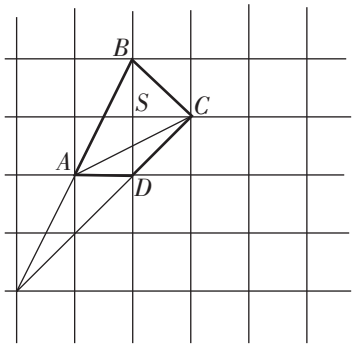
2° S је троугао, нпр. $\triangle B_1B_2B_3$. Очигледно је дужина сваке странице тог троугла $\leqslant 2$. Нека је $B_1B_2 \geqslant B_1B_3 \geqslant B_2B_3$. Очигледно је бар један од углова $\sphericalangle B_2B_1B_3$ или $\sphericalangle B_1B_2B_3$ не већи од $60°$. Нека је $\sphericalangle B_2B_1B_3 \leqslant 60°$. Јасно је да је цео троугао $B_1B_2B_3$ смештен у исечак круга кога одређује централни угао $\sphericalangle B_2B_1B_3$ и краци са центром B_1 полупречника B_1B_2. Лако се може показати да се тај исечак може покрити са 3 круга полупречника $\sqrt{2}$ са центрима у центру B_1 и у крајњим тачкама лука исечка. Тим пре се цео троугао $B_1B_2B_3$ може покрити са 3 круга полупречника $\sqrt{2}$ са центрима у теменима троугла. Другим речима, растојање сваке тачке P, која се налази у унутрашњости троугла $B_1B_2B_3$ или на њеном обиму, од темена троугла мање је од $\sqrt{2}$.

3° S је четвороугао $B_1B_2B_3B_4$. Како бар један од његових углова, нпр. $\sphericalangle B_1B_2B_3$ мора бити прав или туп, имамо

$$B_1B_3 \geqslant \sqrt{B_1B_2^2 + B_2B_3^2} \geqslant 2,$$

што је немогуће јер све тачке припадају унутрашњости кружнице (описане око шестоугла) пречника 2.

219. Нека је $ABCD$ тај четвороугао и S чвор мреже унутар њега. Ако је S пресек дијагонала, како на дијагоналама нема других чворова мреже, мора бити $AS = SC$ и $BS = SD$, (иначе, нпр. за $SA > SC$ имали бисмо да је и тачка симетрична са C у односу на S у унутршњости четвороугла) па је $ABCD$ паралелограм. У супротном S се налази унутар једног од троуглова ABC, BCD, CDA, DAB, нпр. троугла ABC (слика 75). Тада је $ADCS$ конвексан четвороугао.



Слика 75.

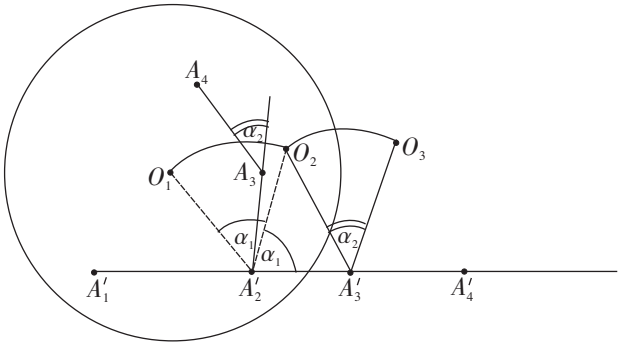
Подсетимо се Пикове теореме:

Површина полигона разапетог на целобројној решетки је $i + \dfrac{b}{2} - 1$, *где је* i *број тачака решетке у унутрашњости полигона, а* b *број тачака решетке на страницама (укључујући и темена).*

Зато је површина сваког од троуглова ABS, BCS, CDS, DAS и CDA једнак $\dfrac{1}{2}$. Из $P(CDS) = P(CDA)$ следи $SA \parallel CD$, а одатле и из $P(CDS) = P(SAD)$

имамо $SA = DC$. Дакле, $ADCS$ је паралелограм. Нека се праве BS и AC секу у P. Тада је $\dfrac{AP}{PC} = \dfrac{P(ASB)}{P(CSB)} = 1$, па је P центар паралелограма $ADCS$. Значи, тачке B, S и D су колинеарне и важи $BS = SD$. Нека се праве AB и CD секу у M. Из горе доказаног следи да је SA средња линија троугла BDM, па је $BA = AM$, тј. M је чвор мреже. Аналогно се доказује и да се продужеци страница AD и BC секу у чвору мреже.

220. Претпоставимо да је лав трчао по изломљеној линији $A_1A_2\ldots A_n$. Развијмо трајекторију кретања лава на следећи начин. Ротирајмо у односу на тачку A_2 циркуску арену и наставак трајекторије кретања тако да тачка A_3 падне на полуправу A_1A_2. Затим ротирајмо око тачке A_3 циркуску арену и наставак трајекторије тако да тачка A_4 падне на полуправу A_1A_2 итд. Центар O арене прелази при томе редом у тачке $O_1 = O$, $O_2, \ldots, O_{n-1}$; тачке $A_1, A_2, \ldots, A_n$ прелазе у тачке $A_1', A_2'. \ldots, A_n'$, које леже на једној правој (слика 76).



Слика 76.

Нека је α_{i-1} угао за који се лав окрене у тачки A_i $(0 < \alpha_{i-1} < \pi)$. Тада је $\sphericalangle O_{i-1}A_i'O_i = \alpha_{i-1}$ и $A_i'O_{i-1} = A_i'O_i \leqslant 10$, па је $O_iO_{i-1} \leqslant 10\alpha_{i-1}$. Следи да је

$$\begin{aligned} 30000 &= A_i'A_n' \leqslant A_1'O_1 + O_1O_2 + \cdots + O_{n-2}O_{n-1} + O_{n-1}A_n' \\ &\leqslant 10 + 10(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-2}) + 10\,, \end{aligned}$$

тј. $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-2} \geqslant 2998$.

221. Међу датим сферама никоје две се не додирују. Заиста, у противном би њихова заједничка тангентна раван секла трећу сферу по кружници, па би тангента на ту кружницу у P била заједничка тангента све три сфере. Дакле, произвољне две секу се по кружници, а та кружница мора са трећом сфером имати још једну заједничку тачку поред P, јер би у супротном опет тангента на њу у P била заједничка тангента све три сфере.

222. Уводећи смену $y = \log_a^2 x$ добијамо једначину $y^2 - 4 = 3\sqrt{3y+4}$ и, после квадрирања, $y^4 - 8y^2 - 27y - 20 = 0$. Знајући да су целобројне нуле полинома

$a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$ делитељи броја a_0, проверавајући делитеље броја 20 закључујемо да су -1 и 4 нуле датог полинома. Одатле добијамо

$$y^4 - 8y^2 - 27y - 20 = (y+1)(y-4)(y^2+3y+5) = 0.$$

Како једначина $y^2+3y+5=0$ нема реалних решења, добијамо да је $\log_a^2 x = -1$ или $\log_a^2 x = 4$. Први случај очигледно је немогућ, а други даје $x = a^2$ или $x = \dfrac{1}{a^2}$.

223. Уведимо смене $y = x-1$ и $q(y) = p(y-1)$. Задатак се своди на тражење решења полиномне једначине $q(y^2) = (q(y))^2$. Нека је $q(y) = a_ny^n + \cdots + a_1y + a_0$, $a_n \neq 0$, и нека је $k < n$ највећи индекс такав да је $a_k \neq 0$. Добијамо

$$a_ny^{2n} + a_ky^{2k} + \cdots + a_1y + a_0 = (a_ny^n + a_ky^k + \cdots + a_1y + a_0)^2$$

па упоређујући коефицијенте имамо $a_na_k = 0$, што је немогуће. Закључујемо: $a_k = 0$ за све $0 \leqslant a < n$, тј. $q(y) = a_ny^n$. Очигледно мора бити $a_n = 1$ или $a_n = 0$, па су једина решења $p(x) = q(x+1) = (x+1)^n$ и $p(x) = 0$.

224. Напишимо дату једнакост за $n+1$ и $n+2$:

$$a_{n+1} - (-1)^n a_n = \sqrt{2a_n^2 + l}$$

$$a_{n+2} + (-1)^n a_{n+1} = \sqrt{2a_{n+1}^2 + l}.$$

Квадрирањем и сабирањем добијамо

$$a_{n+2}^2 - a_n^2 + 2(-1)^n a_{n+2}a_{n+1} - 2(-1)^n a_{n+1}a_n = 2l$$

тј.

$$(*) \qquad (a_{n+2} - a_n)\left(a_{n+2} + 2(-1)^n a_{n+1} + a_n\right) = 2l.$$

Претпоставимо да су сви чланови низа цели, дакле (изузев можда a_1) и природни. Тада имамо

$$a_{2k+1} = a_{2k} + \sqrt{2a_{2k}^2 + l} > \left(\sqrt{2}+1\right) a_{2k}$$
$$a_{2k+2} = -a_{2k+1} + \sqrt{2a_{2k+1}^2 + l} > \left(\sqrt{2}-1\right) a_{2k+1}.$$

Одатле следи

$$a_{2k+2} > \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right) a_{2k} = a_{2k}.$$

Дакле, $\{a_{2k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ је растући низ природних бројева, па је $a_{2k} \geqslant k$. Све у свему,

$$(a_{2l+2} - a_{2l})(a_{2l+2} + 2a_{2l+1} + a_{2l}) > (l+1) + l = 2l+1$$

што је у супротности са $(*)$.

225. Претпоставимо супротно. Нека је l најмањи природан број за који важи $a_l \neq l$. Тада је $a_l > l$ и постоји $k \geqslant l$ такво да $a_{k+1} = l$. Дакле,

$$\frac{l+2}{l} \leqslant \frac{1+a_k}{a_{k+1}} < 1 + \frac{2}{k},$$

одакле следи $k < l$, што је контрадикција са условом $k \geqslant l$.

226. Посматрајмо скуп од $4n$ куглица, $2n$ црних и $2n$ белих, и једне и друге означене бројевима од 1 до $2n$. Укупан број начина да од њих изаберемо $2n$ куглица је $\binom{4n}{2n}$. Израчунајмо број начина за то таквих да је изабрано тачно k парова означених истим бројем. Број начина за избор тих парова је $\binom{2n}{k}$. Од преосталих $2n-k$ парова бирамо $2n-2k$ који ће дати по једну куглицу, а затим на 2^{2n-2k} начина бирамо по једну куглицу из сваког пара. Тражени број начина је дакле

$$\binom{2n}{k}\binom{2n-k}{2n-2k}2^{2n-2k} = \binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}2^{2n-2k}.$$

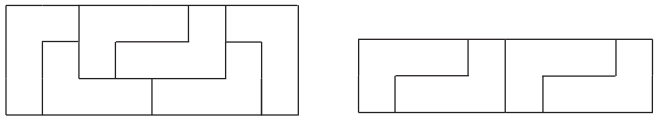
Збир тих бројева за $k = 0, 1, \ldots, n$ је, јасно, укупан број начина за бирање $2k$ куглица.

227. Како фигура заузима 4 поља, број поља на табли mn дељив је са 4. Нека нпр. табла има паран број колона. Обојимо поља сваке непарне колоне црно, а сваке парне бело. Лако је увидети да свака фигура покрива три поља једне и једно поље друге боје. Нека је на табли x фигура које покривају три црна, а y фигура које покривају три бела поља. Укупан број црних поља је тада $3x + y$, а белих $x + 3y$. Међутим, та два броја су, узимајући у обзир начин бојења, једнака, па $x = y$. Дакле, на табли је паран број фигура, па је укупан број поља дељив са 8.

Обрнуто, нека $8 \mid mn$. Посматрајмо два случаја:

1° $m = 4m_1$ и $n = 2n_1$: тада изделимо таблу на делове димензија 4×2 који се лако поплочавају.

2° $m = 8m_1$: сада изделимо таблу да делове димензија 8×2 и 8×3 (што је могуће јер се сваки природан број већи од 1 може написати као збир двојки и тројки). Те делове затим покријемо као на слици 77.



Слика 77.

228. 1) Докажимо асоцијативност, тј. да за подскупове X, Y, Z скупа A важи $(X \triangle Y) \triangle Z = X \triangle (Y \triangle Z)$. Заиста,

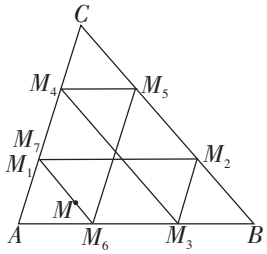
$$\begin{aligned} a \in (X \triangle Y) \triangle Z &\Leftrightarrow a \in (X \triangle Y) \setminus Z \vee a \in Z \setminus (X \triangle Y) \\ &\Leftrightarrow a \in (X \setminus Y) \setminus Z \vee a \in (Y \setminus X) \setminus Z \\ &\quad \vee (a \in Z \setminus (X \setminus Y) \vee a \in Z \setminus (Y \setminus X)). \end{aligned}$$

Слично се добија и да $a \in X\triangle(Y\triangle Z)$ акко је a у тачно једном или у сва три од скупова X, Y, Z.

2) $\emptyset$ је очигледно јединични елемент за операцију, јер је $X\triangle\emptyset = X$.

3) Ако је дат $X \subseteq A$, његов инверз је он сам, јер је $X\triangle X = \emptyset$.

229. Обележимо са $M_1, M_2, \ldots, M_7$ првих 7 тачака у којима путања тачке M додирује странице троугла (слика 78). Како су $AM_3M_2M_1$ и $M_4M_3M_2C$ паралелограми, важи $AM_1 = M_3M_2 = M_4C$.



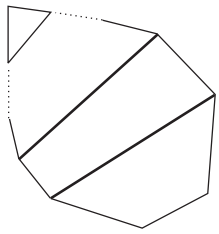
Слика 78.

Даље, пошто је и $AM_6M_5M_4$ паралелограм, $M_4M_5 = AM_6$, па је $\triangle M_4M_5C \cong \triangle AM_6M_7$, одакле следи $M_4C = AM_7$. Дакле, $AM_1 = AM_7$, па се тачке M_1 и M_7 поклапају. Закључујемо да се почетни положај тачке M налази на дужи M_6M_7, чиме је тврђење доказано.

230. Како је четвороугао $PABC$ тетивни, из Птолемејеве теореме имамо $PA \cdot BC + PC \cdot AB = PB \cdot AC$. Ако са a обележимо страницу квадрата, следи $PA \cdot a + PC \cdot a = PB \cdot \sqrt{2}a$, одакле следи тражено тврђење.

231. Посматрајмо два случаја:

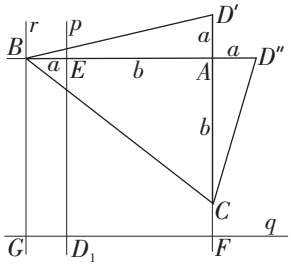
1° $n = 2k + 1$. Разбијмо скуп свих дијагонала (и страница) датог многоугла $A_1A_2 \ldots A_n$ на подскупове тако да се у првом подскупу налазе дужи $A_nA_1, A_{n-1}A_2, \ldots, A_{k+2}A_k$, у другом $A_1A_2, A_nA_3, \ldots, A_{k+1}A_{k-1}$, итд. у последњем $A_{n-1}A_n, A_{n-2}A_1, \ldots, A_{k+3}A_{k+1}$, тј. не постоје две дужи у истом подскупу које имају заједничку тачку (слика 79). Ако претпоставимо да постоји $n+1$ дијагонала таквих да сваке две имају заједничку тачку, по Дирихлеовом принципу добијамо да неке две од њих припадају истом од одабраних подскупова, што је контрадикција.



Слика 79.

2° $n = 2k$. Решење је аналогно горњем и опет делимо скуп дијагонала на подскупове, с тим што имамо k подскупова који садрже по две странице n-угла (нпр. $\{A_nA_1, A_{n-1}A_2, \ldots, A_{k+1}A_k\}$) и k подскупова сачињених само од дијагонала (нпр. $\{A_{n-1}A_1, A_{n-2}A_2, \ldots, A_{k+1}A_{k-1}\}$).

232. „Расклопимо“ тетраедар у мрежу у равни пљосни ABC (слика 80). Означимо $a = AD, b = AC$. На дужи AB означимо тачку E тако да је $BE = a$ и кроз њу повучемо нормалу p на AB. Постоје две тачке на p на удаљености CD од C; нека је D_1 она од њих која је даља од E. Нека су још q и r редом нормала на AC у тачки D_1 и нормала на AB у тачки B. Нека се AC и q секу у F, а q и r у G. Због $\sphericalangle D''AC = \sphericalangle CFD_1 = 90°$, $CD'' = CD_1$ и $DF = AC = b$, имамо $\triangle CAD'' \cong \triangle CD_1F$, одакле $CF = AD'' = a$. Даље, због $\sphericalangle BAD' = \sphericalangle BGD_1 = 90°$, $AD' = GD = a$ и $BA = BG = a + b$ имамо $\triangle BAD' \cong \triangle BGD$, одакле $BD' = BD_1$. Коначно, $\triangle BCD_1 \cong \triangle BCD$, јер су им одговарајуће странице подударне. Дакле, „спуштањем“ тачке D у раван пљосни ABC добија се баш тачка D_1. Међутим, већ знамо да је $\sphericalangle D_1BG = \sphericalangle D'BA$, одакле следи да је $\sphericalangle D'BD_1 = 90°$, а тај угао једнак је збиру углова $\sphericalangle DBA, \sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle CBD$.



слика 80.

233. Дату једнакост можемо записати и овако:

$$qr = 1996^2 - p^2 = (1996 - p)(1996 + p).$$

Разликујемо три случаја:

1° $p = 3$: из $qr = 1993 \cdot 1999$ следи $q = 1993$ и $r = 1999$;

2° $p = 3k+1$: тада $3 \mid 1996-p$ па мора бити $q = 3$. Из $r = (665-k)(1996+p)$ сада следи $665 - k = 1$, па $p = 1993$ и $r = 3989$;

3° $p = 3k + 2$: тада $3 \mid 1996 + p$ па опет $q = 3$. Из $r = (1996 - p)(666 + k)$, како је $p \geqslant 2$, добијамо да је r сложен, па овај случај не даје решење.

234. Приметимо да је

$$1996 = 49^2 - 5 \cdot 9^2 = \left(49 - 9\sqrt{5}\right)\left(49 + 9\sqrt{5}\right).$$

Даље,

$$\begin{aligned}\left(49-9\sqrt{5}\right)^n &= 49^n-\binom{n}{1}49^{n-1}\cdot 9\sqrt{5}+\binom{n}{2}49^{n-2}\left(9\sqrt{5}\right)^2\\ &\quad -\cdots+(-1)^n\left(9\sqrt{5}\right)^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(49+9\sqrt{5}\right)^n &= 49^n+\binom{n}{1}49^{n-1}\cdot 9\sqrt{5}+\binom{n}{2}49^{n-2}\left(9\sqrt{5}\right)^2\\ &\quad +\cdots+\left(9\sqrt{5}\right)^n.\end{aligned}$$

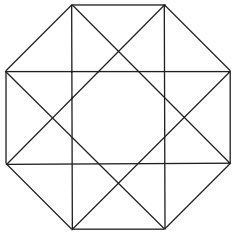
Одатле је $1996^n=\left(49-9\sqrt{5}\right)^n\left(49+9\sqrt{5}\right)^n=x^2-5y^2$, где је

$$\begin{aligned}x &= 49^n+\binom{n}{2}49^{n-2}(9\sqrt{5})^2+\cdots\\ y &= \binom{n}{1}49^{n-1}\cdot 9+\binom{n}{3}49^{n-3}\cdot 9^3\cdot 5+\cdots\end{aligned}$$

235. Претпоставимо да су $x_1,x_2\in\mathbb{Q}$ решења дате једначине. Тада су $y_1=ax_1$ и $y_2=ax_2$ решења једначине $y^2+by+ac=0$. Међутим, познато је да, ако је $\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ $(NZD(p,q)=1)$ решење једначине $a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$, онда $p\mid a_0$ и $q\mid a_n$. То значи да су y_1 и y_2 цели бројеви. На основу Виетових формула је $y_1+y_2=-b$ и $y_1y_2=ac$. Из друге једначине закључујемо да y_1 и y_2 морају бити непарни, а из прве да је један од њих паран. Контрадикција.

236. Дефинишимо пресликавање f између скупа подскупова који садрже ту тачку (обележимо је са A) и скупа подскупова који је не садрже: $f(S)=S\setminus\{A\}$. Лако се проверава да је то бијекција, па та два скупа имају исти број елемената. (Наравно, могли смо и израчунати да сваки од та два скупа има по 2^{2000} елемената.)

237. Нека је $A_1A_2\ldots A_n$ правилан (конвексни) n–угао уписан у дату кружницу. Нека је $P_1P_2\ldots P_n$ представник неке од класа еквиваленције поменутих у задатку, при чему $A_1\equiv P_1$. Јасно је да су темена ова два n–угла исте тачке, али у различитом редоследу. Нека $P_2\equiv A_{k+1}$. Тада важи и $P_3\equiv A_{2k+1}$, $P_4\equiv A_{3k+1}$ итд. (ако је $2k+1$ веће од n, уместо њега узимамо остатак при дељењу са n, слично за $3k+1,4k+1\ldots$.) Међутим, тачка A_1 поновиће се у низу $P_1,P_2,P_3\ldots$ пре n–тог члана акко је k узајамно просто са n. Дакле $P_1P_2\ldots P_n$ је заиста n–угао акко су k и n узајамно прости. Дакле, представника класа еквиваленције има $\frac{\varphi(n)}{2}$, где је φ Ојлерова функција која природном броју додељује број бројева мањих од њега узајамно простих са њим (делимо са 2 јер је на описани начин представник сваке класе добијен два пута: за $k=i$ и $k=n-i$). Пример за $n=8$ и $k=3$ (или $k=5$) је дат на слици 81.



Слика 81.

238. Поделимо дату коцку на 27 коцки $2 \times 2 \times 2$. Обојимо коцке $2 \times 2 \times 2$ у оквиру дате коцке наизменично црно и бело, нпр. нека су углови обојени црно. Посматрајући коцкице $1 \times 1 \times 1$ видимо да је њих 104 обојено бело, а њих 112 црно. Сваки правоугли паралелопипед $4 \times 1 \times 1$ покрива два црна и два бела поља, па највише 52 можемо сместити у велику коцку. Да се то може учинити лако је видети: најпре поставимо 36 паралелопипеда један уз другог тако да њима попунимо део коцке димензија $4 \times 6 \times 6$, затим још 12 тако да њима попунимо део димензија $4 \times 2 \times 6$, а у преостали део димензија $2 \times 2 \times 6$ можемо сместити још 4 паралелопипеда.

239. Стављајући у једначину $y = 1$ добијамо $f(x+1) = f(x)+1$. Одатле индукцијом по n крећући од $f(1) = 2$ добијамо $f(n) = n + 1$ и $f(1 - n) = 2 - n$, па важи $f(x) = x + 1$ за све $x \in \mathbb{Z}$. Такође индукцијом добијамо и $f(x + n) = f(x) + n$. Коначно, ако у полазну једначину ставимо $x = n$ и $y = \dfrac{m}{n}$, имамо

$$f(m) = (n + 1)f\left(\frac{m}{n}\right) - \left(f\left(\frac{m}{n}\right) + n\right) + 1,$$

одакле изражавамо $f\left(\dfrac{m}{n}\right) = \dfrac{m}{n} + 1$.

240. Да би услов задатка био испуњен мора за свако $n \in \mathbb{N}$ да важи $a_{n+1}^2 \geqslant 4a_n a_{n+2}$. Ако ове неједнакости испишемо за $n = 1, 2, \ldots, m-1$ па их помножимо добијамо

$$a_2 a_m \geqslant 4^{n-1} a_1 a_{n+1},$$

тј. ако обележимо $c = \dfrac{a_2}{a_1}$, за свако $m \in \mathbb{N}$ важи

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} \leqslant \frac{c}{4^{m-1}}.$$

За довољно велико m (тј. за $m > 1 + \log_4 c$) биће $\dfrac{a_{m+1}}{a_m} < 1$, тј. низ ће бити строго опадајући. Како не постоји такав низ природних бројева, дошли смо до контрадикције.

241. Нека је O полуобим четвороугла, а P његова површина. Тада је $P = Or$. Како површина троугла није већа од половине производа две странице, следи $2P \leqslant ab + cd$ и $2P \leqslant ad + bc$. Одатле следи

$$4P \leqslant ab + cd + ad + bc = (a + c)(b + d) = O^2.$$

Дакле, $4Or \leqslant O^2$, или $4r \leqslant O = AB + CD$.

242. Нека подножје висине дели хипотенузу на делове дужине p и q. Означимо полупречнике кружница уписаних у T, T_1, T_2 редом са r, r_1, r_2. Ако је C теме код правог угла, и кружница додирује странице AB, BC, CA у тачкама M, N, P онда је

$$\begin{aligned} 2r &= CN + CP = CA + CB - PA - PB = CA + CB - MA - MB \\ &= CA + CB - AB = a + b - c, \end{aligned}$$

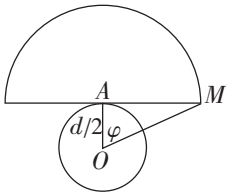
где су a, b, c странице троугла. Аналогно се доказује да је $2r_1 = p + h - a$ и $2r_2 = q + h - b$, па сабирајући ове три једнакости добијамо $r + r_1 + r_2 = h$.

243. Означимо темена тог петоугла са A, B, C, D, E. Претпоставимо да је $AB \parallel EC$, $BC \parallel AD$, $CD \parallel BE$ и $DE \parallel AC$. Следи:

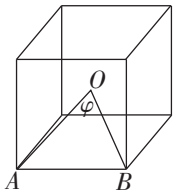
$$P(ABE) = P(ABC) = P(BCD) = P(CDE) = P(ADE),$$

па је $AE \parallel BD$.

244. Одговор: да.



Слика 82.



Слика 83.

Поставимо истраживачке станице у темена коцке уписане у сферу. Заиста, из тачке A (слика 82) виде се све тачке сферног одсечка који од сфере одсеца круг с центром у A који пролази кроз M. Означимо са O центар сфере и $\varphi = \sphericalangle AOM$. Тада је $\cos\varphi = \dfrac{OA}{OM} = \dfrac{1}{3}$. Даље, ако је B положај друге истраживачке станице (смештене у суседном темену коцке) онда је $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos\varphi$ (слика 83), па је $\cos\varphi = \dfrac{1}{3}$. Зато је цела сфера с центром O и полупречника $\dfrac{3}{2}d$ покривена са четири таква сферна одсечка који одговарају некој четворци несуседних темана коцке. Следи да је свака тачка те сфере покривена са бар два од укупно осам тих одсечака.

245. Важи:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij\cos(a_i - a_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij(\cos a_i \cos a_j + \sin a_i \sin a_j)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij\cos a_i\cos a_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij\sin a_i\sin a_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} i\cos a_i \sum_{j=1}^{n} j\cos a_j + \sum_{i=1}^{n} i\sin a_i \sum_{j=1}^{n} j\sin a_j \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} i\cos a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} i\sin a_i\right)^2 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

246. Број $\left(6+\sqrt{37}\right)^{999} + \left(6-\sqrt{37}\right)^{999}$ је цео, што се једноставно доказује развојем сабирака биномним обрасцем. Али $\left|6-\sqrt{37}\right| < 0,1$, па је $\left|\left(6-\sqrt{37}\right)^{999}\right| < 0,1^{999}$, одакле следи тврђење задатка.

247. Могу. Посматрајмо полином $P(x) = x^4 + x^3 - ex^2 + x + 1$, где је $e > 0$ довољно мало, нпр. $e = \dfrac{1}{8}$. Израчунајмо $P^2(x)$:

$$
\begin{aligned}
P^2(x) \;=\; & x^8 + 2x^7 + (1-2e)x^6 + (2-2e)x^5 + (4-2e)x^4 \\
+\; & (2-2e)x^3 + (1-2e)x^2 + 2x + 1.
\end{aligned}
$$

Сви његови коефицијенти су позитивни. Такође, сви коефицијенти полинома

$$
\begin{aligned}
P^3(x) \;=\; & x^{12} + 3x^{11} + (3-3e)x^{10} + (4-6e)x^9 + (9-5e+2e^2)x^8 \\
+\; & (9-8e+2e^2)x^7 + (6-11e+2e^2)x^6 + (9-8e+2e^2)x^5 \\
+\; & (9-5e+2e^2)x^4 + (4-6e)x^3 + (3-3e)x^2 + 3x + 1
\end{aligned}
$$

су позитивни. Ако сада посматрамо произвољан степен $P^k(x)$ нашег полинома $(k > 1)$ број k може се записати као збир неколико двојки и неколико тројки, нпр. $k = 2a + 3b$. Зато је $P^k(x) = \left(P^2(x)\right)^a \left(P^3(x)\right)^b$, те су сви његови коефицијенти позитивни.

248. За $n = 3k$ имамо $2^n = 8^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod 7$. За $n = 3k+1$ имамо $2^n = 2\cdot 8^k \equiv 2\cdot 1^k \equiv 2 \pmod 7$. За $n = 3k+2$ имамо $2^n = 4\cdot 8^k \equiv 4\cdot 1^k \equiv 4 \pmod 7$. Дакле, решења су сви природни бројеви дељиви са 3.

249. Ево примера да се бројеви могу поређати тако да збир бројева треће колоне буде 45:

1	2	3	16	17
4	5	6	18	19
7	8	9	20	21
10	11	12	22	23
13	14	15	24	25

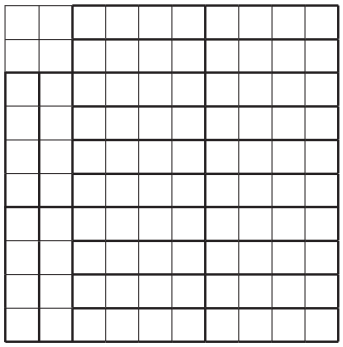
Претпоставимо да се бројеви могу распоредити тако да тај збир буде мањи од 45. Како је сваки број у другој колони мањи од одговарајућег броја у првој, збир бројева у другој колони је мањи од 40. Аналогно добијамо да је збир бројева у

првој колони мањи од 35. Значи, збир бројева у прве три колоне је мањи од 120. Међутим, тај број не може бити мањи од збира најмањих 15 природних бројева, а то је 120. Контрадикција.

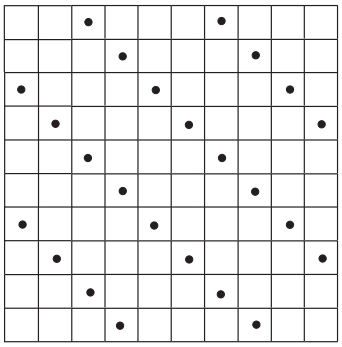
На сличан начин добијамо да је највећа могућа вредност тог збира 85.

250. Доказ ћемо извести индукцијом по броју квартова у граду. Ако је тај број једнак 1, тврђење тривијално следи. Претпоставимо да тврђење важи за све градове описане у задатку са мање од n квартова, и да је задат такав град са n квартова. Посматрајмо произвољну улицу тог града. Она дели град на два дела, и један од њих има структуру исту као град описан у задатку. Како он има мање од n квартова, по индукцијској хипотези један од његових квартова може се обићи крећући се правилно.

251. Поделимо таблу на 24 дела 4×1 као на слици 84 (притом остају 4 непокривена поља). Да бисмо били сигурни да ћемо „погодити“ подморницу морамо бирати бар по једно поље из сваког од тих делова. Зато је потребно најмање 24 гађања. С друге стране, ако тих 24 потеза распоредимо као на слици 85, сигурни смо да ћемо „погодити“ подморницу, без обзира на то како је постављена.



Слика 84.



Слика 85.

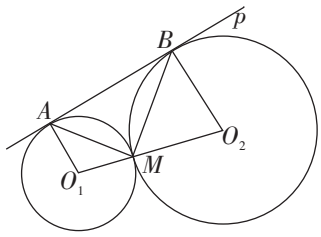
252. Означимо жетоне бројевима од 1 до 10 укруг, и уочимо жетоне означене парним бројевима. При спровођењу операција описаних у задатку увек се преврћу тачно два уочена жетона. То значи да се парност броја уочених жетона преврнутих на црвену страну не мења, а тај број је на почетку 5, па никада неће постати 0. Одговор је, дакле, не.

253. Средиште дужи AA_1 лежи на средњој линији троугла која спаја средишта страница AB и AC. Слично, остала два средишта леже на преостале две средње линије. Међутим, тачке које леже на три различите странице троугла (а различите су од темена) не могу бити колинеарне.

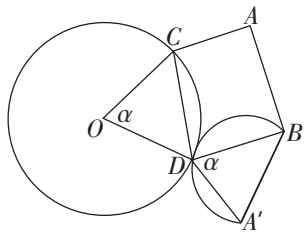
254. Обележимо центре кружница са O_1 и O_2 (слика 86). Имамо: $\sphericalangle AMB = 180^\circ - \sphericalangle O_1MA - \sphericalangle O_2MB = 180^\circ - \sphericalangle O_1AM - \sphericalangle O_2BM = \sphericalangle MAB + \sphericalangle MBA$. Одатле

следи да је $\sphericalangle AMB$ прав, па се све тачке M налазе на кружници с пречником AB.

Једноставно је показати и да за сваку тачку M те кружнице осим A и B постоје две кружнице које задовољавају услове задатка и додирују се у M. Наиме, обележимо са S средиште дужи AB. Ако упишемо кружнице у углове MSA и MSB тако да додирују редом M и A, односно M и B, оне ће бити тражене кружнице.



Слика 86.



Слика 87.

255. Претпоставимо да су тачке C и D нађене. Угао $\alpha = \sphericalangle COD$ једнозначно је одређен величином a. Ротацијом дужи AC око центра кружнице k добија се дуж DA' (слика 87) која са BD заклапа угао α. Дакле, можемо конструисати најпре тачку A', која се добија ротацијом тачке A око центра кружнице k за угао α, а затим и тачку D као пресек кружнице k са луковима који представљају геометријско место тачака из којих се дуж BA' види под углом α. Тачка C се затим добија у пресеку k и кружнице с центром D и полупречником a.

256. Како су запремине пирамида са заједничком базом пропорционалне њиховим висинама, имамо (користећи и Талесову теорему)

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{P(OBCD)}{P(ABCD)} + \frac{P(OABD)}{P(ABCD)} + \frac{P(OACD)}{P(ABCD)} + \frac{P(OABC)}{P(ABCD)} \\ &= \frac{OA_1}{AA_1} + \frac{OB_1}{BB_1} + \frac{OC_1}{CC_1} + \frac{OD_1}{DD_1} \\ &= \frac{AA_1 - R}{AA_1} + \frac{BB_1 - R}{BB_1} + \frac{CC_1 - R}{CC_1} + \frac{DD_1 - R}{DD_1} \end{aligned}$$

одакле следи

$$\frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1} + \frac{1}{CC_1} + \frac{1}{DD_1} = \frac{3}{R}.$$

Коначно, неједнакост између аритметичке и хармонијске средине даје нам

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1 \geqslant 4^2 \left(\frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1} + \frac{1}{CC_1} + \frac{1}{DD_1} \right)^{-1} = \frac{16R}{3}.$$

257. Из задате једначине следи $by_0 \equiv b^n \pmod{a}$. Како су a и b узајамно прости можемо скратити са b: $y_0 \equiv b^{n-1} \pmod{a}$. Слично, $x_0 \equiv a^{n-1} \pmod{b}$. Дакле,

постоје цели бројеви r и s такви да је $x_0 = a^{n-1} + rb$ и $y_0 = b^{n-1} + sa$. Ако то уврстимо у задату једначину добијамо $ab(r+s) = 0$, одакле је $s = -r$, тј. $x_0 = a_{n-1} + rb$ и $y_0 = b^{n-1} - ra$. Одатле је

$$\left\lfloor \frac{x_0}{b} \right\rfloor = r + \left\lfloor \frac{a^{n-1}}{b} \right\rfloor \quad \text{и} \quad \left\lfloor \frac{y_0}{a} \right\rfloor = -r + \left\lfloor \frac{b^{n-1}}{a} \right\rfloor,$$

па следи тражено тврђење.

258. Приметимо прво да је $2187 = 3^7$. Доказаћемо да за све $n \in \mathbb{N}$ важи да је број који се састоји од 3^n јединица дељив са 3^n индукцијом по n. За $n = 1$ тврђење очигледно важи. Нека је оно доказано за неко n. Запишимо

$$\underbrace{11\ldots1}_{3^{n+1}} = \underbrace{11\ldots1}_{3^n} \cdot 1 \underbrace{00\ldots01}_{3^n} \underbrace{00\ldots01}_{3^n}.$$

Први фактор је по индукцијској хипотези дељив са 3^n, а други очигледно са 3, па је производ дељив са 3^{n+1}, што је и требало доказати.

259. Обележимо са $F(m,n)$ величину $NZD(2^n - 1, 2^m - 1)$. Нека је нпр. $n > m$. Имамо

$$\begin{aligned} F(m,n) &= NZD\left((2^n-1)-(2^m-1), 2^m-1\right) \\ &= NZD\left(2^m(2^{n-m}-1), 2^m-1\right) \\ &= NZD\left(2^{n-m}-1, 2^m-1\right) = F(m, n-m). \end{aligned}$$

Сада да се подсетимо Еуклидовог алгоритма за добијање највећег заједничког делитеља бројева m и n: рачунају се бројеви $q_1, q_2, \ldots$ и $r_1, r_2, \ldots$ такви да је

$$\begin{aligned} n &= q_1 m + r_1 \\ m &= q_2 r_1 + r_2 \\ r_1 &= q_3 r_2 + r_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

и да важи $r_1 \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $r_2 \in \{0, 1, \ldots, r_1 - 1\}$ итд. (q_1 и r_1 су количник и остатак при дељењу n са $m\ldots$). Овај поступак понављамо до првог дељења при којем добијамо остатак нула. Остатак r_k претходног дељења биће $NZD(m,n)$.

Опонашаћемо овај поступак: на основу горе доказаног је

$$\begin{aligned} F(m,n) &= F(m, n-m) = \cdots = F(m, r_1) \\ &= F(m-r_1, r_1) = \cdots = F(r_2, r_1) = \cdots = F(r_k, 0). \end{aligned}$$

Међутим, $F(r_k, 0) = NZD\left(2^{r_k} - 1, 2^0 - 1\right) = 2^{r_k} - 1$. Коначно: m и n су узајамно прости акко је $r_k = 1$, а то је еквивалентно са

$NZD(2^n - 1, 2^m - 1) = 2^1 - 1 = 1$, тј. са чињеницом да су $2^m - 1$ и $2^n - 1$ узајамно прости.

260. Применићемо метод који се може користити кад су све једначине симетричне по x, y и z, тј. кад се не мењају заменом места променљивих. Ако уведемо ознаке $a = x + y + z$, $b = xy + yz + zx$ и $c = xyz$, из система добијамо $a = 9$, $b = 26$, $c = 24$. На основу Виетових формула добијамо да су x, y, z нуле полинома $x^3 - ax^2 + bx - c = x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = (x-2)(x-3)(x-4)$, тј. решења система су $(2,3,4), (2,4,3), (3,2,4), (3,4,2), (4,2,3), (4,3,2)$.

261. Нека је прво a_1 рационалан број. Из рекурентне формуле је лако закључити да, ако је a_n рационалан, онда је и a_{n+1} рационалан и именилац му није већи од имениоца a_n. Користећи то, индукцијом можемо доказати да, ако је именилац броја a_1 једнак i, онда су сви чланови низа рационални са имениоцем мањим или једнаким од i. Међутим, таквих бројева има коначно много (сигурно мање од $i \cdot i$, али може се направити и боља оцена), па ће се неки број у низу поновити, нпр. $a_k = a_l$. Али због рекурентне везе тада важи и $a_{k+1} = a_{l+1}, a_{k+2} = a_{l+2}$ итд. тј. низ је периодичан почевши од k-тог члана.

Нека је сада низ почевши од неког члана периодичан, нпр. нека је $a_k = a_l$, и нпр. $k < l$. Међутим, из рекурентне везе следи да важи $a_{l-1} = \frac{a_l}{2}$ или $a_{l-1} = 1 - \frac{a_l}{2}$. Слично се може изразити a_{l-2} преко a_{l-1}, a_{l-3} преко a_{l-2} итд. па стога можемо изразити и a_k у облику $a_k = C \pm \frac{a_l}{2^{l-k}}$, где је C неки рационалан број. То, уствари, значи $a_k = C \pm \frac{a_k}{2^{l-k}}$, а решење те једначине мора бити рационалан број. Међутим, ако је a_k рационалан, пошто $a_{k-1} = \frac{a_k}{2}$ или $a_{k-1} = 1 - \frac{a_k}{2}$, и a_{k-1} је рационалан. Тако закључујемо да су и $a_{k-2}, a_{k-3}, \ldots, a_1$ рационални.

262. Претпоставимо да је $\frac{a+1}{b} + \frac{b}{a} = n$, тј. да је $a^2 + a + b^2 = nab$. За $a = b$, $a = 1$ или $b = 1$ једноставно се види да је $n = 3$. Претпоставимо да постоје различити $a > 1$ и $b > 1$ који задовољавају услов задатка такви да $n \neq 3$ и нека су они такви да је збир $a + b$ минималан (тј. за све друге парове који то задовољавају њихов збир је већи или једнак од $a + b$).

Нека је прво $a < b$. Међутим, ако пар (a, b) задовољава услов задатка, онда га задовољава и пар $(a, na - b)$. Даље важи

$$0 < na - b = \frac{a^2 + a}{b} < b + 1,$$

па је $na - b \leqslant b$. Како је (a, b) пар са минималним збиром, мора бити $na - b = b$, тј. $b^2 = a^2 + a = a(a+1)$, што је немогуће.

Размотримо сада случај $b < a$. Ако пар (a, b) задовољава услов задатка, онда га задовољава и пар $(nb - a - 1, b)$. Међутим, $0 < nb - a - 1 = \frac{b^2}{a} < a$, па овај пар има мањи збир. Контрадикција.

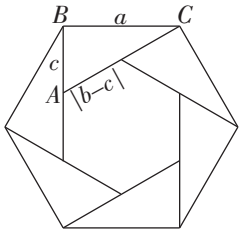
263. Не може. Уведимо координатни систем такав да је координатни почетак у четвртом темену квадрата, а скакавци су у тачкама $(0,1), (1,0), (1,1)$. Померањем описаним у задатку координате једног скакавца мењају се за парне бројеве, тако

да сваки скакавац и даље има бар једну непарну координату. Стога ниједан од њих не може стићи у тачку $(0,0)$.

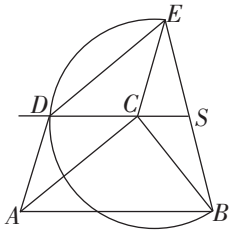
264. Конструишимо граф на следећи начин: чворови графа нека буду чланови скупштине, а од чвора A до чвора B иде усмерена грана (стрелица) акко је A мрко погледао B. Посматрајмо сада произвољан чвор A_1 тог графа. Од њега иде тачно једна грана, нпр. до чвора A_2, од овог тачно једна грана нпр. до A_3 итд. Како је број чворова коначан пре или касније неки чвор ће се поновити, нпр. A_k. Дакле, сваки чвор је повезан са једном усмереном контуром (у овом случају A_1 је повезан са контуром $A_kA_{k+1}\dots A_lA_k$) којој он може, али не мора припадати. Стога граф можемо поделити на компоненте (њих може бити више или само једна) тако што у исту компоненту ставимо све чворове који су повезани са истом контуром. Свака таква компонента садржи тачно једну оријентисану контуру; такав граф зваћемо уницикличан. Међутим, чворови уницикличног графа се могу обојити са три боје правилно, тј. тако да два суседна чвора буду различито обојени. То ћемо учинити овако: најпре бојимо контуру $A_kA_{k+1}\dots A_lA_k$ тако што A_k обојимо плаво, A_{k+1} црвено, A_{k+2} плаво и тако наизменично до чвора A_l који бојимо зелено. Чворове који нису у контури бојимо на следећи начин: ако је чвор A_1 нпр. спојен са контуром путем $A_1A_2\dots A_k$, а A_k обојен плаво, онда бојимо чворове $A_{k-1}, A_{k-2}, \dots, A_1$ наизменично црвено, зелено, плаво.

Дакле, свака компонента се може правилно обојити са три боје. Зато можемо и цео граф обојити са три боје, јер компоненте између себе немају грана. Бар једном од те три боје обојено је, на основу Дирихлеовог принципа, бар 150 чворова. Нека је црвеном бојом обојено бар 150 чворова. Јасно је да никоја два црвена чвора нису спојена стрелицом. Зато се од чланова скупштине који су представљени црвеним чворовима може формирати тражена комисија.

265. Како је $\sphericalangle BAC = 60°$, од шест троуглова подударних датом може се саставити фигура на слици 88 која је уствари шестоугао странице a без једног шестоугла странице $|b-c|$. Ако поделимо разлику површина тих шестоуглова са 6, добијамо тражену формулу.



Слика 88.



Слика 89.

266. Нека је $ABCD$ тражени трапез и E тачка таква да је $ACED$ паралелограм (слика 89). Троугао DEC могуће је конструисати: познате су нам дужине BC и

$CE = AD$ и угао међу њима, једнак углу међу крацима. Нека је S средина дужи BE. Тачку D добијамо у пресеку праве SC и лука који је геометријско место тачака из којих се дуж BE види под углом једнаким задатом углу између дијагонала. Коначно, тачку A можемо конструисати као четврту тачку паралелограма $ACED$.

267. Нека су тачке пресека прве и друге, друге и треће, односно прве и треће кружнице A и B, M и N, односно X и Y. Претпоставимо да праве одређене њима нису све паралелне, нпр. да се праве AB и MN секу у тачки S. Обележимо са T_1 и T_2 друге тачке пресека праве XS са првом, односно трећом кружницом. Из потенција тачке S на дате кружнице добијамо $SX \cdot ST_1 = SA \cdot SB = SM \cdot SN = SX \cdot ST_2$, одакле следи да се тачке T_1 и T_2 поклапају. Значи, оне се поклапају и са тачком Y, као другим пресеком прве и треће кружнице, па и права XY пролази кроз S.

268. Обележимо са S површину троугла ABC, а са a, b, c редом дужине страница тог троугла наспрам темена A, B, C. Ако су A_1 и C_1 подножја висина из A и C на BC, односно AB, онда је $AA_1 = \dfrac{2S}{a}$ и $CC_1 = \dfrac{2S}{c}$. Из сличности троуглова ABA_1 и AHC_1 добијамо $AH : AC_1 = AB : AA_1$, одакле је

$$AH = \frac{ac\sqrt{b^2 - \frac{4S^2}{c^2}}}{2S}.$$

Коначно, из Питагорине теореме је $A'H = \sqrt{A'A^2 + AH^2} = abc$. Аналогно се добија $B'H = C'H = abc$, тј. тачка H је једнако удаљена од A', B' и C', па се налази на правој кроз O нормалној на раван троугла $A'B'C'$.

269. Очигледно су $m \leqslant b$, $n \leqslant a$ и $am = bn$ потребни услови да би се таблица могла попунити (и лева и десна страна означавају укупан број нула у таблици). Покажимо да ја тај услов и довољан. Попунимо таблицу на следећи начин: нуле стављамо у првих m поља прве врсте, затим од $(m+1)$–вог до $(2m)$–тог поља друге врсте, од $(2m+1)$–вог до $(3m)$–тог поља треће итд. Када стигнемо до последњег поља неке врсте попуњавање настављамо у првом пољу следеће врсте. Услов $am = bn$ обезбеђује нам да ћемо након таквог попуњавања свих врста у свакој колони имати тачно n нула. Остаје још само да се преостала поља попуне јединицама.

270. Важи:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-3} k(k!) &= \sum_{k=1}^{n-3} ((k+1)! - k!) = \sum_{k=1}^{n-3} (k+1)! - \sum_{k=1}^{n-3} k! \\ &= (2! + 3! + \cdots + (n-2)!) - (1! + \cdots + (n-3)!) = (n-2)! - 1\,.\end{aligned}$$

Како је n прост, по Вилсоновој теореми он дели

$$(n-1)! + 1 = (n-1)! + n - (n-1) = (n-1)((n-2)! - 1) + n$$

па, пошто је $n-1$ узајамно просто са n, n дели и $(n-2)! - 1$.

271. Користећи више пута неједнакост између аритметичке и геометријске средине добијамо

$$\begin{aligned} xyz &= \frac{y^3+z^3+t^3}{3} \geqslant yzt = \frac{z^3+t^3+x^3}{3} \geqslant ztx \\ &= \frac{t^3+x^3+y^3}{3} \geqslant txy = \frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geqslant xyz. \end{aligned}$$

Да би то било могуће, уместо свих знакова неједнакости мора стојати једнакост, а то је еквивалентно са $x = y = z = t$. Лако се проверава да свака таква четворка здовољава систем.

272. Користићемо Ојлерову теорему која тврди да је

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m},$$

ако су a и m узајамно прости бројеви. (Овде је $\varphi(m)$ Ојлерова функција, тј. број бројева мањих од m који су узајамно прости са m.) Имајући у виду да су бројеви 2 и 5^n узајамно прости и да је

$$\varphi(5^n) = 4 \cdot 5^{n-1},$$

следи да је

$$2^{4\cdot 5^{n-1}} \equiv 1 \pmod{5^n}.$$

За $n = 2k$, добија се да је

$$5^{2k} \mid (2^{4\cdot 5^{2k-1}} - 1), \quad \text{тј.} \quad 10^{2k} \mid 2^{2k}(2^{4\cdot 5^{2k-1}} - 1).$$

Следи да су последњих $2k$ цифара броја $2^{4\cdot 5^{2k-1}+2k} - 2^{2k}$ нуле, за произвољан природан број k.

Доказаћемо сада да за произвољан природан број k постоји природан број n такав да се у декадном запису броја 2^n појављује k узастопних нула. Заиста, нека је $c_{r-1}c_{r-2}\ldots c_1c_0$ декадни запис броја 2^{2k}. Тада је, очигледно, $r \leqslant k$. Према претходном, број

$$2^{4\cdot 5^{2k-1}+2k}$$

завршава се низом од $2k$ цифара

$$\ldots 00\ldots 0c_{r-1}c_{r-2}\ldots c_1c_0.$$

Како је $r \leqslant k$, следи да се испред последњих r цифара тога броја налази бар $2k - r \geqslant k$ узастопних нула.

Ако би број $0,1248163264128\ldots$ био рационалан, онда би тај разломак био периодичан. Међутим, према претходном, за сваки природан број n у декадном запису тога разломка се може наћи n узастопних нула, па би се периода састојала од самих нула, што је очигледна контрадикција.

273. (а) Други играч има победничку стратегију. Ако Први изговори 77, Други ће додати 54. Ако први изговори 54, Други ће додати 77. У оба случаја Други добија број 31, који је прост.

(б) Први играч има победничку стратегију. Посматрајмо низ остатака при дељењу са 100 бројева

$$(*) \qquad 77, 2 \cdot 77, 3 \cdot 77, \ldots, 100 \cdot 77,$$

тј. низ $77, 54, 31, 8, \ldots$. Како су 77 и 100 узајамно прости бројеви, сви ти остаци су различити, тј. у том низу се појављују сви бројеви од 0 до 99 неким редом. Приметимо да се у низу $(*)$ појављују два узастопна члана који су прости бројеви. То су бројеви 2 и 79, као 26. и 27. чланови у низу.

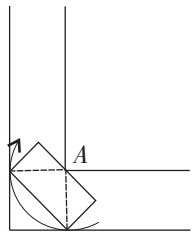
Игра описана у поставци задатка еквивалентна је следећој:

Први играч изговара 77 или 54, тј. први или други члан низа $(*)$. У даљем току игре играчи наизменично вуку потезе тако што играч на потезу бира следећи члан низа или следећи од следећег.

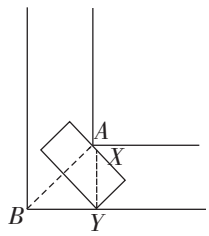
Први избор одговара додавању броја 77 по модулу 100, други додавању броја 54 по модулу 100 (јер је $77 + 77 = 154$). Очигледно је да један од играча мора изабрати један од два узастопна проста броја (2 или 79). До тога момента сваки играч може да избегне прост број, јер пре тога у низу нема узастопних простих бројева.

Испред броја 2 у низу налази се број 25 (као 25. члан низа). Први играч може увек постићи да изабере број 25 и на тај начин принуди Другог да изабере 2 или 79. Први играч треба да игра на следећи начин: Он првим потезом бира број 77, а затим ако додаје 77, он додаје 54 и обрнуто. (Другим речима, ако се Други играч помери за једно место у низу, Први се помери за два и обрнуто.) На тај начин Први осигурава избор броја 25 после дванаестог потеза Другог.

274. Довољно је да ширина ходника буде $\sqrt{2}$. Заиста, предмет може кроз такав ходник проћи крећући се најпре уз десну ивицу све док средина десне странице предмета не стигне до тачке A (слика 90). Тада се ротира око те тачке за $90°$ и наставља кретање уз десну ивицу ходника.



Слика 90.



Слика 91.

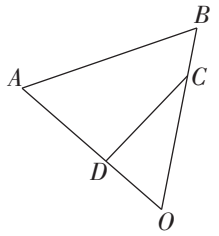
Претпоставимо да предмет може проћи и кроз ходник мање ширине. Поделимо све положаје које може имати предмет у две класе на следећи начин: прву класу

нека чине положаји при којима дуже странице предмета заклапају са ивицама „доњег“ дела ходника угао мањи од $45°$, а другу они при којима је тај угао већи или једнак од $45°$. Јасно је да се предмет на почетку ходника налази у положају прве класе, а на крају у положају друге класе. Међутим, да би прешао из положаја прве у положај друге класе, предмет се у једном тренутку мора наћи у „граничном“ положају при коме је горе поменути угао једнак $45°$. Средиште X десне ивице предмета може се у том тренутку налазити са једне од две стране праве које одређују тачке A и B (слика 91), „доње“ или „десне“. Нека се нпр. налази са доње стране, као на слици. Ширина ходника мора бити довољна да прими дуж XY (Y је једна од угаоних тачака предмета, која не лежи на страници чија је средина X), а њена дужина је $\sqrt{2}$.

275. Може. Први играч треба на почетку да запише број 99. Други после тога не може добити квадрат, јер се ни један четвороцифрен потпун квадрат не завршава нити почиње са 99. Први играч треба у сваком следећем потезу да на крај дописује цифру 3 или 7. Наиме, тиме се, после потеза другог, добија или број који завршава са 3 или 7, и стога не може бити потпун квадрат, или број облика $1000m + 300 + n$ или $1000m + 700 + n$, где је $n < 100$. Али не могу два броја таквог облика истовремено бити потпуни квадрати, јер је разлика између два узастопна квадрата x^2 и $(x + 1)^2$ једнака $2x + 1$, и за $x^2 > 1000000$ је она већа од 500. Дакле, први играч може увек изабрати једну од цифара 3 или 7 тако да онемогући победу другом.

276. Да. Нека је дат правилан 21–угао $A_0A_1A_2 \ldots A_{19}A_{20}$. Посматрајмо петоугао $A_0A_1A_6A_8A_{18}$. Све његове странице и дијагонале су тетиве кружнице описане око датог 21–угла. Лако се проверава да међу тим тетивама не постоје две којима одговарају једнаки лукови. Према томе, међу тим тетивама не постоје две тетиве једнаке дужине.

277. Означимо луку тачком O а положаје првог и другог броја у подне редом тачкама A и B (слика 92).



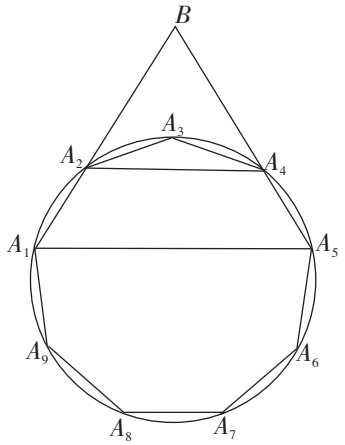
Слика 92.

По услову задатка је $\sphericalangle AOB = 60°$. После пређених 90 km, други брод се налазио у тачки C, а први у D. Ако је $AB = x$, онда је

$$DO = \frac{x - 90}{2}, \quad CO = x - 90, \quad AD = x - \frac{x - 90}{2} = \frac{x + 90}{2}.$$

Како је $\dfrac{x+90}{2} : 90 = x : (x - 37,5)$, лако израчунавамо да је $x = 150\,\mathrm{km}$.

278. Унутрашњи угао правилног деветоугла једнак је 140°. Троугао $A_2A_3A_4$ је једнакокрак са угловима при основици од 20° (слика 93). Дијагонале A_1A_5 и A_2A_4 су паралелне, па је четвороугао $A_1A_5A_4A_2$ трапез, са угловима при горњој основици од 120°. Следи да су углови при доњој основици једнаки 60°.



Слика 93.

Продужимо странице A_1A_2 и A_4A_5 до пресека у тачки B. Троуглови A_1A_5B и A_2A_4B су једнакостранични, јер су им сви углови по 60°. Страница првог тругла једнака је највећој дијагонали деветоугла (A_1A_5), а страница другог – најмањој (A_2A_4). Из $A_1B - A_2B = A_1A_2$ следи да је њихова разлика једнака страници деветоугла.

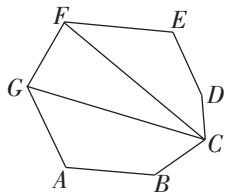
279. Нека је $n^n + 1 = m^2$. Број n не може бити паран, јер је у том случају n^n потпун квадрат, па следећи број не може бити потпун квадрат. Посматрајмо случај кад је n непаран број. Тада је $n^n = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$, при чему су $m-1$ и $m+1$ непарни бројеви. Бројеви $m-1$ и $m+1$ су узајамно прости (као узастопни непарни бројеви). Сваки од та два броја је n–ти степен природног броја. Међутим, разлика n–тих степена два природна броја је већа од 2. Контрадикција! Тражени број не постоји.

280. Ако два угла од 120° належу на исту страницу, тврђење очигледно важи. У противном претпоставимо да за конвексан седмоугао $ABCDEFG$ важи: $\sphericalangle GAB = \sphericalangle BCD = \sphericalangle DEF = 120^\circ$ (слика 94).

Посматрајмо четвороуглове $ABCG$ и $CDEF$. Они су тетивни, па следи да је $\sphericalangle BCG = \sphericalangle FCD = 60^\circ$ (јер су њима наспрамни једнаки 120°). Међутим, тада је

$$\sphericalangle BCD = \sphericalangle BCG + \sphericalangle GCF + \sphericalangle FCD > 120^\circ,$$

што је у контрадикцији са претпоставком. Дакле, немогуће је да у датом седмоуглу постоје три угла од по $120°$, међу којима нема суседних. Одатле следи тврђење задатка.



Слика 94.

281. Да. Приметимо прво да се у једном крајњем пољу мора налазити број 18, јер међу преосталим бројевима постоји само један који сабран са 18 даје потпун квадрат (то је број 7). Нека је 18 на првом пољу с лева. На другом пољу мора бити број 7. Следећи број је 2 или 9 итд. Тако се могу добити следећи низови као решења:

$18, 7, 2, 23, 13, 12, 24, 25, 11, 14, 22, 3, 1, 8, 17, 19, 6, 10, 15, 21, 4, 5, 20, 16, 9$

$18, 7, 9, 16, 20, 5, 4, 21, 15, 10, 6, 19, 17, 8, 1, 3, 22, 14, 11, 25, 24, 12, 13, 23, 2.$

Наравно, и низови који се добијају из горњих исписивањем бројева обрнутим редом, такође су решења.

282. Задатак решавамо методом математичке индукције. За $n = 1$ дати полином је $x^2 + x + 1$, што значи да за $n = 1$ тврђење важи. Претпоставимо да је тврђење тачно за $n = k$. Тада је за $n = k + 1$

$$\begin{aligned} x^{3k+2} + x + 1 &= x^{3k+2} - x^{3k-1} + (x^{3k-1} + x + 1) \\ &= x^{3k-1}(x^3 - 1) + (x^{3k-1} + x + 1) \\ &= x^{3k-1}(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^{3k-1} + x + 1). \end{aligned}$$

Очигледно је први сабирак дељив са $x^2 + x + 1$. Како је и други, по индуктивној претпоставци, дељив са $x^2 + x + 1$, доказ индукцијом је завршен.

283. Претпоставимо супротно, тј. да је број a рационалан. Тада је низ цифара иза децималне запете у броју a периодичан, тј. постоји најмањи природан број T такав да за свако n, почевши од неког n_0, важи $a_{n+T} = a_n$. Познато је да природан број има непаран број делитеља ако и само ако је он потпун квадрат; према томе је $a_n = 1$ ако је n потпун квадрат, иначе је $a_n = 0$. Разлика између два узастопна квадрата m^2 и $(m + 1)^2$ једнака је $2m + 1$. За $m = T$, добијамо да су цифре a_{T^2} и $a_{(T+1)^2}$ јединице, а да су свих $2T$ цифара између њих нуле. Закључујемо да се периода разломка састоји само од нула, тј. да су, почевши од неког места, све цифре нуле. Међутим, то је немогуће, јер има бесконачно много бројева који су потпуни квадрати. Добијена контрадикција показује да број a не може бити рационалан.

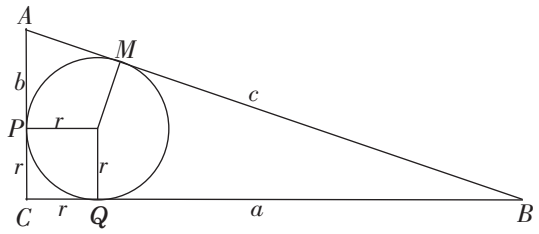
284. Нека је $m = x^7$ и $n = y^7$. Тада је број који се из њих добија надовезивањем

$$10^{2002}x^7 + y^7 = \left(10^{286}x\right)^7 + y^7.$$

Међутим, овај број не може бити потпун седми степен, на основу Фермаове велике теореме.

285. Помоћу Питагорине теореме лако се добија да хипотенуза основе има дужину 37. У правоуглом троуглу са катетама a и b и хипотенузом c, пречник уписане кружнице је $2r = a + b - c$. Наиме, према слици 95. је $c = AM + BM = BQ + AP = (a - r) + (b - r)$, тј. $c = a + b - 2r$. На основу тога је полупречник уписане кружницу основе једнак је $\dfrac{35 + 12 - 37}{2} = 5$. Следи да је висина сваке бочне стране пирамиде једнака $2 \cdot 5 = 10$. Површина пирамиде је

$$\frac{12 \cdot 35}{2} + \frac{10(35 + 12 + 37)}{2} = 210 + 420 = 610.$$



Слика 95.

286. **Прво решење.** Примењујући познате тригонометријске идентитете (функције комплементног и суплементног угла, двоструког угла и адиционе формуле), имамо:

$$\begin{aligned}
&\sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 30^\circ \sin 40^\circ \sin 50^\circ \sin 60^\circ \sin 70^\circ \sin 80^\circ \\
&= (\sin 10^\circ \sin 80^\circ)(\sin 20^\circ \sin 70^\circ)(\sin 30^\circ \sin 60^\circ)(\sin 40^\circ \sin 50^\circ) \\
&= \frac{1}{2}(\cos 70^\circ - \cos 90^\circ) \cdot \frac{1}{2}(\cos 50^\circ - \cos 90^\circ) \\
&\quad \cdot \frac{1}{2}(\cos 30^\circ - \cos 90^\circ) \cdot \frac{1}{2}(\cos 10^\circ - \cos 90^\circ) \\
&= \frac{1}{16}(\cos 10^\circ \cos 70^\circ)(\cos 30^\circ \cos 50^\circ) \\
&= \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2}(\cos 60^\circ + \cos 80^\circ) \cdot \frac{1}{2}(\cos 20^\circ + \cos 80^\circ) \\
&= \frac{1}{64}(\cos 20^\circ \cos 60^\circ + \cos 20^\circ \cos 80^\circ + \cos 60^\circ \cos 80^\circ + \cos 80^\circ)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{64}\left(\frac{1}{2}(\cos 40^\circ + \cos 80^\circ) + \frac{1}{2}(\cos 60^\circ + \cos 100^\circ)\right.\\
&\quad \left. + \frac{1}{2}(\cos 20^\circ + \cos 140^\circ) + \frac{1}{2}(\cos 0^\circ + \cos 160^\circ)\right)\\
&= \frac{1}{128}\left(\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \frac{1}{2} - \cos 80^\circ + \cos 20^\circ - \cos 40^\circ + 1 - \cos 20^\circ\right)\\
&= \frac{3}{256}.
\end{aligned}
$$

Друго решење. Примењујући познате тригонометријске идентитете, имамо:

$$
\begin{aligned}
&\sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 30^\circ \sin 40^\circ \sin 50^\circ \sin 60^\circ \sin 70^\circ \sin 80^\circ\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}(\sin 10^\circ \cos 10^\circ)(\sin 20^\circ \cos 20^\circ)(\sin 40^\circ \cos 40^\circ)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2} \sin 20^\circ \cdot \frac{1}{2} \sin 40^\circ \cdot \frac{1}{2} \sin 80^\circ\\
&= \frac{\sqrt{3}}{32} \sin 40^\circ \left(\frac{1}{2}(\cos 60^\circ - \cos 100^\circ)\right) = \frac{\sqrt{3}}{64} \sin 40^\circ \left(\frac{1}{2} + \cos 80^\circ\right)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{64} \sin 40^\circ \left(\frac{1}{2} - 1 - 2\sin^2 40^\circ\right) = \frac{\sqrt{3}}{128}(3\sin 40^\circ - 4\sin^3 40^\circ)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{128} \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{128} \sin 120^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{256}\,.
\end{aligned}
$$

(При крају извођења искористили смо идентитет $3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha - \sin 3\alpha$.)

287. Нека је O центар кружнице описане око 100–угла. За свако црвено теме R_i и свако плаво теме B_j $(1 \leqslant i, j \leqslant 10)$ означимо са $\Phi(i,j)$ ротацију са центром O која пресликава R_i у B_j. Свака од тих 100 ротација је различита од идентичне и пресликава свако теме у неко друго теме 100–угла. Дакле, углови ротације припадају скупу

$$\left\{\frac{m \cdot 2\pi}{100} \mid 0 < m < 100\right\}.$$

На основу Дирихлеовог принципа, неке две ротације $\Phi(k,l)$ и $\Phi(m,n)$ морају да се поклапају. Тада тетиве R_kR_m и B_lB_n имају исту дужину.

288. На основу

$$
\begin{aligned}
a^5 + b^5 &= (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)\\
&\leqslant (a+b)(a^4 + a^2b^2 + b^4) < (a+b)(a^2+b^2)^2
\end{aligned}
$$

добијамо

$$
\begin{aligned}
\frac{a^5+b^5}{a^2+b^2} &< \frac{(a+b)(a^2+b^2)^2}{a^2+b^2} = (a+b)(a^2+b^2)\\
&< (a+b)(a^2+b^2+2ab) = (a+b)^3 = (1-c)^3.
\end{aligned}
$$

Потпуно аналогно добијамо

$$\frac{b^5+c^5}{b^2+c^2} < (1-a)^3 \quad \text{и} \quad \frac{c^5+a^5}{c^2+a^2} < (1-b)^3.$$

Сада тврђење следи на основу

$$(1-c)^3+(1-a)^3+(1-b)^3 = 3(a^2+b^2+c^2)-(a^3+b^3+c^3).$$

289. Како је $x \mapsto \sin x$ монотоно растућа функција на интервалу $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и важи $0 < \sqrt{2} < \frac{11\pi}{24} < \frac{\pi}{2}$, имамо да је $\sin\sqrt{2} < \sin\frac{11\pi}{24}$. Из последње неједнакости следи да је

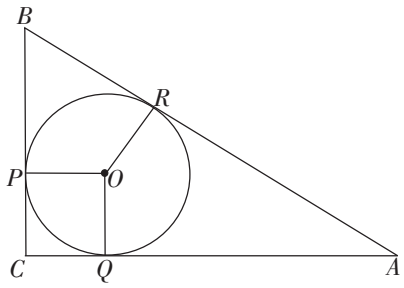
$$\sin\sqrt{2} < \cos\frac{\pi}{24}. \tag{1}$$

Читаоцима остављамо да докажу да за сваки реалан број x важи неједнакост

$$|\sin x + \cos x| \leqslant \sqrt{2}. \tag{2}$$

Из неједнакости (1) и (2) следи тражена неједнакост.

290. Нека је ABC правоугли троугао са целобројним катетама $BC = a$, $CA = b$ и целобројном хипотенузом $AB = c$. Уписана кружница са центром O и полупречником r додирује странице троугла у тачкама P, Q и R редом (слика 96).



Слика 96.

Имамо: $OP = OQ = r$ и $POQC$ је квадрат. Следи да је $CP = CQ = r$. Даље је $BP = a - r$ и $AQ = b - r$, и такође $BR = BP$ и $AR = AQ$ (тангенте на кружницу). Следи да је $AB = AR + BR = (a-r)+(b-r)$, одакле је $c = a+b-2r$. Дакле $r = \frac{1}{2}(a+b-c)$, а то ће бити цео број ако је $a+b-c$ паран. Како је

$$\begin{aligned}(a+b-c)^2 &= a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca\\ &= 2c^2+2ab-2bc-2ca = 2(c^2+ab-bc-ca)\end{aligned}$$

паран број, следи да је и $a+b-c$ паран број, тј. r је цео број.

291. Нека су дате равни $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$. Докажимо прво да постоји права која сече сваку од датих равни. Узмимо произвољну тачку P у простору и конструишимо равни $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ које пролазе кроз P и паралелне су редом датим равнима. Пошто се простор не може покрити са коначно много равни, следи да постоји тачка Q која не припада ниједној од равни $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Тада је права p, одређена тачкама P и Q, тражена права (p сече сваку од равни $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ у тачки P, па сече и све дате равни $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ које су њима паралелне). Означимо са $P_1, P_2, \ldots, P_n$ пресечне тачке праве P са датим равнима и претпоставимо да те тачке на правој p имају поредак $P_1 - P_2 - \ldots - P_n$. Јасно је да тачке M и N такве да се P_1 и P_2 налазе између њих, припадају областима које задовољавају услове задатка.

292. Како је $\dfrac{a}{c} < 1$ и $\dfrac{b}{c} < 1$, имамо за $\alpha > 2$,

$$\left(\frac{a}{c}\right)^\alpha < \left(\frac{a}{c}\right)^2 \quad \text{и} \quad \left(\frac{b}{c}\right)^\alpha < \left(\frac{b}{c}\right)^2.$$

Сабирањем неједнакости добијамо

$$\left(\frac{a}{c}\right)^\alpha + \left(\frac{b}{c}\right)^\alpha < \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 \qquad (a^2 + b^2 = c^2),$$

тј. неједнакост $a^\alpha + b^\alpha < c^\alpha$. Како је $\dfrac{c}{a} > 1$ и $\dfrac{c}{b} > 1$, имамо

$$\left(\frac{c}{a}\right)^\alpha > \left(\frac{c}{a}\right)^2 \quad \text{и} \quad \left(\frac{c}{b}\right)^\alpha > \left(\frac{c}{b}\right)^2.$$

Сабирањем неједнакости добијамо

$$\left(\frac{c}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{c}{b}\right)^\alpha > \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2,$$

одакле сређивањем налазимо

$$c^\alpha \frac{a^\alpha + b^\alpha}{a^\alpha b^\alpha} > c^\alpha \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = \frac{c^4}{a^2 b^2} \qquad (a^2 + b^2 = c^2),$$

односно

$$a^\alpha + b^\alpha > c^2 \left(\frac{ab}{c}\right)^{\alpha - 2}.$$

293. Тражени збир је 2. Тај збир не може бити мањи од 2, јер број дељив са 59 не може бити степен броја 10. Збир цифара ће бити једнак 2 само ако су прва и последња цифра броја јединице, а остале цифре су нуле, тј. ако је број облика $10^n + 1$, за неки природан број n. Показаћемо да постоји број дељив са 59 облика $10^n + 1$.

Приметимо прво да је: $1 \times 59 = 59$, $2 \times 59 = 118$, $3 \times 59 = 177$, $4 \times 59 = 236$, $5 \times 59 = 295$, $6 \times 59 = 354$, $7 \times 59 = 413$, $8 \times 59 = 472$, $9 \times 59 = 531$.

Нека су

$$\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1 a_0} \quad \text{и} \quad \overline{b_k b_{k-1} \ldots b2 b_1 b_0}$$

декадни записи редом бројева a и $b = 59a = 10^n + 1$. Ако је $b_0 = 1$, онда је $a_0 = 9$. Како је претпоследња цифра броја $59 \cdot a_0 = 59 \cdot 9$ једнака 3, да би претпоследња цифра броја $59a$ била нула, мора последња цифра броја $59 \cdot a_1$ бити 7, одакле следи да је $a_1 = 3$. Како је сада $b_1 = 0$, цифра стотина броја $59 \cdot a_0$ једнака 5, цифра десетица броја $59 \cdot a_1$ једнака 7 и парцијални збир $3 + 7 = 10$ даје пренос 1, с обзиром да је $5 + 7 + 1 = 13$, мора се број $59 \cdot a_2$ завршавати цифром 7, одакле је $a_2 = 3$. Настављамо тако све док не добијемо да је збир цифара у неком разреду, укључујући пренос из претходног разреда, једнак 10. Уколико се то никад не дешава не постоји број a такав да је збир цифара броја a једнак 2. У нашем случају то се дешава и као најмањи број a са траженом особином добија се број 169491525423728813559322339, који помножен са 59 даје број $10^{28} + 1$.

294. Одредићемо прво број нетривијалних аритметичких низова природних бројева ($n > 1$) за које је разлика $d > 0$. Исто толико имаћемо и оних за које је $d < 0$, јер се они добијају из претходних кад се чланови узму обрнутим редом. Случај $d = 0$ размотрићемо на крају.

Користећи добро познату формулу за збир чланова аритметичког низа

$$S_n = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)d),$$

имамо

$$4004 = n(2a + (n-1)d),$$

где је $n \geqslant 2$, $a \geqslant 1$, $d \geqslant 1$.

Видимо да n мора бити фактор од 4004 (искључујући фактор 1). Максимална вредност за n се добија кад су a и d минимални, тј. за $a = d = 1$ и тада је $n(n+1) = 4004$. Како је $63 \cdot 64 = 4032 > 4004$, јасно је да треба посматрати само оне факторе броја 4004 који су мањи од 63. То су бројеви: $2, 4, 7, 11, 13, 14, 22, 26, 28, 44, 52$. Испитаћемо сваки од 11 случајева појединачно:

- $n = 2$:
  $2a + d = 2002$; d је паран број и $2 \leqslant d \leqslant 2000$. Број решења: 1000.
- $n = 4$:
  $2a + 3d = 1001$; d је непаран број и $1 \leqslant d \leqslant 333$. Број решења: 167.
- $n = 7$:
  $a + 3d = 286$; $a \equiv 1 \pmod 3$ и $1 \leqslant a \leqslant 283$. Број решења: 95.
- $n = 11$:
  $a + 5d = 182$; $a \equiv 2 \pmod 5$ и $2 \leqslant a \leqslant 177$. Број решења: 36.
- $n = 13$:
  $a + 6d = 154$; $a \equiv 4 \pmod 6$ и $4 \leqslant a \leqslant 148$. Број решења: 25.
- $n = 14$:
  $2a + 13d = 284$; d је паран број и $2 \leqslant d \leqslant 20$. Број решења: 10.

- $n = 22$:
  $2a + 21d = 182$; d је паран број и $2 \leqslant d \leqslant 8$. Број решења: 4.
- $n = 26$:
  $2a + 25d = 154$; d је паран број и $2 \leqslant d \leqslant 6$. Број решења: 3.
- $n = 28$:
  $2a + 27d = 143$; d је непаран број и $1 \leqslant d \leqslant 5$. Број решења: 3.
- $n = 44$:
  $2a + 43d = 91$; d је непаран број и $1 \leqslant d \leqslant 1$. Број решења: 1.
- $n = 52$:
  $2a + 43d = 91$. Број решења: 1.

Сабирањем добијамо да је укупан број растућих аритметичких низова природних бројева са збиром 2002 једнак 1345. Исто толико има опадајућих низова. Поред тога, за сваки од 15 делитеља броја 2002, различитих од 2002, имамо по један константан низ чији су сви чланови једнаки томе делитељу. Према томе, тражени број је $1345 + 1345 + 15 = 2705$.

295. Применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине добијамо

$$\sin x_1 \cdot \ldots \cdot \sin x_n \leqslant \left(\frac{\sin x_1 + \cdots + \sin x_n}{n}\right)^n. \tag{1}$$

Користећи неједнакост $\sin x \leqslant \dfrac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sqrt{2}}$, која важи на интервалу $(0, \frac{\pi}{2})$ (еквивалентна са $\sin 2x \cdot \cos x \leqslant 1$), имамо даље

$$\left(\frac{\sin x_1 + \cdots + \sin x_n}{n}\right)^n \leqslant \left(\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x_1} + \cdots + \sqrt{\operatorname{tg} x_n}}{n}\right)^n \cdot 2^{-\frac{n}{2}}. \tag{2}$$

Из неједнакости између аритметичке и квадратне средине следи

$$\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x_1} + \cdots + \sqrt{\operatorname{tg} x_n}}{n} \leqslant \sqrt{\frac{\operatorname{tg} x_1 + \cdots + \operatorname{tg} x_n}{n}} \leqslant 1. \tag{3}$$

Из (1), (2) и (3) следи тражена неједнакост.

296. **Прво решење.** Нека је a дужина странице квадрата. Изаберимо координатни систем у равни тако да су темена квадрата тачке $A(0,0)$, $B(0,a)$, $C(a,a)$ и $D(a,0)$. Нека је $M(x,y)$ тачка у унутрашњости квадрата. Тада је

$$x^2 + y^2 = 49, \quad x^2 + (y-2)^2 = 169, \quad (x-a)^2 + (y-a)^2 = 289,$$

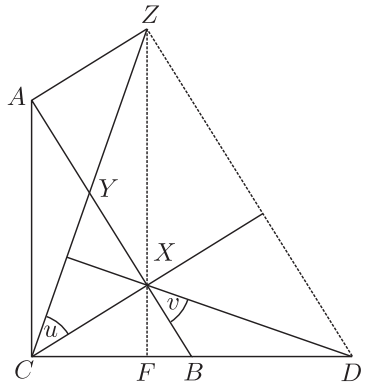
одакле се добија

$$a^2 - 2ay = 120, \quad a^2 - 2ax = 120,$$

тј. $x = y$. Следи да тачка M лежи на дијагонали AC. Дужина дијагонале квадрата је $7 + 17 = 24$, а његова површина $\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 24 = 288$.

Друго решење. Ротацијом за -90° око тачке B, тачка C прелази у тачку A, а тачка M у тачку T тако да је $BT = BM = 13$, $TA = 17$, $\sphericalangle MBT = 90^\circ$. Применом Питагорине теореме на једнакокрако–правоугли троугао MTB добија се да је $TM^2 = 2 \cdot 13^2 = 338$. Како је и $17^2 + 7^2 = 338$, следи да је $\sphericalangle TAM = 90^\circ$, TM је пречник кружнице која пролази кроз тачке A и B. Углови $\sphericalangle BAT$ и $\sphericalangle BAM$ су једнаки, као приферијски над једнаким тетивама, тј. $\sphericalangle BAM = 45^\circ$, па следи да тачка M припада дијагонали AC. Даље је све јасно.

297. Нека је Z тачка на правој CY таква да је Y средиште дужи CZ (слика 97).



Слика 97.

Како је BY средња линија $\triangle CZD$, имамо да је $BY \parallel ZD$, па је и $CX \perp ZD$. Даље, лако се види да је четвороугао $AZXC$ паралелограм, па је $ZX \perp CD$. Дакле, X је ортоцентар троугла CZD, те $DX \perp CY$.

298. Претпоставимо да се поменуте симетрале секу у једној тачки P. Без умањивања општости можемо претпоставити да је $PA_1 \leqslant PA_2 \leqslant PA_3$. Тада тачке A_1 и A_2 припадају кругу са центром P полупречника PA_3; дакле, тачка B_3 припада унутрашњости тога круга. Следи да је $PB_3 < PA_3$. С друге стране, претпоставили смо да је тачка P на симетрали дужи A_3B_3, па је $PA_3 = PB_3$. Контрадикција!

299. Нека је $n = 2^k m > 1$, $k \geqslant 0$ цео број, $m \geqslant 1$ непаран цео број. Сваки непаран делитељ од n је и делитељ од m. Дакле, $\sigma(n)$ и $\sigma(m)$ су бројеви исте парности. Број $\sigma(m)$ је непаран ако и само ако m има непаран број делитеља, а то ће бити случај ако и само ако је m потпун квадрат (у противном се делитељи могу разбити на парове различитих делитеље, при чему је d у пару са $\frac{m}{d}$).

Дакле, $\sigma(n)$ је непаран број ако и само ако је $n = 2^k m$, где је m непаран потпун квадрат, тј. ако и само ако је n потпун квадрат или двоструки квадрат. Од три узастопна природна броја, међутим, бар један није ни потпун квадрат ни двоструки квадрат, одакле следи тврђење.

300. Претпоставимо да n задовољава услове задатка. Тада постоје цели бројеви x и k, такви да је $x > k > 0$ и

$$n^2 = \sum_{j=1}^{k}(x-j)^2 + x^2 + \sum_{j=1}^{k}(x+j)^2 = (2k+1)x^2 + 2q_k \tag{1}$$

где је $q_k = 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2$. Да би n био непаран, мора и x бити непаран број. Узимајући обе стране (1) по модулу 8, добијамо конгруенцију $1 \equiv (2k+1) + 2q_k \pmod 8$, где је

$$k + q_k \equiv 0 \pmod 4. \tag{2}$$

За $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\ldots$ остаци од q_k по модулу 4 су редом: $1, 1, 2, 2, 3, 3, 0, 0, 1\ldots$ Видимо да су најмањи природни бројеви који задовољавају (2): $5, 8, 13$. Одговарајуће вредности за q_k су: $q_5 = 55$, $q_8 = 204$, $q_{13} = 819$.

За $k = 5$, напишимо једначину (1) у облику $n^2 = 11(x^2 + 10)$.
Следи да је $x^2 \equiv 1 \pmod{11}$, тј. $x \equiv 1$ или $x \equiv 10 \pmod{11}$. Како је x непаран цео број већи од 1, видимо да је $x \in \{21, 23, 43, 45, 65, 67, \ldots\}$. За $x = 21$ израз $11(x^2 + 10)$ није потпун квадрат; за $x = 23$ јесте: $11(23^2 + 10) = 77^2$; у овом случају је $n = 77$ и једначина (1) је задовољена. Дакле, за $k = 5$, 77 је најмањи број који задовољава услове задатка.

За $k \geqslant 13$ је $x \geqslant 15$ и, према (1) је $n^2 \geqslant 27 \cdot 15^2 + 2 \cdot 819 > 77^2$.

Једина могућа вредност између 5 и 13 јесте 8. Стављајући $k = 8$ у (1), добијамо $n^2 = 17(x^2 + 24)$, одакле је $x^2 \equiv 10 \pmod{17}$. Међутим, лако се проверава да квадрат не може имати остатак 10 при дељењу са 17.

Закључак је: $n = 77$ је најмањи непаран природан број чији се квадрат може представити у траженом облику: $77^2 = 18^2 + 19^2 + \ldots + 28^2$.

301. Неједнакост

$$\frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5} \leqslant \frac{\sqrt{a}}{b^5\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{a^5\sqrt{a}} \tag{1}$$

еквивалентна је неједнакости

$$\sqrt{ab}\,(a^5 + b^5) \leqslant a^6 + b^6.$$

Увођењем смене $a = x^2$, $b = y^2$, претходна неједнакост се своди на

$$x^{11}y + y^{11}x \leqslant x^{12} + y^{12}. \tag{2}$$

Применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине добијамо

$$\frac{11}{12}x^{12} + \frac{1}{12}y^{12} = \frac{\overbrace{x^{12} + x^{12} + \cdots + x^{12}}^{11\text{ пута}} + y^{12}}{12} \geqslant \sqrt[12]{(x^{12})^{11}y^{12}} = x^{11}y,$$

$$\frac{11}{12}y^{12} + \frac{1}{12}x^{12} = \frac{\overbrace{y^{12} + y^{12} + \cdots + y^{12}}^{11\text{ пута}} + x^{12}}{12} \geqslant \sqrt[12]{(y^{12})^{11}x^{12}} = y^{11}x.$$

Сабирањем последње две неједнакости добијамо неједнакост (2).

302. Математичком индукцијом се лако може показати да за све природне бројеве n важи

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Према томе, треба наћи минимално $n > 1$ за које је $(n+1)(2n+1) = 6x^2$, $x \in \mathbb{N}$. Бројеви $n+1$ и $2n+1$ су узајамно прости

$$(1) \qquad 2(n+1) - (2n+1) = 1.$$

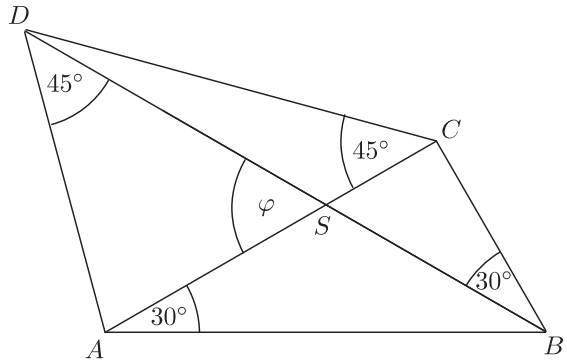
Како је број $2n+1$ непаран, а производ два узајамно проста броја $6x^2$, то су могућа два случаја:

(i) $n+1 = 6p^2,\ 2n+1 = q^2$, где су p и q узајамно прости бројеви и $pq = x$. Из (1) добијамо $2 \cdot 6p^2 - q^2 = 1$, тј. $q^2 = 12p^2 - 1$, одакле је $q^2 \equiv -1 \pmod 3$. Контрадикција!

(ii) $n+1 = 23^2,\ 2n+1 = 3q^2$, где су p и q узајамно прости бројеви и $pq = x$. Из (1) добијамо $4p^2 - 1 = 3q^2$, тј. $(2p-1)(2p+1) = 3q^2$. бројеви $2p-1$ и $2p+1$ су узастопни непарни природни бројеви, па су зато и узајамно прости. Сада опет имамо две могућности:

- $2p+1 = a^2,\ 2p-1 = 3b^2$, где су a и b узајамно прости бројеви, $ab = q$. Тада је $a^2 - 3b^2 = 2$, тј. $a^2 \equiv -1 \pmod 3$. Контрадикција!
- $2p+1 = 3a^2,\ 2p-1 = b^2$, где су a и b узајамно прости бројеви, $ab = q$. Тада је $3a^2 = b^2 + 2$. Провером налазимо да су решења последње једначине $(a,b) \in \{(1,1),(3,5),\ldots\}$. За $a = 1$, $b = 1$ добијамо $n = 1$. За $a = 3$, $b = 5$ је $q = 15$, $2n+1 = 3q^2$, одакле налазимо $n = 337$.

303. Нека је $\sphericalangle ASD = \varphi$ (слика 98).



Слика 98.

Како је $\varphi = \sphericalangle SCD + \sphericalangle SDC = 45^\circ + \sphericalangle SDC = \sphericalangle ADS + \sphericalangle SDC = \sphericalangle ADC$ и, слично $\sphericalangle ABC = \varphi$, из синусне теореме, примењене на $\triangle ASD$ и $\triangle ACD$, имамо

да је $\dfrac{AS}{AD} = \dfrac{\sin 45^\circ}{\sin\varphi}$ и $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{\sin 45^\circ}{\sin\varphi}$, редом. Такође, применом синусне теореме редом на $\triangle CSB$ и $\triangle ABC$ добијамо: $\dfrac{CS}{CB} = \dfrac{\sin 30^\circ}{\sin\varphi}$ и $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{\sin 30^\circ}{\sin\varphi}$. Дакле, $\dfrac{AS}{AC} = \dfrac{AS}{AD}\cdot\dfrac{AD}{AC} = \left(\dfrac{\sin 45^\circ}{\sin\varphi}\right)^2$ и $\dfrac{CS}{AC} = \dfrac{CS}{CB}\cdot\dfrac{CB}{AC} = \left(\dfrac{\sin 30^\circ}{\sin\varphi}\right)^2$. Како је $\dfrac{AS}{AC} + \dfrac{CS}{AC} = 1$, то је $\left(\dfrac{\sin 45^\circ}{\sin\varphi}\right)^2 + \left(\dfrac{\sin 30^\circ}{\sin\varphi}\right)^2 = 1$, одакле после краћег рачуна добијамо да је $\sin^2\varphi = \dfrac{3}{4}$. Дакле, $\varphi = 60^\circ$ или $\varphi = 120^\circ$.

304. Нека је $\operatorname{tg} 20^\circ = x$. Тада важе следеће формуле:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3},\\
&\operatorname{tg} 40^\circ = \operatorname{tg}(60^\circ - 20^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 20^\circ}{1 + \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 20^\circ} = \frac{\sqrt{3} - x}{1 + x\sqrt{3}},\\
&\operatorname{tg} 80^\circ = \operatorname{tg}(60^\circ + 20^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ}{1 - \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 20^\circ} = \frac{\sqrt{3} + x}{1 - x\sqrt{3}},\\
&\operatorname{tg} 70^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 20^\circ} = \frac{1}{x},\\
&\sqrt{3} = \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg} 3\cdot 20^\circ = \frac{3\operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{tg}^3 20^\circ}{1 + \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 20^\circ} = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}.
\end{aligned}$$

Сада се једноставно добија:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 80^\circ &= \frac{\sqrt{3} - x}{1 + x\sqrt{3}} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3} + x}{1 - x\sqrt{3}}\\
&= \frac{3\sqrt{3} - x^2\sqrt{3}}{1 - 3x^2} = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{x} = \frac{3}{x} = 3\operatorname{tg} 70^\circ.
\end{aligned}$$

305. Имамо:

$$n^4 - 4n^3 + 14n^2 - 20n + 10 = (n-1)^4 + 8(n-1)^2 + 1 = ((n-1)^2 + 4)^2 - 15.$$

Нека је за неки природан број k

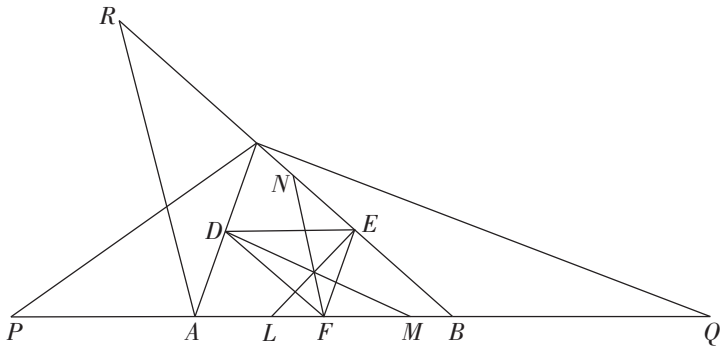
$$((n-1)^2 + 4)^2 - 15 = k^2.$$

Треба да нађемо све целе бројеве k за које је $m^2 - k^2 = 15$, тј. $(m-k)(m+k) = 15$, при чему је $m = (n-1)^2 + 4 \geqslant 4$. Због услова $m \geqslant 4$ можемо да игноришемо негативне факторе па преостаје да размотримо само следеће две могућности:

(1) $m - k = 1$, $m + k = 15$, одакле се добија да је $m = 8$, $(n-1)^2 = 4$, $n - 1 = \pm 2$, па добијамо два решења: $n = 3$ и $n = -1$.

(2) $m - k = 3$, $m + k = 5$, одакле је $m = 4$, $(n-1)^2 = 0$, $n - 1 = 0$, па добијамо још једно решење: $n = 1$.

306. Без смањења општости претпоставимо да је $AB \geqslant BC \geqslant AC$. Нека је P тачка на правој AB с друге стране тачке A у односу на B, таква да је $AC = AP$ (слика 99). Аналогно, нека су Q и R тачке на правама AB и BC, са друге стране тачке B у односу на A, односно са друге стране тачке C у односу на B, такве да је $BC = BQ$ и $AC = RC$.



Слика 99.

Сада су тачке L, M, N редом средишта дужи PB, AQ и RB. Дужи LE, NF и DM су средње линије троуглова BCP, ABR и AQC. Како је

$$\sphericalangle APC = \sphericalangle ACP = \frac{\sphericalangle BAC}{2} = \frac{\alpha}{2},$$

и $LE \parallel PC$ то је $\sphericalangle ELB = \dfrac{\alpha}{2}$. Због $DE \parallel AB$ следи $\sphericalangle DEL = \sphericalangle ELB = \dfrac{\alpha}{2}$. Како је $\sphericalangle DEF = \alpha$, то је $\sphericalangle DEL = \sphericalangle LEF$, па је LE симетрала $\sphericalangle DEF$ у $\triangle DEF$. Аналогно закључујемо да су праве FN и DM такође симетрале углова DFE и EDF, редом. Ове три праве се секу у једној тачки – центру уписаног круга $\triangle DEF$.

307. Скуп од 10 елемената има $2^{10} - 1 = 1023$ непразних подскупова. Највећи збир 10 различитих елемената не већих од 106 једнак је $106 + 105 + \cdots + 98 + 97 = 1015$. По Дирихлеовом принципу постоје два различита подскупа са истим збиром елемената. Означимо их са A и B. Ако су A и B дисјунктни, онда је задатак решен. У противном одстранимо заједничке елементе из A и B да бисмо добили два подскупа са траженим својством. Не могу оба добијена подскупа бити празна, јер би то значило да су одстрањени сви елементи из A и B, што значи да A и B нису различити. Не може се добити ни само један празан подскуп, јер би то значило да A и B немају једнаке збирове елемената.

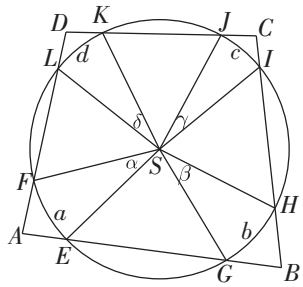
308. Нека важе ознаке као на слици 100.

За кружни лук x над углом φ важи $x = \varphi R$, где је R полупречник круга. Дакле, важи следећа еквиваленција

$$a + c = b + d \Leftrightarrow (\alpha + \gamma)R = (\beta + \delta)R \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta.$$

Троуглови ESG, HSI, JSK и LSF су једнакокраки. Важи:

$$\begin{aligned}\sphericalangle A+\sphericalangle C &= (360^\circ-\sphericalangle AES-\sphericalangle AFS-\alpha)+(360^\circ-\sphericalangle CIS-\sphericalangle CJS-\gamma)\\ &= \sphericalangle SEG+\sphericalangle SFL-\alpha+\sphericalangle SIH+\sphericalangle SJK-\gamma\\ \sphericalangle B+\sphericalangle D &= (360^\circ-\sphericalangle SGB-\sphericalangle SHB-\beta)+(360^\circ-\sphericalangle SLD-\sphericalangle SKD-\delta)\\ &= \sphericalangle SGE+\sphericalangle SHI-\beta+\sphericalangle SLF+\sphericalangle SKJ-\delta.\end{aligned}$$



Слика 100.

Сада очигледно важи да је $\sphericalangle A+\sphericalangle C=\sphericalangle B+\sphericalangle D$ ако и само ако је

$$\begin{aligned}&\sphericalangle SEG+\sphericalangle SFL+\sphericalangle SIH+\sphericalangle SJK-\alpha-\gamma\\ =&\sphericalangle SGE+\sphericalangle SLF+\sphericalangle SHI+\sphericalangle SKJ-\beta-\delta,\end{aligned}$$

што је тачно због једнакокраких троуглова и $\alpha+\gamma=\beta+\delta$. Из $\sphericalangle A+\sphericalangle C=\sphericalangle B+\sphericalangle D$ следи да је четвороугао $ABCD$ тетиван.

309. Претпоставимо супротно, тј. да је збир бројева којима су узначена три узастопна темена увек мањи или једнак 20. Нека су $a_1,a_2,\ldots,a_{12}$ редом бројеви којима су означена темена 12−угла. Тада је

$$a_1+a_2+\cdots+a_{12}=1+2+\cdots+12=78.$$

нека је $a_{12}=12$. Тада је $a_1+a_1\leqslant 8$ и $a_{10}+a_{11}\leqslant 8$. Из неједнакости $a_9+a_8+a_7\leqslant 20$, $a_6+a_5+a_4\leqslant 20$ и $a_1+a_2+a_{12}+a_{11}+a_{10}\leqslant 20+8$ сабирањем добијамо $78-a_3\leqslant 68$, одакле једноставно следи $a_3\geqslant 10$.

Аналогно, из $a_8+a_7+a_6\leqslant 20$, $a_5+a_4+a_3\leqslant 20$ и $a_1+a_2+a_{12}+a_{11}+a_{10}\leqslant 20+8$ добијамо $a_9\geqslant 10$; из $a_9+a_8+a_7\leqslant 20$, $a_5+a_4+a_3\leqslant 20$ и $a_1+a_2+a_{12}+a_{11}+a_{10}\leqslant 20+8$ добијамо $a_6\geqslant 10$.

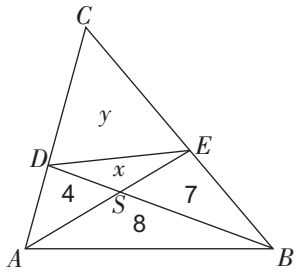
Дакле, важи $a_3,a_6,a_9\geqslant 10$, а наравно $a_3,a_6,a_9\leqslant 11$. Контрадикција!

310. Нека су површине троуглова DSE и CDE редом x и y (видети слику 101).

Важи:

$$\frac{8}{7}=\frac{P_{\triangle ASB}}{P_{\triangle SBE}}=\frac{\frac{AS\cdot h_1}{2}}{\frac{SE\cdot h_1}{2}}=\frac{AS}{SE},\quad \frac{4}{x}=\frac{P_{\triangle ASD}}{P_{\triangle SDE}}=\frac{\frac{AS\cdot h_2}{2}}{\frac{SE\cdot h_2}{2}}=\frac{AS}{SE},$$

одакле се једноставно добија $x = \dfrac{7}{2}$.



Слика 101.

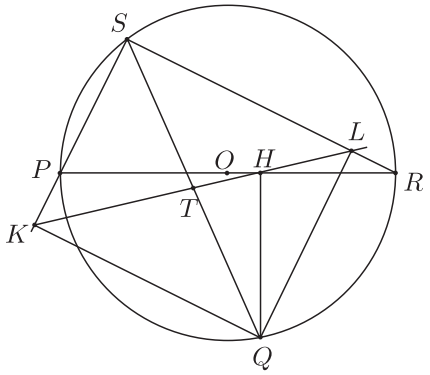
Слично, из

$$\frac{4+\frac{7}{2}}{y} = \frac{P_{\triangle ADE}}{P_{\triangle CDE}} = \frac{\frac{AD\cdot h_3}{2}}{\frac{CD\cdot h_3}{2}} = \frac{AD}{CD}, \quad \frac{4+8}{y+\frac{7}{2}+7} = \frac{P_{\triangle ABD}}{P_{\triangle CDB}} = \frac{\frac{AD\cdot h_4}{2}}{\frac{CD\cdot h_4}{2}} = \frac{AD}{CD},$$

следи $y = \dfrac{35}{2}$. Коначно, $P_{CDSE} = x + y = 21$.

311. Нека је $AB = a$, $\sphericalangle EBC = \alpha$. Тада је $\sphericalangle EBC = \sphericalangle FED = \alpha$, па су троуглови BCE и EDF слични, одакле је $\dfrac{BC}{CE} = \dfrac{DE}{DF}$, тј. $\dfrac{a}{\frac{a}{2}} = \dfrac{\frac{a}{2}}{DF}$. Сада лако добијамо $DF = \dfrac{a}{4}$ и $AF = a - \dfrac{a}{4} = \dfrac{3}{4}a$, па је $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{AB}{AF} = \dfrac{4}{3}$.

312. Нека је O центар круга описаног око четвороугла $ABCD$. Ако је L подножје нормале из Q на RS, тада су H, K и L колинеарне тачке, према Симсоновој теореми: *Подножја нормала на странице троугла из произвољне тачке описане кружнице су колинеарне тачке.*



Слика 102.

Нека је $SQ \cap KH = \{T\}$ (слика 102). Није тешко видети да је четвороугао $KQLS$ правоугаоник, те се његове дијагонале KL и SQ полове, тј. T је средиште дужи SQ.

313. Решићемо проблем у општем случају кад се ради о пермутацијама првих n природних бројева.

Придружимо пермутацији $p = a_1a_2\dots a_n$ број

$$S_p = \sum_{i=1}^{n} s_i \cdot 2^i$$

где је

$$s_i = \begin{cases} 1, & a_i = i \\ 0, & a_i \neq i. \end{cases}$$

Ако се на пермутацију p чији је први елемент различит од 1 примени наведена операција, онда за добијену пермутацију q важи: $S_q > S_p$. Како је максимална вредност коју може имати величина S једнака

$$\sum_{i-1}^{n} 2^i = 2^{n-1} - 1,$$

то се наведени процес мора завршити у коначном броју корака, а то је могуће само кад на првом месту у пермутацији буде број 1.

314. Из $b \mid c^2+1$ и $c \mid b^2+1$ следи да су b и c узајамно прости бројеви и да $bc \mid b^2+c^2+1$. Дакле,

$$b^2+c^2+1 = nbc, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Због $(b-c)^2+1 = (n-2)bc$ је $n \geqslant 3$.

Посматрајмо сада једначину по (x, y)

$$(*). \qquad x^2+y^2+1 = nxy,$$

Када је (b_0, c_0) решење једначине $(*)$, тада су решења такође и уређени парови $(b_0, nb_0 - c_0)$ и $(nc_0 - b_0, c_0)$. Претпоставимо да је $b_0 \leqslant c_0$. Једначина $(*)$ мора имати минимално решење по другој координати и нека је то (b_0, c_0). Одатле следи

$$(**) \qquad b_0 \leqslant c_0 \leqslant \frac{nb_0}{2}\,.$$

Како је (b_0, c_0) решење једначине $(*)$ важи

$$\left(c_0 - \frac{nb_0}{2}\right)^2 = \left(\frac{nb_0}{2}\right)^2 - b_0^2 - 1,$$

а због $(**)$ важи $0 \leqslant \frac{nb_0}{2} - c_0 \leqslant \frac{nb_0}{2} - b_0$, што заједно са $(**)$ даје

$$\left(\frac{nb_0}{2} - b_0\right)^2 \leqslant \left(\frac{nb_0}{2}\right)^2 - b_0^2 - 1,$$

одакле добијамо $(n-2)b_0^2 \leqslant 1$, па је $n = 3$.

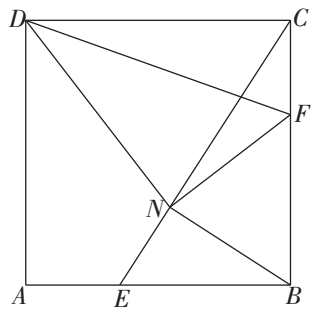
Како је

$$\frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{1}{bc} = \frac{b^2 + c^2 + 1}{bc}$$

тражена вредност израза је 3.

315. Важи: $\sphericalangle DCN = \sphericalangle NEB = \sphericalangle NBF$ (слика 103). Покажимо да су троуглови CND и BNF слични. Како су углови DCN и NBF једнаки, то остаје да се покаже да је $\dfrac{CN}{BC} = \dfrac{BN}{BE}$. Из $CD = BC$ и $BF = BE$, је

$$\frac{CN}{BC} = \frac{BN}{BE} \Leftrightarrow \triangle BNE \sim \triangle CNB\,.$$



Слика 103.

Дакле, важи: $\triangle CND \sim \triangle BNF$, одакле је $\sphericalangle NDC = \sphericalangle NFB$, што значи да је $\sphericalangle NDC + \sphericalangle NFC = 180^\circ$. Четвороугао $DNFC$ је тетиван, па је

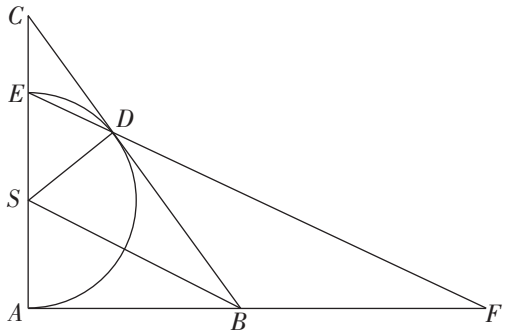
$$\sphericalangle DNF = 180^\circ - \sphericalangle FCD = 90^\circ.$$

316. Ако се сви учесници међособно познају задатак је тривијалан. Зато претпоставимо да постоји пар ученика A и B који се не познају.

(а) Довољно је доказати да се свака два учесника, различита од A и B међусобно познају. Тако, ако су X и Y произвољна два учесника различита од A и B, тада по претпоставци задатка бар један учесник од A, B, X и Y познаје осталих троје. Пошто се A и B не познају, следи да X (или Y) познаје A, B, Y (или X); у сваком случају, X и Y се познају. Дакле, произвољно изабран учесник, различит од A и B, познаје све остале учеснике такмичења.

(б) Нека постоји особа C, различита од A и B, која не познаје све такмичаре. Ако она не би постојала задатак је решен. На основу дела (а) следи да он не познаје или особу A или особу B. Сада закључујемо да свака четврта особа D мора да познаје све три особе A, B и C.

317. Нека је S центар уписане полукружнице (слика 104). Како је $SD = SA$ правоугли троуглови SAB и SDB су подударни, па је $AB = BD$.



Слика 104.

Даље, $\sphericalangle AEF = 90^\circ - \sphericalangle BFD$, $\sphericalangle BDF = \sphericalangle EDC$, $\sphericalangle EDS = 90^\circ - \sphericalangle BDF$, $\sphericalangle SED = \sphericalangle SDE$ (јер је $SE = SD$), па је $90^\circ - \sphericalangle BFD = 90^\circ - \sphericalangle BDF$, односно $\sphericalangle BDF = \sphericalangle BFD$, па је $BF = BD$ и коначно, због $AB = BD$, добијамо $AB = BF$.

318. Нека је n број страница многоугла. Величине углова изражаваћемо у степенима. Како величине углова образују аритметичку прогресију, њен n–ти члан је

$$\alpha_n = x + (n-1) \cdot \frac{1}{3}x.$$

Како је многоугао конвексан, то је $x + (n-1)\frac{1}{3}x < 180$. Збир углова многоугла једнак је

$$\frac{(2x + \frac{1}{3}x(n-1))n}{2} = \frac{nx(5+n)}{6} = 180(n-2).$$

Следи да је $nx(5+n) = 180 \cdot 6(n-2)$, тј.

$$x = \frac{180 \cdot 6(n-2)}{n(5+n)}\,.$$

Закључујемо да је

$$x + (n-1)\frac{1}{3}x = \frac{180 \cdot 6(n-2)(2+n)}{3n(5+n)} < 180,$$

тј.

$$\frac{2(n-2)(2+n)}{n(5+n)} < 1,$$

односно $n^2 - 5n - 8 < 0$, одакле следи неједнакост

$$\frac{5-\sqrt{57}}{2} < n < \frac{5+\sqrt{57}}{2}\,.$$

Према томе, највећи број страница једнак је 6. Такав шестоугао се лако налази.

319. Нека је R_1 полупречник круга описаног око $\triangle ABD$, а R_2 полупречник круга описаног око $\triangle ACD$. Из синусне теореме закључујемо

$$AB = 2R_1 \sin \sphericalangle BDA, \quad AC = 2R_2 \sin \sphericalangle ADC.$$

Како је $\sphericalangle ADB + \sphericalangle ADC = 180^\circ$, то је $\sin \sphericalangle BDA = \sin \sphericalangle ADC$, па је количник

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{AB}{AC},$$

дакле, константан.

320. Нека је $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $\sphericalangle AED = \sphericalangle CED = \varphi$, $AE = x$. Из $\triangle AED$ добијамо $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{x}$, а из $\triangle EBC$

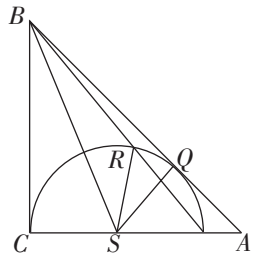
$$\operatorname{tg}(180^\circ - 2\varphi) = -\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{b}{a-x}.$$

Заменом добијених израза у $\operatorname{tg} 2\varphi = \dfrac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi}$ добијамо

$$-\frac{b}{a-x} = \frac{2\cdot\frac{b}{x}}{1-\left(\frac{b}{x}\right)^2},$$

односно, након сређивања, $x^2 - 2ax + b^2 = 0$. Решења последње једначине су $a \pm \sqrt{a^2-b^2}$, па је, због услова $x < a$, $x = a - \sqrt{a^2-b^2}$.

321. Нека је $AC = BC = a$. Како је $CS = SQ$ (слика 105), правоугли троуглови BCS и BQS су подударни, па је $\sphericalangle CBS = \sphericalangle SBA = 22^\circ 30'$.



Слика 105.

Даље имамо

$$BP^2 = CP^2 + BC^2 = 4CS^2 + a^2 = a^2(4\operatorname{tg}^2 22^\circ 30' + 1) = a^2\left(4\,\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + 1\right),$$

јер је

$$\operatorname{tg}^2\frac{45^\circ}{2} = \left(\frac{\sin 22^\circ 30'}{\cos 22^\circ 30'}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}}}\right)^2 = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}.$$

Из потенције тачке B у односу на кружницу је $BR \cdot BP = a^2 = BC^2$, па добијамо

$$\frac{BR}{PR} = \frac{BR}{BP - BR} = \frac{\frac{BR}{BP}}{1 - \frac{BR}{BP}} = \frac{\frac{a^2}{BP^2}}{1 - \frac{a^2}{BP^2}} = \frac{a^2}{BP^2 - a^2}$$
$$= \frac{1}{\frac{BP^2}{a^2} - 1} = \frac{1}{\left(4\,\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + 1\right) - 1} = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2.$$

322. Јасно је да збир цифара броја који је дељив са 2003 не може бити 1, јер за свако $k \in \mathbb{N}$ важи $10^k \not\equiv 0 \pmod{2003}$. Показаћемо да је немогуће да збир цифара броја дељивог са 2003 буде 2. Одмах се види да је

$$2\overbrace{00\ldots0}^{k} = 2 \cdot 10^k \not\equiv 0 \pmod{2003}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Посматрајмо сада бројеве облика

$$1\underbrace{00\ldots01}_{n}\overbrace{00\ldots0}^{m} = 10^n + 10^m = 10^m(10^{n-m} + 1), \quad n \geqslant m.$$

Бројеви овог облика су дељиви са 2003 ако и само ако постоји природан број k такав да је $10^k \equiv -1 \pmod{2003}$. Ако би такав број k постојао, имали бисмо $1001 \mid 2k$, тј. $1001 \mid k$, јер је 1001 поредак броја 10 по модулу 2003 (оставља се читаоцима да ово покажу). Контрадикција!

Тражени минимални збир цифара је 3, јер ја на пример број $10^{301} + 2$ дељив са 2003.

323. Лако се доказује (на пример, индукцијом) следеће тврђење:

Ако су бројеви уписани у последњу врсту n–страшне пирамиде $a_1, a_2, \ldots, a_n$, онда је број на врху пирамиде једнак

$$S = \binom{n-1}{0}a_1 + \binom{n-1}{1}a_2 + \cdots + \binom{n-1}{n-1}a_n.$$

Ако је $n-1$ бројева последње врсте већ изабрано, онда се последњи број увек може изабрати тако да израз S буде дељив са 2003. Заиста, претпоставимо да је преостало да се изабере само број a_i у i–том пољу последње врсте. Нека је $S - \binom{n-1}{i-1}a_i \equiv k \pmod{2003}$. Како је 2003 прост број, увек је могуће изабрати a_i тако да буде $\binom{n-1}{i-1}a_i \equiv 2003 - k \pmod{2003}$. То гарантује да ће број S бити дељив са 2003.
Јасно је, такође, да се последњи број може изабрати и тако да број S не буде дељив са 2003.

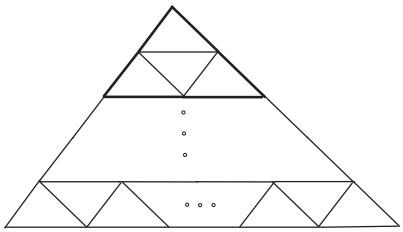
Према томе, само последњи изабрани број одлучује да ли ће број на врху пирамиде бити дељив са 2003. Ако је n непарно, последњи број уписује први играч, у противном други. Према томе, ако је n непаран број, онда први играч има победничку стратегију, а ако је n паран – други.

324. Из датог система следи да је $|x+y-4| = |x-3+y-1| = |x-3|+|y-1|$, а ово је тачно само ако су $x-3$ и $y-1$ истог знака. Дакле, решења треба тражити у областима $D_1 = \{(x,y) \mid x \geqslant 3,\ y \geqslant 1\}$ и $D_2 = \{(x,y) \mid x \leqslant 3,\ y \leqslant 1\}$.
У области D_1 систем је еквивалентан једначини $x+y-4=5$, па је скуп решења у тој области $R_1 = \{(x,y) \mid y = 9-x,\ 3 \leqslant x \leqslant 8\}$.
У области D_2 систем је еквивалентан једначини $x+y=-1$, па је скуп решења у овој области $R_2 = \{(x,y) \mid y = -1-x,\ -2 \leqslant x \leqslant 3\}$. Дакле, скуп решења полазног система је $R = R_1 \cup R_2$.

325. Најпре уочимо да можемо направити четири једночлане групе $\{1\}$, $\{4\}$, $\{9\}$ и $\{16\}$, као и да бројеви $11, 13, 17$ и 19 не могу бити ни у једној групи, јер су прости и нису делитељи ниједног другог броја од 1 до 20. Дакле, за комбиновање нам преостају $2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 18$ и 20. Покушавамо прво да формирамо што више двочланих група са датим својством. То су $\{3, 12\}$, $\{5, 20\}$ и $\{8, 18\}$. Напоменимо да не групишемо 2 и 18, јер би у том случају било мање могућности за даља комбиновања. Од преосталих бројева формирамо две трочлане групе $\{2, 7, 14\}$, $\{6, 10, 15\}$. Дакле, може се направити највише 9 група са траженим својством.

326. Да би број био дељив са 3 његов збир цифара такође мора бити дељив са 3. Стога је број седмица у том броју 0, 3 или 6. Број 3333333, као и бројеви са шест седмица нису дељиви са 7. Дакле, тражени бројеви имају три седмице и четири тројке. Како је $3 \equiv 3 \pmod 7$, $30 \equiv 2 \pmod 7$, $300 \equiv 6 \pmod 7$, $3000 \equiv 4 \pmod 7$, $30000 \equiv 5 \pmod 7$, $300000 \equiv 1 \pmod 7$, $3000000 \equiv 3 \pmod 7$, да би дати број био дељив са 7 закључујемо да треба комбиновати остатке $(1, 2, 5, 6)$, $(2, 3, 3, 6)$, $(1, 3, 4, 6)$ и $(2, 3, 4, 5)$, одакле на основу прве две групе долазимо до бројева 7337337 и 3777333, а на основу друге две до 7373373, 3373377, 7733733 и 3733737.

327. Произвољни троугао увек можемо поделити на n^2 подударних троуглова који (слика 106) $(1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2)$. Одговарајућим спајањем по 4 или 9 таквих троуглова добијамо такође троугао сличан полазном, а укупан број троуглова се умањује за 3, односно 8.



Слика 106.

(a) Како је $45^2 - 7(2^2-1) = 2025 - 21 = 2004$, закључујемо да је могуће произвољни троугао поделити на 2004 троугла који су му слични.

(б) Слично, могуће је произвољни троугао поделити на 2003 троугла који су му слични, јер је $45^2 - 2(2^2-1) - 2(3^2-1) = 2025 - 22 = 2003$.

328. Нека је a_i број урађених задатака током првих i дана припрема (укључујући и задатке урађене i-тог дана). Тада важи $1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_{67} \leqslant 100$ и $34 \leqslant a_1 + 33 < a_2 + 33 < \cdots < a_{67} + 33 \leqslant 133$. Стога, међу 134 броја $a_1, \ldots, a_{67}, a_1 + 33, \ldots, a_{67} + 33$ морају постојати два једнака, тј. постоје i и j такви да је $a_i = a_j + 33$.
Дакле, ученик ће урадити тачно 33 задатка током $(j+1)$-ог, $(j+2)$-ог, ..., i-тог дана.

329. (а) Решења дате једначине су $x_1 = a - 1$ и $x_2 = 3 - 2a$.

(б) Сада треба решити једначине $|x_1| = 2|x_2|$ и $|x_2| = 2|x_1|$, тј. једначине

$$|a-1| = 2|3-2a| \quad \text{и} \quad |3-2a| = 2|a-1|.$$

Разликујемо следеће случајеве:

$$a < 1, \;\; 1 \leqslant a < \frac{3}{2} \;\; \text{и} \;\; a \geqslant \frac{3}{2}.$$

Прва једначина има решења $\frac{7}{5}$ и $\frac{5}{3}$, а друга $\frac{5}{4}$. Дакле, за $a \in \left\{\frac{7}{5}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}\right\}$ апсолутна вредност једног корена је два пута већа од апсолутне вредности другог корена.

330. Приметимо да је $x^2+3x-4+2x^2-5x+3 = 3x^2-2x-1$, па ако уведемо смену $a = x^2+3x-4$, $b = 2x^2-5x+3$ тада је $3x^2-2x-1 = a+b$. Полазна једначина је сада еквивалентна са $a^3+b^3 = (a+b)^3$, односно са $ab(a+b) = 0$. Стога су решења полазне једначине корени квадратних једначина $x^2+3x-4 = 0$, $2x^2-5x+3 = 0$ и $3x^2-2x-1 = 0$. Дакле, $x \in \left\{-4, 1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right\}$.

331. Ако прву једначину помножимо са 2, па од ње одузмемо другу, добијамо $ab = 2a - b$, тј. $a(b-2) = -b$. Очигледно $b = 2$ није решење, па $a = -\frac{b}{b-2}$ можемо уврстити у прву једначину и тако добити једначину четвртог степена по b. Ова једначина има два реална корена $b_1 = 0$ и $b_2 = 1$. Стога су $(0,0)$ и $(1,1)$ једина два пара реалних бројева који задовољавају полазни систем једначина.

332. Дата једначина је биквадратна, па су њена решења симетрична у односу на координантни почетак, а како и образују аритметичку прогресију, она су облика

$$-\frac{3}{2}d, \; -\frac{1}{2}d, \; \frac{1}{2}d, \; \frac{3}{2}d.$$

Ако уведемо смену $t = x^2$ полазна једначина постаје $t^2 - (3p+2)t + p^2 = 0$, и решења ове једначине су $t_1 = \frac{1}{4}d^2$ и $t_2 = \frac{9}{4}d^2$. Сада, помоћу Вијетових

формула за квадратне једначине добијамо

$$\frac{1}{4}d^2 + \frac{9}{4}d^2 = 3p + 2, \quad \frac{1}{4}d^2 \cdot \frac{9}{4}d^2 = p^2,$$

односно

$$\frac{5}{2}d^2 = 3p + 2, \quad \frac{9}{16}d^4 = p^2.$$

Из претходне две једначине добијамо $9p + 6 = 10|p|$, па су тражене вредности за параметар p бројеви 6 и $-\frac{6}{19}$.

333. Задатак ћемо урадити помоћу математичке индукције. Проверимо прво да ли тврђење важи за прва два члана низа. Заиста, $y_0 = 1,\ y_1 = 2 \in \mathbb{Z}$.
Сада, трансформишемо дату рекурентну формулу, множећи је са 2, а затим квадрирајући и делећи је са 4. Тако добијамо

$$y_{n+1}^2 - 3y_n y_{n+1} + y_n^2 + 1 = 0. \tag{1}$$

Како полазна рекурентна формула важи за све природне бројеве n, и новодобијена има исто својство, па важи и за $n-1$, тј. важи

$$y_n^2 - 3y_n y_{n-1} + y_{n-1}^2 + 1 = 0. \tag{2}$$

Одузимајући сада (2) од (1) добијамо

$$(y_{n+1} - y_{n-1})(y_{n+1} - 3y_n + y_{n-1}) = 0,$$

одакле закључујемо $y_{n+1} = y_{n-1}$ или $y_{n+1} = 3y_n - y_{n-1}$. Значи, ако су y_{n-1} и y_n цели бројеви и y_{n+1} биће цео број. Овим је доказ завршен.

334. Уочимо прво да због дефинисаности логаритма мора бити $x > 0$, $\log_3 x > 0$, $\log_9 \frac{x}{3} > 0$, што је еквивалентно са $x > 3$ (овим је обезбеђена и дефинисаност квадратног корена). Сада, уз услов $x > 3$, користећи познате особине логаритма полазну једначину трансформишемо на следећи начин:

$$\begin{aligned}\log_3 \frac{1}{\sqrt{\log_3 x}} = \log_9 \log_9 \frac{x}{3} &\Leftrightarrow \log_3 \frac{1}{\sqrt{\log_3 x}} = \frac{1}{2}\log_3\left(\frac{1}{2}\log_3 \frac{x}{3}\right)\\ &\Leftrightarrow \log_3 \frac{1}{\sqrt{\log_3 x}} = \log_3 \sqrt{\frac{1}{2}\log_3 \frac{x}{3}}\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\log_3 x}} = \sqrt{\frac{1}{2}\log_3 \frac{x}{3}}\,.\end{aligned}$$

Квадрирањем последње једначине добијамо

$$\log_3 x \cdot \log_3 \frac{x}{3} = 2,$$

односно

$$(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2 = 0.$$

Уводећи сада смену $t = \log_3 x$ последња једначина постаје $t^2 - t - 2 = 0$. Решења ове једначине су $t_1 = 2$ и $t_2 = -1$. Решење t_2 отпада јер води до $x = \frac{1}{3}$ које не задовољава услов дефинисаности $x > 3$. Дакле, једино решење је $\log_3 x = 2$, тј. $x = 9$.

335. Нека је $ABCD$ произвољан тетраедар. Уочимо најдужу ивицу, нека је то на пример AB. Доказаћемо да се бар од једне од тројки ивица (AB, AC, AD) или (BA, BC, BD) може конструисати троугао. Како је AB најдужа ивица, важи

$$AB \geqslant AC,\ AB \geqslant AD,\ BA \geqslant BC,\ BA \geqslant BD,$$

па је довољно доказати да важи бар једна од неједнакости

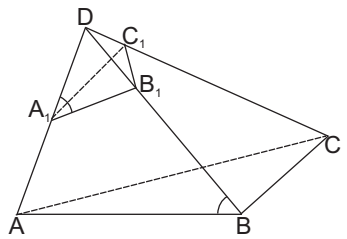
$$AC + AD > AB,\ \ BC + BD > BA.$$

Из троугла ABC имамо да важи $AC + BC > AB$, а из троугла ABD имамо да важи $AD + BD > AB$. Сабирањем ове две неједнакости добијамо

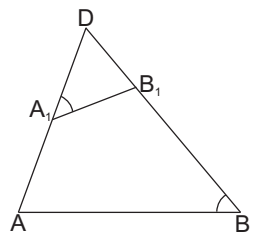
$$(AC + AD) + (BC + BD) > 2AB,$$

одакле закључујемо да је $AC + AD > AB$ или $BC + BD > BA$, што је и требало показати.

336. Раван ABD сече сферу $\mathcal{S}$ по кружници, која садржи тачке A, B, A_1, B_1. Према томе, четвороугао ABA_1B_1 је тетиван (слике 107 и 108). На основу тога добијамо да је $\sphericalangle DA_1B_1 = 180^0 - \sphericalangle B_1A_1A = \sphericalangle DBA$, па како је и $\sphericalangle A_1DB_1 = \sphericalangle BDA$, троуглови DAB и DA_1B_1 су слични. Из ове сличности следи да је $\frac{AB}{DA} = \frac{A_1B_1}{DB_1}$.



Слика 107.



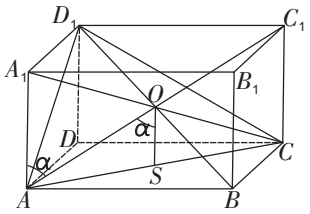
Слика 108.

Аналогно доказујемо да је $\frac{BC}{CD} = \frac{B_1C_1}{DB_1}$. Користећи последње две једнакости и $AB \cdot CD = BC \cdot AD$ добијамо

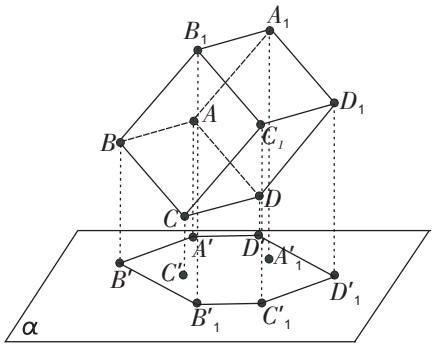
$$A_1B_1 = \frac{AB}{DA} \cdot DB_1 = \frac{BC}{CD} \cdot DB_1 = \frac{B_1C_1}{B_1D} \cdot DB_1 = B_1C_1.$$

Аналогно доказујемо да је $B_1C_1 = C_1A_1$, па следи да је троугао $A_1B_1C_1$ једнакостраничан.

337. Нека је O центар квадра $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и S пресек дијагонала AC и BD стране $ABCD$ (слика 109). Тада је права OS нормална на раван $ABCD$. Троугао AOC је једнакокраки, јер је $OC = OA$. Како је $OS \parallel AA_1$, следи да је $\sphericalangle AOS = \sphericalangle OAA_1 = \alpha$ и $\sphericalangle AOC = 2\alpha$. Аналогно долазимо до закључка да је $\sphericalangle AOD_1 = 2\sphericalangle OAB = 2\beta$ и $\sphericalangle COD_1 = 2\sphericalangle OAD = 2\gamma$. Према томе углови при врху O тетраедра $OACD_1$ једнаки су 2α, 2β и 2γ. Како је $2\alpha + 2\beta + 2\gamma < 2\pi$, добијамо $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.



Слика 109.



Слика 110.

338. Коцка има три четворке паралелних и подударних ивица. Како никоје три ивице из исте четворке нису компланарне, то је њихова нормална пројекција на раван скуп од четири, три или две подударне дужи, или пак скуп од четири тачке. То зависи од њиховог положаја према равни пројекције. Отуда је нормална пројекција коцке на раван конвексан шестоугао или паралелограм. Нека је $ABCDA_1B_1C_1D_1$ коцка ивице a и α произвољна раван (слика 110). Без смањења општости разматрања можемо претпоставити да је теме D најближе равни α. Нормална пројекција коцке је шестоугао $A'B'B_1'C_1'D_1'D'$ (који евентуално дегенерише у паралелограм), чије су наспрамне странице паралелне и подударне. Ако са S означимо површину шестоугла, тада важи $S = 2S_{A'B_1'D_1'}$, такође је $S_{A'B_1'D_1'} = S_{AB_1D_1} \cdot \cos\varphi$, где је φ угао између равни α и AB_1D_1. Дакле, површина S је максимална ако је $\cos\varphi = 1$, тј. $\varphi = 0$. У том случају важи $\alpha \parallel AB_1D_1$. С обзиром да је AB_1D_1 једнакостраничан троугао странице $a\sqrt{2}$, добијамо да је максимална вредност површине нормалне пројекције коцке на раван једнака

$$S_{\max} = 2\frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}.$$

339. (а) Најпре уочимо да је $\log_{\sqrt{2}} 3 > 0$. Ако претпоставимо да је $\log_{\sqrt{2}} 3 \in \mathbb{Q}^+$, то би значило да је

$$\log_{\sqrt{2}} 3 = \frac{p}{q}, \quad \text{где су} \quad p, q \in \mathbb{N}.$$

Сада на основу познатих особина логаритма изводимо следећи еквиваленцијски ланац

$$\log_{\sqrt{2}} 3 = \frac{p}{q} \Leftrightarrow 2\log_2 3 = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \log_2 3 = \frac{p}{2q} \Leftrightarrow 2^{\frac{p}{2q}} = 3 \Leftrightarrow 2^p = 3^{2q} \Leftrightarrow \perp.$$

Дакле, $\log_{\sqrt{2}} 3$ је ирационалан број.

(б) Одговор је потврдан, нпр. $\sqrt{2}^{\log_{\sqrt{2}} 3} = 3$.

340. Уочимо да је $2+\sqrt{3} = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2$. Када једначину помножимо са $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x$, а затим поделимо са 2^x, долазимо до једначине

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x = 1,$$

која је еквивалентна полазној. Лако се види да је једно решење $x = 2$, а како је функција

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x$$

опадајућа, јер је

$$0 < \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}, \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} < 1,$$

закључујемо да је $x = 2$ једино решење.

341. Полазећи од неједнакости $2 < \left(1 + \frac{1}{10^n}\right)^{10^n} < e$ (прву неједнакост можемо доказати уз помоћ Бернулијеве неједнакости, док је друга последица познатог резултата да растући низ бројева $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$, $n \to +\infty$) закључујемо да је

$$\frac{1}{e} < 1,\underbrace{00\ldots0}_{n-1}1^{-10^n} < \frac{1}{2},$$

тј.

$$\frac{1}{2} < 1 - 1,\underbrace{00\ldots0}_{n-1}1^{-10^n} < 1 - \frac{1}{e}.$$

Множећи последњу неједнакост са 6 добијамо

$$3 < 6\left(1 - 1,\underbrace{00\ldots0}_{n-1}1^{-10^n}\right) < 6\left(1 - \frac{1}{e}\right) < 4,$$

што повлачи

$$\left[6\left(1 - 1,\underbrace{00\ldots0}_{n-1}1^{-10^n}\right)\right] = 3.$$

342. (а) Лако се уочава да функција $f(x) = x$, за $x \in \mathbb{R}$ задовољава тражени услов.

(б) Ако ставимо $x = y$ у

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y)), \tag{1}$$

добијамо да је $f(0) = 0$.

Стављајући $y = 0$ добијамо $f(x) = \dfrac{f(x^2)}{x}$. Сада лако долазимо до закључка да је функција f непарна, јер је $f(-x) = \dfrac{f((-x)^2)}{-x} = -f(x)$. Дефинишимо функцију $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ са

$$g(x) = \begin{cases} a, & x = 0 \\ \dfrac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \end{cases}$$

где је a произвољан реалан број.

Овако дефинисана функција је парна и

$$f(x) = xg(x) \quad \text{за свако} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Примењујући релације (1) и (2) закључујемо

$$f(x^2-y^2) = (x^2-y^2)g(x^2-y^2) = (x-y)(f(x)+f(y)) = (x-y)(xg(x)+yg(y))$$

за свако x, $y \in \mathbb{R}$. Према томе, за $x \neq y$ имамо

$$(x + y)g(x^2 - y^2) = xg(x) + yg(y). \tag{3}$$

Када y заменимо са $-y$ у релацији (3) добијамо

$$(x - y)g(x^2 - y^2) = xg(x) - yg(y). \tag{4}$$

Сада, сабирајући (3) и (4) добијамо

$$xg(x^2 - y^2) = xg(x). \tag{5}$$

Дакле, за $x \neq 0$ важи

$$g(x^2 - y^2) = g(x). \tag{6}$$

Слично, када x и y замене места добијамо да за $y \neq 0$ важи

$$g(x^2 - y^2) = g(y). \tag{7}$$

Сада, дефиниција функције g и релације (6) и (7) намећу закључак $g(x) = a$ за свако $x \in \mathbb{R}$, па је

$$f(x) = ax \quad \text{за свако} \quad x \in \mathbb{R}.$$

343. Обележимо са $S(n)$ број природних бројева који су мањи или једнаки n и могу се представити у облику

$$x = x_1^3 + x_2^5 + x_3^7 + x_4^9 + x_5^{11}, \tag{1}$$

Имамо да је

$$x_1^3 + x_2^5 + x_3^7 + x_4^9 + x_5^{11} \leqslant n,$$

и стога

$$1 \leqslant x_k \leqslant \left[\sqrt[2k+1]{n}\right], \quad k = 1, 2, 3, 4, 5. \tag{2}$$

Према томе, укупан број различитих 5-торки $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ које задовољавају неједнакости (2) једнак је

$$A(n) = [\sqrt[3]{n}] \cdot [\sqrt[5]{n}] \cdot [\sqrt[7]{n}] \cdot [\sqrt[9]{n}] \cdot [\sqrt[11]{n}].$$

Сада можемо извршити следећу процену

$$S(n) \leqslant A(n) = [\sqrt[3]{n}] \cdot [\sqrt[5]{n}] \cdot [\sqrt[7]{n}] \cdot [\sqrt[9]{n}] \cdot [\sqrt[11]{n}] \leqslant n^{\frac{1}{3}} \cdot n^{\frac{1}{5}} \cdot n^{\frac{1}{7}} \cdot n^{\frac{1}{9}} \cdot n^{\frac{1}{11}} = n^{\frac{3043}{3465}}.$$

Према томе број природних бројева које није могуће представити у траженом облику је већи или једнак од

$$n - A(n) = n - n^{\frac{3043}{3465}},$$

а лако се види да

$$n - A(n) \to +\infty, \quad n \to +\infty,$$

што значи да постоји бесконачно много природних бројева који се не могу представити у облику (1).

344. (а) Из $xy \in \mathbb{Q}$, $zx \in \mathbb{Q}$ закључујемо да је $xyzx = x^2yz \in \mathbb{Q}$. Како је $yz \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ следи да је $\dfrac{x^2yz}{yz} = x^2 \in \mathbb{Q}$. Слично се доказује да су y^2 и z^2 рационални бројеви, па је и збир $x^2 + y^2 + z^2$ рационалан број.

(б) На основу (а) $x(x^3 + y^3 + z^3) = (x^2)^2 + (xy)y^2 + (xz)z^2 \in \mathbb{Q}$, па ако је $x^3 + y^3 + z^3 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ следи да је и $x \in \mathbb{Q}$.

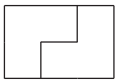
345. Како 3 дели производ pqr један од бројева мора бити 3. Нека је $p = 3$. Тада је $3+q+r = 3qr$, одакле добијамо $4 = (q-1)(r-1)$. Одавде је $q-1 = 1$, $r-1 = 4$ или $q-1 = 4$, $r-1 = 1$ или $q-1 = 2$, $r-1 = 2$. Дакле, тројке бројева $(3, 2, 5)$, $(3, 5, 2)$, $(3, 3, 3)$ су решења. Аналогним поступком, ако је $q = 3$, односно ако је $r = 3$, добијамо још четири решења $(2, 3, 5)$, $(5, 3, 2)$, $(2, 5, 3)$ и $(5, 2, 3)$.

346. Показаћемо да је дати број производ два природна броја већа од 1, па ће стога бити сложен. Заиста,

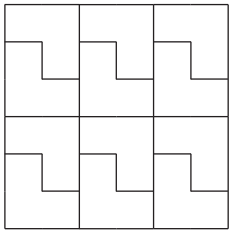
$$\begin{aligned} 4^{545} + 545^4 &= (2^{545})^2 + (545^2)^2 + 2 \cdot 2^{545} \cdot 545^2 - 2 \cdot 2^{545} \cdot 545^2 \\ &= (2^{545} + 545^2)^2 - (2^{273} \cdot 545)^2 \\ &= (2^{545} + 545^2 - 2^{273} \cdot 545)(2^{545} + 545^2 + 2^{273} \cdot 545), \end{aligned}$$

и притом је очигледно $2^{545}+545^2-2^{273}\cdot 545>1$ и $(2^{545}+545^2+2^{273}\cdot 545)>1$. Напоменимо да је идентитет $a^4+4b^4=(a^2+2ab+b^2)(a^2-2ab+b^2)$ познат као идентитет Софи Жермен.

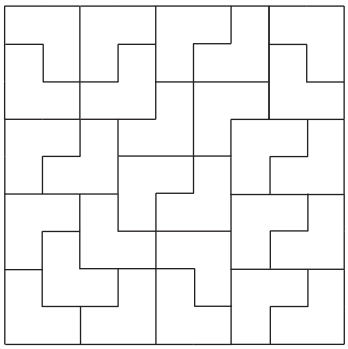
347. Тврђење ћемо доказати индукцијом по n.



Слика 111.



Слика 112.



Слика 113.

За $n=2$ и $n=3$ постоје поплочавања (слике 112 и 113).

Претпоставимо да тврђење важи за неки природан број n и докажимо да важи за $n+2$. Таблу димензија $3(n+2)\times 3(n+2)$ можемо поделити на табле $3n\times 3n$, $6\times 3n$, $6\times 3n$ и 6×6. Табле 6×6 се може поплочати датим фигурама (слика 112), табла $3n\times 3n$ може се поплочати датим фигурама по индуктивној хипотези, а табла $6\times 3n$ може се попунити правоугаоницима димензија 2×3 (слика 111) који су поплочани са две дате фигуре. Тиме је тврђење доказано.

348. Обележимо са r_n остатак при дељењу броја a_n бројем 11. Тада на основу $a_{n+2}=(n+3)a_{n+1}-(n+2)a_n$, закључујемо да важи

$$r_{n+2}=(n+3)r_{n+1}-(n+2)r_n \pmod{11}.$$

Сада није тешко израчунати првих 11 чланова низа (r_n):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
r_n	1	3	9	0	10	4	6	0	1	0	0

Како је $r_{10}=r_{11}=0$, лако се индукцијом може доказати да је $r_n=0 \pmod{11}$, за $n\geqslant 10$. Према томе са 11 су дељиви четврти и осми члан низа, као и сви са индексом већим од 9.

349. Испоставља се да је решење x датог система из сегмента $[0,1]$, јер

$$x<0\Rightarrow x^3<0\Rightarrow y^3>1\Rightarrow y^4>1\Rightarrow x^4<0$$

и

$$x > 1 \Rightarrow x^4 > 1 \Rightarrow y^4 < 0,$$

па су оба случаја немогућа.

Сличним расуђивањем добијамо и да $y \in [0,1]$. За $x,\ y \in (0,1)$ имамо да је $x^4 < x^3$, $y^4 < y^3$, одакле добијамо $x^4 + y^4 < x^3 + y^3$, па нема решења система у овом интервалу. Дакле, једине могућности су $x \in \{0,1\}$ и $y \in \{0,1\}$. Лако се уочава да су решења уређени парови $(0,1)$ и $(1,0)$.

350. Посматрајмо задатак аналитички. Прва једначина у равни $\mathbb{R}^2$ представља унију две праве, $y = x$ и $y = -x$, а друга кружницу са центром у тачки $(a,0)$ полупречника 1. Сада се лако уочава да систем има три решења ако кружница пролази кроз пресек правих, тј. кроз координантни пресек. То ће се десити ако је $a = 1$ или $a = -1$, и тада су решења система $(x,y) \in \{(1,1),\ (1,-1),\ (0,0)\}$, односно $(x,y) \in \{(-1,1),\ (-1,-1),\ (0,0)\}$. Систем ће имати два решења ако су праве $y = x$ и $y = -x$ тангенте дате кружнице, а то ће се десити за $a = \sqrt{2}$ и $a = -\sqrt{2}$. Тада су решења система $(x,y) \in \left\{\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right),\ \left(\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2}\right)\right\}$.

351. Сабирањем све три једначине добијамо $(x-2)^3 + (y-2)^3 + (z-2)^3 = 0$. Лако се уочава да је једно решење система тројка $(2,2,2)$. Остаје још да покажемо да нема других решења. Како је квадратна функција $f(a) = 6a^2 - 12a + 8 = 6(a-1)^2 + 2$ позитивна за свако реално a, закључујемо да су $x,\ y,\ z$ позитивни бројеви. Претпоставка $x > 2$ и трећа једначина доводе до закључка $z > 2$, док $z > 2$ и друга једначина имплицирају $y > 2$. Како за $x,\ y,\ z \in (2,+\infty)$ важи $(x-2)^3 + (y-2)^3 + (z-2)^3 > 0$ закључујемо да се решења још, евентуално, могу наћи у области $(0,2)\times(0,2)\times(0,2)$. Међутим, слично претходном, претпоставка $0 < x < 2$, доводи до $(x-2)^3 + (y-2)^3 + (z-2)^3 < 0$, па ни у овој области нема решења.

352. Око сваке од датих тачака опишимо круг полупречника $\frac{d}{2}$. Према избору d, ови кругови се не секу. Опишимо, затим, око произвољне тачке круг полупречника $1 + \frac{d}{2}$. Овај круг ће садржати све претходне, па упоређујући површине добијамо $\pi\left(1 + \frac{d}{2}\right)^2 > 100\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$, тј. $1 + \frac{d}{2} > 10\frac{d}{2}$, односно $d < \frac{2}{9}$.

353. Тражени задатак се може извршити на следећи начин. Из гомиле од x новчића одвојимо y новчића. Сада имамо две гомиле од y новчића и од $x - y$ новчића. Ако у првој имамо k новчића који су окренути писмом горе, у другој ћемо имати $y - k$ новчића који су окренути писмом горе. Окренимо, сада, све новчиће из прве гомиле. На тај начин у њој ће бити $y - k$ који су окренути писмом горе, а толико их има и у другој гомили.

354. Лако се види да мора бити $x,\ y,\ z > 0$. Сада, користећи прве две једначине добијамо

$$y^{\frac{8}{3}} = x^z = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}z} = (y^z)^{\frac{3}{2}z},$$

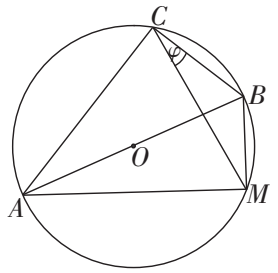
односно,

$$y^{\frac{8}{3}} = y^{\frac{3}{2}z^2}.$$

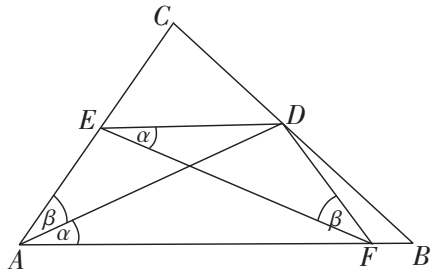
Последња једнакост је тачна ако је $y = 1$ или ако је $\frac{8}{3} = \frac{3}{2}z^2$. Дакле, $y = 1$ или $z = \frac{4}{3}$, па су решења датог система $(1, 1, 1 + \sqrt{3})$ и $\left(\frac{1}{81}, \frac{1}{9}, \frac{4}{3}\right)$.

355. Како је $\sin^2 ax \geqslant 0$, а $\cos x \leqslant 1$, закључујемо да мора бити $\sin^2 ax = 0$ и $\cos x = 1$, одакле је $ax = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ и $x = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Дакле, $a = \frac{n}{2m}$, $m, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Стога следи да једначина има јединствено решење $(x = 0)$ само када је a ирационалан број.

356. Нека је угао $\sphericalangle BCM = \varphi$. Тада је и $\sphericalangle BAM = \varphi$ (периферијски углови над истом тетивом) (слика 114). Троугао $\triangle ABM$ је правоугли ($\sphericalangle BMA = 90^0$ као угао над пречником), па је $\frac{BM}{AM} = \operatorname{tg}\varphi$ и како је $AM > BM$ закључујемо да је $\operatorname{tg}\varphi < 1$. На основу услова задатка имамо и $\operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = 2\sqrt{2}$, па закључујемо да је $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{2} - 1$. Како је $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ следи да је $\varphi = 22^0 30'$. Дакле, $\sphericalangle ABM = 67^0 30' = 3 \cdot 22^0 30' = 3 \cdot \sphericalangle BCM$, што је и требало доказати.



Слика 114.



Слика 115.

357. Четвороугао $AFDE$ је тетиван (слика 115), па важи $\sphericalangle FAD = \sphericalangle FED = \alpha$ и $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DFE = \beta$. Такође је,

$$P_{\triangle DEF} = \frac{1}{2}FE \cdot DF \cdot \sin\beta, \quad P_{\triangle DEF} = \frac{1}{2}FE \cdot DE \cdot \sin\alpha$$

и

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ABD} + P_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}AC \cdot AD \cdot \sin\beta.$$

С друге стране је

$$\begin{aligned} P_{\triangle DEF} &= \frac{1}{2}DE \cdot DF \cdot \sin(\sphericalangle EDF) = \frac{1}{2}DE \cdot DF \cdot \sin\left(180^0 - (\alpha + \beta)\right) \\ &= \frac{1}{2}DE \cdot DF \cdot \sin(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

и $P_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AD \cdot \sin(\alpha+\beta)$. Према томе, важи,

$$\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle DEF}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}AC \cdot AD \cdot \sin\beta}{P_{\triangle DEF}} = \frac{AD}{EF}\left(\frac{AB}{DF} + \frac{AC}{DE}\right)$$

и

$$\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle DEF}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin(\alpha+\beta)}{\frac{1}{2}FE \cdot DF \cdot \sin(\alpha+\beta)} = \frac{AB \cdot AC}{DE \cdot DF}.$$

Дакле,

$$\frac{4P_{\triangle DEF}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{4EF}{AD\left(\frac{AB}{DF} + \frac{AC}{DE}\right)} \leqslant \frac{2EF}{AD\sqrt{\frac{AB \cdot AC}{DF \cdot DE}}} = \frac{EF}{AD} \cdot \sqrt{\frac{4P_{\triangle DEF}}{P_{\triangle ABC}}},$$

односно

$$\frac{4P_{\triangle DEF}}{P_{\triangle ABC}} \leqslant \left(\frac{EF}{AD}\right)^2.$$

358. Нормална пројекција овог тетраедра на произвољну раван може бити троугао или четвороугао. Ако је пројекција троугао, онда се највећа вредност површине пројекције достиже у случају када је једна страна тетраедра паралелна равни на коју се тетраедар нормално пројектује и износи $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Ако је пројекција четвороугао са дијагоналама d_1 и d_2, онда је површина те пројекције једнака $\dfrac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha$, где је α угао између дијагонала. Како су дијагонале d_1 и d_2 нормалне пројекције двеју ивица тетраедра, то је $d_1 \leqslant a$ и $d_2 \leqslant a$. Максимална вредност у овом случају се достиже ако је $d_1 = d_2 = a$ и ако су дијагонале нормалне, и износи $\dfrac{a^2}{2}$. Ова вредност се постиже када су две мимоилазне ивице тетраедра паралелне равни на коју се тетраедар нормално пројектује. Како је $\dfrac{a^2}{2} > \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, закључујемо да је $\dfrac{a^2}{2}$ тражена максимална вредност.

359. (а) Очигледно, скуп решења неједначине је подскуп интервала $(-\infty, 1]$, па решавамо неједначину $2x < x$. Дакле, $x \in (-\infty, 0)$.

(б) Одредимо прво функције $\psi(1-x)$ и $\psi(\psi(x))$. На основу дате дефиниције функције ψ добијамо

$$\psi(1-x) = \begin{cases} 1-x, & x < -1 \\ 2, & -1 \leqslant x < 0 \\ 2-2x, & x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \psi(\psi(x)) = \begin{cases} 4x, & x \leqslant \frac{1}{2} \\ 2, & \frac{1}{2} < x \leqslant 2 \\ x, & x > 2 \end{cases}$$

Сада, једноставним рачуном долазимо до решења $x \in [2, +\infty) \cup \{0\}$.

360. За одговарајуће природне бројеве m и n важи

$$10^{m-1} < 2^{2003} < 10^m \quad \text{и} \quad 10^{n-1} < 5^{2003} < 10^n.$$

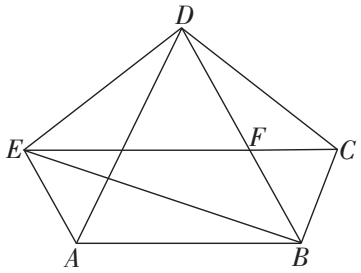
Множењем одговарајућих страна неједнакости добијамо

$$10^{m+n-2} < 10^{2003} < 10^{m+n},$$

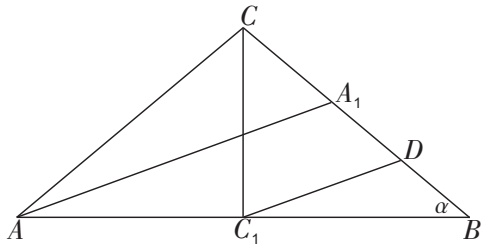
одакле је $m+n-2 < 2003 < m+n$, односно $2003 < m+n < 2005$. Како је $m+n \in \mathbb{N}$, закључујемо да је $m+n = 2004$, тј. број добијен записивањем бројева 2^{2003} и 5^{2003} један за другим има 2004 цифре.

361. Како је $P_{\triangle AED} = P_{\triangle ABE} = 1$ и троуглови $\triangle AED$ и $\triangle AEB$ имају заједничку основицу AE, то су висине из темена B и D на страницу AE једнаке, па су B и D на једнаком растојању од AE, тј. $BD \parallel AE$ (слика 116). Слично долазимо до закључка да је $CE \parallel AB$. Нека је $CE \cap BD = \{F\}$. На основу претходног, четвороугао $ABFE$ је паралелограм и важи $P_{\triangle BFE} = P_{\triangle ABE} = 1$. Приметимо да је $P_{\triangle CDF} + P_{\triangle BFC} = P_{\triangle BDC} = 1 = P_{\triangle CDE} = P_{\triangle CDF} + P_{\triangle DFE}$, па је $P_{\triangle BFC} = P_{\triangle FDE} = P$. Тада је $P_{\triangle CDF} = 1 - P$. Троуглови $\triangle BFE$ и $\triangle FDE$ имају заједничку висину (из E на BD), па им се површине односе као одговарајуће странице, тј. $P : 1 = DF : BF$. Слично, $(1-P) : P = DF : BF$. Стога важи $P : 1 = (1-P) : P$. Решења ове квадратне једначине су $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, и како је $P > 0$, закључујемо да је $P = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Дакле,

$$P_{ABCDE} = P_{ABFE} + P_{BCD} + P_{DEF} = 2 + 1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$



Слика 116.

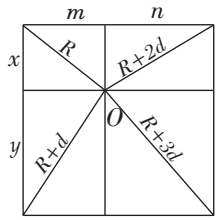


Слика 117.

362. Нека је $\triangle ABC$ (слика 117) посматрани једнакокраки троугао, CC_1 његова висина која одговара основици AB, AA_1 симетрала угла A и α мера углова на основици. Означимо са D средиште дужи BA_1. Тада је C_1D средња линија $\triangle ABA_1$, па је $C_1D = \dfrac{AA_1}{2}$ и $C_1D \parallel AA_1$, одакле је $\sphericalangle BC_1D = \sphericalangle BAA_1 = \dfrac{\alpha}{2}$.

По услову задатка је $AA_1 = 2 \cdot CC_1$, па је на основу претходног $CC_1 = C_1D$. Према томе, $\triangle CC_1B$ је једнакокрак, па је $\sphericalangle DCC_1 = \sphericalangle CDC_1 = 90^0 - \alpha$, одакле је $\sphericalangle CC_1D = 2\alpha$. Како је $\sphericalangle CC_1D + \sphericalangle DC_1B = 2\alpha + \dfrac{\alpha}{2} = 90^0$, закључујемо да је $\alpha = 36^0$, тј. углови у $\triangle ABC$ су 36^0, 36^0 и 108^0.

363. Претпоставимо да постоји квадрат са датим својством. Тада би се заједнички центар концентричних кругова налазио на растојању R од једног, $R + d$ од другог, $R+2d$ од трећег и $R+3d$ од четвртог темена квадрата ($R,\ d \in \mathbb{R}^+$), нпр. као на слици 118 (претпоставком распореда не губимо на општости).



Слика 118.

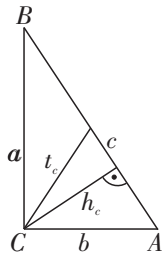
Применом Питагорине теореме на одговарајуће троуглове добијамо

$$x^2 + m^2 = R^2,\ y^2 + m^2 = (R+d)^2,\ x^2 + n^2 = (R+2d)^2,\ y^2 + n^2 = (R+3d)^2.$$

Ако сада од збира прве и четврте једначине одузмемо збир друге и треће добијамо $R^2 - (R+d)^2 - (R+2d)^2 + (R+3d)^2 = 0$, што је еквивалентно са $d = 0$, а како је $d \in \mathbb{R}^+$, закључујемо да не постоји квадрат са траженим својством.

364. Претпоставимо супротно, да је n сложен број. Тада постоји број d такав да је $1 < d < n$ и $d \mid n$. Како је $1 < d < n$ имаћемо да $d \mid (n-1)!$, а из $n \mid ((n-1)!+1)$ следиће $d \mid ((n-1)!+1)$. Сада, из $d \mid (n-1)!$ и $d \mid ((n-1)!+1)$ следи да $d \mid 1$, што је немогуће, па закључујемо да је n мора бити прост број.

365. Обележимо са a и b мерне бројеве катета тог троугла, а са h_c и t_c мерне бројеве висине и тежишне дужи које одговарају хипотенузи (слика 119). Тада је $t_c = \dfrac{c}{2}$ и $h_c = \dfrac{ab}{c}$.



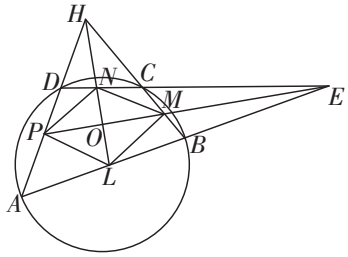
Слика 119.

Када искористимо услов задатка добијамо $\frac{2ab}{c^2} = \frac{40}{41}$, тј. $\frac{ab}{c^2} = \frac{20}{41}$. Како је и $c^2 = a^2 + b^2$, то је $\frac{ab}{a^2+b^2} = \frac{20}{41}$, односно, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{41}{20}$. Сада лако закључујемо да је однос катета тог троугла (веће према мањој) $\frac{5}{4}$.

366. Обележимо са x број мушкараца, са y број жена, а са z број деце. Тада према условима задатка имамо да је $x + y + z = 12$ и $2x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z = 12$, тј. $8x + 2y + z = 48$. Из друге једначине закључујемо да $2 \mid z$, тј. $z = 2k$, за неко $k \in \mathbb{N}_0$, па је $8x + 2y + 2k = 48$, тј. $4x + y + z = 24$. Пошто је $z = 12 - x - 2k$, имамо да је $4x + (12 - x - 2k) + k = 24$, тј. $3x - z = 12$. Из последње неједнакости следи да $3 \mid k$. Како је $0 \leqslant d < 12$ имамо да је $0 \leqslant d < 6$, тј. $k = 0$ или $k = 3$.
Ако је $k = 0$ деце није било, док је било четири мушкарца и осам жена.
Ако је $k = 3$ било је шесторо деце, пет мушкарца и једна жена.

367. Нека је $\sphericalangle BAD = \alpha$ и $\sphericalangle ABC = \beta$ (слика 120). Тада је $\sphericalangle ADC = 180^0 - \beta$ и $\sphericalangle BCD = 180^0 - \alpha$ (јер је четвороугао $ABCD$ тетиван), па је

$$\begin{aligned}
\sphericalangle EBC &= 180^0 - \sphericalangle ABC = 180^0 - \beta,\\
\sphericalangle BCE &= 180^0 - \sphericalangle BCD = 180^0 - (180^0 - \alpha) = \alpha,\\
\sphericalangle HCD &= 180^0 - \sphericalangle BCD = \alpha,\\
\sphericalangle CDH &= 180^0 - (180^0 - \beta) = \beta.
\end{aligned}$$



Слика 120.

Према томе

$$\sphericalangle BEC = 180^0 - (\sphericalangle EBC + \sphericalangle ECB) = 180^0 - (180^0 - \beta + \alpha) = \beta - \alpha,$$

па је $\sphericalangle LEO = \sphericalangle NEO = \frac{\beta - \alpha}{2}$. Слично,

$$\sphericalangle CHD = 180^0 - (\sphericalangle CDH + \sphericalangle DCH) = 180^0 - (\alpha + \beta),$$

па је $\sphericalangle PHO = \sphericalangle MHO = 90^0 - \frac{\alpha + \beta}{2}$. За троугао MEC угао $\sphericalangle OMC$ је спољашњи, па је $\sphericalangle OMC = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{\beta + \alpha}{2}$. Сада, из троугла OMH

закључујемо да

$$\sphericalangle MON = 180^0 - (\sphericalangle OHM + \sphericalangle OMH) = 180^0 - (90^0 - \frac{\beta+\alpha}{2} + \frac{\beta+\alpha}{2}) = 90^0.$$

Дакле у четвороуглу $LMNP$ дијагонале су нормалне. Из троугла PMH закључујемо

$$\begin{aligned}\sphericalangle MPH &= 180^0 - (\sphericalangle PHM + \sphericalangle PMH) = 180^0 - \left(180^0 - (\beta+\alpha) + \frac{\beta+\alpha}{2}\right)\\ &= \frac{\beta+\alpha}{2} = \sphericalangle PMH,\end{aligned}$$

па је троугао PHM једнакокрак. Тада је висина HO троугла PHM и тежишна дуж, па је $PO = OM$. Слично се показује да је и троугао LEN једнакокрак, па је $LO = ON$. Дакле, у четвороуглу $PLMN$ дијагонале су нормалне и полове се, што нас доводи до закључка де је четвороугао $PLMN$ ромб.

368. Најпре уочимо да важи

$$\begin{aligned}(a+b)^7 - a^7 - b^7 &= 7ab\big[a^5 + b^5 + 3ab(a^3+b^3) + 5a^2b^2(a+b)\big]\\ &= 7ab(a+b)(a^4 + 2a^3b + 3a^2 + b^2 + 2ab^3 + b^4)\\ &= 7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2.\end{aligned}$$

Како производ $ab(a+b)$ није дељив са 7, бројеве a и b треба одредити тако да 7^6 дели $(a^2+ab+b^2)^2$, односно да $7^3 \mid a^2+ab+b^2$. Мора бити

$$(a+b)^2 > a^2+ab+b^2 \geqslant 7^3 = 343,$$

тј. $a+b \geqslant 19$. Ако ставимо $b=1$, добијамо да $7^3 \mid a^2+a+1$, што је испуњено за $a=18$ и при том $7 \nmid 18\cdot 19$. Дакле, бројеви $a=18$ и $b=1$ задовољавају оба услова.

369. Како је $0 \leqslant (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$, и важи $x^2+y^2 \leqslant 2$ закључујемо да је

$$0 \leqslant (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 \leqslant 2-2xy,$$

односно $2xy \leqslant 2$. Сада можемо извршити следећу процену

$$|x+y| = \sqrt{(x+y)^2} = \sqrt{x^2+2xy+y^2} \leqslant \sqrt{2+2} = 2.$$

Дакле, из $x^2+y^2 \leqslant 2$ следи да је $|x+y| \leqslant 2$.

370. Ако су x_1 и x_2 решења једначине $x^2+ax+bc=0$ тада на основу Вијетових формула важи

$$x_1+x_2 = -a \quad \text{и} \quad x_1\cdot x_2 = bc,$$

док из тога што су x_2 и x_3 решења једначине $x^2+bx+ac=0$ закључујемо да је

$$x_2+x_3 = -b \quad \text{и} \quad x_2\cdot x_3 = ac.$$

Одузимањем четврте једначине од друге добијамо $(x_1 - x_3)x_2 = (b-a)c$, а одузимањем треће једначине од прве добијамо $x_1 - x_3 = -(a-b) = b-a$. Према томе, $x_2 = c$ (дељење је дозвољено јер је $ac \neq bc \Leftrightarrow c \neq 0,\ a \neq b$). Сада из друге и четврте једначине добијамо $x_1 = b$ и $x_3 = a$, а из прве $c = x_2 = -a - x_1 = -(a+b)$. Дакле,

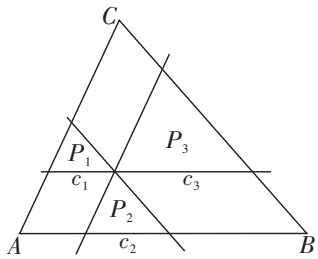
$$x_1 + x_3 = b + a = -(-(a+b)) = -c \quad \text{и} \quad x_1 \cdot x_3 = ba,$$

што значи да су x_1 и x_3 решења једначине $x^2 + cx + ab = 0$.

371. Уочимо да су сви новодобијени троуглови (слика 121) слични троуглу ABC. Да би доказали дату неједнакост искористићемо чињеницу да се површине сличних троуглова односе као квадрати одговарајућих страница (доказ остављамо читаоцу). Према томе, $\dfrac{P_1}{P} = \dfrac{c_1^2}{c^2}$, тј. $\dfrac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P}} = \dfrac{c_1}{c}$, и слично, $\dfrac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P}} = \dfrac{c_2}{c}$, $\dfrac{\sqrt{P_3}}{\sqrt{P}} = \dfrac{c_3}{c}$. Сабирањем последње три једнакости добијамо

$$\frac{\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3}}{\sqrt{P}} = \frac{c_1 + c_2 + c_3}{c} = \frac{c}{c} = 1,$$

па је $\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3} = \sqrt{P}$. Приметимо да је за реалне бројеве a, b и c тачна неједнакост $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \dfrac{1}{3}(a+b+c)^2$ (Коши-Шварцова неједнакост). Сада стављајући $a = \sqrt{P_1}$, $b = \sqrt{P_2}$ и $c = \sqrt{P_3}$ добијамо тражену неједнакост.



Слика 121.

372. Ако је један од бројева m или n једнак 1 неједнакост очигледно важи. Претпоставимо да је $m > 1$ и $n > 1$. Тада је $\sqrt[n]{m} = 1 + u$ и $\sqrt[m]{n} = 1 + v$, за неке позитивне реалне бројеве u и v. Према биномној формули имамо да важи

$$m = (1+u)^n > 1 + nu \quad \text{и} \quad n = (1+v)^m > 1 + mv,$$

односно

$$u < \frac{m-1}{n} \quad \text{и} \quad v < \frac{n-1}{m},$$

па и

$$1 + u < \frac{m+n-1}{n} \quad \text{и} \quad 1 + v < \frac{m+n-1}{m}.$$

Из последњих неједнакости добијамо тражену неједнакост

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}}+\frac{1}{\sqrt[m]{n}}=\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1+v}>\frac{n}{m+n-1}+\frac{m}{m+n-1}=\frac{m+n}{m+n-1}>1.$$

373. Применивши Коши – Шварцову неједнакост на $a-1$, $b-1$, $c-1$, $d-1$, $e-1$ и $1,1,1,1,1$ добијамо

$$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+(d-1)^2+(e-1)^2\geqslant\frac{(a+b+c+d+e-5)^2}{5}.$$

Приметимо да је израз на левој страни неједнакости једнак $6-(f-1)^2$, а израз на десној страни неједнакости једнак $\frac{(5-f)^2}{5}$, одакле добијамо

$$6-(f-1)^2\geqslant\frac{(5-f)^2}{5}.$$

Последња неједнакост еквивалентна је са $f(3f-10)\leqslant 0$, односно, $0\leqslant f\leqslant\frac{10}{3}$. Дакле, највећа вредност за f је $\frac{10}{3}$ и постиже се када је $a=b=c=d=e=\frac{4}{3}$.

374. Како је

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x},$$

закључујемо да је

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x\geqslant 2,$$

а како је $\sin y\geqslant -1$ закључујемо да је $2+\sin y\geqslant 1$. Дакле,

$$(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)(2+\sin y)\geqslant 2,$$

па да би имали једнакост мора бити $\operatorname{tg}x=\operatorname{ctg}x$ и $\sin y=-1$, па је скуп решења једначине $R=\left\{(x,y)\mid x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ y=\frac{3\pi}{2}+2l\pi,\ k,l\in\mathbb{Z}\right\}$.

375. Посматрајмо прво све сабирке појединачно. Како је

$$\frac{x}{x^2+9}=\frac{1}{x+\frac{9}{x}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{x\frac{9}{x}}}=\frac{1}{6},$$

закључујемо да је највећа вредност првог сабирка $\frac{1}{6}$ и она се постиже за $x=3$, док из

$$\frac{1}{x^2-6x+21}=\frac{1}{(x-3)^2+12}\leqslant\frac{1}{12},$$

закључујемо да је највећа вредност другог сабирка $\frac{1}{12}$ и да се она постиже за $x = 3$. Највећа вредност трећег сабирка је 1 и она се постиже за свако целобројно x, па и за $x = 3$. Дакле, највећа вредност функције

$$f(x) = \frac{x}{x^2+9} + \frac{1}{x^2-6x+21} + \cos 2\pi x$$

на интервалу $(0, +\infty)$ је $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + 1 = \frac{5}{4}$ и постиже се за $x = 3$.

376. Уведимо смену $t = \log_2 x$. Како је $\log_2 x$ растућа функција (за $x > 0$) и $\log_2 1 = 0$ и $\log_2 64 = 6$ закључујемо да је $t \in (0, 6)$. Уводећи ову смену и користећи добро познате особине логаритамске функције сада можемо трансформисати полазни израз на следећи начин

$$\begin{aligned}\log_2^4 x + 12\log_2^4 2x \cdot \log_2\left(\frac{8}{x}\right) &= \log_2^4 x + 12\log_2^4 2x \cdot (3 - \log_2 x)\\ &= t^4 + 12t^2(3-t) = t^2(t^2 - 12t + 36)\\ &= [t(t-6)]^2.\end{aligned}$$

Овај израз има највећу вредност за једну од вредности t за коју $g(t) = t(t-6)$ има екстремну вердност на $[0, 6]$. Дакле, могућности су $t = 0$ или $t = 3$ или $t = 6$. Како је $|g(0)| = |g(6)| \leqslant |g(3)|$, закључујемо да полазни израз има највећу вредност за x такво да је $\log_2 x = 3$, односно за $x = 8$.

377. Означимо са a, b, c и d узастопне странице четвороугла и са α, β углове између страница a и b, односно c и d. Тада је $a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta$, одакле је $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab\cos\alpha - cd\cos\beta)$. За површину P четвороугла важи $2P = ab\sin\alpha + cd\sin\beta$, па је

$$\begin{aligned}4P^2 &= (ab\sin\alpha + cd\sin\beta)^2 = a^2b^2\sin^2\alpha + 2abcd\sin\alpha\sin\beta + c^2d^2\sin^2\beta\\ &= a^2b^2(1-\cos^2\alpha) + 2abcd - 2abcd + 2abcd\sin\alpha\sin\beta + c^2d^2(1-\cos^2\beta)\\ &= (ab+cd)^2 - 2abcd(1 - \sin\alpha\sin\beta) - (ab\cos\alpha - cd\cos\beta)^2\\ &\quad -2abcd\cos\alpha\cos\beta\\ &= (ab+cd)^2 - \frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2-d^2) - 2abcd(1+\cos(\alpha+\beta))\\ &= (ab+cd)^2 - \frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2-d^2) - 2abcd\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\\ &\leqslant (ab+cd)^2 - \frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2-d^2).\end{aligned}$$

Једнакост ће важити када је $\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} = 0$, тј. $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2}$. Дакле, једнакост важи када је $\alpha + \beta = \pi$, односно када је четвороугао тетиван, површина је највећа.

378. Како су α и β унутрашњи углови троугла следи да $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, и како су синусна и косинусна функција на интервалу $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ позитивне и, при том, синусна расте, а косинусна опада закључујемо да је функција $f(x) = \frac{\sin^{23} x}{\cos^4 8x}$ растућа на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Из тога следи да $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = f\left(\frac{\beta}{2}\right)$ повлачи $\alpha = \beta$, тј. троугао ABC је једнакокрак, па је $AC : BC = 1$.

379. Како је $\max\{a, b\} \geqslant a, b$ и $\min\{a, b\} \leqslant a, b$ следи да мора бити $x^2 + y^2 \leqslant -2x$, $x^2 + y^2 \leqslant 2y$, $2 \leqslant -2x$, $2 \leqslant 2y$. Прва неједначина представља унутрашњост круга $(x+1)^2 + y^2 = 1$, а друга унутрашњост круга $x^2 + (y-1)^2 = 1$, док трећа представља полураван $x \leqslant -1$, а четврта полураван $y \geqslant 1$. Једина заједничка тачка за све четири области је $(-1, 1)$, и то је једини пар реалних бројева који задовољава полазну једначину.

380. Функцију f можемо представити и у следећем облику

$$\begin{aligned} f(x) &= x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 8x^3 - 7x^2 + 4 + (b-2)x^4 + (a+7)x^2 - 4x \\ &= (x^6 - 4x^5 + 4x^4) + (-2x^4 + 8x^3 - 8x^2) + (x^2 - 4x + 4) \\ &\quad + (b-2)x^4 + (a+7)x^2 \\ &= x^4(x-2)^2 - 2x^2(x-2)^2 + (x-2)^2 + (b-2)x^4 + (a+7)x^2 \\ &= (x-2)^2(x^2-1)^2 + (b-2)x^4 + (a+7)x^2. \end{aligned}$$

Сада је лако закључити да је дата функција ненегативна кад је $a \geqslant -7$ и $b \geqslant 2$.

381. Како је $\left[\frac{x-2}{3}\right] = \left[\frac{x-3}{2}\right] = z$, где је $z \in \mathbb{Z}$, добијамо следећи систем неједначина

$$z \leqslant \frac{x-2}{3} < z+1, \quad z \leqslant \frac{x-3}{2} < z+1.$$

Решење овог система је $-2 \leqslant z \leqslant 3$, тј. $z \in \{-1, 0, 1, 2\}$, па је скуп решења полазне једначине $R = \{[1, 2), [3, 7), [8, 9)\}$.

382. Ако од половине збира све три једначине одузмемо другу једначину добићемо да је

$$ax = \frac{1}{2}\left[(x-y)^2 + (x-z)^2 - (y-z)^2\right] = (x-y)(x-z).$$

На сличан начин добијамо $by = (y-x)(y-z)$, $cz = (z-x)(z-y)$. Ако је на пример, $x \geqslant y \geqslant z$, онда је $by \leqslant 0$ и $cz \geqslant 0$. Дакле имамо да је $y \geqslant z$ и $y \leqslant 0 \leqslant z$, па закључујемо да је $y = z = 0$. Сада из $ax = x^2$ следи да је $x = 0$ или $x = a$. Добили смо два решења датог система: $(0, 0, 0)$ и $(a, 0, 0)$. Разматрањем других распореда бројева x, y и z на реалној прави, добићемо још два решења: $(0, b, 0)$ и $(0, 0, c)$.

383. Прво докажимо да је n паран број. Претпоставимо супротно: нека је n непаран број. Тада су сви делиоци броја n непарни, па су зато d_1, d_2, d_3 и d_4 непарни. Следи да је $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$ паран, што је противно полазној претпоставци.

Дакле, n је паран број, па је $d_2 = 2$. Из једнакости $n = 1^2 + 2^2 + d_3^2 + d_4^2$ следи да је један од бројева d_3 и d_4 паран а други непаран. Разматраћемо два случаја. Први случај: $d_3 = 2a,\ a > 1$. Како је a делилац броја n мањи од d_3, то је $a = 2$. Дакле, $d_3 = 4$. Како је $n = 1^2 + 2^2 + 4^2 + d_4^2 = 21 + d_4^2$, то n није дељиво са 4. Контрадикција!
Други случај: $d_4 = 2a,\ a > 1$. Како је $a < d_4$ и $a \mid n$, то је $a = d_2 = 2$ или $a = d_3$. У првом случају било би $d_4 = 4$, $d_3 = 3$ и $n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$. Како 4 не дели 30, овај случај отпада. Преостаје да је $a = d_3$. У том случају имамо да је $n = 1^2 + 2^2 + d_3^2 + 4d_3^2 = 5(1 + d_3^2)$. Како $d_3 \mid n$ и бројеви d_3 и $1 + d_3^2$ су узајамно прости, следи да је $d_3 = 5$, па је $d_4 = 10$ и $n = 1^2 + 2^2 + 5^2 + 10^2 = 130$. Лако се проверава да су 1, 2, 5 и 10 четири најмања делиоца броја 130. Према томе једини број који задавољава тражене услове је 130.

384. Како је $2^{2009} - 2^{2007} + 2^{2004} = 2^{2004}(2^5 - 2^3 + 1) = 2^{2004} \cdot 25 = 2^{2002} \cdot 100$ и $2^{2002} = 2^{4\cdot 500+2} = \ldots 4$ закључујемо да је троцифрени завршетак датог броја 400.

385. На основу датих једнакости имамо да важи:

$$\underbrace{\left(1+\frac{a}{bc}\right)\left(1+\frac{b}{ac}\right)\left(1+\frac{c}{ba}\right)}_{L} = \frac{1}{d^2} = \underbrace{\left(1-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2}_{D}.$$

Како је

$$L = 1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} + \frac{1}{abc}$$

и

$$D = 1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2}{bc} + \frac{2}{ac} + \frac{2}{ab} - \frac{2}{a} - \frac{2}{b} - \frac{2}{c}$$

добијамо

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} + \frac{1}{abc} = \frac{2}{bc} + \frac{2}{ac} + \frac{2}{ab} - \frac{2}{a} - \frac{2}{b} - \frac{2}{c}.$$

Множећи последњу једнакост са abc (што је очигледно различито од нуле, због дефинисаности почетних израза) добијамо

$$a^2 + b^2 + c^2 + 1 = 2(a + b + c),$$

односно

$$(a + b + c - 1)^2 = 0,$$

одакле закључујемо да је $a + b + c = 1$.

386. Можемо извршити следеће упоређивање

$$5^{5^{5^5}} = 5^{5^{3125}} < 5^{8^{3125}} = 5^{2^{9375}} < 16^{2^{9375}} = 2^{2^{9377}}.$$

Како је $4 > 2$ и $4^{256} > 9377$, закључујемо да је

$$4^{4^{4^4}} = 4^{4^{4^{256}}} > 4^{4^{9377}} > 2^{2^{9377}} > 5^{5^{5^5}}.$$

387. Треба наћи све природне бројеве n за које је испуњена једнакост

$$2^4 \cdot 3^{16} + 5^2 \cdot 3^{14} + 3^n = k^2, \quad \text{где је } k \in \mathbb{N},$$

односно

$$169 \cdot 3^{14} + 3^n = k^2.$$

Разликоваћемо следећа два случаја:

1) $n \leqslant 14$: Тражимо n такво да је испуњена једнакост

$$3^n(3^{14-n} \cdot 169 + 1) = k^2.$$

Како 3 не дели $3^{14-n} \cdot 169 + 1$ број n мора бити паран, али у том случају је $3^{14-n} \cdot 169 + 1 = 2 \pmod 4$, па закључујемо да n не може бити мањи од или једнак броју 14.

2) $n > 14$: У овом случају тражимо n за које је испуњено

$$3^{14}(3^{n-14} + 169) = k^2,$$

односно

$$3^{n-14} + 169 = u^2, \quad u \in \mathbb{N}.$$

Како је једнакост $3^{n-14} = (u-13)(u+13)$ еквивалентна претходној, закључујемо да је $u - 13 = 1$, а $u + 13 = 3^{n-14}$. Дакле, $n = 17$ је јединствено решење.

388. Нека је d највећи заједнички делилац тих 49 природних бројева. Тада важи

$$d \mid 999 = 3^3 \cdot 37$$

и како мора бити $d \leqslant \dfrac{999}{49} < 21$, следи $d \in \{1, 3, 9\}$. Вредност 9 се може постићи, нпр.

$$\underbrace{9 + 9 + \cdots + 9}_{48 \cdot 9} + 567 = 999$$

и тада је $NZD(9, 9, \ldots, 9, 567) = 9$.

389. Неку су целобројни корени прве једначине k и l, а друге m и n. Тада би на основу Вијетових правила важило

$$\begin{aligned}
&(1) & k + l &= -b \\
&(2) & k \cdot l &= c \\
&(3) & 2(m+n) &= -b - 1, \\
&(4) & 2m \cdot n &= c + 1.
\end{aligned}$$

Из једнакости (4) следи да је број c непаран. Сада, на основу једнакости (2) закључујемо да су бројеви k и l непарни, из чега, даље, на основу (1), закључујемо да је b паран број. Међутим, на основу (3) следи да је b непаран број. Стога, бројеви b и c са траженим својством не постоје.

390. Претпоставимо супротно. Тада кругови полупречника 1 описани око сваке од тих 10 тачака не би имали заједничких тачака, и сви би се налазили у кругу полупречника 3. Међутим, како је

$$10 \cdot 1^2\pi > 3^2\pi,$$

закључујемо да се од датих 10 тачака увек могу наћи две на растојању мањем од 2.

391. Како је $\log_a b > 1$, следи да је $\log_a \log_a b > \log_b \log_a b$, а из $\log_c a < 1$, следи да је $\log_c \log_c a > \log_b \log_c a$. На основу претходног важи

$$\log_a \log_a b + \log_b \log_b c + \log_c \log_c a > \log_b \log_a b + \log_b \log_b c + \log_b \log_c a,$$

што заједно са

$$\log_b \log_a b + \log_b \log_b c + \log_b \log_c a = \log_b(\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a) = \log_b 1 = 0$$

доказује дату неједнакост.

392. Дата неједнакост је еквивалентна са

$$\begin{aligned}&4\cos^2 x\cos^2 y + 8\cos x\cos y\sin x\sin y + 4\sin^2 x\sin^2 y >\\ &4\cos^2 x + 4\cos^2 y - 1 - 4\cos^2 x\cos^2 y + 4(1-\cos^2 x)(1-\cos^2 y),\end{aligned}$$

односно са $\cos^2(x-y) > \dfrac{3}{4}$. Како $x, y \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, следи да је $x-y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, па је $\cos(x-y) > 0$. Стога је почетна неједнакост еквивалентна са $\cos(x-y) > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, што је испуњено за $x - y \in \left(0, \dfrac{\pi}{6}\right)$. Према Дирихлеовом принципу, у једном од скупова $\left(0, \dfrac{\pi}{6}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, налазиће се бар два од дата четири броја, одакле следи тврђење.

393. Како је $x + y + |x - y| = 2\max\{x, y\}$ и $x + y - |x - y| = 2\min\{x, y\}$ имамо да је

$$\begin{aligned}&||x-y| + x + y - 2z| + |x-y| + x + y + 2z\\ =&|2\max\{x,y\} - 2z| + 2\max\{x,y\} + 2z\\ =&2\max\{2\max\{x,y\}, 2z\} = 4\max\{x,y,z\},\end{aligned}$$

као и

$$\begin{aligned}&2x + y + z - |y-z| - |2x - y - z + |y-z||\\ =&2x + 2\min\{y,z\} - |2x - 2\min\{y,z\}|\\ =&2\min\{2\min\{y,z\}, 2x\} = 4\min\{x,y,z\},\end{aligned}$$

па је дати систем еквивалентан са

$$\max\{x,y,z\} = 4, \quad \min\{x,y,z\} = 2, \quad |x| + |y| + |z| = 9.$$

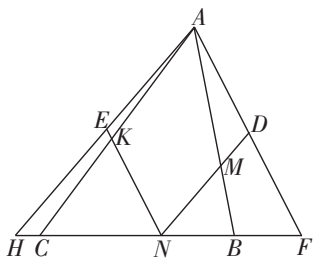
Сада се лако види да су решења датог система пермутације скупа $\{2, 3, 4\}$.

394. Сваки десетоцифрени симетричан број је дељив са 11. С друге стране, како је

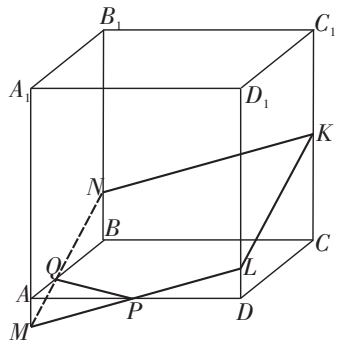
$$9999999999 = 11 \cdot 909090909 \text{ и } 1000000001 = 11 \cdot 90909091,$$

а 90909091 и 909090909 су узајамно прости бројеви ($90909091 \cdot 10 - 909090909 = 1$) следи да је највећи заједнички делилац свих симетричних десетоцифрених бројева једнак 11.

395. Нека праве AD и AE секу праву BC у тачкама F и H, редом (видети слику 122). Довољно је доказати да је DE средња линија троугла AFH. Троугао MBN је једнакокрак ($BM = BN$) и $MN \parallel AH$, па је $AMNH$ једнакокраки трапез, тј. $NH = AM$. Аналогно се показује да је $FN = AK$. Како је $AK = AM$, то из добијених једнакости следи да је $FN = NH$, тј. N је средиште дужи FH. Тада је D средиште AF, а E средиште AH. Дакле, права DE садржи средњу линију троугла ABC.



Слика 122.



Слика 123.

396. Из услова задатка следи да дата раван сече пет од шест страна коцке, од којих су два пара паралелних страна (видети слику 123). Због тога добијени петоугао има два пара паралелних страница ($KL \parallel QN$ и $LP \parallel NK$, где је $KLPQN$ добијени пресек), па је он одсечен од паралелограма $KLMN$ и две његове најдуже странице нису дуже од две странице паралелограма. Одавде следи тврђење задатка, јер је

$$P_{KLPQN} \leqslant P_{KLMN} = KL \cdot KN \cdot \sin\alpha \leqslant KL \cdot KN.$$

397. Како је

$$f(x) = \sqrt{(2-x)^2 + (1-0)^2} + \sqrt{(3-x)^2 + (4-0)^2},$$

и ако у координантној равни уочимо тачке $A(2,1)$, $B(3,4)$ и $M(x,0)$, онда је

$$f(x) = d(M,A) + d(M,B).$$

Како је дата функција збир растојања тачке M, са x-осе, од тачака A и B, које су обе у првом квадранту, вредност функције ће бити најмања ако је тачка M

пресек дужи $A'B$ са x-осом, где је тачка A' симетрична са A у односу на x-осу, тј. $A'(2,-1)$. Дакле,

$$f_{\min} = d(A', B) = \sqrt{(3-2)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{26}.$$

398. Лако се види да су сви чланови низа позитивни. Из услова задатка следи да је

$$a_m = \frac{1}{2m + \frac{1}{a_{m-1}}} \tag{1}$$

Нека је $b_m = \dfrac{1}{a_m}$, за сваки природан број m. Сада из (1) добијамо

$$b_m = 2m + b_{m-1}, \quad \text{за сваки } m \in \mathbb{N}.$$

Индукцијом по m доказујемо да је $b_m = m(m+1)$, за сваки природан број m, тј.

$$a_m = \frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1},$$

одакле је

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_k &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}. \end{aligned}$$

399. Ако са a означимо прву, а са b пету цифру броја који задовољава услове задатка, тада је $(a,b) \in \{(1,4),(2,5),(3,6),(4,7),(5,8),(6,9),(3,0),(4,1),(5,2),(6,3),(7,4),(8,5),(9,6)\}$. За сваки од датих избора цифара a и b постоји 8 могућих избора за другу цифру, 7 за трећу и 6 за четврту цифру, па петоцифрених бројева са траженим својствима има $13 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 4368$.

400. Нека је $P = \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cdots \sin\alpha_n$. Из $\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 \cdots \operatorname{tg}\alpha_n = 1$ следи да је

$$P = \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cdots \sin\alpha_n = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cdots \cos\alpha_n,$$

па је

$$P^2 = \sin\alpha_1 \cos\alpha_1 \cdots \sin\alpha_n \cos\alpha_n = 2^{-n} \sin 2\alpha_1 \cdots \sin 2\alpha_n \leqslant 2^{-n}.$$

Дакле, $|P| \leqslant 2^{-\frac{n}{2}}$. За $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \dfrac{\pi}{4}$, имамо да је $P = 2^{-\frac{n}{2}}$, па је то тражена максимална вредност.

401. Нека су r, s и t корени полинома $f(x)$. Тада је

$$f(x) = (x-r)(x-s)(x-t) \quad \text{и} \quad rst = 1.$$

На основу Кошијеве неједнакости $(1+\alpha \geqslant 2\sqrt{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}^+)$ важи

$$(1+r)(1+s)(1+t) \geqslant 8\sqrt{rst} = 8.$$

Зато је

$$f(-1) = (-1-r)(-1-s)(-1-t) = -(1+r)(1+s)(1+t) \leqslant -8.$$

С друге стране је

$$f(-1) = (-1)^3 - a(-1)^2 + b(-1) - 1 = -(a+b) - 2.$$

Дакле, $-(a+b) - 2 \leqslant -8$, одакле је $a+b \geqslant 6$. Како је за

$$f(x) = (x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1,$$

$a+b = 6$, тражена минимална вредност 6.

402. Разликоваћемо следеће случајеве:

1) $x < 0$: Тада је $x - 2 < -2$, односно $|x-2| > 2$, па је

$$f(|x-2|) = 2|x-2| - 4 = 2(2-x) - 4 = -2x.$$

Дакле, у овом случају је

$$g(x) = |-2x| + 1 = -2x + 1 = -2x + 1.$$

2) $0 \leqslant x < 1$: Тада је $-2 \leqslant x - 2 < -1$, односно $1 < |x-2| \leqslant 2$, па је

$$f(|x-2|) = 2|x-2| - 4 = 2(2-x) - 4 = -2x.$$

Дакле, у овом случају је

$$g(x) = |-2x| + 1 = -(-2x) + 1 = 2x + 1.$$

3) $x \geqslant 1$: Тада је $x - 2 \geqslant -1$, па морамо разликовати следеће подслучајеве:

- $x = 1 \Rightarrow g(1) = |f(1)| + 1 = |-2| + 1 = 3.$
- $1 < x < 2 \Rightarrow 0 < |x-2| < 1$. Тада је

$$f(|x-2|) = 2|x-2| - 2 = 2(2-x) - 2 = -2x + 2.$$

Стога, у овом случају је

$$g(x) = |-2x+2| + 1 = -(-2x+2) + 1 = 2x - 1.$$

- $2 \leqslant x < 3 \Rightarrow 0 \leqslant |x-2| < 1$. Тада је

$$f(|x-2|) = 2|x-2| - 2 = 2(x-2) - 2 = 2x - 6.$$

Дакле, у овом случају је

$$g(x) = |2x-6| + 1 = -(2x-6) + 1 = -2x + 7.$$

- $3 \leqslant x < 4 \Rightarrow 2 > |x-2| \geqslant 1$. Тада је

$$f(|x-2|) = 2|x-2| - 4 = 2(x-2) - 4 = 2x - 8.$$

Дакле, у овом случају је

$$g(x) = |2x-8| + 1 = -(2x-8) + 1 = -2x + 9.$$

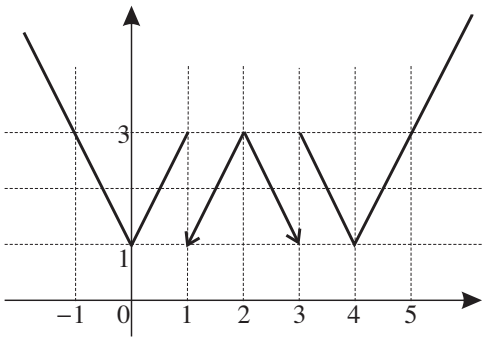
- $4 \leqslant x \Rightarrow |x-2| \geqslant 2$. Тада је

$$f(|x-2|) = 2|x-2| - 4 = 2(x-2) - 4 = 2x - 8.$$

Дакле, у овом случају је

$$g(x) = |2x-8| + 1 = 2x - 8 + 1 = 2x - 7.$$

Из свега претходног закључујемо да график приказан на слици 124 одговара функцији g.



Слика 124.

403. Нека је $x = y$, тада, по услову задатка, важи једнакост

$$f(0) = f(x) + f(x) - 2x^2,$$

односно $f(x) = x^2 + \dfrac{a}{2}$, где је $a = f(0)$. Ако је $x = y = 0$, добијамо да је $a = 2a$, тј. $a = 0$. Дакле, $f(x) = x^2$ је једина функција која задовољава дату једнакост.

404. Очигледно је x двоцифрен број, тј. $x = 10a + b$, при чему су a и b цифре декадног система и $a \neq 0$. Дакле, $y = a + b$.

Ако је $a + b \leqslant 9$, тада је и $z = a + b$, па је $60 = 10a + b + 2(a + b)$, тј. $12a + 3b = 60$, односно $4a + b = 20$. Дакле, у овом случају имамо да $(a, b) \in \{(4, 4), (5, 0)\}$.

Ако је $a + b \geqslant 10$, тада је $z = a + b - 9$, па је $60 = 12a + 3b - 9$, тј. $4a + b = 23$. Решавањем последње једначине добијамо да је $(a, b) = (4, 7)$.

Дакле, $x \in \{44, 47, 50\}$.

405. Нека је a цео број такав да је $96 + a = x^3$ и $5 + a = y^3$, за неке целе бројеве x и y. Тада је $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 91$.

Нека је $x - y = m$, за неки цео број m (очигледно $m \in \{\pm 1, \pm 7, \pm 13, \pm 91\}$). Тада је $x = m + y$ и $x^2 + xy + y^2 = \dfrac{91}{m}$, па је

$$(m+y)^2 + (m+y)y + y^2 = \frac{91}{m}, \quad \text{тј.} \quad 3y^2 + 3my + \left(m^2 - \frac{91}{m}\right) = 0.$$

Дискриминанта последње једначине, $D = \dfrac{3}{m}\left(364 - m^3\right)$, мора бити потпун квадрат. За $m > 7$ имамо да је $\dfrac{3}{m} > 0$ и $364 - m^3 < 0$, па је $D < 0$. Такође, за $m < 0$ имамо $\dfrac{3}{m} < 0$ и $364 - m^3 > 0$, па је, поново, $D < 0$. Дакле, $0 \leqslant m \leqslant 7$, па је $m = 1$ или $m = 7$. За $m = 1$, $D = 1089 = 33^2$, па $y \in \{-6, 5\}$, односно $a \in \{-221, 120\}$. За $m = 7$, $D = 9 = 3^2$, па $y \in \{-3, -4\}$, односно $a \in \{-32, -69\}$.

Дакле, $a \in \{-221, -69, -32, 120\}$.

406. (а) Било који петоцифрени палиндром $\overline{abcba}$ може се приказати у облику

$$\overline{abcba} = 10\,001a + 1\,010b + 100c = 101(99a + 10b + c) + 2a - c.$$

То значи да је тај палиндром дељив са 101 ако и само ако је $2a - c = 0$ (јер је за било које цифре a и c испуњено $|2a - c| < 101$). Једначина $2a = c$ имплицира да је $a \leqslant 4$. Пошто тражимо највећи број, узећемо да је $a = 4$. Тада је $c = 8$. Како за цифру b немамо никакве услове, то ћемо узети $b = 9$ да бисмо добили највећи могући број. Дакле, тражени број је 49 894.

(б) Међу следећих 109 узастопних петоцифрених бројева

$$10\,902,\ 10\,903,\ \ldots,\ 10\,999,\ 11\,000,\ \ldots,\ 11\,009,\ 11\,010$$

нема палиндрома. Најмањи и највећи петоцифрени палиндроми су редом 10 001 и 99 999. Пре броја 10 001 је само један петоцифрен број, а иза броја 99 999 нема више петоцифрених бројева. Показаћемо да после било ког петоцифреног палиндрома x, $x \neq 99\,999$, постоји други петоцифрен палиндром облика $x + 100$ или $x + 110$ или $x + 11$. Означимо $x = \overline{abcba}$. Ако је $c \neq 9$, тада је број

$$x + 100 = \overline{ab(c+1)ba}$$

палиндром. Ако је $c = 9 \neq b$, број

$$x + 110 = \overline{a(b+1)0(b+1)a}$$

је палиндром, и коначно ако је $c = b = 9$ (наравно, $a \neq 9$) број

$$x + 11 = \overline{(a+1)000(a+1)}$$

је палиндром.

Према томе, највећи могући број узастопних петоцифрених бројева међу којима нема палиндрома је 109.

407. Ако је $x \geqslant 6$ и $y \geqslant 6$ тада је $x! + y!$ дељиво са 9, док $15 \cdot 2^{z!}$ није. Дакле, можемо претпоставити да је $y \leqslant x$ и $y \leqslant 5$. Тада је

$$\frac{x!}{y!} + 1 = \frac{15 \cdot 2^{z!}}{y!}.$$

Цео број $\dfrac{15 \cdot 2^{z!}}{y!}$ је непаран само ако је $z = 1$ и у том случају је $x = 4$ и $y = 3$. Ако је $z \geqslant 2$, тада је цео број $\dfrac{x!}{y!}$ непаран, одакле следи или да је $x = y$ или $x = y + 1$ и x непаран. У првом случају 15 дели $y!$, па је $y = 5$ и $z = 4!$, што је немогуће. У другом случају добијамо или да је $y = 2, x = 3$ или $y = 4, x = 5$, што је такође немогуће. Према томе, тражене тројке су $(4, 3, 1)$ и $(3, 4, 1)$.

408. Означимо са x број комисија које задовољавају тврђење задатка (зваћемо их *добре комисије*), а са y број осталих трочланих комисија (*лоше комисије*). Тада важи $x + y = \binom{30}{3} = 4060$. Нека сваки посланик направи списак свих трочланих комисија у којима је он члан, а друга два посланика су или оба у свађи са њим или ниједан није у свађи са њим. На том списку ће се свака добра комисија појавити 3 пута (сваки посланик ће је записати), а свака лоша комисија ће се јављати само једном. Са друге стране на том списку има $\binom{19}{2}$ комисија које садрже једног фиксираног посланика и нема посланика који су у свађи и $\binom{10}{2}$ комисија које садрже једног фиксираног посалника и сви посланици су у свађи. Стога имамо и другу једначину

$$3x + y = \left(\binom{19}{2} + \binom{10}{2}\right) \cdot 30 = 6480.$$

Решавањем овог система добијамо резултат: $x = 1210$.

409. Нека је N број међусобно неподударних троуглова чија се темена поклапају са теменима задатог $n-$тоугла, при чему има N_1 оних који су једнакостранични, N_2 који имају тачно две једнаке странице (једнакокраки који нису једнакостранични) и N_3 оних којима су све три странице међусобно различите. Нека је A фиксирано теме датог $n-$тоугла. Сваки једнакостраничан троугао подударан је тачно једном од троуглова са фиксираним теменом A, сваки једнакокраки који није једнакостраничан подударан је са три троугла чије је теме A, док је сваки троугао чије су све странице међусобно различите подударан са шест троуглова чије је једно теме A. Пошто имамо укупно $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ троуглова чије је једно теме A, важи једнакост

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} = N_1 + 3N_2 + 6N_3.$$

Јасно је да је број међусобно неподударних једнакостраничних троуглова једнак 0 или 1, а број неподударних једнакокраких троуглова једнак $\dfrac{n-1}{2}$ или $\dfrac{n}{2}-1$, тј. $N_1 = 1-c$ и $N_1+N_2 = \dfrac{n-2+d}{2}$, за неке c и d из скупа $\{0,1\}$. Дакле,

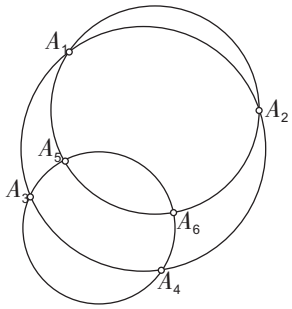
$$\begin{aligned} 12N &= 12(N_1+N_2+N_3) = 2(N_1+3N_2+6N_3)+6(N_1+N_2)+4N_1 \\ &= (n-1)(n-2)+3(n-2+d)+4(1-c) \\ &= n^2+3d-4c. \end{aligned}$$

Пошто је $|3d-4c|<6$, следи да је $N = \left[\dfrac{n^2}{12}\right]$.

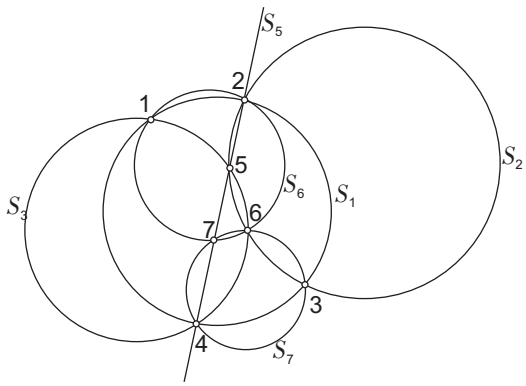
410. Са слике 125 се види да тврђење није тачно за $n=6$ тачака.

Изаберимо седам тачака нашег скупа. Означимо их са $1,2,3,\ldots,7$ (слика 126). Докажимо најпре да бар пет од ових седам тачака леже на једној кружници. Претпоставимо супротно, да ово није тачно. Према услову задатка четири од пет тачака $1,2,3,4,5$ леже на једној кружници S_1; нека су то $1,2,3,4$. Од пет тачака $1,2,3,5,6$ четири леже на кружници S_2; при томе тачке $1,2,3$ не леже на S_2, јер би се тада S_1 и S_2 поклапале и садржале пет од наших седам тачака. Нека, на пример, S_2 садржи тачке $2,3,5,6$. Тада кружници S_3, на којој леже четири од пет тачака $1,3,4,5,6$, не припада тачка 3, јер би тада на њој лежале или тачке $1,3,4$ или $3,5,6$, тј. S_3 би се поклапала са S_1 или S_2, па би у оба случаја постојала кружница са пет од наших седам тачака. Дакле, S_3 садржи тачке $1,4,5,6$.

Даље, четири од пет тачака $1,2,3,5,7$ леже на кружници S_4. Очигледно S_4 садржи тачку 1, јер би се у супротном поклапала са S_2 и не садржи обе тачке 2 и 3 јер би се поклапала са S_1. Нека S_4 садржи $1,3,5,7$. Тада су $2,4,5,7$ четири, од тачака $2,3,4,5,7$ које леже на некој кружници S_5. Сада су једнозначно одређене кружнице S_6 и S_7 на којима леже четири од пет тачака $1,2,5,6,7$, односно $3,4,5,6,7$, редом тачкама $1,2,6,7$, односно $3,4,6,7$.



Слика 125.

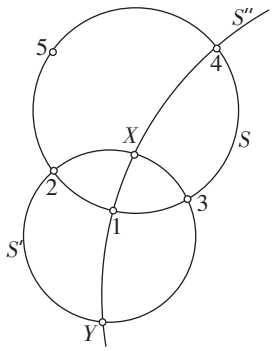


Слика 126.

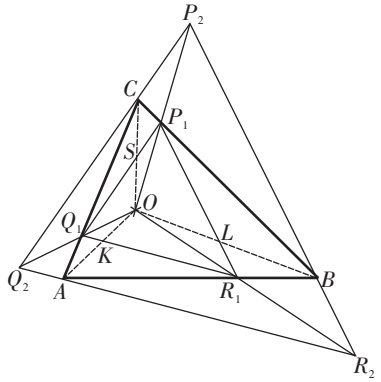
Претпоставимо одређености ради, да тачке $1, 2, 3, 4$ леже на кружници S_1 у поретку као на слици 2. У том случају тачке пресека кружница S_2 и S_3 леже обе унутар или ван кружнице S_1. Претпоставимо да су унутар кружнице S_1. Аналогно, унутар или ван кружнице S_1 леже и тачке 6 и 7 (пресечне тачке кружница S_6 и S_7); у нашем случају 7 лежи унутар кружнице S_1. С друге стране, једна од тачака пресека кружница S_4 и S_5 лежи унутар кружнице S_1, а друга ван S_1, што противречи чињеници да тачке 5 и 7 леже унутар кружнице S_7. Анологно се показује контрадикција за све друге распореде тачака $1, 2, 3, 4$ на кружници S_1.

Дакле, на некој кружници S лежи пет од наших n тачака, на пример тачке $1, 2, 3, 4, 5$. Докажимо да не постоје две различите тачке X и Y нашег скупа тачака које не леже на кружници S.

Претпоставимо да тачке X и Y не леже на кружници S (слика 127). Тада једна од тачака $1, 2, 3$ не лежи на кружници S', на којој леже четири од пет тачака $1, 2, 3, X, Y$; нека је то 1, тј. нека на S' леже тачке $2, 3, X, Y$. Аналогно, једна од тачака $1, 4, 5$, па пример 5, не припада кружници S'', на којој леже четири од тачака $1, 4, 5, X, Y$. Дакле, на S'' леже тачке $1, 4, X, Y$. Али, у том случају никоје четири од пет тачака $1, 2, 5, X, Y$ не припадају некој кружници S''': ако S''' не садржи једну од тачака X и Y, то се S''' поклапа са S и не садржи друге од тих тачака, а ако S''' не садржи једну од тачака $1, 2, 5$ то S''' садржи или тачке $X, Y, 1$ или тачке $X, Y, 2$, тј. S''' се поклапа са S' или са S'' и не садржи више од три од наших пет тачака. Добијена противречност доказује теорему.



Слика 127.



Слика 128.

411. Обележимо са h_A дужину растојања тачке A од праве OR_1 и приметимо да се и тачка R_2 налази на правој OR_1 (слика 128). Пошто је $P_{\triangle OR_1A} = \frac{1}{2}OR_2 \cdot h_A$, а $P_{\triangle OR_2A} = \frac{1}{2}OR_1 \cdot h_A$ добијамо да је

$$\frac{P_{\triangle OR_1A}}{P_{\triangle OR_2A}} = \frac{OR_1}{OR_2}.$$

Како је $\triangle Q_1OR_1 \sim \triangle Q_2OR_2$ и $\triangle Q_1R_1P_1 \sim \triangle Q_2R_2P_2$ имамо да је

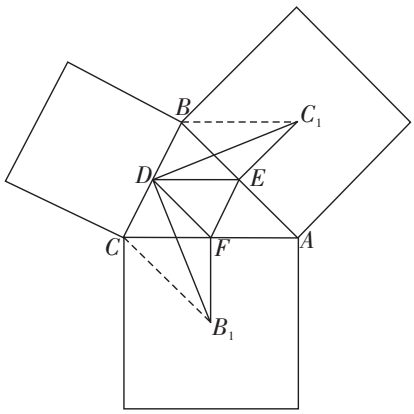
$$\frac{OR_1}{OR_2} = \frac{Q_1R_1}{Q_2R_2} \quad \text{и} \quad \frac{Q_1R_1}{Q_2R_2} = \sqrt{\frac{P_1}{P_2}}.$$

Стога је $P_{\triangle OR_1A} = \sqrt{\dfrac{P_1}{P_2}}\, P_{\triangle OR_2A}$.

Слично добијамо за осталих пет троуглова, па је

$$\begin{aligned} P_{\triangle ABC} &= P_{\triangle OR_1A} + P_{\triangle OR_1B} + P_{\triangle OP_1B} + P_{\triangle OP_1C} + P_{\triangle OQ_1C} + P_{\triangle OQ_1A} \\ &= \sqrt{\frac{P_1}{P_2}}\,(P_{\triangle OR_2A} + P_{\triangle OR_2B} + P_{\triangle OP_2B} + P_{\triangle OP_2C} + P_{\triangle OQ_2C} + P_{\triangle OQ_2A}) \\ &= \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} \cdot P_2 = \sqrt{P_1P_2}\,. \end{aligned}$$

412. Претпоставимо да је задатак решен. Нека су A_1, B_1, C_1 центри квадрата (слика 129). Означимо са D, E, F средишта страница троугла ABC.



Слика 129.

Докажимо да су троуглови C_1DE и DFB_1 подударни. Заиста, како је $DE = \dfrac{AC}{2}$ средња линија троугла ABC и $FB_1 = \dfrac{AC}{2}$, следи да је $DE = FB_1$. Аналогно је $DF = EC_1$. Даље,

$$\sphericalangle C_1ED = 90^\circ + \sphericalangle BED = 90^\circ + \sphericalangle CAB$$

и

$$\sphericalangle B_1FD = 90^\circ + \sphericalangle CFD = 90^\circ + \sphericalangle CAB,$$

па имамо да је $\sphericalangle C_1ED = \sphericalangle B_1FD$. Дакле, $\triangle C_1ED \cong \triangle B_1FD$, па је $C_1D = B_1D$. Нека је $\sphericalangle FDB_1 = \alpha$ и $\sphericalangle FB_1D = \beta$. Тада је

$$\alpha + \beta = 180^\circ - \sphericalangle DFB_1 = 180^\circ - (90^\circ + \sphericalangle CAB) = 90^\circ - \sphericalangle CAB.$$

Како је $\sphericalangle EDC_1 = \beta$, то је

$$\sphericalangle B_1DC_1 = \alpha + \sphericalangle FDE + \beta = \alpha + \beta + \sphericalangle CAB = (90^\circ - \sphericalangle CAB) + \sphericalangle CAB = 90^\circ.$$

Дакле, дужи DB_1 и DC_1 су узајамно нормалне, па конструкцију није тешко извести.

Над B_1C_1 конструишимо једнакокрако правоугли троугао C_1B_1D. D је на основу доказаног средиште странице BC троугла ABC. На исти начин конструишемо средишта E и F страница BA и AC, редом. Сада, кроз D конструишемо праву паралелну са EF, кроз E праву паралелну са DF и најзад кроз F праву паралелну са ED. Последње три праве дају тражени троугао.

Напоменимо да се задатак може елегантније решити помоћу изометријских трансформација, али смо сматрали да је ово решење већини читалаца прихватљивије.

413. (а) Средиште произвољне дужи AB конструишемо на следећи начин (видети слику 130):

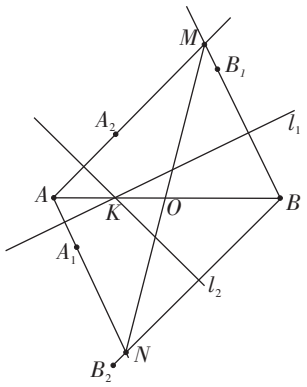
1. На дужи AB бирамо произвољну тачку K и кроз њу конструишемо две праве ℓ_1 и ℓ_2;

2. Конструишемо тачку A_1 симетричну тачки A у односу на праву ℓ_1 и тачку A_2 симетричну тачки A у односу на праву ℓ_2;

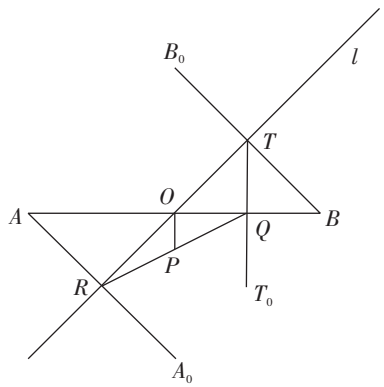
3. Конструишемо тачке B_1 и B_2 симетричне тачки B у односу на ℓ_1 и ℓ_2 редом;

4. конструишемо праве AA_1, AA_2, BB_1 и BB_2 ($AA_1 \parallel BB_1$ и $AA_2 \parallel BB_2$);

5. Ако је M пресек AA_2 и BB_1 и N пресек AA_1 и BB_2. Тада је $AMBN$ паралелограм; дакле права MN полови дуж AB (у тачки O).



Слика 130.



Слика 131.

Из конструкције средишта дужи тривијално следи конструкција под (а).

(б) Опишимо конструкцију симетрале произвољне дужи, помоћу које није тешко извести конструкцију под (б).

1. Према (а) конструишемо најпре средиште дужи AB (слика 131).

2. Конструишемо произвољну праву ℓ кроз тачку O.

3. Конструишемо тачку A_0 симетричну тачки A у односу на праву ℓ и тачку B_0 у односу на праву ℓ. Нека је R пресек правих AA_0 и ℓ, а T пресек правих BB_0 и ℓ.

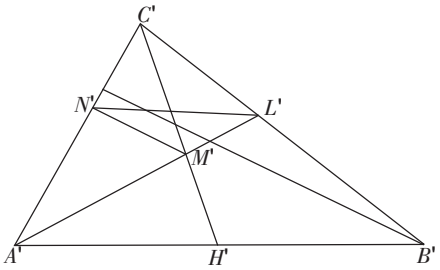
4. Конструисати тачку T_0 симетричну тачки T у односу на праву AB. Нека је Q пресек правих TT_0 и AB.

5. На основу (а) конструишемо средиште P дужи RQ. Тада је OP тражена симатрала, јер је PO средња линија троугла QRT.

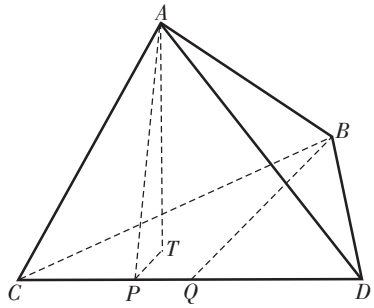
414. (а) Нека је M' тачка пресека правих $A'L'$ и $C'H'$ (слика 132). Конструишимо на правој $A'C'$ тачку N' такву да $C'H'$ полови дуж $N'L'$. Спојимо N' са M', затим конструишимо кроз B' праву паралелну са $M'N'$.

Јасно је да је та права пројекција одговарајуће висине. Пројекција висине из темена A је већ дата. Тачка пресека тих пројекција је пројекција ортоцентра.

(б) Пројекцију центра описане кружнице налазимо као пресек пројекција симетрала страница. Како се средиште дужи пројектује у средиште пројекције дужи, пројекцију сваке симатрале странице конструишемо тако што кроз средиште одговарајуће странице троугла $A'B'C'$ конструишемо праву паралелну одговарајућој висини.



Слика 132.



Слика 133.

415. Нека је a дужина ивице CD (која је наспрамна ивици AB дужине $\geqslant 1$) (видети слику 133).

Висина $AP = h_a$, троугла ACD, дели ивицу CD на два дела CP и PD, па је бар једна од дужи CP и PD дужине $\geqslant \dfrac{a}{2}$. С друге стране, пошто је $AC \leqslant 1$ и $AD \leqslant 1$, имамо да је

$$h_a = \sqrt{AC^2 - CP^2} = \sqrt{AD^2 - DP^2} \leqslant \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}},$$

одакле следи да је

$$P_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}a \cdot h_a \leqslant \frac{1}{2}a\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}.$$

Слично се доказује да за висину $BQ = h_b$ троугла BCD важи $h_b \leqslant \sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$. Пошто је $H_B \leqslant h_b$, где је H_B висина тетраедра $ABCD$ из темена B, имамо да је $H_b \leqslant \sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$. Дакле,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}P_{\triangle ACD} \cdot H_B \leqslant \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{1-\frac{a^2}{4}} \cdot \sqrt{1-\frac{a^2}{4}} \\ &= \frac{1}{6}a\left(1-\frac{a^2}{4}\right) = \frac{1}{24}a(4-a^2). \end{aligned}$$

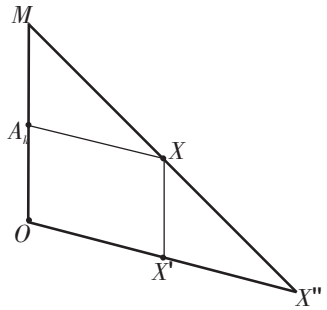
Ако је $a = 1$, тада је $\frac{1}{24}a(4-a^2) = \frac{1}{8}$. Није тешко показати, да ако је $a < 1$, тада је $\frac{1}{24}a(4-a^2) < \frac{1}{8}$. Заиста, ако је $0 < a < 1$, имамо да је

$$\frac{1}{24}a(4-a^2) - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}(1-a)(a^2+a-3) < 0,$$

јер је $1-a > 0$ и $a^2+a-3 < 0$. Дакле, у сваком случају је $V \leqslant \frac{1}{24}a(4-a^2) \leqslant \frac{1}{8}$.

Напомена. Запремина оваквог тетраедра је једнака $\frac{1}{8}$ у случају да су ACD и BCD једнакостранични троуглови са страницама 1 $\left(P_{\triangle ACD} = \frac{\sqrt{3}}{4}\right.$ и $\left.h_b = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и угао међу странама ACD и BCD једнак 90° $\left(H_B = h_b = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Није тешко доказати да је у оваквом тераедру $AB = \sqrt{h_a^2+h_b^2} = \sqrt{2 \cdot \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}} > 1$.

416. Нека је Π' полиедар који је хомотетичан полиедру Π са центром хомотетије O и коефицијентом 2 (тј. $\Pi' = \mathcal{H}_{O,2}(\Pi)$). Докажимо да је $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_8 \subseteq \Pi'$. Нека је X произвољна тачка полиедра Π_k, $k = 1, 2, \ldots, 8$ (слика 134).



Слика 134.

Тада је $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA_k} + \overrightarrow{A_kX}$. Тачке X'' и M припадају полиедру Π; тачка X припада дужи MX'', па припада и Π', јер је Π конвексан. Пошто је очигледно $\Pi \subseteq \Pi'$, следи да $\Pi, \Pi_1, \ldots, \Pi_8 \subseteq \Pi'$. Запремина полиедра Π' је 8 пута већа од запремине полиедра Π па тиме и савког од полиедара $\Pi_1, \ldots, \Pi_8$, што заначи да нека два полиедра од $\Pi, \Pi_1, \ldots, \Pi_8$ имају бар једну заједничку унутрашњу тачку.

417. Јасно, због $x \in [3, 4]$,

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7).$$

На основу једнакости између аритметичке и геометријске средине, имамо да је

$$\frac{x + (7-x)}{2} \geqslant \sqrt{x(7-x)}, \text{ тј. } x(7-x) \leqslant \left(\frac{7}{2}\right)^2.$$

Слично добијамо да је

$$(x-1)(6-x) \leqslant \left(\frac{5}{2}\right)^2, \quad (x-2)(5-x) \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad \text{и} \quad (x-3)(4-x) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Једнакост у свим случајевима важи само у случају када је $x = \dfrac{7}{2} \in [3, 4]$ (једначине $x = 7 - x$, $x - 1 = 6 - x$, $x - 2 = 5 - x$, $x - 3 = 4 - x$ су еквивалентне). Дакле,

$$\max\left\{f(x) \mid x \in [3, 4]\right\} = f\left(\frac{7}{2}\right) = 3^2 5^2 7^2 2^{-8} = \frac{11025}{256}.$$

Напомена. Уопште, ако је $n \in \mathbb{N}$ и $f(x) = \prod\limits_{k=0}^{2n+1} |x - k|$,

$$\max\left\{f(x) \mid x \in [n, n+1]\right\} = f\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \left(\frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}}\right)^2.$$

418. Посматрајмо, најпре, неједначину $|x+1| + |2-x| < a$. Ако је $x < -1$, она је еквивалентна са $\dfrac{1-a}{2} < x < -1$, па има решења ако и само ако је $\dfrac{1-a}{2} < -1$, тј. ако и само ако је $a > 3$. Ако $x \in [-1, 2]$, тада је $|x+1|+|2-x| = x+1+2-x = 3$, па горња неједначина тада нема решења за $a \leqslant 3$. Најзад, ако је $x > 2$, тада је $x + 1 + x - 2 < a$, тј. $2 < x < \dfrac{a+1}{2}$, па неједначина има решења ако и само ако је $a > 3$. Дакле, за $a \leqslant 3$ неједначина нема решења, док за $a > 3$, њена решења су $x \in \left(\dfrac{1-a}{2}, \dfrac{1+a}{2}\right)$.

Друга неједначина еквивалентна је са $\dfrac{6x + 5a - 11}{6x - 5a + 5} < 0$. Њена решења су елементи или интервала $\left(\dfrac{11-5a}{6}, \dfrac{5a-5}{6}\right)$ или интервала $\left(\dfrac{5a-5}{6}, \dfrac{11-5a}{6}\right)$,

у зависности од тога који је од бројева $\frac{5a-5}{6}$ и $\frac{11-5a}{6}$ већи, или решења нема уколико је $\frac{5a-5}{6}=\frac{11-5a}{6}$, тј. $a=\frac{8}{5}$.

Дакле, дате неједначине су еквивалентне ако и само ако имају исти скуп решења, односно ако је

$$\frac{1-a}{2}=\frac{11-5a}{6}, \qquad \frac{1+a}{2}=\frac{5a-5}{6}, \qquad a\geqslant 3$$

или

$$\frac{1-a}{2}=\frac{5a-5}{6}, \qquad \frac{1+a}{2}=\frac{11-5a}{6}, \qquad a\geqslant 3$$

или

$$a=\frac{8}{5}, \qquad a\leqslant 3.$$

Дакле, решења су $a=4$ и $a=\frac{8}{5}$.

419. Пошто је $f(1)=-\frac{2}{3}$ најмања вредност квадратне функције $f(x)=ax^2+bx+c$, имамо да је $\frac{4ac-b^2}{4a}=-\frac{2}{3}$ и $-\frac{b}{2a}=1$. Даље, према Виетовим правилима, је

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=2 \quad \text{и} \quad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

Из једнакости

$$x_1^4+2x_1^3x_2+2x_1x_2^3+x_2^4=(x_1+x_2)^4-2x_1x_2\left((x_1+x_2)^2+x_1x_2\right)$$

и

$$(x_1-x_2)^3-2x_2^2(3x_1-x_2)=(x_1+x_2)^3-6x_1x_2(x_1+x_2)$$

дати услов еквивалента је са

$$(x_1+x_2)^4-2x_1x_2\left((x_1+x_2)^2+x_1x_2\right)=\frac{83}{54}\left((x_1+x_2)^3-6x_1x_2(x_1+x_2)\right),$$

тј. са $t^2-\frac{47}{9}t-\frac{50}{27}=0$, при чему је $t=\frac{c}{a}$. Решења последње једначине су $t_1=-\frac{1}{3}$ и $t_2=\frac{50}{9}$. Ако је $\frac{c}{a}=-\frac{1}{3}$ (и $b=-2a$, $\frac{4ac-b^2}{4a}=-\frac{2}{3}$), добијамо да је $a=\frac{1}{2}$, $b=-1$ и $c=-\frac{1}{6}$. Ако је $\frac{c}{a}=\frac{50}{9}$, добијамо да је $a=-\frac{12}{7}$, што не даје одговарајуће коефицијенте, јер функција има минимум па је $a>0$.

Дакле, $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{6}$ је једино решење.

420. Ако је $a \in \{0,1\}$ једначина има два решења, $x \in \{0,1\}$.

Нека је $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Лако се види да је a једно решење дате једначине. Такође, ако је x_0 решење једначине, то су и $\dfrac{1}{x_0}$ и $1 - x_0$. Пошто једначина има највише шест решења, сва њена решења су:

$$x_1 = a,\ x_2 = \frac{1}{a},\ x_3 = 1 - a,\ x_4 = \frac{1}{1-a},\ x_5 = 1 - \frac{1}{a},\ x_6 = 1 - \frac{1}{1-a}\,.$$

421. Нека је $z = x + iy,\ x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}$. Тада је:

$$\begin{aligned} z + a|z+1| + i = 0 &\Leftrightarrow y = -1 \wedge x = -a\sqrt{(x+1)^2 + y^2} \\ &\Leftrightarrow y = -1 \wedge x = -a\sqrt{x^2 + 2x + 2} \\ &\Leftrightarrow y = -1 \wedge (a^2-1)x^2 + 2a^2x + 2a^2 = 0 \wedge x \leqslant 0. \end{aligned}$$

За $a = 0$ добијамо да је $z = -i$, а за $a = 1$, да је $z = -1 - i$. Нека је сада $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$. Тада је дата једначина еквивалентна са

$$y = -1 \wedge x < 0 \wedge \left(x = \frac{a}{1-a^2}\left(a + \sqrt{2-a^2}\right) \vee x = \frac{a}{1-a^2}\left(a - \sqrt{2-a^2}\right)\right).$$

Ако је $a \in (0,1)$, тада једначина има једно решење

$$z = \frac{a}{1-a^2}\left(a - \sqrt{2-a^2}\right) - i.$$

Ако је $a \in (1,\sqrt{2}]$, тада једначина има два решења

$$z_1 = \frac{a}{1-a^2}\left(a - \sqrt{2-a^2}\right) - i,\ z_2 = \frac{a}{1-a^2}\left(a + \sqrt{2-a^2}\right) - i.$$

Ако је $a > \sqrt{2}$, једначина нема решења, јер је тада $2 - a^2 < 0$.

422. Пошто је $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$, следи да је функција f строго растућа на интервалима $(-\infty,-1)$ и $(1,+\infty)$, а строго опадајућа на интервалу $(-1,1)$. Даље,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty, \quad f(-1) = 3, \quad f(1) = -1, \quad f(3) = 19 > 0.$$

Дакле, једначина $f(x) = 0$ има три различита корена x_1, x_2, x_3 таква да је $x_1 < -1 < x_2 < 1 < x_3 < 3$. Једначина, $f(x) = x_1$ има само један реалан корен (мањи од -1), док једначине $f(x) = x_2$ и $f(x) = x_3$ имају по три различита реалана корена–по један у сваком од интеравала $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,+\infty)$. Пошто су корени једначине $f(f(x)) = 0$ корени једне од поменуте три једначине, следи да дата једначина има седам различитих реалних корена.

423. Нека је $a = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}$ и $y = \operatorname{tg} x$. Размотримо следећа три случаја.

1) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}-x\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}+x\right)=\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}$. Тада је $\frac{a-y}{1+ay}\cdot\frac{a+y}{1-ay}=a^2$, тј. $(a^4-1)y^2=0$. Пошто је $a\neq\pm1$, добијамо да је $y=0$, тј. $\operatorname{tg}x=0$. Дакле, $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

2) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}+x\right)=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{12}-x\right)$. Тада је $a\frac{a+y}{1-ay}=\left(\frac{a-y}{1+ay}\right)^2$, тј.

$$(a^2+1)y\left(ay^2+(a^2-1)y+3a\right)=0.$$

Случај $y=0$ је већ разматран под 1). Нека су y_1 и y_2 решења једначине

$$ay^2+(a^2-1)y+3a=0.$$

Пошто је $a=\operatorname{tg}15^\circ=\operatorname{tg}(45^\circ-30^\circ)=2-\sqrt{3}$, добијамо да је $y_1=y_2=\sqrt{3}$, тј. $\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$. Дакле, $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

3) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}-x\right)=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{12}+x\right)$. Сменом $z=-x$ овај случај сводимо на претходни, па је $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Дакле, тражени бројеви су елементи скупа $\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\pm\frac{\pi}{3}+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

424. Множењем дате једначине са 4 и додавањем броја 1 левој и десној страни добија се $4x^2+4x+1=4y^4+4y^3+4y^2+4y+1$, па је

$$\begin{aligned}(2x+1)^2 &= 4y^4+4y^3+4y^2+4y+1=4y^4+4y^3+y^2+3y^2+4y+1\\ &= \left(2y^2+y\right)^2+(y+1)(3y+1)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}(2x+1)^2 &= 4y^4+4y^3+4y^2+4y+1\\ &= 4y^4+y^2+4+4y^3+8y^2+4y-5y^2-3\\ &= \left(2y^2+y+2\right)^2-5y^2-3.\end{aligned}$$

Дакле,

$$\left(2y^2+y\right)^2+(y+1)(3y+1)=(2x+1)^2=\left(2y^2+y+2\right)^2-(5y^2+3).$$

Сада разликујемо две могућности:

1) $y=-1\Rightarrow x^2+x=0\Rightarrow x=0\vee x=-1$;

2) $y\in\mathbb{Z}$, $y\neq-1$. Тада је за $(y+1)(3y+1)>0$ и $5y^2+3>0$, па је

$$\left(2y^2+y\right)^2<(2x+1)^2<\left(2y^2+y+2\right)^2.$$

Како између $\left(2y^2+y\right)^2$ и $\left(2y^2+y+2\right)^2$ постоји само један потпун квадрат, $\left(2y^2+y+1\right)^2$, то је $(2x+1)^2=\left(2y^2+y+1\right)^2$. Према томе,

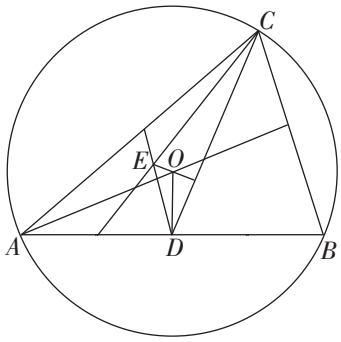
$$\begin{aligned}4y^4+4y^3+4y^2+4y+1 &= (2x+1)^2=\left(2y^2+y+1\right)^2\\ &= 4y^4+y^2+1+4y^3+4y^2+2y,\end{aligned}$$

па је $y^2-2y=0$, одакле је $y=0$ или $y=2$. Ако је $y=0$, онда је $x^2+x=0$, тј. $x=0$ или $x=-1$. Ако је $y=-2$, онда је $x^2+x=30$, па је $x=5$ или $x=-6$.

Дакле, скуп решења је: $\mathcal{R}=\{(0,-1),(-1,-1),(0,0),(-1,0),(5,2),(-6,2)\}$.

425. Како је (слика 135) $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$, то је

$$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)=\frac{1}{6}\left(3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}\right).$$



Слика 135.

Даље је $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)$. Користећи да је $OA=OB=OC$, скаларним множењем претходних релација добијамо да је

$$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{12}\left(4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CB}.$$

Стога је $OE\perp CD\Leftrightarrow OA\perp CB\Leftrightarrow AB=AC$.

426. Нека је c број који се у декадном запису пише коришћењем једино цифара 2 и 6. Очигледно је c паран број. Ако постоје цели бројеви a и b такви да је $a^2-b^2=c$, онда они не могу бити различите парности јер би тада разлика њихових квадрата била непаран природан број. Дакле, имамо два случаја:

1) $a=2m$ и $b=2n$, за неке m и n. Тада је $a^2-b^2=4(m^2-n^2)$, па $4\mid c$;
2) $a=2m+1$ и $b=2n+1$, за неке m и n. Тада је $a^2-b^2=4(m^2+m-n^2-n)$, па, поново $4\mid c$.

Међутим, двоцифрени завршетак броја c је: 22, 26, 62 или 66, тј. $4 \nmid c$.

Дакле, не постоје цели бројеви a и b такви да је $a^2 - b^2 = c$.

427. Претпоставимо супротно да је A паран број, тј. да је $(m+3)^n + 1 = 6km$. Тада је m паран број. Штавише, $3 \mid m^n + 1$, одакле следи да је $m = 3t + 2$ и да је n непаран број. Тада је $3^n + 1 = 4 \cdot S$, где је S непаран број ($8 \nmid 3^n + 1$) и $3^n + 1 \equiv 4 \pmod 6$. Нека је $m = 2^\alpha m_1$, где је $\alpha \geqslant 1$ и m_1 непаран број. Тада $2^\alpha \mid 3^n + 1$, одакле је $\alpha \leqslant 2$, и $m_1 = 6t_1 + 1$. Пошто $m = 2^\alpha(6t_1 + 1)$ има облик $3t + 2$, а $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$ видимо да је $\alpha = 1$. Онда је $m = 12t_1 + 2$ и из $(m+3)^n + 1 = 6km$ следи да $4 \mid 5^n + 1$, што је немогуће.

428. Како је $8425109 = 7^4 \cdot 11^2 \cdot 29$, следи да $7 \mid x^2 + y^2$ и $11 \mid x^2 + y^2$. Остаци квадрата природних бројева при дељењу са 7 су $0, 1, 2, 4$, а при дељењу са 11 су $0, 1, 3, 4, 5, 9$, па важи

$$7 \mid x^2 + y^2 \Rightarrow 7 \mid x^2 \wedge 7 \mid y^2 \quad \text{и} \quad ; 11 \mid x^2 + y^2 \Rightarrow 11 \mid x^2 \wedge 11 \mid y^2.$$

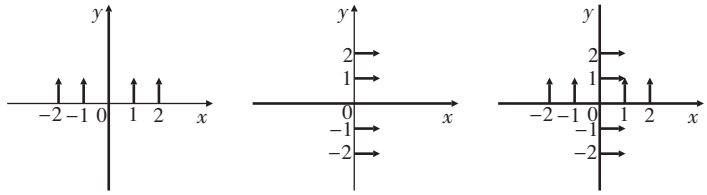
Одакле закључујемо да $77 \mid x^2$ и $77 \mid y^2$, односно $x = 77m$, $y = 77n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Полазна једначина се сада своди на $m^2 + n^2 = 7^2 \cdot 29$, одакле закључујемо да је $m = 7k$, $n = 7l$, $m, n \in \mathbb{N}$, односно $k^2 + l^2 = 29$. Решења последње једначине су $(k, l) \in \{(2, 5), (5, 2)\}$, одакле добијамо да су решења полазне једначине $(x, y) \in \{(1078, 2695), (2695, 1078)\}$.

429. Нека је $x = n + \alpha$, $0 \leqslant \alpha < 1$ и $y = m + \beta$, $0 \leqslant \beta < 1$, где су m и n цели бројеви. Тада се почетна једнакост може затисати у облику $n(m+\beta) = (n+\alpha)\beta$, одакле је $nm = \alpha\beta$. Како је $0 \leqslant \alpha\beta < 1$ и $mn \in \mathbb{Z}$, то је $nm = \alpha\beta = 0$. Стога је бар један од бројева x и y цео број.

Нека је x цео број, тј. $\alpha = 0$. Ако је $x \neq 0$, тада је $m = [y] = 0$, а x може бити произвољно, ако је $x = 0$, онда је y произвољно и одговарајући скуп је y-оса (слика 136, график лево).

Нека је y цео број, тј. $\beta = 0$. Ако је $y \neq 0$, тада је $n = [x] = 0$, а y може бити произвољно, ако је $y = 0$, онда је x произвољно и одговарајући скуп је x-оса (слика 136, график у средини).

Дакле, тражени скуп је унија претходно наведених, тј. скуп представљен на слици 136 десно.



Слика 136.

430. Треба за природне бројеве a и b доказати импликацију

$$b\sqrt{7}-a>0 \Rightarrow b\sqrt{7}-a>\frac{1}{a}.$$

Размотрићемо одвојено три случаја:

1) Ако је $b\sqrt{7}-a>1$ тврђење следи тривијално, јер је $(\forall a\in\mathbb{N})1>\frac{1}{a}$;

2) Случај $b\sqrt{7}-a=1$ није могућ, јер је $\sqrt{7}$ ирационалан, а $\frac{1+a}{b}$ рационалан број;

3) Случај $0<b\sqrt{7}-a<1$ је најинтересантнији за доказивање.

Како је $b\sqrt{7}-a>0$, $a,b\in\mathbb{N}$ важи $7b^2>a^2$. Могући остаци при дељењу квадрата природних бројева са 7 су 0,1,2,4, па је $\min\{7b^2-a^2 \mid a,b\in\mathbb{N}\}=3$. Дакле, $7b^2-a^2=(b\sqrt{7}-a)(b\sqrt{7}+a)\geqslant 3$, односно

$$b\sqrt{7}-a\geqslant\frac{3}{b\sqrt{7}+a}. \tag{1}$$

С друге стране, из $b\sqrt{7}-a<1$ додавањем $2a$ обема странама неједнакости добијамо $b\sqrt{7}+a<1+2a$. Како је $a\geqslant 1$ следи да је $b\sqrt{7}+a<3a$, односно

$$\frac{3}{b\sqrt{7}+a}>\frac{1}{a}. \tag{2}$$

Сада на основу (1) и (2) закључујемо да важи $b\sqrt{7}-a>\frac{1}{a}$.

431. Из датих једначина следи

$$x^{19}+y^{19}=xy(x^{17}+y^{17}). \tag{1}$$

Дакле, скуп решења датог система је подскуп решења једначине (1). Ова једначина је еквивалентна са

$$(x-y)^2(x+y)^2(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)(x^6-x^3y^3+y^6)=0,$$

односно са

$$x-y=0\vee x+y=0\vee x^2+xy+y^2=0\vee x^2-xy+y^2=0\vee x^6-x^3y^3+y^6=0. \tag{2}$$

Једино решење последње три једначине из (2) је $x=y=0$, али због прве једначине датог система то није решење. Из прве две једначине добијамо $x=y$ или $x=-y$, одакле закључујемо да је једино решење датог система

$$x=y=\frac{1}{\sqrt[17]{2}}.$$

432. Дату једначину има смисла решавати на скупу $D=[1,+\infty)$, где је она еквивалентна са једначином $2-x=1-3\sqrt{x-1}+3(x-1)-(x-1)\sqrt{x-1}$, односно са $4(x-1)=\sqrt{x-1}\,(x+2)$. Како су обе стране горње једнакости ненегативне можемо извршити квадрирање и тако добити еквивалентну једначину са полазном, тј. једначину $(x-1)(x-2)(x-10)=0$. Дакле, $x\in\{1,2,10\}$ (јер $1,2,10\in D$).

433. 1° Када је $a = 0$ полазна једначина се своди на једначину $2y^2 + 4y + 2 = 0$, односно на $y = -1$. Дакле, за $a = 0$ решења полазне једначине су сви уређени парови $(c, -1)$, где је $c \in \mathbb{R}$, па нема јединственог решења.

2° За $a \neq 0$ полазна једначина је квадратна једначина по x и њена дискриминанта је

$$D = (4ay - 2a)^2 - 4a[(3a + 2)y^2 + (4 - 6a)y + 2] = 4a(a - 2)(y + 1)^2.$$

За $a \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, имаћемо два реална решења за x за свако реално $y \neq -1$, а за $y = -1$ имаћемо $x = 3$, па нема јединственог решења.

За $a = 2$ једначина је еквивалентна са $[x + (2y - 1)]^2 = 0$ и тада су решења сви уређени парови $(1 - 2c, c)$, где је c реалан број.

За $a \in (0, 2)$ једино реално решења је $(x, y) = (3, -1)$.

Дакле, $a \in (0, 2)$ једначина $ax^2 + (3a + 2)y^2 + 4axy - 2ax + (4 - 6a)y + 2 = 0$ има јединствено реално решење.

434. Нека је

$$f(x) = (1 + x)^{2000} = \sum_{k=0}^{2000} \binom{2000}{k} x^k.$$

Ако узмемо један трећи корен јединице $\omega = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, тада је $\omega^3 = 1$ и $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, па је

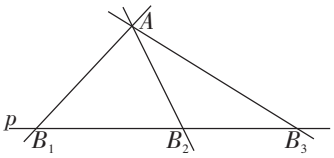
$$\begin{aligned}
&3\left(\binom{2000}{2} + \binom{2000}{5} + \binom{2000}{8} + \cdots + \binom{2000}{2000}\right)\\
&= f(1) + \omega f(\omega) + \omega^2 f(\omega^2)\\
&= 2^{2000} + \omega(1 + \omega)^{2000} + \omega^2(1 + \omega^2)^{2000}\\
&= 2^{2000} + \omega(-\omega)^{2000} + \omega^2(-\omega)^{2000}\\
&= 2^{2000} + \omega^2 + \omega = 2^{2000} - 1.
\end{aligned}$$

Дакле, $\displaystyle\binom{2000}{2} + \binom{2000}{5} + \binom{2000}{8} + \cdots + \binom{2000}{2000} = \frac{2^{2000} - 1}{3}$.

435. Претпоставимо да не постоји тачка коју садржи свака од датих правих. Нека је A она од пресечних тачака датих правих и p она од датих правих за коју важи: тачка A не припада правој p и растојање од тачке A до праве p је минимално.

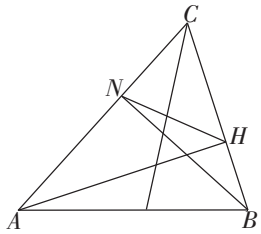
Према услову задатка тачку A садрже бар три од датих правих. Нека те праве секу праву p у тачкама B_1, B_2 и B_3 и нека је, на пример, тачка B_2 између B_1 и B_3 (слика 137). Бар један од углова $\sphericalangle AB_2B_1$, $\sphericalangle AB_2B_3$ није оштар. Нека је, на пример, $\sphericalangle AB_2B_3 \geqslant 90^0$. Тада у троуглу AB_2B_3 важи $AB_3 > B_2B_3$, па следи $d(B_2, AB_3) < d(A, B_2B_3)$. Последње је у контрадикцији с чињеницом да

је растојање тачке A од праве p минимално. Дакле, све дате праве се секу у једној тачки.

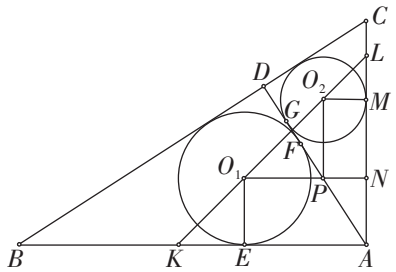


Слика 137.

436. Како је $\dfrac{HC}{AC} = \cos\gamma = \dfrac{NC}{BC}$ ($\gamma = \sphericalangle ACB$), закључујемо да су троуглови HCN и ABC слични са коефицијентом сличности $k = \cos\gamma$ (слика 138). Симетрала угла γ троугла ABC истовремено је и симетрала угла у троуглу HCN. По услову задатка однос дужина симетрала у једном и другом троуглу је $\dfrac{1}{2}$. Како је однос одговарајућих дужинских елемената у сличним троугловима једнак коефицијенту сличности, то је $k = \cos\gamma = \dfrac{1}{2}$, одакле је $\gamma = 60^0$.



Слика 138.



Слика 139.

437. Увешћемо следеће ознаке: $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $h = AD$, $k_1(O_1, r_1)$-круг уписан у троугао ABD, $k_2(O_2, r_2)$-круг уписан у троугао ADC. Нека су E и F тачке додира круга k_1 редом са AB и AD, а G и M тачке додира круга k_2 редом са AD и AC, N подножје нормале из O_1 на AC и P подножје нормале из O_2 на O_1N (слика 139). Тада важе следеће једнакости:

$$O_1N = EA = AF = h - r_1, \tag{1}$$

$$O_1P = O_1N - PN = O_1N - O_2M = h - r_1 - r_2, \tag{2}$$

$$O_2P = MN = AM - AN = AG - r_1 = h - r_2 - r_1. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следи да је $O_1P = O_2P$, а одатле следи да је $\sphericalangle O_1O_2P = 45^0$, $\sphericalangle O_2LM = 45^0$ и $ML = O_2M = r_2$. Према томе,

$$AL = AM + ML = AG + r_2 = h - r_2 + r_2 = h.$$

Слично доказујемо да је и $AK = h$. Коначно добијамо

$$\frac{S}{T} = \frac{ah}{h^2} = \frac{a}{h} = \frac{a^2}{ah} = \frac{a^2}{bc} = \frac{b^2+c^2}{bc} \geqslant 2.$$

438. Дата једначина је еквивалентна са једначином

$$(3+\sqrt{2})^x - (6+9\sqrt{2}) = (5-3\sqrt{2})^y.$$

Како је $0 < 5-3\sqrt{2} < 1$ и $y \in \mathbb{N}$, тада је $0 < (5-3\sqrt{2})^y < 1$, па закључујемо да x мора бити 2, одакле следи да је $y = 1$.

439. Приметимо да за $\alpha \neq \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ важи

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}2\alpha &= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha\cos\alpha - \cos 2\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha\sin 2\alpha}\\ &= \frac{\sin(2\alpha-\alpha)}{\sin\alpha\sin 2\alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha}.\end{aligned}$$

Ако у једнакости

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}2\alpha = \frac{1}{\sin 2\alpha}$$

уместо α стављамо редом x, $2x$,..., $2^n x$, $x \notin \left\{\dfrac{k\pi}{2^n} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ добијамо n једнакости, које када саберемо дају

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin 2^k x} = \operatorname{ctg}x - \operatorname{ctg}2x + \operatorname{ctg}2x - \operatorname{ctg}4x + \cdots + \operatorname{ctg}2^{n-1}x - \operatorname{ctg}2^n x,$$

односно

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \operatorname{ctg}x - \operatorname{ctg}2^n x.$$

440. Уочимо да су $\log(\alpha x+\beta)$ и $2\log(x+1)$ дефинисани ако је $\alpha x+\beta > 0$ и $x+1 > 0$. Под овим условима дата једначина је еквивалентна квадратној једначини $\alpha x+\beta = (x+1)^2$, чија је дискриминанта $D = \alpha^2 - 4\alpha + 4\beta$. На основу тога добијамо да су решења једначине $x_1 = \dfrac{\alpha-2-\sqrt{D}}{2} \leqslant x_2 = \dfrac{\alpha-2+\sqrt{D}}{2}$ уколико су испуњени услови $\alpha x+\beta > 0$, $x+1 > 0$ и $\beta \geqslant \alpha - \dfrac{\alpha^2}{4}$.

Морамо дискутовати три случаја.

1° За $\alpha = 0$, $\beta > 0$ једино решење је $x = -1+\sqrt{\beta}$.

2° У случају $\alpha > 0$ мора бити испуњено $x > -\dfrac{\beta}{\alpha}$, $x > -1$ и $\beta \geqslant \alpha - \dfrac{\alpha^2}{4}$. Сада разликујемо подслучајеве $\alpha > \beta$, када је $-\dfrac{\beta}{\alpha} > -1$, па се за решења

проверава само услов $x > -\dfrac{\beta}{\alpha}$, који задовољава једино x_2. У подслучају $\beta \geqslant \alpha$ имамо $-\dfrac{\beta}{\alpha} \leqslant -1$, па се за решења проверава само услов $x > -1$ и у овом случају једино решење је x_2. Дакле, за $\alpha > 0$, $\beta > \alpha - \dfrac{\alpha^2}{4}$ једино решење је $x = \dfrac{\alpha - 2 + \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 4\beta}}{2}$.

3° За $\alpha < 0$ мора бити испуњено $-1 < x < -\dfrac{\beta}{\alpha}$ и $\beta \geqslant \alpha - \dfrac{\alpha^2}{4}$. Дакле, мора бити $-1 < -\dfrac{\beta}{\alpha}$, а то је еквивалентно са $\beta > \alpha$. И у овом случају једино решење је x_2. Дакле, за $\alpha < 0$, $\beta > \alpha$ једино решење је $x = \dfrac{\alpha - 2 + \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 4\beta}}{2}$.

У свим осталим случајевима нема реалних решења.

441. Без губитка општости можемо претпоставити да је $a \geqslant b \geqslant c$. Како је неједнакост $a \geqslant b$ еквивалентна неједнакости $\alpha \geqslant \beta$, то је $(a-b)(\alpha-\beta) \geqslant 0$, при чему једнакост важи ако и само ако је $a = b$. Слично је $(b-c)(\beta-\gamma) \geqslant 0$ и $(c-a)(\gamma-\alpha) \geqslant 0$, па следи

$$(a-b)(\alpha-\beta) + (b-c)(\beta-\gamma) + (c-a)(\gamma-\alpha) \geqslant 0. \tag{1}$$

Користећи услов $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, неједнакост (1) можемо еквивалентно трансформисати на следећи начин:

$$a(2\alpha - \beta - \gamma) + b(2\beta - \gamma - \alpha) + c(2\gamma - \alpha - \beta) \geqslant 0,$$

$$a(3\alpha - \pi) + b(3\beta - \pi) + c(3\gamma - \pi) \geqslant 0,$$

$$3(a\alpha + b\beta + c\gamma) \geqslant \pi(a + b + c),$$

$$\frac{\pi}{3} \leqslant \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c}.$$

Једнакост важи ако и само ако је $a = b = c$.

Како је збир две странице троугла већи од треће, важи

$$(b + c - a)\alpha + (c + a - b)\beta + (a + b - c)\gamma > 0. \tag{2}$$

Поново користећи услов $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, неједнакост (2) можемо еквивалентно трансформисати на следећи начин:

$$a(\beta + \gamma - \alpha) + b(\gamma + \alpha - \beta) + c(\alpha + \beta - \gamma) > 0,$$

$$a(\pi - 2\alpha) + b(\pi - 2\beta) + c(\pi - 2\gamma) > 0,$$

$$\pi(a + b + c) > 2(a\alpha + b\beta + c\gamma),$$

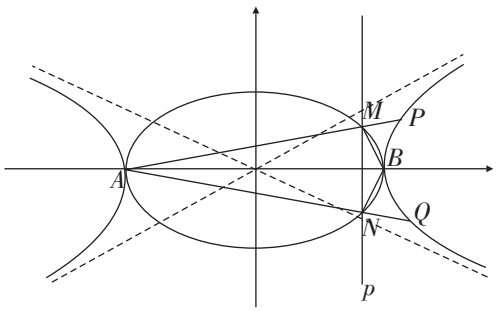
$$\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c} < \frac{\pi}{2}.$$

Дакле, ако су a, b и c странице троугла, а α, β и γ одговарајући углови важи

$$\frac{\pi}{3} \leqslant \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c} < \frac{\pi}{2}.$$

442. Нека права p има једначину $x = t$, $-a < t < a$ (слика 140.). Тада тачке M и N имају координате $\left(t, \frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}\right)$ и $\left(t, -\frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}\right)$, а праве AM и BN једначине

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}\,\frac{x+a}{t+a} \quad \text{и} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}\,\frac{x-a}{a-t}.$$



Слика 140.

У њиховој пресечној тачки P је $\frac{x+a}{t+a} = \frac{x-a}{a-t}$, одакле је $x = \frac{a^2}{t}$ (искључује се случај $t = 0$ када су праве AM и BN паралелне). Дакле, тачка P има координате

$$x = \frac{a^2}{t} \quad \text{и} \quad y = \frac{b}{t}a\sqrt{a^2-t^2} \qquad (-a < t < a, t \neq 0).$$

Елиминацијом параметра t добија се

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ xy > 0,$$

тј. тачка P припада једном од лукова хиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ у првом или трећем квадранту. Слично се доказује да је геометријско место тачака Q унија лукова те хиперболе у другом и четвртом квадранту.

443. На основу услова (1) и (2) важи $f(0) \leqslant 0$ и $f(0) \leqslant 2f(0)$, одакле добијамо да је $f(0) = 0$. На основу (1) имамо да је $f(x) \leqslant x$ и $f(-x) \leqslant -x$, одакле је $f(x) + f(-x) \leqslant 0$, па је због услова (2) и $f(0) = 0$, испуњено $f(x) + f(-x) = 0$, односно функција f је непарна. Како је функција f непарна и $f(-x) \leqslant -x$ закључујемо да важи $f(x) \geqslant x$, што заједно са условом (1) имплицира да је $f(x) = x$ за свако $x \in \mathbb{R}$.

444. Тврђење задатка следи на основу једнакости

$$\begin{aligned} 2\left(1+2^{2005}+\cdots+n^{2005}\right) &= 2+\left(2^{2005}+n^{2005}\right)+\left(3^{2005}+(n-1)^{2005}\right) \\ &+\cdots+\left(n^{2005}+2^{2005}\right)=2+(n+2)M, \end{aligned}$$

где је M цео број.

445. Нека је a природан број који се завршава са две исте цифре као и његов квадрат. Тада $100 \mid a^2-a=a(a-1)$, тј. $a(a-1)=100k=4\cdot 25\cdot k$ за неки k. Пошто је $(a-1,a)=1$, имамо да: $(25 \mid a$ и $4 \mid a-1)$ или $(25 \mid a-1$ и $4 \mid a)$ или $100 \mid a$ или $100 \mid a-1$.

У првом случају, када $25 \mid a$ и $4 \mid a-1$, број a се завршава цифрама 00, 25, 50 или 75, тј. $a=\overline{\ldots 00}$ или $a=\overline{\ldots 25}$ или $a=\overline{\ldots 50}$ или $a=\overline{\ldots 75}$ па је $a-1=\overline{\ldots 99}$ или $a-1=\overline{\ldots 24}$ или $a-1=\overline{\ldots 49}$ или $a-1=\overline{\ldots 74}$. Једино у случају када се број a завршава цифрама 25, број $a-1$ је дељив са 4, па $100 \mid a^2-a$.

У другом случају, када $25 \mid a-1$ и $4 \mid a$, број $a-1$ се завршава цифрама 00, 25, 50 или 75, тј. $a-1=\overline{\ldots 00}$ или $a-1=\overline{\ldots 25}$ или $a-1=\overline{\ldots 50}$ или $a-1=\overline{\ldots 75}$, па је $a=\overline{\ldots 01}$ или $a=\overline{\ldots 26}$ или $a=\overline{\ldots 51}$ или $a=\overline{\ldots 76}$. Једино у случају када се $a-1$ завршава цифрама 75, тј. a се завршава цифрама 76, број a је дељив са 4, па $100 \mid a^2-a$.

Ако $100 \mid a$ тада су 00 последње две цифре броја a, па $100 \mid a^2-a$.

Најзад, ако $100 \mid a-1$, последње две цифре броја a су 01, и $100 \mid a^2-a$.

Дакле, тражени бројеви су сви бројеви које се завршавају цифрама 25, 76, 00 или 01.

446. Нека m и n задовољавају услове задатка. Тада је n непаран број и $(m,n)=1$. Ако је $n=3$ тада је $m\equiv 1 \pmod 3$, јер би у случају $m\equiv -1 \pmod 3$ имали

$$1+m^{3^n}+m^{2\cdot 3^n}\equiv 1-1+1\equiv 1 \pmod 3.$$

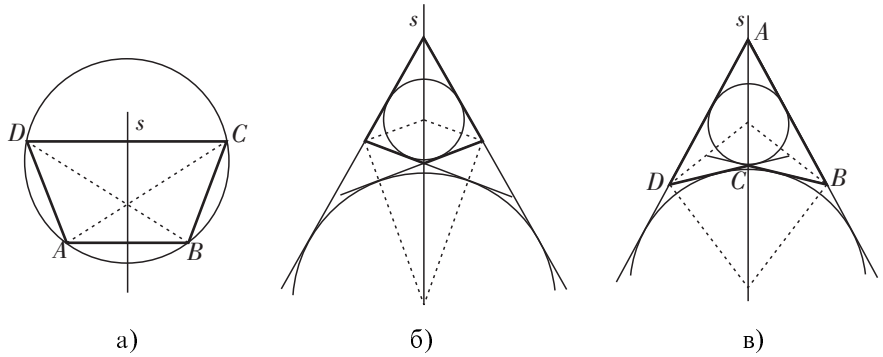
Нека је сада $n>3$. Тада важи $m^{3^n}\not\equiv 1 \pmod n$ јер би у супротном следило $1+m^{3^n}+m^{2\cdot 3^n}\equiv 3 \pmod n$, тј. $n \mid 3$. С друге стране

$$1+m^{3^n}+m^{2\cdot 3^n}=\frac{m^{3^{n+1}}-1}{m^{3^n}-1}$$

одакле је $m^{3^{n+1}}\equiv 1 \pmod n$. Нека је k најмањи природан број такав да је $m^k\equiv 1 \pmod n$. Тада $k \mid 3^{n+1}$ и $k \nmid 3^n$, па је $k=3^{n+1}$. Како је $(m,n)=1$ на основу Ојлерове теореме је $m^{\varphi(n)}\equiv 1 \pmod n$, па је $k\leqslant \varphi(n)$. Према томе, $3^{n+1}\leqslant \varphi(n)\leqslant n-1$, што је немогуће.

Дакле, тражени бројеви су $n=3$ и сви бројеви $m\geqslant 4$ такви да је $m\equiv 1 \pmod 3$.

447. Нека је s оса симетрије четвороугла $ABCD$.

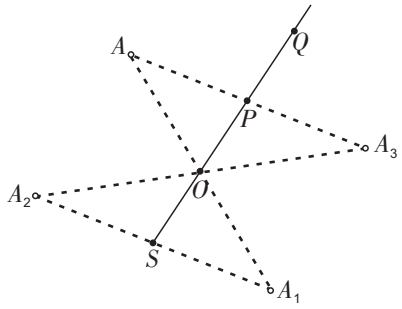


Слика 141.

Претпоставимо најпре да s не садржи ни једно теме четвороугла. Тада са сваке стране праве s леже по два темена четвороугла; нека су A и D са једне, а B и C са друге стране праве s, при чему су ови парови тачака симетрични у односу на s: тачка A симетрична тачки B, а D симетрична тачки C (иначе s не би била оса симетрије четвороугла). Према томе имамо $AB \parallel CD$, $CD \perp s$ и $AC = BD$, па је $ABCD$ једнакокраки трапез, а тиме и четвороугао око кога се може описати круг (слика 141. а)).

Претпоставимо сада да s садржи теме, на пример A, четвороугла $ABCD$. Пошто је број осталих темена непаран, још једно теме четвороугла лежи на s, док су преостала два симетрична у односу на s (слике 141 б) в)). Тада се симетрале унутрашњих (спољашњих) углова код темена B и D секу на s, одакле следи да постоје две кружнице које додирују све странице (или њихове продужетке) четвороугла $ABCD$; једна од ових кржница лежи у унутрашњости, а друга је ван четвороугла. Специјално, ако је $ABCD$ ромб тада постоји само унутрашња кружница, јер су симетрале спољашњих углова код темена B и D паралелне.

448. Претпоставимо да фигура $\mathcal{F}$ има два цетра симетрије S и O (слика 142).



Слика 142.

Нека је P тачка симетрична тачки S у односу на O. Докажимо да је P такође центар симетрије фигуре $\mathcal{F}$. Нека је A произвољна фигуре $\mathcal{F}$. Тачка A_1, симетрична

тачки A у односу на O, припада $\mathcal{F}$, јер је O центар симетрије ове фигуре. Такође, тачка A_2, симетрична тачки A_1 у односу на S, припада $\mathcal{F}$, као и A_3 - тачка симетрична тачки A_2 у односу на O. Дуж AP је једнака и паралелна дужи SA_1, односно дужи A_2S. Дакле, $AP = PA_3$ и тачка A, A_3 и P леже на једној правој, тј. тачка A_3 је симетрична тачки A у односу на P. Другим речима, тачка симетрична произвољно изабраној тачки фигуре $\mathcal{F}$ у односу на тачку P припада овој фигури, па је P њен центар симетрије.

Ако пресликамо тачку O у односу на тачку P добијамо још један центар симетрије Q фигуре $\mathcal{F}$. Настављајући овај поступак, долазимо до закључка: *ако фигура има два центра симетрије, тада их има бесконачно много.* Дакле, фигура не може имати више од једног а коначно много центара симетрије.

449. На основу последње једначине закључујемо да је или $xy = zt = 0$ или $xy = zt \neq 0$. Прва једнакост је еквивалентна са $(x = 0 \vee y = 0) \wedge (z = 0 \vee t = 0)$, па треба проверити да ли систем има решења у четири могућа случаја, што се испоставља нетачним. Дакле, $xy = zt \neq 0$, односно $t = kx$, $y = kz$, где је k неки реалан број различит од нуле. Сада имамо

$$\begin{aligned} x^2 + k^2z^2 + z^2 + k^2x^2 &= 50 \\ x^2 - k^2z^2 + z^2 - k^2x^2 &= -40 \\ x - kz + z + kx &= 0, \end{aligned}$$

односно

$$(1+k^2)(x^2+z^2) = 50, \quad (1-k^2)(x^2+z^2) = -40, \quad (1+k)x + (1-k)z = 0.$$

Одакле следи $\dfrac{1-k^2}{1+k^2} = -\dfrac{4}{5}$, односно $k_1 = -3$, $k_2 = 3$, што нас доводи до скупа решења $(x, y, z, t) \in \{(1, 6, 2, 3), (-1, 6, -2, -3), (2, -3, 1, -6), (-2, 3, -1, 6)\}$.

450. Дати систем је еквивалентан са системом

$$\begin{aligned} ax^2 + (b-1)x + c &= y - x, \\ ay^2 + (b-1)y + c &= z - y, \\ az^2 + (b-1)z + c &= x - z. \end{aligned}$$

Ако саберемо одговарајуће леве и десне стране добијамо

$$(1) \quad [ax^2 + (b-1)x + c] + [ay^2 + (b-1)y + c] + [az^2 + (b-1)z + c] = 0.$$

Како је због $(b-1)^2 - 4ac < 0$ сваки од три квадратна тринома за свако x, односно, y, z, различит од нуле једнакост (1) не може бити тачна. Дакле, дати систем нема реалних решења.

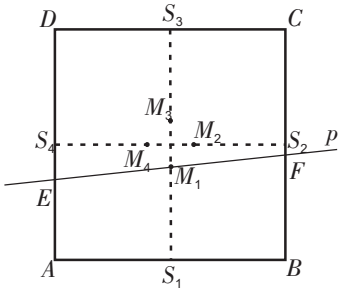
451. На основу датих једнакости следи да су x и $\dfrac{1}{x+y}$ корени квадратне једначине $t^2 + (m-1)t + m - 2 = 0$. Разликујемо два случаја:

1) $x = 1,\ \dfrac{1}{x+y} = m - 2 \Leftrightarrow x = 1,\ y = \dfrac{3-m}{m-2},\ m \neq 2$

2) $x = m - 2,\ \dfrac{1}{x+y} = 1 \Leftrightarrow x = m - 2,\ y = 3 - m.$

Дакле, систем има јединствено решење за $(0,1)$ за $m = 2$ и $(1,0)$ за $m = 3$.

452. Нека је p произвољна од тих правих и нека су S_1, S_2, S_3, S_4 средишта редом страница AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ (слика 143). Означимо са $ABEF$ онај од добијених трапеза који има мању површину. Нека права p сече дуж S_1S_3 у тачки M_1. Тада је $P_{ABEF} = AB \cdot S_1M_1$ и $P_{EFCD} = CD \cdot M_1S_3$, па је $S_1M_1 : M_1S_3 = 2 : 3$. Дакле, ако су M_1, M_2, M_3, M_4 тачке на дужима S_1S_3 и S_2S_4 које их деле у односима $2 : 3$ и $3 : 2$, тада свака од датих правих мора да садржи једну од ових тачака. Датих правих има 9, па неке три од њих садрже исту тачку M_i, за неко $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.



Слика 143.

453. За $x \in [1, 2]$ је испуњено $x^2 - 3x + 2 \leqslant 0$, па важи

$$\left(\frac{a_i}{b_i}\right)^2 - 3\frac{a_i}{b_i} + 2 \leqslant 0,\ i = 1, 2, 3,$$

односно $a_i^2 + 2b_i^2 \leqslant 3a_ib_i,\ i = 1, 2, 3$. Сада сабирањем добијамо тржену неједнакост.

454. Нека је $a = \sin 10^\circ$, $b = \sin 50^\circ$ и $c = \sin 70^\circ = -\sin(-70^\circ)$. Треба доказати да је

$$a + b = c, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + 6, \quad 8abc = 1.$$

Како је

$$\sin 30^\circ = \sin 150^\circ = -\sin 210^\circ = \frac{1}{2},$$

имамо да је

$$\sin^3 10^\circ = \frac{3}{4}\sin 10^\circ - \frac{1}{8}, \quad \sin^3 50^\circ = \frac{3}{4}\sin 50^\circ - \frac{1}{8},$$

и

$$\sin^3(-70^\circ) = \frac{3}{4}\sin(-70^\circ) - \frac{1}{8},$$

(на основу идентитета $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$) па су бројеви a, b и $-c$ су корени полинома $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$. Сада, према Вијетовим формулама, имамо:

$$\begin{aligned} a+b-c=0 &\Leftrightarrow \sin 10^\circ + \sin 50^\circ = \sin 70^\circ, \\ abc = \frac{1}{8} &\Leftrightarrow 8\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = 1, \\ ab-ac-bc = -\frac{3}{4} &\Leftrightarrow \frac{1}{c} - \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = -\frac{3}{4abc} \Leftrightarrow \frac{1}{c} - \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = -\frac{3}{4}\cdot 8 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + 6. \end{aligned}$$

455. Нека су D, E и F подножја висина из A, B, C редом на странице BC, CA, AB троугла ABC и нека су странице троугла DEF једнаке $13, 14, 15$.

Познато је, и није тешко доказати, да је синус унутрашњег угла неког троугла једнак односу наспрамне странице тог угла и пречника круга описаног око троугла.

Четвороугао $AFHE$ уписан је у круг описан око $\triangle AFE$. Како је AH пречник овог круга имамо да је $\sin\alpha = \frac{EF}{AH}$. Ако је R полупречник круга описаног око $\triangle ABC$, тада је и $\sin\alpha = \frac{BC}{2R}$. Дакле, важи: $\frac{EF}{AH} = \frac{BC}{2R}$, тј.

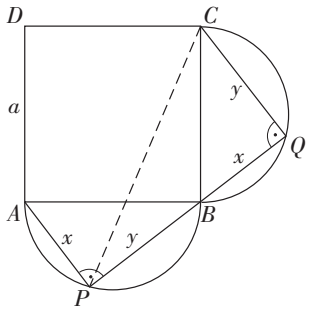
$$BC \cdot AH = 2R \cdot EF = 28R.$$

Нека је K средиште странице BC, L средиште AC и M средште BC. Како је $AH = 2OK$, имамо да је $BC \cdot AH = BC \cdot 2 \cdot OK = 28R$, тј. $BC \cdot OK = 14R$. Слично се показује да је $AC \cdot OL = 13R$ и $AB \cdot OM = 15R$. Површина троугла ABC је:

$$\begin{aligned} P_{\triangle ABC} &= P_{\triangle BOC} + P_{\triangle COA} + P_{\triangle AOB} \\ &= \frac{1}{2}BC \cdot OK + \frac{1}{2}AC \cdot OL + \frac{1}{2}AB \cdot OM \\ &= \frac{1}{2}\cdot 14R + \frac{1}{2}\cdot 13R + \frac{1}{2}\cdot 15R = 21R. \end{aligned}$$

Према Хероновом обрасцу, добијамо да је $P_{\triangle DEF} = 84$. Ако је r полупречник круга описаног око троугла DEF, према познатој формули, с друге стране имамо да је $P_{\triangle DEF} = \frac{13+14+15}{4r}$, па је $r = \frac{65}{8}$. Како је $R = 2r$, имамо да је $R = \frac{65}{4}$, па је $P_{\triangle ABC} = 21R = 341\frac{1}{4}$.

456. Нека је a дужина странице квадрата. Конструишимо, са спољашње стране, и полукруг над BC (слика 144). Нека је P произвољна тачка на полукругу $\overset{\frown}{AB}$ и нека је Q пресек праве PB са луком $\overset{\frown}{BC}$. Пошто је $\sphericalangle BQC = 90^\circ$, $AP = BQ = x$ и $BP = CQ = y$, имамо да је $PC^2 = (x+y)^2 + y^2 = x^2 + 2y^2 + 2xy$, односно $AP^2 + PC^2 = 2(x^2 + y^2 + xy) = 2(a^2 + xy)$. Како је $x^2 + y^2 = a^2 \leqslant 2xy$, а производ xy је максималан када је $x = y = \frac{a}{\sqrt{2}}$, следи је P средиште лука $\overset{\frown}{AB}$, као и да је $\max\limits_{P \in \overset{\frown}{AB}} \left(AP^2 + PC^2\right) = 3$.



Слика 144.

457. Ако је $ABCD$ квадрат онда је пресек дијагонала тог квадрата тачка која има тражено својство.

Претпоставимо сада да постоји тачка са траженим својством па докажимо да је тада $ABCD$ квадрат. Како је M у унутрашњости четвороугла важи

$$P_{ABCD} = P_{ABM} + P_{BCM} + P_{CDM} + P_{DAM}.$$

Притом важе и неједнакости

$$P_{ABM} \leqslant \frac{AM \cdot MB}{2} \leqslant \frac{AM^2 + MB^2}{4}, \quad P_{BCM} \leqslant \frac{BM \cdot MC}{2} \leqslant \frac{BM^2 + MC^2}{4},$$
$$P_{CDM} \leqslant \frac{CM \cdot MD}{2} \leqslant \frac{CM^2 + MD^2}{4}, \quad P_{DAM} \leqslant \frac{DM \cdot MA}{2} \leqslant \frac{DM^2 + MA^2}{4}.$$

Због датог својства тачке M и последње четири неједнакости мора бити

$$AM \perp MB, \quad BM \perp MC, \quad CM \perp MD, \quad DM \perp MA$$

и $AM = MB$, $BM = MC$, $CM = MD$, $DM = MA$, одакле закључујемо да је M пресек дијагонала AC и BD, које су међусобно ортогоналне и једнаке дужине, односно $ABCD$ је квадрат.

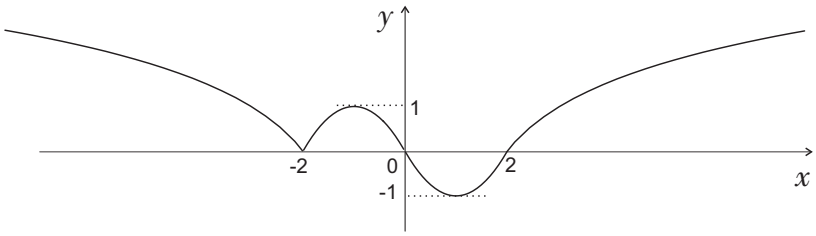
458. Подскуп скупа $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$, са максималним бројем елемената, који задовољава дати услов има 10 елемената; на пример $\{11, 12, \ldots, 20\}$. Наравно, сваки

подскуп овог скупа такође задовољава дати услов. С друге стране, у сваком подскупу са 11 елемената постоји елемент који дели неки други елемант тог скупа. Нека је $X = \{x_1, \ldots, x_{11}\} \subset \{1, 2, \ldots, 20\}$. Сваки x_i може се представити у облику $x_i = 2^{k_i} y_i$, за неки ненегативан цео број k_i и неки непаран природан број y_i. Како су $y_1, y_2, \ldots, y_{11}$ непарни бројеви из скупа $\{1, 2, \ldots, 20\}$, следи да бар два морају бити једнаки; нека је $y_j = y_\ell$, $j \neq \ell$. Тада $x_j \mid x_\ell$, ако је $k_j \leqslant k_\ell$; иначе $x_\ell \mid x_j$. Дакле, тражени скуп природних бројева је $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

459. Претпоставимо да је $f(\sqrt{2})$ рационалан број. Тада је, на основу услова задатка, $f(f(f(\sqrt{2}))) = \sqrt{2}$ и $f(f(f(\sqrt{2}))) = f(1)$, одакле је $f(1) = \sqrt{2}$. Из последње једнакости следи да је $f(f(1)) = f(\sqrt{2})$, односно $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, што је у контрадикцији са претпоставком. Дакле, ако дата функција постоји онда би $f(\sqrt{2})$ морао бити ирационалан број. Тада би, по услову задатка, било испуњено $f(f(f(\sqrt{2}))) = 1$ и $f(f(f(\sqrt{2}))) = f(1)$, одакле је $f(1) = 1$. На основу последњег би важило $f(f(1)) = f(1)$, односно $f(1) = \sqrt{2}$, што је у контрадикцији са $f(1) = 1$, па закључујемо да функција са траженим својством не постоји.

460. На основу графика функције f (слика 145) закључујемо да једначина $f(x) = a$:

- нема решења, ако је $a < -1$,
- има једно решење, ако је $a = -1$,
- има два решења, ако је $-1 < a < 0$ или $a > 1$,
- има три решења, ако је $a = 0$ или $a = 1$,
- има четири решења, ако је $0 < a < 1$.



Слика 145.

461. Сваки број из таблице је збир два броја, при чему је први број заједнички за сваки број у тој врсте, а други је заједнчки за све бројеве из те колоне. Пошто се из сваке врсте, а такође и из сваке колоне, може изабрати само један број, следи да је збир свих бројева које је Небојша изабрао

$$\begin{aligned} S &= 0 + n + 2n + \cdots + (n-1)n + 1 + 2 + \cdots + n \\ &= \frac{n(n^2 - n)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n^2+1)}{2}. \end{aligned}$$

462. За $i = j = k$ одговарајућа једнакост даје $3x_{ii} = 0$, тј. $x_{ii} = 0$, за све $i = 1, 2, \ldots, n$. Нека је $k = j \neq i$; тада из једнакости $x_{ij} + x_{jj} + x_{ji} = 0$, због $x_{jj} = 0$, следи да је $x_{ij} = -x_{ji}$. Најзад, ако саберемо све једнакости за изборе

индекса: $(i,j,1)$, $(i,j,2),\ldots,(i,j,n)$ (при чему су i и j фиксирани индекси) добијамо:

$$nx_{ij}+(x_{j1}+x_{j2}+\ldots+x_{jn})-(x_{i1}+x_{i2}+\ldots+x_{in})=0.$$

Дакле, ако је

$$t_i=\frac{x_{i1}+x_{i2}+\ldots+x_{in}}{n},\quad i=1,2,\ldots,n,$$

тада је $x_{ij}=t_i-t_j$.

463. Прво ћемо показати да је последњи услов еквивалентан са: сви црвени бројеви су дељиви неким фиксираним природним бројем $n>1$. Импликација сдесна на лево је очигледна. Докажимо сада импликацију слева на десно. Нека је n најмањи црвени број. Тада су (по претпоставци) и сви бројеви облика $k\cdot n$, $k\in\mathbb{N}$. Остаје још да покажемо да других бројева нема. Претпоставимо супротно, да постоји црвени број $m=qn+r$, $0<r<n$. Пошто је qn црвен и r мора бити црвен (јер би у супротном збир црвеног qn и плавог r морао бити плав). Контрадикција (n је најмањи црвени број).

Сада можемо закључити да се бојење може извести на три начина:

1) црвени су сви парни, а плави сви непарни бројеви;
2) црвени су сви бројеви дељиви са 3, а остали су плави;
3) црвени су сви бројеви дељиви са 6, а остали су плави.

464. Означимо са λ_{ij} број који се налази у i-тој врсти и j-тој колони, $1\leqslant i\leqslant m$ и $1\leqslant j\leqslant n$. Ако је y_i збир i-те врсте, тј.

$$\lambda_{i1}+\lambda_{i2}+\lambda_{i3}+\cdots+\lambda_{in}=y_i,\quad 1\leqslant i\leqslant m,$$

а x_j збир j-те колоне, тј.

$$\lambda_{1j}+\lambda_{2j}+\lambda_{3j}+\cdots+\lambda_{mj}=x_j,\quad 1\leqslant j\leqslant n,$$

тада је, према услову задатка, $\lambda_{ij}=y_i\cdot x_j$, па је, специјално, и

$$y_1=\lambda_{11}+\lambda_{12}+\lambda_{13}+\cdots+\lambda_{1n}=y_1\cdot x_1+y_1\cdot x_2+y_1\cdot x_3+\cdots+y_1\cdot x_n.$$

Из последње једнакости, како је $y_1\neq 0$, следи да је $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$, односно, збир свих бројева записаних у таблици једнак је 1.

465. Претпоставимо супротно, да је: $a^2+b^2\leqslant 1$ или $c^2+d^2\leqslant 1$. Како је

$$(ac+bd-1)^2\geqslant 0$$

из претпостављене неједнакости

$$\left(a^2+b^2-1\right)\left(c^2+d^2-1\right)>(ac+bd-1)^2,$$

следи да су изрази a^2+b^2-1 и c^2+d^2-1 истог знака, тј. да је

$$\operatorname{sgn}(a^2+b^2-1)=\operatorname{sgn}(c^2+d^2-1).$$

1° случај: $a^2+b^2<1$ и $c^2+d^2<1$. Увођењем смене $x=1-a^2-b^2$ и $y=1-c^2-d^2$, при чему је $0<x,y\leqslant 1$, претпостављена неједнакост постоје

$$\begin{aligned}4xy &> (2ac+2bd-2)^2=(2-2ac-2bd)^2\\ &=(a^2+b^2+x+c^2+d^2+y-2ac-2bd)^2\\ &=\big((a-c)^2+(b-d)^2+x+y\big)^2\geqslant (x+y)^2,\end{aligned}$$

одакле добијамо да је $0>(x-y)^2$, што је контрадикција.

2° случај: $a^2+b^2=1$ и $c^2+d^2=1$. И у овом случају, веома лако, долазимо до контрадикције.

466. Тражимо решења система анализом свих могућих случајева који могу да наступе (тј. услова које евентуална решења задовољавају).

1° случај: $xy=0$. Ако је бар једна координата решења једнака нули, тада је таква и друга, тј. добијамо решење $(0,0)$.

2° случај: $xy<0$. Ако би дати систем имао решење (x,y) такво да су његове координате различитог знака, на пример, $x>0$ и $y<0$ имали бисмо да је

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)>1$$

и $1+y^7<1$, одакле закључујемо да дати систем нема овакво решење; до истог закључка доводи и претпоставка $x<0$ и $y>0$.

3° случај: $x>0$, $y>0$, $x\neq y$. Без губљења општости можемо претпоставити да је $x>y>0$. Тада је

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)>1+x^7>1+y^7,$$

одакле добијамо да систем нема решења (x,y) чије су координате различите и обе позитивне.

4° случај: $x<0$, $y<0$, $x\neq y$. Нека је $x<y<0$. Ако прву једначину система помножимо са $(1-x)$, а другу са $(1-y)$, добијамо једнакости:

$$1-x^8=(1+y^7)(1-x)=1-x+y^7-xy^7$$

и

$$1-y^8=(1+x^7)(1-y)=1-y+x^7-x^7y.$$

Одузимањем последњих једнакости добијамо:

$$x^8-y^8=(x-y)+(x^7-y^7)+xy(y^6-x^6),$$

па како је $x-y<0$, $x^7-y^7<0$ и $y^6-x^6<0$, сва три сабирка десне стране су негативна, док је $x^8-y^8>0$, што је немогуће; потпуно аналогно, до контрадикције доводи и претпоставка $y<x<0$. Дакле, систем нема решења (x,y) чије су координате различите и обе негативне.

5° случај: $x=y$. У овом случају добијамо једначину $x^7-x=0$, која у скупу реалних бројева има три решења $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=1$. Једноставном провером утврђујемо да пар $(-1,-1)$ јесте решење датог система, док $(1,1)$ то није.

Дакле, скуп свих решења система је $\{(0,0),(-1,-1)\}$.

467. Лева страна неједнакости коју треба доказати једнака је:

$$\frac{a+abc}{1+ab+abcd}+\frac{b+bcd}{1+bc+bcde}\cdot\frac{a}{a}+\frac{c+cde}{1+cd+cdea}\cdot\frac{ab}{ab}+$$
$$+\frac{d+dea}{1+de+deab}\cdot\frac{abc}{abc}+\frac{e+eab}{1+ea+eabc}\cdot\frac{abcd}{abcd},$$

и после смене $p=a$, $q=ab$, $r=abc$, $s=abcd$, $t=abcde=1$ постаје:

$$\frac{p+r}{1+q+s}+\frac{q+s}{p+r+t}+\frac{r+t}{r+t+tq}+\frac{s+pt}{r+t+tq}+\frac{t+tq}{s+tp+tr}.$$

Лако се види да је дата неједнакост еквивалнетна са:

$$\frac{p+r}{1+q+s}+\frac{q+s}{p+r+t}+\frac{r+t}{q+s+p}+\frac{s+p}{r+t+q}+\frac{t+q}{s+p+r}\geqslant\frac{10}{3},$$

односно са

$$\frac{p+r}{1+q+s}+1+\frac{q+s}{p+r+t}+1+\frac{r+t}{q+s+p}+1+\frac{s+p}{r+t+q}+1+\frac{t+q}{s+p+r}+1\geqslant\frac{10}{3}+5,$$

тј.

$$(p+q+r+s+t)\left(\frac{1}{t+q+s}+\frac{1}{p+r+t}+\frac{1}{q+s+p}+\frac{1}{r+t+q}+\frac{1}{s+p+r}\right)\geqslant\frac{25}{3}.$$

Према познатој неједнакости (HA):

$$\frac{5}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}}\leqslant\frac{a+b+c+d+e}{5},$$

односно

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\geqslant\frac{25}{a+b+c+d+e},$$

имамо да је

$$(p+q+r+s+t)\left(\frac{1}{t+q+s}+\frac{1}{p+r+t}+\frac{1}{q+s+p}+\frac{1}{r+t+q}+\frac{1}{s+p+r}\right)$$
$$\geqslant(p+q+r+s+t)\cdot\frac{25}{t+q+s+p+r+t+q+s+p+r+t+q+s+p+r}$$
$$=(p+q+r+s+t)\cdot\frac{25}{3(p+q+r+s+t)}=\frac{25}{3}.$$

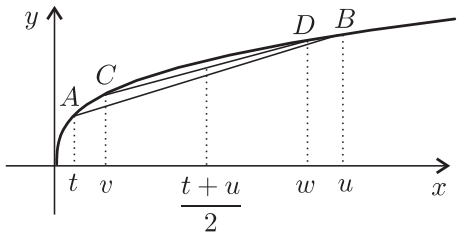
468. Ако је $a = b$, једнакост тривијално важи. Претпоставимо да је $a < b$. Тада је $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$, па је и

$$a + \sqrt[3]{a} < a + \sqrt[3]{b} < b + \sqrt[3]{b} \quad \text{и} \quad a + \sqrt[3]{a} < b + \sqrt[3]{a} < b + \sqrt[3]{b}.$$

Нека је

$$t = a + \sqrt[3]{a}\,, \quad u = b + \sqrt[3]{b}\,, \quad v = \min\{a + \sqrt[3]{b}, b + \sqrt[3]{a}\}, \quad w = \max\{a + \sqrt[3]{b}, b + \sqrt[3]{a}\}.$$

Тада је $t < v < w < u$ и $t + u = v + w$. Посматрајмо, даље, график функције $f(x) = \sqrt[3]{x}$ и његове тачке: $A(t, f(t))$, $B(u, f(u))$, $C(v, f(v))$, $D(w, f(w))$ (слика 146).



Слика 146.

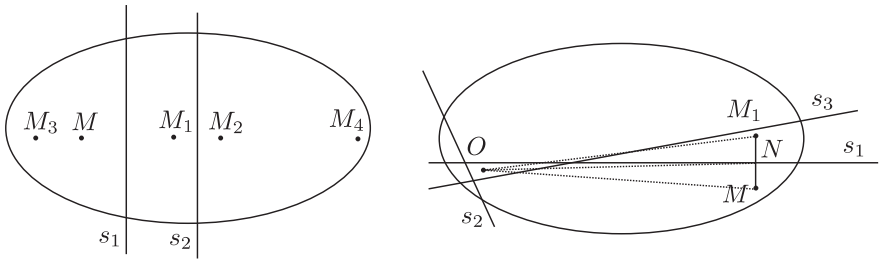
Како је функција f конкавна на $(0, +\infty)$, дуж CD се налази „изнад“ дужи AB, а како је $\frac{1}{2}(t + u) = \frac{1}{2}(v + w)$, и средиште дужи CD је „изнад“ средишта дужи AB, тј.

$$\frac{1}{2}(f(t) + f(u)) \leqslant \frac{1}{2}(f(v) + f(w)),$$

односно

$$\sqrt[3]{a + \sqrt[3]{a}} + \sqrt[3]{b + \sqrt[3]{b}} \leqslant \sqrt[3]{a + \sqrt[3]{b}} + \sqrt[3]{b + \sqrt[3]{a}}\,.$$

469. Претпоставимо да су неке две осе симетрије s_1 и s_2 паралелне (видети слику 147).



Слика 147.

Полазећи од произвољне тачке M, која припада фигури, образујемо низ тачака M_n на следећи начин:

$$\mathcal{J}_{s_1}(M) = M_1,\ \mathcal{J}_{s_2}(M_1) = M_2,\ \mathcal{J}_{s_1}(M_2) = M_3,\ \mathcal{J}_{s_2}(M_3) = M_4,\ \ldots$$

Како растојања MM_n неограничено расту, следи да фигура није ограничена. Дакле, сваке две осе симетрије се секу.

Претпоставимо да неке три осе симетрије s_1, s_2, s_3 образују троугао. Нека је O унутрашња тачка тог троугла и M од ње најудаљенија тачка фигуре. Тада су O и M са исте стране бар једне осе, рецимо s_1. Нека је $\mathcal{J}_{s_1}(M) = M_1$. Тачка M_1 припада датој фигури и налази се са оне стране осе s_1 са које није O. Нека је N средиште дужи MM_1. Тада је $\sphericalangle ONM$ оштар, а $\sphericalangle ONM_1$ туп, одакле следи да је $OM < OM_1$, што је у контардикцији са избором тачке M. Дакле, све осе се секу у једној тачки.

470. Према косинусној теореми важи:

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{a^2+c^2-\left(\dfrac{a+c}{2}\right)^2}{2ac} = \frac{3}{8}\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)-\frac{1}{4}.$$

Из познате неједнакости $\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a} \geqslant 2$, добијамо да је $\cos\beta \geqslant \dfrac{3}{8}\cdot 2 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$, одакле следи да је $\beta \leqslant 60^\circ$.

471. За свако евентуално решење (x,y) датог система мора да важи: $x^2-y^2 \geqslant 0$ и $1-x^2+y^2>0$, тј. $0 \leqslant x^2-y^2<1$. Ако уведемо смену $x+y=u$ и $x-y=v$, односно

$$x=\frac{u+v}{2},\ y=\frac{u-v}{2},\quad 0\leqslant uv<1,$$

и саберемо једначине датог система добијамо једначину

$$u-u\sqrt{uv}=(a+b)\sqrt{1-uv}\,, \tag{1}$$

док њиховим одузимањем добијамо

$$v+v\sqrt{uv}=(a-b)\sqrt{1-uv}\,. \tag{2}$$

Ако помножимо једначине (1) и (2) добијамо:

$$uv(1-uv)=(a^2-b^2)(1-uv),$$

тј. $(1-uv)(uv-(a^2-b^2))=0$, а како је $1-uv>0$, имамо $uv=a^2-b^2$. Имајући у виду последњу једнакост, из једначина (1) и (2) следи да је:

$$u=\frac{(a+b)\sqrt{1-a^2+b^2}}{1-\sqrt{a^2-b^2}} \quad \text{и} \quad v=\frac{(a-b)\sqrt{1-a^2+b^2}}{1+\sqrt{a^2-b^2}}\,.$$

После краћег рачуна добијамо да, под условом $0<a^2-b^2<1$, систем има решење:

$$(x,y)=\left(\frac{a+b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{1-a^2+b^2}},\frac{b+a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{1-a^2+b^2}}\right).$$

472. Нека је d растојање центра полигона од произвољне странице. Тада је

$$d = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}.$$

Ако је P површина датог полигона тада је, с једне стране $P = \frac{n}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$, док је са друге

$$P = P_{\triangle A_1A_2M} + P_{\triangle A_2A_3M} + \cdots + P_{\triangle A_nA_1M} = \frac{1}{2}\left(d_1 + d_2 + \cdots + d_n\right).$$

Како је

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_n} \geqslant \frac{n^2}{d_1 + d_2 + \cdots + d_n},$$

имамо да је

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_n} \geqslant 2n\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}.$$

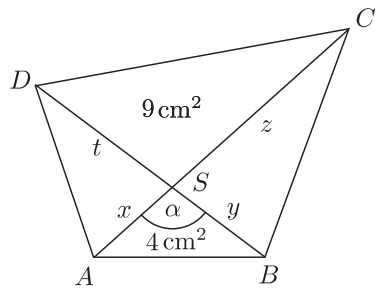
Најзад, из неједнакости[2] $\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} > \frac{\pi}{n}$, добијамо да је $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_n} > 2\pi$.

473. Из $P_{\triangle ASB} = \frac{1}{2}xy\sin\alpha = 4$ (видети слику 148) добијамо да је

$$y = \frac{8}{x\sin\alpha}, \tag{1}$$

а из $P_{\triangle CSD} = \frac{1}{2}zt\sin\alpha = 9$, да је

$$t = \frac{18}{z\sin\alpha}. \tag{2}$$



Слика 148.

Једнакости (1) и (2), заједно са

$$P_{ABCD} = P_{\triangle ASB} + P_{\triangle CSD} + P_{\triangle BSC} + P_{\triangle DSA} = 13 + \frac{1}{2}\sin\alpha(yz + xt),$$

[2] Ако $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, тада $\operatorname{tg} x > x$.

дају: $P_{ABCD} = 13 + \left(\frac{4z}{x} + \frac{9x}{z}\right)$. Како је $\frac{4z}{x} + \frac{9x}{z} \geqslant 2\sqrt{\frac{4z}{x} \cdot \frac{9x}{z}} = 12$, имамо да је $P_{ABCD} \geqslant 13 + 12 = 25$. Дакле, најмања могућа површина је $25\,\mathrm{cm}^2$, и достиже се ако је $\frac{4z}{x} = \frac{9x}{z}$, тј. ако је $\frac{x}{z} = \frac{2}{3}$. Тада је и $\frac{y}{t} = \frac{x}{z} = \frac{2}{3}$, па је $AB \parallel CD$, тј. четвороугао $ABCD$ је трапез.

474. Није тешко видети да је дата једначина еквивалентна са

$$(x - \cos(xy))^2 + \sin^2(xy) = 0,$$

односно са

$$\cos(xy) = x \ \text{ и } \ \sin(xy) = 0.$$

Из $\sin(xy) = 0$, следи да је $xy = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, па како је $\cos(k\pi) = \pm 1$, добијамо да $x \in \{-1, 1\}$. Ако је $x = 1$, лако се добија да је $y = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ако је $x = -1$, имамо да је $y = (2\ell + 1)\pi$, $\ell \in \mathbb{Z}$.

Дакле, $(x, y) \in \{(1, 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(-1, (2\ell + 1)\pi) \mid \ell \in \mathbb{Z}\}$.

475. Претпоставимо супротно, да је $a \neq 0$ или $b \neq 0$, тј. да је $a^2 + b^2 \neq 0$. Тада је

$$f(x) = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x\right) = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \varphi),$$

где је $\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и $\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (познато је да такво φ постоји!). Сада, из $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$ и $a^2 + b^2 \neq 0$, добијамо да је

$$\sin(x_1 + \varphi) = 0 \ \text{ и } \ \sin(x_2 + \varphi) = 0,$$

односно $x_1 + \varphi = m\pi$ и $x_2 + \varphi = n\pi$, $m, n \in \mathbb{Z}$, одакле је $\frac{x_1 - x_2}{\pi} = m - n \in \mathbb{Z}$, што је контрадикција.

476. Није тешко видети да је довољно доказати да је $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$. Нека су (x_0, y_0) координате тачке M (слика 149). Тада је $N(-x_0, -y_0)$ и $r = MN = 2\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, па је

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 4x_0^2 + 4y_0^2$$

једначина кружнице са центром у M полупречника MN.

Координате пресечних тачака $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$ кружнице и хиперболе, односно апсцисе x_1, x_2, x_3, различите од $-x_0$, су решења једначине

$$(x - x_0)^2 + \left(\frac{1}{x} - y_0\right)^2 = 4x_0^2 + 4y_0^2, \text{ тј. } x^4 - 2x_0x^3 - (3x_0^2 + 3y_0^2)x^2 - 2y_0x + 1 = 0.$$

Према Вијетовим формулама је

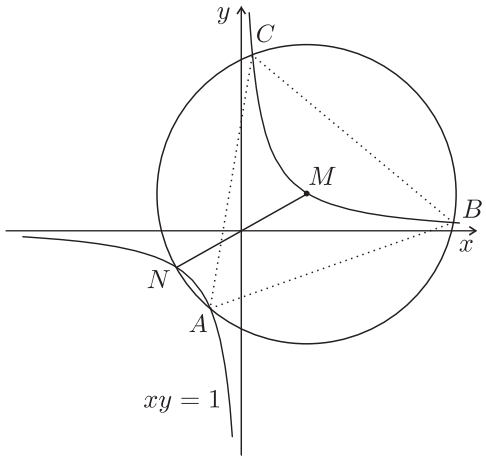
$$-x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 2x_0, \text{ тј. } x_1 + x_2 + x_3 = 3x_0.$$

Није тешко видети да је и $y_1 + y_2 + y_3 = 3y_0$. Најзад, како је

$$\overrightarrow{MA} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0),\ \overrightarrow{MB} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0),\ \overrightarrow{MC} = (x_3 - x_0, y_3 - y_0),$$

на основу доказаних једнакости следи да је

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (x_1 + x_2 + x_3 - 3x_0, y_1 + y_2 + y_3 - 3y_0) = \overrightarrow{0}.$$



Слика 149.

477. Претпостављамо да вам је позната (или да вам не представља проблем да покажете) једнакост $AH = a \operatorname{ctg} \alpha$, где је H ортоцентар троугла ABC (уз стандардно означавање елемената троугла).

Доказ ћемо, веома једноставно, извести применом комплексних бројева! Претпоставимо да се координатни почетак (комплексне) равни налази у пресеку дијагонала четвороугла $ABCD$, а да теменима овог четвороугла одговарају комплексни бројеви a, b, c, d. На основу учињених претпоставки следи да за комплексне бројеве t_1 и t_2, који одговарају тежиштима троуглова AOB и COD, важи: $t_1 = \dfrac{a+b}{3}$ и $t_2 = \dfrac{c+d}{3}$, односно да је

$$\overrightarrow{T_1T_2} = t_2 - t_1 = \frac{1}{3}(c + d - a - b). \tag{1}$$

С друге стране, ако је $\sphericalangle DOA = \sphericalangle BOC = \varphi$, имамо да је

$$h_1 = i(b - c) \operatorname{ctg} \varphi \quad \text{и} \quad h_2 = i(d - a) \operatorname{ctg} \varphi,$$

где су h_1 и h_2 комплексни бројеви који одговарају ортоцентрима H_1 и H_2, па је

$$\overrightarrow{H_1H_2} = h_2 - h_1 = i(c + d - a - b) \operatorname{ctg} \varphi. \tag{2}$$

Пошто пресликавање $z \mapsto iz$ комплексне равини заправо представља ротацију за 90°, из једнакости (1) и (2) следи да су дужи T_1T_2 и H_1H_2 међусобно нормалне.

478. Доказ спроводимо коришћењем принципа математичке индукције.

За $n = 1$ тврђење очигледно важи (узмемо две тачке на растојању 1).

Препоставимо да је тврђење тачно за неки природан број n. Означимо са S скуп тачака $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ такав да је свака тачка из S на растојању 1 од тачно n тачака скупа S. Опишимо, затим, око сваке тачке A_i, $i = 1, \ldots, m$, јединичну кружницу. Нека су Q_1, $\ldots$, Q_r тачке које леже у унутрашњостима бар две од ових кружница. Нека је $\overrightarrow{e}$ јединични вектор различит од било ког од вектора $\overrightarrow{A_iA_j}$, $\overrightarrow{A_iQ_k}$, $i, j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, r$. Транслирајмо за вектор $\overrightarrow{e}$ сваку од тачака A_i у тачку B_i, $i = 1, \ldots, m$. Сада имамо да је свака тачка из $\{A_1, A_2, \ldots, A_m, B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ на растојању 1 од тачно $n + 1$ тачке овог скупа, чиме је доказ индукцијом завршен.

479. Искористићемо следеће две веома важне леме чији се докази могу наћи у већини књига из теорије бројева.

Лема 1. *Ако је θ ирационалан број и N дати позитиван број, тада за сваки реалан број r и свако $\varepsilon > 0$, постоје цели бројеви m и n, при чему је $n > N$, такви да је*

$$r - \frac{\varepsilon}{2} < n\theta + m < r + \frac{\varepsilon}{2},$$

односно за сваки интервал (α, β), постоје цели бројеви m и n, при чему је $n > N$, такви да је $n\theta + m \in (\alpha, \beta)$.

Лема 2. *Ако природан број a, већи од 1, није степен броја 10, тада је број $\log a$ ирационалан.*

Сада смо у могућности да докажемо општије тврђење од оног чији је доказ наш задатак: *За сваки низ од k цифара $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k$, $k \geqslant 2$, $c_1 \neq 0$, постоји потпун квадрат чији децимални запис почиње са $c_1c_2 \ldots c_k$.*

Треба да покажемо да за неко n имамо да је

$$n^2 = \overline{c_1c_2 \ldots c_kd_1d_2 \ldots d_m},$$

где је $d_1d_2 \ldots d_m$ неки низ од m цифара.

Нека је

$$z = \overline{c_1c_2 \ldots c_k} = c_1 10^{k-1} + \cdots + c_{k-1}10 + c_k.$$

Потражимо n тако да за неко m важи

$$z \cdot 10^m \leqslant n^2 < (z + 1) \cdot 10^m,$$

или еквивалентно

$$(*) \qquad \log z + m \leqslant 2 \log n < \log(z + 1) + m.$$

Потражимо бројеве n и m у облику $n = 2^p$ и $m = 2\ell$. Неједнакости $(*)$ постају

$$\frac{1}{2} \log z \leqslant p \log 2 - \ell < \frac{1}{2} \log(z + 1).$$

Према леми 1 и леми 2 постоје природни бројеви p и ℓ који задовољавају последње неједнакости, одакле следи да за ове p и ℓ важи и:

$$z \cdot 10^{2\ell} \leqslant (2^m)^2 < (z+1) \cdot 10^{2\ell}.$$

Дакле, број $(2^m)^2$ почиње цифрама $c_1c_2 \ldots c_k$.

480. Нађимо најпре број свих седмочланих подскупова од $\{1, 2, \ldots, 39\}$ у којима нема суседних бројева. Скуп $\{1, 2, \ldots, 39\}$ можемо замислити као низ од 39 лопти. Замислимо и да смо узели седам лопти из овог низа и обојили их црном бојом, а преостале 32 неизабране лопте белом. Ако желимо да вратимо црне лопте тако да никоје две од њих не буду суседне, морамо изабрати седам од 33 места, тј. овакво постављање црних лопти могуће је извршити на $\binom{33}{7}$ начина, а толико има и седмочланих подскупова без суседних елемената. Седмочланих подскупова са бар једним паром суседних елемената има $\binom{39}{7} - \binom{33}{7}$. Дакле, тражени однос је $\dfrac{\binom{39}{7} - \binom{33}{7}}{\binom{39}{7}} \approx 72,22\%$.

481. Сваки подскуп од $\{1, 2, \ldots, n\}$ можемо идетификовати са тзв. *бинарним* низом (низом скупа $\{0, 1\}$) који је дужине n: за свако k из $\{1, 2, \ldots, n\}$, на k-том месту стоји 1 ако и само ако k припада датом подскупу, иначе стоји 0[3]. За свако $n \in \mathbb{N}$, нека је a_n број бинарних низова дужине n у којима се не појављују две суседне јединице. Да бисмо формирали неки бинарни низ дужине n у коме нема суседних јединица, можемо почети са 0 и наставити га на a_{n-1} начина, или почети са 1, тј. са 10, и наставити га на a_{n-2} начина. Тако добијамо везу $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, при чему је и $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, што директно можемо одредити. Дакле, a_n је $n+2$. члан познатог Фибоначијевог низа: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$ (прва два члана овог низа су једнака 1, а сваки наредни једнак је збиру претходна два).

482. Најпре имамо да је $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, одакле следи $f(0) = 0$, а такође и $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$, одакле је $f(-x) = -f(x)$, за свако x из $\mathbb{Q}$. Даље, како је:

$$\begin{aligned} f(2x) &= f(x) + f(x) + x^2 \cdot 2x = 2f(x) + 2x^3, \\ f(3x) &= f(x) + f(2x) + x \cdot 2x \cdot 3x = f(x) + (2f(x) + 2x^3) + 6x^3 \\ &= 3f(x) + (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3)x^3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

„наслућујемо“ општу једнакост:

$$f(nx) = n \cdot f(x) + (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n-1)n)x^3,$$

[3] За $n = 5$, на пример, подскупу $\{2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ одговара низ 01100.

односно

$$f(nx) = n \cdot f(x) + \frac{1}{3}(n-1)n(n+1)x^3 = n\left(f(x) + \frac{1}{3}(n^2-1)x^3\right).$$

Препуштамо читаоцима да последњу једнакост самостално докажу (математичком индукцијом). Сада, за сваки природан број n имамо да је:

$$1 = f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = n\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3}(n^2-1) \cdot \frac{1}{n^3}\right),$$

одакле није тешко закључити да је:

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3n}\left(2 + \frac{1}{n^2}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Најзад, за произвољне природне бројеве m и n добијамо:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = m\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3}(m^2-1) \cdot \frac{1}{n^3}\right) = \ldots = \frac{1}{3} \cdot \frac{m}{n}\left(2 + \frac{m^2}{n^2}\right).$$

Дакле, према једнакостима које смо показали, $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^3,\ x \in \mathbb{Q}$.

483. Ако $n \in \{1,2,3,4,5,6\}$, вероватноће $p(n)$ се непосредно рачунају:

$$p(1) = \frac{1}{6},$$
$$p(2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}p(1) = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{6}\right),$$
$$p(3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}p(1) + \frac{1}{6}p(2) = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{6}\right)^2,$$
$$\vdots$$
$$p(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}p(1) + \cdots + \frac{1}{6}p(5) = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{6}\right)^5.$$

Ако је $n \geqslant 7$, имамо да је

$$p(n) = \frac{1}{6}\left(p(n-1) + p(n-2) + \cdots + p(n-6)\right),$$

тј. сваки члан низа $p(n),\ n \geqslant 7$, једнак је аритметичкој средини претходних шест чланова. Како је аритметичка средина увек мања од највећег тих бројева и како је $p(1) < p(2) < \ldots < p(5) < p(6)$, то је $p(n)$ највеће ако је $n = 6$.