ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Материјали за младе математичаре, св. 32

Владимир Јанковић Зоран Каделбург

Павле Младеновић

МЕЂУНАРОДНЕ И БАЛКАНСКЕ МАТЕМАТИЧКЕ ОЛИМПИЈАДЕ

1984—1995. године

Б Е О Г Р А Д
1996

Аутори: *др Владимир Јанковић*
др Зоран Каделбург
др Павле Младеновић

МЕЂУНАРОДНЕ И БАЛКАНСКЕ МАТЕМАТИЧКЕ ОЛИМПИЈАДЕ
1984–1995. године

Материјали за младе математичаре, свеска 32

Издавач: ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
Београд, Кнеза Михаила 35/IV

Рецензенти: *др Милош Арсеновић*
др Предраг Тановић

Уредник: *др Владимир Јанковић*

Цртежи: *мр Предраг Јаничић*

ISBN: 86–81453–18–1

Тираж: 1000 примерака

Штампа: „Бакар“ Бор

САДРЖАЈ

МЕЂУНАРОДНЕ И БАЛКАНСКЕ МАТЕМАТИЧКЕ ОЛИМПИЈАДЕ

Међународне математичке олимпијаде (ИМО) одржавају се од 1959. године, прва је одржана у Румунији. На њима се у решавању математичких задатака такмиче млади математичари-средњошколци из великог броја земаља (последњих година преко 70). Ради се шест задатака за два дана. Најуспешнијим такмичарима се додељују награде, прва, друга и трећа, као и похвале. Укупан број награда је око половине броја свих такмичара, а однос броја првих, других и трећих награда је приближно 1 : 2 : 3.

Југославија учествује на ИМО од 1963. године и наши такмичари су на неким од тих олимпијада остварили веома запажене резултате. Поменимо прве награде Франца Дацара 1963, Б. Варга Јожефа и Миодрага Живковића 1974, Младена Деспића 1982. и Радета Тодоровића 1989. године.

Прва Балканска математичка олимпијада (БМО) одржана је у Грчкој 1984. године. На њој учествује већина балканских земаља (Југославија од 1987). Такмичење се одржава на начин као и ИМО, сем што траје један дан и раде се четири задатка.

Задаци и решења свих задатака са ИМО 1959–1985. објављени су у збирци

Међународне математичке олимпијаде, Материјали за младе математичаре, свеска 11 (друго издање), Друштво математичара Србије 1986.

У овој збирци су дати задаци и решења са свих дванаест досад одржаних БМО (1984–1995), као и ИМО у тим годинама.

У даљем дајемо преглед учешћа југословенских младих математичара на поменутим такмичењима.

1984 (ИМО – Чехословачка, БМО – Грчка)

Роман Дрновшек | *Никола Лакић*
Андреј Дујела | *Александар Марковић*
Александар Зоровић | *Урош Сељак*

На ИМО су треће награде освојили:

Андреј Дујела, Роман Дрновшек, Александар Марковић и *Никола Лакић*.

1985 (ИМО – Финска, БМО – Бугарска)

Марко Војиновић
Горан Гогић
Роман Дрновшек
Марко Јанковић
Бобан Николић
Сашо Цероски

На ИМО су треће награде освојили:

Роман Дрновшек и *Сашо Цероски.*

1986 (ИМО – Пољска, БМО – Румунија)

Предраг Антић
Домагој Ковачевић
Оливера Миленковић
Никола Рушкуц
Јоже Фабчич
Зоран Чрња

На ИМО су треће награде освојили:

Јоже Фабчич и *Домагој Ковачевић.*

1987 (ИМО – Куба, БМО – Грчка)

Небојша Васиљевић
Предраг Јаничић
Владо Кешељ
Оливера Миленковић
Александра Смиљанић
Раде Тодоровић

На ИМО су освојили:

Раде Тодоровић — другу награду;

Владо Кешељ, Небојша Васиљевић и *Александра Смиљанић* — треће награде.

На БМО су освојили:

Раде Тодоровић и *Владо Кешељ* — прве награде;

Небојша Васиљевић и *Предраг Јаничић* — друге награде;

Оливера Миленковић и *Александра Смиљанић* — треће награде.

1988 (ИМО – Аустралија, БМО – Кипар)

Миран Божичевић
Растко Маринковић
Томаж Сливник
Александра Смиљанић
Раде Тодоровић
Ристе Шкрековски

На ИМО су треће награде освојили:

Раде Тодоровић, Растко Маринковић, Томаж Сливник и *Ристе Шкрековски.*

На БМО су освојили:

Раде Тодоровић — прву награду;

Владо Кешељ и *Миран Божичевић* — друге награде;

Александра Смиљанић, Растко Маринковић и *Ристе Шкрековски* — треће награде.

1989 (ИМО – Немачка, БМО – Југославија)

Андреј Вилфан	*Небојша Николић*
Предраг Грковић	*Милена Радновић*
Растко Маринковић	*Раде Тодоровић*

На ИМО су освојили:

Раде Тодоровић — прву награду (максимални могући број поена);

Растко Маринковић, Небојша Николић и *Предраг Грковић* — друге награде;

Милена Радновић — трећу награду.

На БМО су освојили:

Раде Тодоровић, Растко Маринковић и *Милена Радновић* — прве награде;

Андреј Вилфан и *Предртаг Грковић* — друге награде;

Небојша Николић — трећу награду.

1990 (ИМО – Кина, БМО – Бугарска)

Иван Анић	*Вања Дуњић*
Владимир Балтић	*Ален Селимбеговић*
Игор Долинка	*Мирослав Шиловић*

На ИМО су освојили:

Мирослав Шиловић — другу награду;

Владимир Балтић и *Игор Долинка* — треће награде,

док је *Иван Анић* похваљен.

На БМО су освојили:

Игор Долинка — прву награду;

Иван Анић, Владимир Балтић, Ален Селимбеговић и *Мирослав Шиловић* — друге награде;

Вања Дуњић — трећу награду.

1991 (ИМО – Шведска, БМО – Румунија)

Владимир Балтић	*Дарко Маринов*
Игор Долинка	*Кристина Рогале*
Младен Лаудановић	*Томаж Цедилник*

На ИМО су освојили:

Игор Долинка и *Младен Лаудановић* — друге награде;

Владимир Балтић, Томаж Цедилник и *Кристина Рогале* — треће награде.

На БМО су освојили:

Младен Лаудановић — прву награду;

Игор Долинка и *Дарко Маринов* — друге награде;

Владимир Балтић и *Томаж Цедилник* — треће награде.

1992 (ИМО – Русија, БМО – Грчка)

Владимир Божин	*Младен Лаудановић*
Игор Долинка	*Петар Марковић*
Ранко Лазић	*Велибор Тинтор*

На ИМО су освојили:

Игор Долинка и *Владимир Божин* — друге награде;

Младен Лаудановић, Велибор Тинтор, Ранко Лазић и *Петар Марковић* — треће награде.

На БМО су освојили:

Игор Долинка, Младен Лаудановић и *Велибор Тинтор* — прве награде;

Владимир Божин, Петар Марковић и *Ранко Лазић* — друге награде.

1993 (ИМО – Турска, БМО – Кипар)

Небојша Гвозденовић	*Дарко Остојић*
Петар Ђапић	*Ива Ставров*
Владимир Николић	*Драган Стевановић*

На ИМО наша екипа није учествовала, а на БМО су освојили:

Драган Стевановић — прву награду;

Петар Ђапић, Дарко Остојић и *Небојша Гвозденовић* — друге награде;

Владимир Николић и *Ива Ставров* — треће награде.

1994 (ИМО – Хонгконг, БМО – Југославија)

Милена Давидовић	*Ђорђе Кртинић*
Игор Ирић	*Игор Салом*
Весна Каделбург	*Мирослав Тремл*

На ИМО наша екипа није учествовала, а на БМО су освојили:

Мирослав Тремл — другу награду;

Милена Давидовић и *Весна Каделбург* — треће награде.

1995 (ИМО – Канада, БМО – Бугарска)

Ђорђе Кртинић	*Игор Салом*
Ђорђе Милићевић	*Мирослав Тремл*
Виктор Розгић	*Борис Шобот*

На ИМО награде су освојили:

Мирослав Тремл и *Ђорђе Милићевић* – друге награде;

Игор Салом, *Борис Шобот* и *Ђорђе Кртинић* – треће награде,

док је *Виктор Розгић* похваљен.

На БМО награде су освојили:

Ђорђе Милићевић и *Мирослав Тремл* — прве награде;

Борис Шобот — другу награду;

Виктор Розгић и *Игор Салом* — треће награде.

ЗАДАЦИ СА МЕЂУНАРОДНИХ МАТЕМАТИЧКИХ ОЛИМПИЈАДА

ИМО '84

1. Нека су x, y и z ненегативни реални бројеви за које важи једнакост $x+y+z=1$. Доказати неједнакост

$$0 \leqslant xy + yz + zx - 2xyz \leqslant \frac{7}{27}.$$

(СР Немачка)

2. Наћи један пар природних бројева a, b за које важи:
(1) производ $ab(a+b)$ није дељив са 7;
(2) број $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ дељив је са 7^7.

(Холандија)

3. У равни су дате две различите тачке O и A. За сваку тачку X те равни, различиту од O, означимо са $\alpha(X)$ величину угла AOX изражену у радијанима ($0 \leqslant \alpha(X) < 2\pi$, угао се мери од крака AO у смеру супротном од казаљке на сату). Означимо са $C(X)$ круг са центром O и полупречником $OX + \dfrac{\alpha(X)}{OX}$. Претпоставимо да је свака тачка у равни обојена једном од коначно много боја. Доказати да постоји тачка Y у равни за коју је $\alpha(Y) > 0$, таква да се на кругу $C(Y)$ налази тачка обојена истом бојом као и Y.

(Румунија)

4. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао, такав да је права CD тангента на круг са дијаметром AB. Доказати да је права AB тангента на круг са дијаметром CD ако и само ако су праве BC и AD паралелне.

(Румунија)

5. Означимо са d збир дужина свих дијагонала равног конвексног полигона са n темена ($n > 3$), а са p његов обим. Доказати да је

$$n - 3 < \frac{2d}{p} < \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - 2.$$

(Монголија)

6. Нека су a, b, c, d непарни цели бројеви за које важе следећи услови:
(1) $0 < a < b < c < d$;
(2) $ad = bc$;
(3) $a + d = 2^k$, $b + c = 2^m$ за неке природне бројеве k и m.
Доказати да је $a = 1$.

(Пољска)

ИМО '85

1. Круг има средиште на страници AB конвексног тетивног четвороугла $ABCD$. Преостале три странице додирују тај круг. Доказати да је $AD + BC = AB$.

(В. Британија)

2. Нека је n природан број, k цео број узајамно прост са n, $1 \leqslant k \leqslant n - 1$ и $M = \{1, 2, \dots, n-1\}$. Сваки елемент из M обојен је једном од две боје – белом или плавом – тако да важи:
(1) за свако $i \in M$, бројеви i, $n - i$ имају једнаку боју;
(2) за свако $i \in M$, $i \neq k$, бројеви i, $|i - k|$ имају једнаку боју.
Доказати да сви елементи из M имају једнаку боју.

(Аустралија)

3. За полином P с целобројним коефицијентима $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k$ са $w(P)$ је означен број коефицијената a_j који су непарни. За сваки ненегативан цео број i нека је $Q_i(x) = (1 + x)^i$. Доказати да ако цели бројеви i_1, i_2, ... , i_n задовољавају услов $0 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n$, тада је

$$w(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \cdots + Q_{i_n}) \geqslant w(Q_{i_1}).$$

(Холандија)

4. Дат је скуп M који се састоји од 1985 различитих природних бројева. Ниједан од њих нема простог делиоца већег од 26. Доказати да се из скупа M могу изабрати четири међусобно различита броја чији је производ четврти степен целог броја.

(Монголија)

5. Дати су троугао ABC и круг са центром O који садржи тачке A и C и сече дужи AB и BC још у различитим тачкама K и N, респективно. Кругови описани око троуглова ABC и KBN имају тачно две заједничке тачке B и M. Доказати да је угао OMB прав.

(СССР)

6. За сваки реалан број x_1 дефинише се низ x_1, x_2, ... , x_n, ... помоћу

$$x_{n+1} = x_n\left(x_n + \frac{1}{n}\right) \quad \text{за } n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots\ .$$

Доказати да постоји једна и само једна вредност x_1, таква да важи

$$0 < x_n < x_{n+1} < 1 \quad \text{за свако } n.$$

(Шведска)

ИМО '86

1. Нека је d природан број различит од 2, 5, 13. Доказати да се у скупу $\{2, 5, 13, d\}$ могу изабрати два различита броја a и b тако да $ab-1$ није квадрат целог броја.
(СР Немачка)

2. У равни је дат троугао $A_1A_2A_3$ и тачка P_0. Означимо $A_s = A_{s-3}$ за сваки природан број $s \geqslant 4$. Конструишимо низ тачака P_0, P_1, P_2, ... тако да се тачка P_{k+1} добија ротацијом тачке P_k за 120° у смеру казаљке на сату око тачке A_{k+1} ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Доказати да ако је $P_{1986} = P_0$, тада троугао $A_1A_2A_3$ мора бити једнакостраничан.
(Кина)

3. Сваком темену правилног петоугла је придружен цео број, тако да је збир свих бројева позитиван. Ако трима узастопним теменима одговарају бројеви x, y, z и $y < 0$, тада се врши следећа операција: бројеви x, y, z се замењују са $x+y$, $-y$, $z+y$, респективно. Таква операција се врши узастопно све док је бар један од пет бројева негативан. Одредити да ли се овај процес обавезно завршава у коначно много корака.
(Немачка ДР)

4. Нека су A, B суседна темена правилног n-тоугла чији је центар тачка O, $n \geqslant 5$. Троугао XYZ, подударан са OAB, постављен је у почетку тако да се тачке X, Y, Z подударају са O, A, B, респективно. Затим се троугао XYZ креће у равни n-тоугла, тако да темена Y и Z остају на рубу n-тоугла, а X остаје унутар њега. Какву фигуру описује тачка X кад Y једном обиђе цео руб n-тоугла?
(Израел)

5. Наћи све функције f дефинисане на скупу ненегативних реалних бројева, са ненегативним реалним вредностима, тако да важи:
(i) $f[xf(y)]f(y) = f(x+y)$ за све x, $y \geqslant 0$;
(ii) $f(2) = 0$;
(iii) $f(x) \neq 0$ за све $0 \leqslant x < 2$.
(В. Британија)

6. Дат је коначан скуп тачака у равни, тако да свака има целобројне координате. Да ли је могуће обојити неке тачке тог скупа црвеном, а све преостале белом бојом, тако да за сваку праву L паралелну било којој координатној оси, разлика између броја белих и црвених тачака на L буде -1, 0 или 1? Образложити.
(Немачка ДР)

ИМО '87

1. Нека је $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Означимо са $p_n(k)$ број пермутација скупа S_n које имају тачно k фиксних тачака ($k \geqslant 0$, $n \geqslant 1$). Доказати да је

$$\sum_{k=0}^{n} kp_n(k) = n!.$$

[*Пермутација* скупа S_n је бијекција скупа S_n на самог себе. Кажемо да је j *фиксна тачка* пермутације f ако је $f(j) = j$.]

(СР Немачка)

2. Кроз теме A оштроуглог троугла ABC повучена је симетрала угла, која сече страницу BC у тачки L, а описани круг троугла ABC у тачкама A и N. Из L су на AB, односно AC, спуштене нормале LK, односно LM (при чему $K \in AB$, $M \in AC$). Доказати да је површина четвороугла $AKNM$ једнака површини троугла ABC.

(СССР)

3. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ реални бројеви за које је $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 = 1$. Доказати да за сваки природан број $k \geqslant 2$ постоје цели бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$ који нису сви једнаки 0, такви да важи $|a_i| \leqslant k-1$ за $i = 1, 2, \ldots, n$ и

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n| \leqslant \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}.$$

(СР Немачка)

4. Доказати да не постоји функција $f\colon \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$ за коју је $f(f(n)) = n + 1987$ за сваки $n \in \mathbf{N}_0$. [$\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$]

(Вијетнам)

5. Доказати да за сваки природан број $n \geqslant 3$ у равни постоји n тачака, таквих да је:
(а) удаљеност између било које две тачке ирационална и
(б) сваке три тачке одређују недегенерисани троугао (тј. неколинеарне су) и тај троугао има рационалну површину.

(Немачка ДР)

6. Дат је природан број n, $n \geqslant 2$. Доказати да ако је број $k^2 + k + n$ прост за сваки цео број k који задовољава $0 \leqslant k \leqslant \sqrt{n/3}$, тада је $k^2 + k + n$ прост за сваки цео број k такав да је $0 \leqslant k \leqslant n-2$.

(СССР)

ИМО '88

1. У равни су дата два концентрична круга полупречника R и r ($R > r$). Нека је P фиксирана тачка на мањем кругу, а тачка B нека се креће по већем кругу. Права BP сече већи круг још у тачки C. Нормала l на BP кроз P сече мањи круг још у A (ако је l тангента на круг у тачки P, сматрамо да је $A = P$).
(i) Наћи скуп свих вредности израза $BC^2 + CA^2 + AB^2$.
(ii) Наћи скуп свих средишта дужи AB.

(Луксембург)

2. Нека је n природан број и нека су $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ подскупови неког скупа B. Претпоставимо да:
(а) сваки A_i има тачно $2n$ елемената,

(б) сваки $A_i \cap A_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant 2n+1)$ садржи тачно један елемент и
(в) сваки елемент из B јесте елемент бар двају скупова A_i.
За које вредности броја n можемо сваком елементу скупа B придружити један од бројева 0 или 1 на такав начин да за сваки скуп A_i број његових елемената којима је придружена 0 износи тачно n?

(Чехословачка)

3. Функција f дефинисана је на скупу природних бројева са

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, \qquad f(3) = 3, \\ f(2n) &= f(n), \\ f(4n+1) &= 2f(2n+1) - f(n), \\ f(4n+3) &= 3f(2n+1) - 2f(n), \end{aligned}$$

за све природне бројеве n. Одредити број природних бројева n, мањих или једнаких 1988, за које је $f(n) = n$.

(В. Британија)

4. Доказати да је скуп свих реалних бројева x за које је

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geqslant \frac{5}{4}$$

унија дисјунктних полуотворених интервала, чији збир дужина износи 1988.

(Ирска)

5. Нека је ABC троугао с правим углом код A, а D подножје висине из A. Права која пролази кроз средишта кругова уписаних у троуглове ABD и ACD сече странице AB и AC у тачкама K и L. Ако је S, односно T, површина троугла ABC, односно AKL, доказати да је $S \geqslant 2T$.

(Грчка)

6. Нека су a и b природни бројеви, такви да је a^2+b^2 дељиво са $ab+1$. Доказати да је $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ квадрат неког целог броја.

(СР Немачка)

ИМО ’89

1. Доказати да се скуп $\{1, 2, \ldots, 1989\}$ може представити као дисјунктна унија својих подскупова A_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ 117)$ тако да:
(i) сваки A_i садржи 17 елемената;
(ii) збир свих елемената сваког од скупова A_i је исти.

(Филипини)

2. У оштроуглом троуглу ABC симетрала унутрашњег угла код A сече описани круг још у тачки A_1. Тачке B_1 и C_1 дефинишу се слично. Нека је A_0 тачка

пресека праве AA_1 са симетралама спољашњих углова код B и C. Тачке B_0 и C_0 дефинишу се слично. Доказати:

(i) површина троугла $A_0B_0C_0$ је једнака двострукој површини шестоугла $AC_1BA_1CB_1$;

(ii) површина троугла $A_0B_0C_0$ је најмање четири пута већа од површине троугла ABC.

(Аустралија)

3. Нека су n и k природни бројеви и нека је S скуп од n тачака у равни, таквих да:

(i) никоје три тачке из S нису колинеарне и

(ii) за сваку тачку $P \in S$ постоји бар k тачака у S које су на подједнаком растојању од P.

Доказати да је $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

(Холандија)

4. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао, такав да за странице AB, AD, BC важи $AB = AD + BC$. Претпоставимо да постоји тачка P унутар тог четвороугла на растојању h од праве CD, таква да је $AP = h + AD$ и $BP = h + BC$. Доказати да је

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}.$$

(Исланд)

5. Доказати да за сваки природан број n постоји n узастопних природних бројева од којих ниједан није цео степен простог броја.

(Шведска)

6. За пермутацију $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ скупа $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ кажемо да има својство P ако је $|x_i - x_{i+1}| = n$ бар за неко $i \in \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$. Доказати да, за произвољно n, има више пермутација које имају својство P него оних које га немају.

(Пољска)

ИМО '90

1. Тетиве AB и CD круга секу се у тачки E унутар круга. Нека је M унутрашња тачка дужи EB и нека тангента у тачки E круга описаног око троугла DEM сече праве BC и AC у F и G, респективно. Изразити однос $EG : EF$ у функцији од $t = AM : AB$.

(Индија)

2. Нека је $n \geqslant 3$ и нека је E скуп од $2n - 1$ различитих тачака на кругу. Треба тачно k од тих тачака обојити црно. За такво бојење кажемо да је „добро“ ако постоји бар један пар црних тачака, такав да унутрашњост једног од лукова круга њима одређених садржи тачно n тачака из E. Наћи најмању вредност броја k за коју је свако такво бојење скупа E добро.

(Чехословачка)

3. Одредити све природне бројеве $n > 1$ за које важи $n^2 \mid 2^n + 1$.

(Румунија)

4. Нека је $\mathbf{Q}^+$ скуп свих позитивних рационалних бројева. Конструисати бар једну функцију $f\colon \mathbf{Q}^+ \to \mathbf{Q}^+$ такву да је

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}$$

за све x, $y \in \mathbf{Q}^+$.

(Турска)

5. Дат је природан број $n_0 > 1$. Играчи A и B бирају природне бројеве n_1, n_2, n_3, ... наизменично према следећим правилима.
Знајући n_{2k}, играч A бира произвољан број n_{2k+1} за који је $n_{2k} \leqslant n_{2k+1} \leqslant n_{2k}^2$.
Знајући n_{2k+1}, играч B бира произвољан број n_{2k+2} за који је $\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$ позитиван степен простог броја.
Играч A добија игру ако изабере број 1990, а играч B ако изабере број 1.
За које n_0: (а) A има победничку стратегију; (б) B има победничку стратегију; (в) ниједан играч нема победничку стратегију?

(СР Немачка)

6. Доказати да постоји конвексан 1990-угао са следећа два својства:
(а) сви његови углови су једнаки;
(б) дужине његових страница су 1^2, 2^2, 3^2, ... , 1990^2, у неком поретку.

(Холандија)

ИМО '91

1. Дат је троугао ABC. Нека су A', B', C' тачке пресека симетрала углова CAB, ABC, BCA са страницама BC, CA, AB респективно и I центар уписаног круга тог троугла. Доказати да је

$$\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leqslant \frac{8}{27}.$$

(СССР)

2. Нека је n цео број, $n > 6$, и a_1, a_2, ... , a_k сви природни бројеви који су мањи од n и узајамно прости са n. Ако је

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_k - a_{k-1} > 0,$$

тада је n или прост број или степен броја 2. Доказати.

(Румунија)

3. Нека је $S = \{1, 2, 3, \ldots, 280\}$. Наћи најмањи природан број n такав да сваки n-елементни подскуп скупа S садржи 5 бројева од којих су свака два узајамно прости.

(Кина)

4. Дат је повезан граф G са k ивица. Доказати да се његове ивице могу нумерисати свим бројевима 1, 2, ... , k тако да за сваки врх v графа који је спојен ивицама са бар два друга врха важи: највећи заједнички делилац свих бројева, којима су нумерисане ивице чији је један врх v, једнак је 1.
[*Граф* G се састоји од скупа тачака које се зову *врхови*, заједно са скупом *ивица* које спајају неке парове различитих врхова. За граф G се каже да је *повезан* ако за сваки пар различитих врхова $\{x, y\}$ постоји неки низ врхова $x = v_0$, v_1, v_2, ... , $v_m = y$ такав да је сваки пар врхова v_i, v_{i+1} $(0 \leqslant i < m)$ спојен ивицом из G.]

(САД)

5. Нека је P унутрашња тачка троугла ABC. Доказати да је бар један од углова PAB, PBC, PCA мањи или једнак 30°.

(Француска)

6. Дат је реалан број $a > 1$. Конструисати ограничен бесконачан низ реалних бројева x_0, x_1, x_2, ... такав да неједнакост

$$|x_i - x_j| \cdot |i - j|^a \geqslant 1$$

важи за сваки пар различитих бројева i, j.
[Бесконачан низ реалних бројева x_0, x_1, x_2, ... је *ограничен* ако постоји константа C таква да је $|x_i| \leqslant C$ за сваки $i \geqslant 0$.]

(Холандија)

ИМО '92

1. Наћи све целе бројеве a, b, c, такве да је $1 < a < b < c$ и да је број $abc - 1$ дељив бројем $(a-1)(b-1)(c-1)$.

(Н. Зеланд)

2. Наћи све функције $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, такве да је $f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$ за све x, y из $\mathbf{R}$.

(Индија)

3. У простору је дато 9 тачака, од којих никоје четири не леже у једној равни. Сваке две тачке су повезане помоћу дужи. Дуж може бити обојена плавом или црвеном бојом, или може бити остављена необојена. Наћи најмању вредност n, такву да при произвољном бојењу n дужи постоји троугао чије су све странице обојене истом бојом.

(Кина)

4. У равни су дати круг c, права l која додирује c и тачка M на l. Наћи скуп свих тачака P које задовољавају следећи услов: постоје две тачке Q и R на l, такве да је M средиште дужи QR и да је c уписани круг троугла PQR.

(Француска)

5. Нека је $Oxyz$ правоугли координатни систем у простору, S коначан скуп тачака у простору и S_x, S_y, S_z скупови ортогоналних пројекција свих тачака из S на равни Oyz, Ozx, Oxy респективно. Доказати да је $|S|^2 \leqslant |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|$.

(Италија)

6. За сваки природан број n са $S(n)$ означимо највећи природан број, такав да за свако цело k, $1 \leqslant k \leqslant S(n)$, број n^2 може бити представљен у облику збира k квадрата природних бројева.
   (а) Доказати да је $S(n) \leqslant n^2 - 14$ за свако $n \geqslant 4$.
   (б) Наћи природан број n, такав да је $S(n) = n^2 - 14$.
   (в) Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n, таквих да је $S(n) = n^2 - 14$.

(В. Британија)

ИМО ’93

1. Нека је $n > 1$ природан број и

$$f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3.$$

Доказати да се $f(x)$ не може представити као производ два полинома са целобројним коефицијентима степена најмање 1.

(Ирска)

2. Дат је оштроугли троугао ABC и тачка D унутар њега, таква да је $\measuredangle ADB = \measuredangle ACB + 90^\circ$ и $AC \cdot BD = AD \cdot BC$.
   (а) Израчунати $\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$.
   (б) Доказати да су тангенте на описане кругове троуглова ACD и BCD у тачки D међусобно нормалне.

(В. Британија)

3. На бесконачној шаховској табли игра се следећа игра: У почетку је n^2 жетона поређано на табли у једном $n \times n$ квадрату, тако да сваки жетон заузима по једно поље. Један потез у игри састоји се у томе да се један жетон премести у хоризонталном или вертикалном правцу преко жетона који се налази на суседном пољу на следеће поље, под условом да оно није заузето. Прескочени жетон се при томе скида са табле.
   Одредити све вредности броја n за које се ова игра може завршити тако да на табли остане тачно један жетон.

(Финска)

4. Ако су P, Q и R тачке једне равни, означимо са $m(PQR)$ најкраћу висину троугла PQR (при том је $m(PQR) = 0$ ако су P, Q и R колинеарне). Ако су дате тачке A, B и C, доказати да за сваку тачку X њихове равни важи

$$m(ABC) \leqslant m(ABX) + m(AXC) + m(XBC).$$

(БЈР Македонија)

5. Испитати да ли постоји функција $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ за коју важи:
$f(1) = 2$,
$f(f(n)) = f(n) + n$ за све $n \in \mathbf{N}$ и
$f(n) < f(n+1)$ за све $n \in \mathbf{N}$.

(Немачка)

6. Нека је $n > 1$ природан број и нека је n лампи $L_0, L_1, \dots, L_{n-1}$ поређано тим редом по кругу. Свака лампа може бити укључена или искључена. Изводи се низ операција $S_0, S_1, \dots, S_i, \dots$, при чему операција S_j може да промени само стање лампе L_j и дефинише се на следећи начин: ако је лампа L_{j-1} укључена, стање лампе L_j се мења, а ако није, стање лампе L_j остаје исто. Лампе су нумерисане по модулу n, тј. $L_{-1} = L_{n-1}$, $L_0 = L_n$, $L_1 = L_{n+1}$ итд. У почетку су све лампе укључене. Доказати:
(а) Постоји природан број $M(n)$ такав да су после $M(n)$ операција све лампе поново укључене.
(б) Ако је број n облика 2^k, тада су после $n^2 - 1$ операција све лампе укључене.
(в) Ако је n облика $2^k + 1$, тада су после $n^2 - n + 1$ операција све лампе укључене.

(Холандија)

ИМО '94

1. Нека су m и n природни бројеви и нека су $a_1, a_2, \dots, a_m$ различити елементи скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ такви да кадгод је $a_i + a_j \leqslant n$ за неке i, j, $1 \leqslant i < j \leqslant m$, тада постоји k, $1 \leqslant k \leqslant m$, за који је $a_i + a_j = a_k$. Доказати да је

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} \geqslant \frac{n+1}{2}.$$

(Француска)

2. Нека је ABC једнакокраки троугао са $AB = AC$. Претпоставимо да:
(i) M је средиште дужи BC и O је тачка праве AM за коју је OB нормално на AB;
(ii) Q је произвољна тачка дужи BC различита од B и C;
(iii) E припада правој AB и F припада правој AC тако да су тачке E, Q и F различите и колинеарне.
Доказати да је OQ нормално на EF ако и само ако је $QE = QF$.

(Јерменија – Аустралија)

3. За сваки природан број k нека $f(k)$ означава број елемената скупа $\{k+1, k+2, \dots, 2k\}$ чија репрезентација у бази с основом 2 има тачно три јединице.
(а) Доказати да за сваки природан број m постоји бар један природан број k такав да је $f(k) = m$.
(б) Одредити све природне бројеве m за које постоји тачно једно k са $f(k) = m$.

(Румунија)

4. Одредити све парове (m, n) природних бројева за које је $\dfrac{n^3 + 1}{mn - 1}$ цео број.

(Аустралија)

5. Нека је S скуп свих реалних бројева строго већих од -1. Наћи све функције $f\colon S \to S$ које задовољавају следећа два услова:
(i) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ за све $x, y \in S$;
(ii) $\dfrac{f(x)}{x}$ строго расте на сваком од интервала $-1 < x < 0$ и $0 < x$.
(В. Британија)

6. Показати да постоји скуп A природних бројева са следећим својством: За произвољан бесконачан скуп S простих бројева постоје два природна броја $m \in A$ и $n \notin A$ од којих је сваки производ k различитих елемената из S за неко $k \geqslant 2$.
(Финска)

ИМО '95

1. Нека су A, B, C и D четири различите тачке једне праве, распоређене у том поретку. Кругови над дијаметрима AC и BD секу се у тачкама X и Y. Права XY сече BC у тачки Z. Нека је P тачка праве XY различита од Z. Права CP сече круг над дијаметром AC у тачкама C и M, а права BP сече круг над дијаметром BD у тачкама B и N. Доказати да се праве AM, DN и XY секу у једној тачки.
(Бугарска)

2. Нека су a, b и c позитивни реални бројеви такви да је $abc = 1$. Доказати да је

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

(Русија)

3. Одредити све целе бројеве $n > 3$ за које постоје n тачака $A_1, A_2, \ldots, A_n$ у равни и реални бројеви $r_1, r_2, \ldots, r_n$ који задовољавају следећа два услова:
(i) никоје три од тачака $A_1, A_2, \ldots, A_n$ не леже на једној правој;
(ii) за сваку тројку i, j, k $(1 \leqslant i < j < k \leqslant n)$ троугао $A_iA_jA_k$ има површину једнаку $r_i + r_j + r_k$.
(Чешка)

4. Наћи највећу вредност x_0 за коју постоји низ позитивних реалних бројева x_0, $x_1, \ldots, x_{1995}$ који задовољавају следећа два услова:
(i) $x_0 = x_{1995}$;
(ii) $x_{i-1} + \dfrac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \dfrac{1}{x_i}$ за свако $i = 1, 2, \ldots, 1995$.
(Пољска)

5. Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао код кога је

$$AB = BC = CD, \qquad DE = EF = FA,$$

и

$$\measuredangle BCD = \measuredangle EFA = 60^\circ.$$

Нека су G и H две тачке у унутрашњости шестоугла такве да је $\measuredangle AGB = \measuredangle DHE = 120^\circ$. Доказати да је

$$AG + GB + GH + DH + HE \geqslant CF.$$

(Н. Зеланд)

6. Нека је p непаран прост број. Наћи број подскупова A скупа $\{1, 2, \dots, 2p\}$ таквих да:
(i) A има тачно p елемената,
(ii) збир свих елемената из A дељив је са p.

(Пољска)

ЗАДАЦИ СА БАЛКАНСКИХ МАТЕМАТИЧКИХ ОЛИМПИЈАДА

БМО '84

1. Нека су $a_1, a_2, \dots, a_n$ позитивни реални бројеви ($n \geqslant 2$) такви да важи $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Доказати да је

$$\frac{a_1}{1+a_2+a_3+\cdots+a_n} + \frac{a_2}{1+a_1+a_3+\cdots+a_n} + \cdots + \frac{a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}} \geqslant \frac{n}{2n-1}.$$

(Грчка)

2. Нека је $ABCD$ тетивни четвороугао и H_A, H_B, H_C, H_D пресеци висина троуглова BCD, CDA, DAB и ABC респективно. Доказати да су четвороуглови $ABCD$ и $H_AH_BH_CH_D$ подударни.

(Румунија)

3. Доказати да за сваки природан број m постоји n, $n > m$, тако да се декадни приказ броја 5^n добија из декадног приказа броја 5^m додавањем извесног броја цифара с леве стране.

(Бугарска)

4. Наћи сва реална решења система

$$\begin{aligned} ax + by &= (x-y)^2 \\ by + cz &= (y-z)^2 \\ cz + ax &= (z-x)^2, \end{aligned}$$

где су a, b, c задати позитивни реални бројеви.

(Румунија)

БМО '85

1. Нека је O средиште описаног круга троугла ABC, D средиште дужи AB и E тежиште троугла ACD. Доказати да је $CD \perp OE$ ако и само ако је $AB = AC$.

(Бугарска)

2. Нека су $a, b, c, d \in [-\pi/2, \pi/2]$ такви да је
$$\sin a + \sin b + \sin c + \sin d = 1$$
и
$$\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c + \cos 2d \geqslant \frac{10}{3}.$$
Доказати да је $a, b, c, d \in [0, \pi/6]$.

(Румунија)

3. Тачке реалне праве облика $19a + 85b$, $a, b \in \mathbf{N}$, обојене су црвено, а све преостале целобројне тачке на $\mathbf{R}$ зелено. Испитати да ли постоји тачка $A \in \mathbf{R}$ таква да су сваке две тачке B, $C \in \mathbf{Z}$ које су симетричне у односу на A обојене разним бојама.

(Грчка)

4. На конференцији учествује 1985 људи. У свакој трочланој групи постоје бар две особе које говоре заједничким језиком. Ако свака особа говори највише пет језика, доказати да постоји 200 особа на конференцији које говоре заједничким језиком.

(Румунија)

БМО '86

1. Права која садржи средиште I уписаног круга троугла ABC сече њему описани круг у тачкама F и G, а уписани круг у тачкама D и E, при чему је D између I и F. Доказати да је $DF \cdot EG \geqslant r^2$, где је r полупречник уписаног круга. Када важи једнакост?

(Грчка)

2. Нека тачке E, F, G, H, K, L припадају, редом, ивицама AB, BC, CA, DA, BD и DC тетраедра $ABCD$. Ако је $AE \cdot BE = BF \cdot CF = CG \cdot AG = DH \cdot AH = DK \cdot BK = DL \cdot CL$, доказати да тачке E, F, G, H, K, L припадају једној сфери.

(Бугарска)

3. Низ (a_n) је дефинисан са
$$a_1 = a, \quad a_2 = b \quad \text{и} \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + c}{a_{n-1}} \quad \text{за} \quad n = 2, 3, \ldots,$$
где су a, b, c реални бројеви такви да је $ab \neq 0$, $c > 0$. Доказати да су сви чланови низа цели бројеви ако и само ако су a, b и $\dfrac{a^2 + b^2 + c}{ab}$ цели бројеви.

(Бугарска)

4. Троугао ABC и тачка T припадају једној равни тако да троуглови TAB, TBC, TCA имају исти обим и површину. Доказати да:
(а) ако је T унутрашња тачка троугла ABC, тада је троугао ABC једнакостраничан.
(б) ако T није унутрашња тачка троугла ABC, тада је троугао ABC правоугли.

(Румунија)

БМО '87

1. Нека је a реалан број и $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ функција таква да за све x, $y \in \mathbf{R}$ важи:

$$f(x+y) = f(x)f(a-y) + f(y)f(a-x)$$

и $f(0) = 1/2$. Доказати да је f константа.

(Југославија)

2. Нека су $x \geqslant 1$ и $y \geqslant 1$ реални бројеви за које су $a = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}$ и $b = \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}$ неузастопни цели бројеви. Доказати да је $b = a + 2$ и $x = y = 5/4$.

(Румунија)

3. За унутрашње углове α и β троугла ABC (код A, односно B) важи

$$\sin^{23}\frac{\alpha}{2}\cos^{48}\frac{\beta}{2} = \sin^{23}\frac{\beta}{2}\cos^{48}\frac{\alpha}{2}.$$

Наћи однос AC/BC.

(Кипар)

4. Кругови k_1 и k_2, са средиштима O_1 и O_2 и полупречницима 1 и $\sqrt{2}$ секу се у тачкама A и B, при чему је $O_1O_2 = 2$. Наћи дужину тетиве AC круга k_2 чије средиште припада кругу k_1.

(Бугарска)

БМО '88

1. Нека су CH, CL и CM редом висина, симетрала угла и тежишна дуж троугла ABC, где су H, L и M тачке на AB. Однос површина троуглова HMC и ABC је $1/4$, док је однос површина троуглова LMC и ABC једнак $1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Одредити углове троугла ABC.

(Бугарска)

2. Наћи све полиноме од $P(x, y)$ две променљиве такве да за све реалне бројеве a, b, c, d важи

$$P(a, b)P(c, d) = P(ac + bd, ad + bc).$$

(Југославија)

3. Доказати да се сваки тетраедар $A_1A_2A_3A_4$ може сместити између двеју паралелних равни чије међусобно растојање није веће од $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{P}{3}}$, где је

$$P = (A_1A_2)^2 + (A_1A_3)^2 + (A_1A_4)^2 + (A_2A_3)^2 + (A_2A_4)^2 + (A_3A_4)^2.$$

(Грчка)

4. Наћи све парове a_n, a_{n+1} узастопних целих бројева у низу (a_n) дефинисаном са $a_n = 2^n + 49$, тако да важи

$$a_n = pq, \quad a_{n+1} = rs,$$

где су p, q, r, s прости бројеви такви да је $p < q$, $r < s$, $q - p = s - r$.

(Румунија)

БМО '89

1. Нека су $d_1, d_2, \ldots, d_k$ сви делиоци природног броја n, такви да је $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$. Наћи све бројеве n за које је $k \geqslant 4$ и важи

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n.$$

(Бугарска)

2. Нека је $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + 10a_1 + a_0$ декадни запис неког простог броја. Ако је $n > 1$ и $a_n > 1$, показати да је полином

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

иредуцибилан, тј. не може се приказати као производ два полинома с целобројним коефицијентима и степена бар један.

(Југославија)

3. Нека је ABC троугао и l права која сече странице AB и AC у тачкама B_1 и C_1, респективно, тако да теме A и тежиште G троугла ABC леже у истој полуравни одређеној са l. Доказати да је

$$S(BB_1GC_1) + S(CC_1GB_1) \geqslant \frac{4}{9}S(ABC),$$

где S означава површину. Када важи једнакост?

(Грчка)

4. Посматрајмо фамилије $\mathcal{F}$ подскупова скупа $\{1, 2, \dots, n\}$, $n \geqslant 3$, такве да важи:
(i) ако је $A \in \mathcal{F}$, тада $|A| = 3$;
(ii) ако је $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$, $A \neq B$, тада $|A \cap B| \leqslant 1$.
Нека је $f(n)$ максимална вредност $|\mathcal{F}|$ за све такве $\mathcal{F}$. Доказати да је

$$\frac{1}{6}(n^2 - 4n) \leqslant f(n) \leqslant \frac{1}{6}(n^2 - n).$$

[$|S|$ означава број елемената коначног скупа S].

(Румунија)

БМО ’90

1. Низ (a_n) је дат на следећи начин: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ и

$$a_{n+2} = (n+3)a_{n+1} - (n+2)a_n$$

за све природне n. Наћи све чланове низа који су дељиви са 11.

(Грчка)

2. Ако је

$$a_0 + a_1x + \dots + a_{2n}x^{2n} = (x + 2x^2 + \dots + nx^n)^2,$$

доказати да је $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n} = \dfrac{n(n+1)(5n^2 + 5n + 2)}{24}$.

(Бугарска)

3. Подножја висина оштроуглог неједнакостраничног троугла ABC су A_1, B_1 и C_1. Ако су A_2, B_2 и C_2 додирне тачке круга уписаног у троугао $A_1B_1C_1$, доказати да се Ојлерове праве троуглова ABC и $A_2B_2C_2$ поклапају.
[Ојлерова права неког троугла је права одређена његовим ортоцентром и средиштем описаног круга.]

(Југославија)

4. Одредити минималан број елемената коначног скупа A за који постоји функција $f\colon N \to A$ таква да је $f(i) \neq f(j)$ уколико је $|i - j|$ прост број.

(Румунија)

БМО ’91

1. Нека је M тачка на луку AB, који не садржи тачку C, круга описаног око оштроуглог троугла ABC. Нормала конструисана из тачке M на полупречник OA сече странице AB и AC редом у тачкама K, L (O је центар описаног круга). Слично, нормала конструисана из M на полупречник OB сече странице AB, BC редом у тачкама N, P. Ако је $KL = MN$, изразити $\measuredangle MLP$ преко углова троугла ABC.

(Грчка)

2. Доказати да постоји бесконачно много неподударних троуглова T таквих да:
(i) дужине страница a, b, c троугла T су релативно прости природни бројеви;
(ii) површина троугла T је цео број;
(iii) ниједна од висина троугла T није цео број.

(Југославија)

3. Правилан шестоугао површине H уписан је у конвексан многоугао површине P. Доказати да је $P \leqslant \frac{3}{2}H$. Када важи једнакост?

(Бугарска)

4. Доказати да не постоји бијекција $f\colon \{1, 2, \dots\} \to \{0, 1, 2, \dots\}$ таква да је $f(mn) = f(m) + f(n) + 3f(m)f(n)$ за све m, $n \geqslant 1$.

(Румунија)

БМО '92

1. Нека су m и n позитивни цели бројеви и

$$A(m, n) = m^{3^{4n}+6} - m^{3^{4n}+4} - m^5 + m^3.$$

Наћи све бројеве n са својством да је број $A(m, n)$ дељив са 1992 за свако m.

(Бугарска)

2. Доказати да за сваки позитиван цео број n важи:

$$(2n^2 + 3n + 1)^n \geqslant 6^n (n!)^2.$$

(Кипар)

3. Дат је троугао ABC и тачке D, E, F редом на страницама BC, CA, AB (различите од темена). Ако је четвороугао $AFDE$ тетиван, доказати да је

$$\frac{4(\triangle DEF)}{(\triangle ABC)} \leqslant \left(\frac{EF}{AD}\right)^2,$$

где $(\triangle XYZ)$ означава површину троугла XYZ.

(Грчка)

4. За сваки цео број $n \geqslant 3$, наћи најмањи природан број, означен са $f(n)$, који има следеће својство:
За сваки подскуп $A \subset \{1, 2, \dots, n\}$ који садржи тачно $f(n)$ елемената, постоје x, y, $z \in A$ такви да су свака два узајамно прости бројеви.

(Румунија)

БМО '93

1. Ако су a, b, c, d, e, f реални бројеви за које важи

$$a+b+c+d+e+f=10, \tag{1}$$
$$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+(d-1)^2+(e-1)^2+(f-1)^2=6, \tag{2}$$

одредити максималну вредност броја f.

(Кипар)

2. Позитиван цео број са децималном репрезентацијом

$$a_N\cdot 10^N+a_{N-1}\cdot 10^{N-1}+\cdots+a_1\cdot 10+a_0$$

(a_i су цифре из $[0,9]$), зове се „монотон" ако је $a_N\leqslant a_{N-1}\leqslant\cdots\leqslant a_0$. Одредити број свих монотоних бројева са не више од 1993 цифре.

(Бугарска)

3. Нека се кругови C_1 и C_2 са центрима O_1 и O_2, респективно, додирују споља у тачки Γ. Нека је, даље, C круг са центром O који додирује кругове C_1 и C_2 у тачкама A и B, респективно, тако да се центри O_1 и O_2 налазе унутар круга C. Заједничка тангента у тачки Γ кругова C_1 и C_2 сече круг C у тачкама K и L. Ако је D средиште дужи KL, доказати да је $\measuredangle O_1OO_2=\measuredangle ADB$.

(Грчка)

4. Нека је p прост број, а m природан број, $m\geqslant 2$. Доказати да једначина

$$\frac{x^p+y^p}{2}=\left(\frac{x+y}{2}\right)^m \tag{3}$$

има решење $(x,y)\neq(1,1)$ у скупу позитивних целих бројева ако и само ако је $m=p$.

(Румунија)

БМО '94

1. Дат је оштар угао XAY и тачка P унутар њега. Конструисати (помоћу шестара и лењира) праву која пролази кроз тачку P и сече краке AX и AY редом у тачкама B и C, тако да је површина троугла ABC једнака AP^2.

(Кипар)

2. Доказати да полином

$$x^4-1994x^3+(1993+m)x^2-11x+m,$$

где је m цео број, има највише један целобројни корен.

(Грчка)

3. Нека је $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ пермутација бројева 1, 2, ... , n, где је $n \geqslant 2$. Израчунати највећу могућу вредност израза

$$\sum_{k=1}^{n-1} |a_{k+1} - a_k|.$$

(Румунија)

4. Наћи најмањи број $n > 4$ за који постоји скуп од n људи, тако да свака два који се познају немају заједничких познаника, а свака два који се не познају имају тачно два заједничка познаника.
[Познанство је симетрична релација: ако A познаје B, $A \neq B$, онда и B познаје A.]

(Бугарска)

БМО '95

1. Наћи вредност израза

$$(\dots(((2*3)*4)*5)*\dots)*1995,$$

где је $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ за све позитивне x и y.

(БЈР Македонија)

2. Нека се кругови $c_1(O_1, r_1)$ и $c_2(O_2, r_2)$, $r_2 > r_1$, секу у тачкама A и B, при чему је $\measuredangle O_1AO_2 = 90^\circ$. Права O_1O_2 сече c_1 у C и D, а c_2 у E и F (при чему је C–E–D–F). Права BE сече круг c_1 у K, а праву AC у M, док права BD сече круг c_2 у L, а праву AF у N. Доказати да је

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{KE}{KM} \cdot \frac{LN}{LD}.$$

(Грчка)

3. Нека су a и b природни бројеви, такви да је $a > b$ и $a+b$ је паран број. Доказати да су решења једначине

$$x^2 - (a^2 - a + 1)(x - b^2 - 1) - (b^2 + 1)^2 = 0$$

природни бројеви од којих ниједан није потпун квадрат.

(Албанија)

4. Нека је n природан број и S скуп свих тачака (x, y), где су x и y природни бројеви, $x \leqslant n$, $y \leqslant n$. Нека је T скуп свих квадрата чија темена припадају скупу S. Означимо са a_k $(k \geqslant 0)$ број парова тачака из S које су темена тачно k квадрата из T. Доказати да је $a_0 = a_2 + 2a_3$.

(Југославија)

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

ИМО '84.1.

Из услова задатка следи $0 \leqslant x,\ y,\ z \leqslant 1$, па је $xy \geqslant xyz$, $yz \geqslant xyz$, $zx \geqslant xyz$, одакле

$$xy + yz + zx \geqslant 3xyz,$$

што је јаче од леве стране дате неједнакости. Важи, уствари, још јача неједнакост: $xy + yz + zx \geqslant 9xyz$, што следи из познате неједнакости

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geqslant 9$$

за $x,\ y,\ z > 0$, која је специјалан случај Коши-Шварцове неједнакости. За доказ десне стране неједнакости дајемо више решења.

Прво решење. Нека је x најмањи, а y највећи од бројева x, y и z. Тада је $x \leqslant \frac{1}{3} \leqslant y$ и $z \leqslant \frac{1}{2}$. Из неједнакости $\left(\frac{1}{3}-x\right)\left(y-\frac{1}{3}\right) \geqslant 0$ следи да је $xy \leqslant \frac{1}{3}\left(x+y-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}-z\right)$. На основу тога добијамо да је

$$\begin{aligned} yz + zx + xy - 2xyz &= (x+y)z + xy(1-2z) \leqslant (1-z)z + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}-z\right)(1-2z) \\ &= \frac{7-(3z-1)^2}{27} \leqslant \frac{7}{27}. \end{aligned}$$

Друго решење. Бар један од бројева x, y и z је мањи од $1/2$. Нека је то, на пример, z. Имамо да је

$$\begin{aligned} &\frac{7}{27} - (yz + zx + xy) + 2xyz = \frac{7}{27} - z(x+y) - xy(1-2z) \\ &\quad \geqslant \frac{7}{27} - z(x+y) - \frac{1}{4}(x+y)^2(1-2z) = \frac{7}{27} - z(1-z) - \frac{1}{4}(1-z)^2(1-2z) \\ &\quad = \frac{(3z-1)^2(1-2z)}{108} \geqslant 0. \end{aligned}$$

Треће решење. Доказаћемо десну неједнакост стандардним поступком одређивања екстремних вредности функција више променљивих. Елиминацијом променљиве z помоћу датог услова добијамо да се израз који испитујемо своди на

$$g(x,y) = 2x^2y + 2xy^2 - x^2 - y^2 - 3xy + x + y,$$

при чему важе ограничења $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x+y \leqslant 1$. На рубу те области функција g се своди на израз типа $x-x^2$, те екстремне вредности може евентуално имати само у тачкама $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ или $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Што се унутрашњости области тиче, у њој су парцијални изводи функције g једнаки:

$$g'_x = 4xy + 2y^2 - 2x - 3y + 1,$$
$$g'_y = 2x^2 + 4xy - 2y - 3x + 1.$$

Изједначавање тих извода са нулом даје систем који у унутрашњости наше области има само једно решење – $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Како је та област компактна (ограничена и затворена), то непрекидна функција g на њој достиже своју максималну вредност и она може бити само једна од њених вредности у добијене четири тачке. Како је

$$g\left(\frac{1}{2}, 0\right) = g\left(0, \frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \quad \text{а} \quad g\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{27} > \frac{1}{4},$$

то је заиста $g(x, y) \leqslant \frac{7}{27}$.

Четврто решење. Десна неједнакост еквивалентна је са

$$\sigma_1^3 \geqslant \frac{27}{7}\sigma_1\sigma_2 - \frac{54}{7}\sigma_3,$$

где су коришћене уобичајене ознаке за симетричне функције $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + yz + zx$ и $\sigma_3 = xyz$. Доказаћемо општије тврђење: Неједнакост

$$(*) \qquad \sigma_1^3 \geqslant a\sigma_1\sigma_2 - b\sigma_3$$

је задовољена за сваку тројку ненегативних бројева (x, y, z) ако и само ако је

$$(**) \qquad a \leqslant 4, \qquad 9a - b \leqslant 27.$$

Последње две неједнакости су посебни случајеви неједнакости $(*)$ који се добијају за $x = y = 1$, $z = 0$ и $x = y = z = 1$. Претпоставимо да су неједнакости $(**)$ задовољене. Из

$$\begin{aligned} a\sigma_1\sigma_2 - b\sigma_3 &\leqslant a\sigma_1\sigma_2 - (9a-27)\sigma_3 = a(\sigma_1\sigma_2 - 9\sigma_3) + 27\sigma_3 \\ &\leqslant 4(\sigma_1\sigma_2 - 9\sigma_3) + 27\sigma_3 = 4\sigma_1\sigma_2 - 9\sigma_3 \end{aligned}$$

следи да је неједнакост $(*)$ довољно доказати за случај $a = 4$, $b = 9$, тј. да је довољно доказати неједнакост

$$\sigma_1^3 \geqslant 4\sigma_1\sigma_2 - 9\sigma_3.$$

Последња неједнакост је еквивалентна са

$$x(x-y)(x-z) + y(y-x)(y-z) + z(z-x)(z-y) \geqslant 0$$

(посебан случај Шурове неједнакости). Нека је, на пример, $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 0$. У том случају је

$$x(x-y)(x-z) \geqslant y(x-y)(y-z),$$
$$z(z-x)(z-y) \geqslant 0.$$

Из ових двеју неједнакости следи претходна.

ИМО ’84.2.

Важи

$$\begin{aligned}(a+b)^7-(a^7+b^7)&=7ab[(a^5+b^5)+3ab(a^3+b^3)+5a^2b^2(a+b)]\\&=7ab(a+b)(a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+b^4)\\&=7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2.\end{aligned}$$

Како производ $ab(a+b)$ не треба да буде дељив са 7, остаје да бројеве a и b тако одредимо да буде $7^3 \mid a^2+ab+b^2$. Мора да буде

$$(a+b)^2 > a^2+ab+b^2 \geqslant 7^3 = 343,$$

тј. $a+b \geqslant 19$. Ставимо $b=1$. Стандардним поступком за решавање конгруенција (в. нпр. [2]) добијамо да је $a=18$ једно решење конгруенције $x^2+x+1 \equiv 0 \pmod{7^3}$. Провера показује да бројеви $a=18$, $b=1$ задовољавају услове задатка.

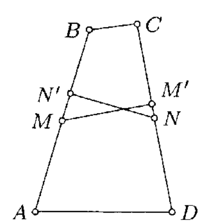
ИМО ’84.3.

Посматрајмо произвољна два круга $R=(O,r)$ и $S=(O,s)$ са $0<r<s<1$. На кругу R изаберимо тачку X за коју је $\alpha(X)=r(s-r)$ – јасно је да је $C(X)=S$ и $0<\alpha(X)<1$. Ако тврђење задатка не би било тачно, боја тачке X не би се појављивала на кругу S, па би скуп свих боја које се појављују на кругу R био различит од скупа свих боја које се појављују на кругу S.

Дакле, ако тврђење задатка не би било тачно, произвољна два круга полупречника мањег од 1 имала би различите скупове боја којима су обојене. Но, таквих кругова има бесконачно, а могућих подскупова (коначног) скупа боја само коначно много. Контрадикција.

ИМО ’84.4.

Нека је M средиште дужи AB и M' његова пројекција на праву CD. Тада је $MM' = \frac{1}{2}AB$ и



Сл. 1

(1)
$$\begin{aligned}P_{ABCD}&=P_{AMD}+P_{MBC}+P_{CMD}\\&=\frac{1}{2}P_{ABD}+\frac{1}{2}P_{CAB}+\frac{1}{4}CD\cdot AB.\end{aligned}$$

Нека је N средиште дужи CD и N' његова пројекција на AB. Тада је

(2)
$$\begin{aligned}P_{ABCD}&=P_{BCN}+P_{AND}+P_{ANB}\\&=\frac{1}{2}P_{BCD}+\frac{1}{2}P_{ACD}+\frac{1}{2}AB\cdot NN'.\end{aligned}$$

Из (1) и (2) следи

$$P_{ABD} + P_{CAB} + \frac{1}{2}CD \cdot AB = P_{BCD} + P_{ACD} + AB \cdot NN',$$

односно

$$P_{ABD} + (P_{ABCD} - P_{ACD}) - (P_{ABCD} - P_{ABD}) - P_{ACD} = AB\left(NN' - \frac{1}{2}CD\right)$$

и

(3) $$2(P_{ABD} - P_{ACD}) = AB\left(NN' - \frac{1}{2}CD\right).$$

Јасно је да круг са дијаметром CD додирује праву AB ако и само ако је $NN' = \frac{1}{2}CD$. Према (3), тај услов је еквивалентан са $P_{ABD} = P_{ACD}$. Но, то је очигледно испуњено ако и само ако је $BC \parallel AD$.

ИМО ’84.5.

Означимо темена датог n-тоугла са $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n$ и за свако j ставимо $A_{n+j} = A_j$. Нека је A_iA_j произвољна дијагонала. Четвороугао $A_iA_{i+1}A_jA_{j+1}$ је конвексан, па је зато

$$A_iA_j + A_{i+1}A_{j+1} > A_iA_{i+1} + A_jA_{j+1}.$$

Сабирајући те неједнакости, написане за сваку од $\frac{n(n-3)}{2}$ дијагонала n-тоугла, добијамо

$$2d > (n-3)p,$$

тј. леву страну дате неједнакости.

За дијагоналу A_iA_j важи такође

(1) $$A_iA_j < A_iA_{i+1} + \cdots + A_{j-1}A_j$$

и

(2) $$A_iA_j < A_jA_{j+1} + \cdots + A_{i-1}A_i.$$

Ако је n непарно, $n = 2k+1$, изаберимо за сваку дијагоналу A_iA_j ону од неједнакости (1), (2) чија десна страна има мање сабирака. Сабирањем тако добијених $\frac{n(n-3)}{2}$ неједнакости добијамо

$$d < \frac{(k-1)(k+2)}{2}p = \frac{p}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - 2\right).$$

Ако је n парно, $n = 2k$, за $j = i + k$ важи неједнакост $A_iA_{i+k} < \frac{p}{2}$; за остале дијагонале узмимо ону од неједнакости (1), (2) чија десна страна има мање сабирака. Сабирање тако добијених неједнакости даје

$$d < k\frac{p}{2} + \frac{(k-2)(k+1)}{2}p = \frac{k^2-2}{2}p = \frac{p}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - 2\right).$$

Тиме је и десна страна дате неједнакости доказана.

ИМО '84.6.

Из услова (1) и (2) непосредно следи да је $a+d>b+c$. Заиста,

$$0<(d-b)(d-c)=d^2-bd+bc-cd=d^2-bd+ad-cd=d[(a+d)-(b+c)].$$

На основу (3) добијамо да је $k>m$.

Из $d=2^k-a$ и $c=2^m-b$, заменом у (2) добијамо $a(2^k-a)=b(2^m-b)$, одакле

$$(4)\qquad (b+a)(b-a)=2^m(b-2^{k-m}a).$$

Због $k>m$ је $2^{k-m}a$ паран број, па како је b непаран, највиши степен двојке којим је дељива десна страна релације (4) је m. Дакле, $(b+a)(b-a)$ је дељиво са 2^m, а није дељиво са 2^{m+1}, одакле следи

$$(5)\qquad b+a=2^{m_1}p,\quad b-a=2^{m_2}q,$$

где је $m_1+m_2=m$, $m_1\geqslant 1$, $m_2\geqslant 1$ и p и q су непарни.

Решавајући систем (5) по a и b добијамо

$$b=\frac{2^{m_1}p+2^{m_2}q}{2},\quad a=\frac{2^{m_1}p-2^{m_2}q}{2}.$$

Како су a и b непарни, то је $m_1=1$ или $m_2=1$. Покажимо да је $m_1=1$ немогуће. Заиста, из $m_1=1$ следило би $b-a=2^{m-1}q\geqslant 2^{m-1}$, а из $b+c=2^m$ и $b<c$ следи $b<2^{m-1}$, па би било $b<b-a$, што је немогуће.

Дакле, $m_2=1$, $m_1=m-1$ и релације (5) дају

$$a+b=2^{m-1}p,\quad b-a=2q.$$

Због $2^m=b+c>a+b=2^{m-1}p$ имамо $p<2$, тј. $p=1$. Значи,

$$(6)\qquad a+b=2^{m-1},\quad b-a=2q,$$

где је q непаран број. Замењујући у (4) добијамо после скраћивања са 2^m: $q=b-2^{k-m}a$. Но, из (6) следи $b=2^{m-2}+q$, па је

$$q=2^{m-2}+q-2^{k-m}a,$$

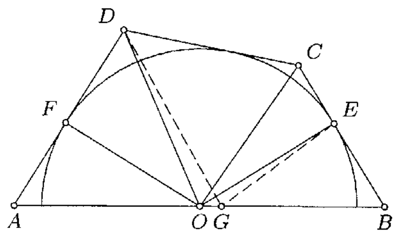
тј. $2^{k-m}a=2^{m-2}$. Како је a непаран и $k>m$, то из последње релације следи $a=1$, што је и требало доказати.

Напомена. Из (3) и (6) лако се долази до закључка да су све четворке (a,b,c,d) које задовољавају услове (1), (2) и (3) облика

$$(1,2^{m-1}-1,2^{m-1}+1,2^{2m-2}-1),$$

где је m произвољан природан број не мањи од 3.

ИМО '85.1.



Сл. 2

Прво решење. Нека је O средиште поменутог круга, r његов полупречник и E и F тачке у којима он додирује странице BC и AD, респективно. Тада је $BE = r\operatorname{ctg}\beta$, $EC = r\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$, $DF = r\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}$, $FA = r\operatorname{ctg}\alpha$, $OB = \frac{r}{\sin\beta}$, $OA = \frac{r}{\sin\alpha}$, где су са α, β, γ и δ означени углови датог четвороугла $ABCD$. Релација $AD+BC = AB$ еквивалентна је редом са

$$r\left(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\right) + r\left(\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{r}{\sin\alpha} + \frac{r}{\sin\beta},$$
$$\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{1-\cos\beta}{\sin\beta},$$
$$\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$

Последња релација, међутим, директно следи из $\alpha+\gamma=\pi$ и $\beta+\delta=\pi$.

Друго решење. Нека је O тачка на страници AB у којој се секу бисектрисе углова BCD и CDA и нека је G тачка странице AB која задовољава услов $AG = AD$. Тачке C, D, O и G леже на једном кругу (зато што је $\measuredangle DGA = \measuredangle DCO = (180^\circ - \measuredangle A)/2$). Следи да је $BG = BC$ (зато што је $\measuredangle CGB = \measuredangle CDO = (180^\circ - \measuredangle B)/2$).

ИМО '85.2.

За дато бојење скупа M извршимо бојење целог скупа $\mathbf{N}$ природних бројева на следећи начин:

– за дато $i \in M$ сви бројеви конгруентни са i по модулу n, тј. сви бројеви облика $tn+i$, $t\in\mathbf{N}$, имају исту боју као i;

– сви бројеви облика tn, $t\in\mathbf{N}$, имају исту боју као број k.

Докажимо да су тада сви бројеви

$$(1) \qquad k, 2k, \ldots, pk, \ldots$$

једнако обојени. Довољно је доказати да су за свако $p\in\mathbf{N}$ бројеви pk и $(p+1)k$ једнако обојени. Размотримо следећа три случаја.

1° Један од бројева pk, $(p+1)k$, на пример, нека је то pk, јесте облика tn за неко $n\in\mathbf{N}$. Тада је он по дефиницији обојен исто као k, а такође је и број $(p+1)k$ тако обојен, јер је у том случају $(p+1)k \equiv k \pmod{n}$. Случај $(p+1)k = tn$ разматра се аналогно.

2° За неко t је $pk < tn < (p+1)k$. Нека ознака $i \sim j$ значи „i и j имају једнаку боју“. Тада је

$$(p+1)k = tn + i \sim i \sim k - i \sim n - k + i \sim tn - k + i = pk.$$

3° За неко t је $tn < pk < (p+1)k < (t+1)n$. Тада је

$$(p+1)k = tn + j \sim j \sim j - k \sim tn + j - k = pk.$$

Тиме је доказано да су сви бројеви облика (1) једнако обојени. Нека је сада $i \in M$ произвољан. Како су k и n узајамно прости, то постоји број $p \in M$, такав да је $pk \equiv i \pmod n$. То значи да и број i има исту боју као бројеви облика (1), па сви елементи скупа M имају исту боју.

ИМО ’85.3.

Прво решење. Препуштамо читаоцу да докаже следеће једноставно помоћно тврђење.

Лема 1. Ако је $m = 2^s$ (s ненегативан цео број), тада је

$$Q_m(x) = (1+x)^m = 1 + R(x) + x^m,$$

где је $R(x)$ полином са парним коефицијентима.

Одатле се лако изводи и

Лема 2. Ако је $m = 2^s$ и P полином степена мањег од m, тада је

$$w(PQ_m) = 2w(P).$$

Заиста, из леме 1 следи да је $P(x)Q_m(x) = P(x) + P(x)R(x) + x^m P(x)$. При том, полиноми $P(x)$ и $x^m P(x)$ немају чланове истог степена, а сви коефицијенти полинома $P(x)R(x)$ су парни. ■

Пређимо сада на доказ тврђења задатка. Означимо са s најмањи ненегативан цео број који има особину да је $i_n < 2^s = m$, где је $i_1, i_2, \dots, i_n$ дата n-торка која задовољава услове задатка. Тврђење ћемо доказати индукцијом по s.

За $s = 0$ тврђење је тривијално, јер је у том случају једина могућност $n = 1$, $i_1 = 0$, $Q_{i_1} \equiv 1$, па се неједнакост коју доказујемо своди на једнакост

$$w(Q_{i_1}) = w(Q_{i_1}) \quad (= 1).$$

Претпоставимо сада да је тврђење задатка испуњено кадгод дата n-торка испуњава услов $i_n < 2^s = m$ и докажимо да оно важи и за било коју n-торку код које је $2^s \leqslant i_n < 2^{s+1}$. Размотримо следећа два могућа случаја.

1° $i_1 \geqslant 2^s = m$. Тада је

$$Q_{i_1}(x) + \cdots + Q_{i_n}(x) = (1+x)^{i_1} + \cdots + (1+x)^{i_n} = Q_m(x)P(x),$$

где је P полином облика

$$P(x) = Q_{i'_1}(x) + \cdots + Q_{i'_n}(x),$$

степена $i'_n = i_n - m < 2^{s+1} - 2^s = 2^s$. На основу леме 2 имамо

$$w(Q_{i_1} + \cdots + Q_{i_n}) = w(Q_m P) = 2w(P). \tag{1}$$

С друге стране, на основу индуктивне претпоставке је

$$w(P) \geqslant w(Q_{i'_1}) = w(Q_{i_1 - m}). \tag{2}$$

Најзад, степен полинома Q_{i_1-m} је мањи од m, па из $Q_{i_1} = Q_{i_1-m}Q_m$, поновном применом леме 2 добијамо

$$w(Q_{i_1}) = 2w(Q_{i_1-m}). \tag{3}$$

Из (1), (2) и (3) следи неједнакост коју доказујемо.

2° $i_1 < 2^s$. Тада је

$$\begin{aligned}Q_{i_1}(x) &+ \cdots + Q_{i_n}(x)\\ &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_{m-1}x^{m-1} + (1+x)^m(b_0 + b_1 x + \cdots + b_{m-1}x^{m-1})\\ &= \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i + \sum_{j=0}^{m-1} b_j x^j + x^m \sum_{i=0}^{m-1} b_j x^j + R(x),\end{aligned}$$

где је $R(x)$ полином са парним коефицијентима (поново је искоришћена лема 1). Израчунајмо број непарних коефицијената добијеног полинома. Други и трећи сабирак у последњој суми су полиноми који немају чланове једнаког степена. Ако би неки од непарних коефицијената a_i био поништен непарношћу одговарајућег коефицијента b_j, у крајњем збиру би се опет појавио непарни коефицијент b_j у сабирку $b_j x^{j+m}$. На тај начин, важи

$$w(Q_{i_1} + \cdots + Q_{i_n}) \geqslant w\Bigl(\sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i\Bigr). \tag{4}$$

Но, полином $\sum\limits_{i=0}^{m-1} a_i x^i$ је такође облика

$$Q_{i_1}(x) + Q_{i_2}(x) + \cdots + Q_{i_p}(x),$$

са $i_p < m = 2^s$, па за њега по индуктивној претпоставци важи

$$w\Bigl(\sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i\Bigr) \geqslant w(Q_{i_1}). \tag{5}$$

Из (4) и (5) следи неједнакост из тврђења задатка.

Тиме је тврђење индукцијом у потпуности доказано.

Друго решење. Полиноме ћемо разматрати над $\mathbf{Z}_2$. Уместо о броју непарних коефицијената, говорићемо о броју монома у полиному. Доказ ћемо извести трансфинитном индукцијом по i_1. За $i_1 = 0$ тврђење очигледно важи (број монома у полиному $(1+x)^0 = 1$ једнак је 1). Нека је $i_1 > 0$. Користићемо једнакости

$$(1+x)^{2j} = (1+x^2)^j, \quad (1+x)^{2j+1} = (1+x^2)^j + x(1+x^2)^j.$$

Помоћу њих трансформишемо све сабирке у полиному

$$P(x) = (1+x)^{i_1} + (1+x)^{i_2} + \cdots + (1+x)^{i_n}.$$

Ако је i_s паран број, ставићемо да је $i_s = 2j_s$, а ако је i_s непаран број, ставићемо да је $i_s = 2j_s + 1$. Разматраћемо три случаја.

Ако је i_1 паран број и ако је $i_2 > i_1 + 1$, довољно је да разматрамо само мономе парног степена. Број монома у полиному $(1+x)^{i_1}$ једнак је броју монома у полиному $(1+x^2)^{j_1}$, а овај, према индуктивној претпоставци, није већи од броја монома парног степена у полиному $P(x)$.

Ако је i_1 паран број и ако је $i_2 = i_1 + 1$, онда је

$$(1+x)^{i_1} + (1+x)^{i_2} = (1+x^2)^{j_1} + (1+x^2)^{j_1} + x(1+x^2)^{j_1} = x(1+x^2)^{j_1}.$$

Број монома у полиному $(1+x)^{i_1}$ једнак је броју монома у полиному $x(1+x^2)^{j_1}$, а овај, према индуктивној претпоставци, није већи од броја монома непарног степена у полиному $P(x)$.

Нека је i_1 непаран број. Број монома парног степена у полиному $(1+x)^{i_1}$ једнак је броју монома у полиному $(1+x^2)^{j_1}$, а овај, према индуктивној претпоставци није већи од броја монома парног степена у полиному $P(x)$. Број монома непарног степена у полиному $(1+x)^{i_1}$ једнак је броју монома у полиному $x(1+x^2)^{j_1}$, а овај, према индуктивној претпоставци, није већи од броја монома непарног степена у полиному $P(x)$.

Тиме је доказ завршен.

Треће решење. Означимо са $B(m)$ скуп експонената у бинарном запису броја m. Може да се докаже да је $\binom{m}{k}$ непаран број ако и само ако је $B(k) \subset B(m)$.

Коефицијент уз x^k у полиному

$$P(x) = (1+x)^{i_1} + (1+x)^{i_2} + \cdots + (1+x)^{i_n}$$

је непаран ако и само ако је скуп $B(k)$ садржан у непарном броју скупова $B_s = B(i_s)$, $s = 1, 2, \ldots, n$. За скуп који је садржан у непарном броју скупова B_s, $s = 1, 2, \ldots, n$ рећи ћемо да је непаран. Дакле, довољно је доказати комбинаторну чињеницу: број подскупова скупа B_1 није већи од броја непарних скупова. То ћемо урадити тако што ћемо скуповима $C \subset B_1$ кореспондирати различите непарне скупове. Ако је скуп $C \subset B_1$ непаран, ставићемо да је $F(C) = C$. Нека скуп $C \subset B_1$ није непаран. Он је садржан у непарном броју скупова B_s, $s = 2, 3, \ldots, n$. Разматрајмо разлике скупова $B_s \setminus B_1$, $2 \leqslant s \leqslant n$, $C \subset B_s$. Међу њима одаберимо једну која има непаран број копија и коју не садржи ниједна друга која има то својство. Означимо је са D. Ставимо да је $F(C) = C \cup D$. Лако је доказати да је овај скуп непаран. Из $F(C) \cap B_1 = C$ следи да је кореспонденција F инјективна.

ИМО '85.4.

Простих бројева мањих од 26 има 9. Зато је сваки елемент x_j скупа M облика $\prod_{i=1}^{9} p_i^{a_{ij}}$, где је $a_{ij} \geqslant 0$ и $p_i \in \{2,3,5,7,11,13,17,19,23\}$. Производ $x_j x_k$ је квадрат целог броја ако и само ако је

$$a_{ij} + a_{ik} \equiv 0 \pmod 2 \quad \text{за све } i = 1, \ldots, 9.$$

Како је број различитих деветорки по модулу 2 једнак $2^9 = 512$, сваки подскуп скупа M са бар 513 елемената садржаће пар елемената чији је производ квадрат. Полазећи од скупа M и елиминишући такве парове, налазимо

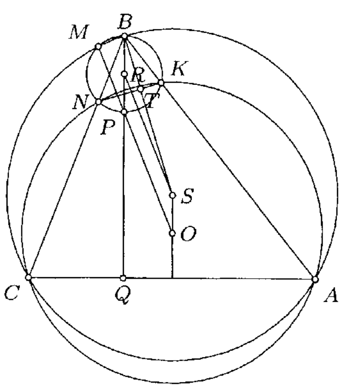
$$(1985 - 513)/2 = 736 > 513$$

различитих двоелементних подскупова од M од којих сваки има квадрат за производ елемената.

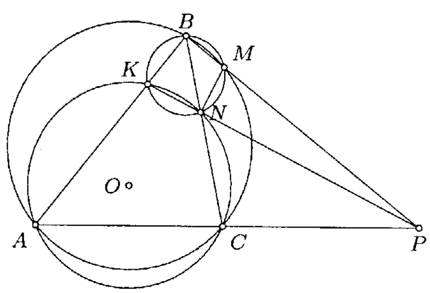
Резонујући аналогно, налазимо међу тим квадратима бар један пар (у ствари, очигледно их мора бити и више) чији је производ четврти степен целог броја.

ИМО '85.5.

Прво решење. Претпоставимо, одређености ради, да је дати троугао ABC оштроугли. У случају неоштроуглог троугла доказ је сличан.



Сл. 3



Сл. 4

Нека су S и R, редом, средишта кругова описаних око троуглова ABC и KBN, сл. 3. Ако је $\measuredangle ACB = \gamma$, онда је $\measuredangle ASB = 2\gamma$. Како је четвороугао $AKNC$ тетивни, имамо

$$\measuredangle BKN = 180^\circ - \measuredangle NKA = \measuredangle ACN = \gamma.$$

Но, онда је и $\measuredangle NRB = 2\gamma$, а из једнакокраких троуглова ABS и BNR добијамо

$$\measuredangle ABS = \measuredangle NBR = 90^\circ - \gamma,$$

што значи да су троуглови BTK и BQC правоугли (означили смо $T = BS \cap NK$ и $Q = BR \cap CA$), са правим угловима код T, односно Q. Сада имамо $OS \perp AC$ и $BR \perp AC$, па је $BR \parallel OS$ и, слично, $BS \parallel RO$, јер је $BS \perp NK$ и $RO \perp NK$. На тај начин, четвороугао $OSBR$ је паралелограм.

Нека је P тачка симетрична тачки B у односу на R. Тада је и четвороугао $OSRP$ паралелограм. Тачке S и R обе леже на симетрали дужи BM, па је $SR \perp BM$, одакле $OP \perp BM$. Најзад, $PM \perp BM$ (BP је пречник круга), па тачке O, P и M леже на једној правој и $OM \perp BM$, што је и требало доказати.

Друго решење. Праве AC, KN и BM секу се у тачки P, радикалном центру три круга, сл. 4. Четвороугао $MNCP$ је тетиван. Нека је $r = OA = OC = OK = ON$. Имамо да је

$$BM \cdot BP = BN \cdot BC = OB^2 - r^2,$$
$$PM \cdot PB = PN \cdot PK = OP^2 - r^2.$$

Следи да је

$$OB^2 - OP^2 = BP(BM - PM) = (BM + PM)(BM - PM) = BM^2 - PM^2.$$

Одавде добијамо да је $OM \perp MB$.

Треће решење. Нека је P тачка у којој се секу праве AC и KN. Тачке B и P су две дијагоналне тачке четворотеменика $ACNK$, па су зато спрегнуте у односу на круг $ACNK$. Следи да је круг k којем је дуж BP пречник ортогоналан на кругу $ACNK$. Разматрајмо инверзију са центром у тачки B која круг $ACNK$ пресликава у самог себе. Тачке A, C, N и K пресликавају се редом у тачке K, N, C и A. Праве AC и KN пресликавају се у кругове ABC и KBN. Следи да се тачка P пресликава у тачку M. Круг k се пресликава у праву l која пролази кроз тачку M и ортогонална је на правој BP. Како је круг k ортогоналан на кругу $ACNK$, то је и права l ортогонална на кругу $ACNK$. То значи да права l пролази кроз тачку O. Дакле угао OMB је прав.

ИМО '85.6.

Задати услов је еквивалентан са $1 - \dfrac{1}{n} < x_n < 1$, $n = 1, 2, \ldots$. Нека је

$$f_n\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty); \qquad f_n(x) = x\left(x + \frac{1}{n}\right).$$

Довољно је доказати да интервали из низа

$$(a_n, b_n) = f_1^{-1}\left(f_2^{-1}\left(\cdots f_n^{-1}\left(\left(1 - \frac{1}{n}, 1\right)\right)\cdots\right)\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

садрже тачно једну заједничку тачку.

Свака од функција f_n је монотоно растућа и има инверзну функцију која је такође монотоно растућа. Из

$$f_n\left(1-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}, \quad f_n(1)=1+\frac{1}{n}>1$$

следи да је

$$f_n^{-1}\left(\left[1-\frac{1}{n},1\right]\right)\subset\left[1-\frac{1}{n},1\right).$$

Ако је $1-\dfrac{1}{n}\leqslant x<y<1$, онда је

$$\begin{aligned} f_n(y)-f_n(x)&=y\left(y+\frac{1}{n}\right)-x\left(x+\frac{1}{n}\right)>y\left(x+\frac{1}{n}\right)-x\left(x+\frac{1}{n}\right)\\ &=(y-x)\left(x+\frac{1}{n}\right)\geqslant y-x. \end{aligned}$$

Одавде следи да је рестрикција функције f_n^{-1} на интервал $\left[1-\dfrac{1}{n},1\right]$ контракција. [Функција $f\colon[a,b]\to[a,b]$ је контракција ако постоји константа q, $0<q<1$, таква да је за свако $x,y\in[a,b]$ испуњено $|f(x)-f(y)|\leqslant q|x-y|$.]

Из ових својстава функција f_n следи да низ (a_n) монотоно расте, низ b_n монотоно опада и при том је $b_n-a_n<\dfrac{1}{n}$. Следи да интервали (a_n,b_n), $n=1,\,2,\,\ldots$, имају тачно једну заједничку тачку.

ИМО '86.1.

Прво решење. Претпоставимо, супротно, да је за свака два броја $a,\ b\in\{2,5,13,d\}$, $a\neq b$, број $ab-1$ потпун квадрат. Специјално, нека је

$$2d-1=x^2, \quad 5d-1=y^2, \quad 13d-1=z^2$$

за неке целе бројеве x, y, z. Тада x мора бити непаран и $2d=x^2+1\equiv 2 \pmod 8$, па је и d непаран. Значи, y и z су парни: $y=2y_1$, $z=2z_1$, y_1, $z_1\in\mathbf{Z}$.

Сада из $z^2-y^2=8d$ следи $(z_1-y_1)(z_1+y_1)=2d$, па су бројеви y_1 и z_1 исте парности, што је контрадикција, јер је d непаран.

Друго решење. Квадрати целих бројева приликом дељења са 16 дају остатке 0, 1, 4 и 9. Број $2d-1$ приликом дељења са 16 не може дати остатак 0 или 4. Остатак 1 даје уколико је $d\equiv 1 \pmod{16}$ или $d\equiv 9 \pmod{16}$. Остатак 9 даје уколико је $d\equiv 5 \pmod{16}$ или $d\equiv 13 \pmod{16}$. Ако је $d\equiv 1 \pmod{16}$, онда је $13d-1\equiv 12 \pmod{16}$. Ако је $d\equiv 9 \pmod{16}$, онда је $5d-1\equiv 12 \pmod{16}$. Ако је $d\equiv 5 \pmod{16}$, онда је $5d-1\equiv 8 \pmod{16}$. Ако је $d\equiv 13 \pmod{16}$, онда је $13d-1\equiv 8 \pmod{16}$. Из претходних разматрања следи да један од бројева $2d-1$, $5d-1$ и $13d-1$ није квадрат целог броја.

ИМО '86.2.

Прво решење. Нека је дата тачка P_0 координатни почетак комплексне равни и нека тачкама A_i ($i = 1, 2, \ldots$), односно P_j ($j = 0, 1, 2, \ldots$) одговарају комплексни бројеви a_i, односно p_j. По условима задатка важи

$$p_{k+1} = a_{k+1} + (p_k - a_{k+1})\varepsilon, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где је $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{3} - i\sin\dfrac{2\pi}{3}$. Примењујући ту релацију више пута и узимајући у обзир да је $p_0 = 0$, добијамо

$$p_{k+1} = (1-\varepsilon)(a_{k+1} + a_k\varepsilon + a_{k-1}\varepsilon^2 + \cdots + a_1\varepsilon^k).$$

По претпоставци је

$$0 = p_0 = p_{1986} = (1-\varepsilon)(a_{1986} + a_{1985}\varepsilon + a_{1984}\varepsilon^2 + \cdots + a_1\varepsilon^{1985}).$$

Узимајући у обзир да је $\varepsilon^3 = 1$ и

$$a_1 = a_4 = a_7 = \cdots, \quad a_2 = a_5 = a_8 = \cdots, \quad a_3 = a_6 = a_9 = \cdots,$$

претходна једнакост даје $a_3 + a_2\varepsilon + a_1\varepsilon^2 = 0$, што се лако трансформише у

$$a_3 - a_1 = (a_2 - a_1)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

То и значи да је троугао $A_1A_2A_3$ једнакостраничан.

Друго решење. Означимо са $\mathcal{R}_k$ ротацију равни око тачке A_k за 120° у смеру кретања казаљке на сату. Тачку P_{1986} можемо изразити помоћу ових ротација: $P_{1986} = \mathcal{R}_{1986}\mathcal{R}_{1985}\cdots\mathcal{R}_1(P_0)$. Композиција ротација којима је збир углова целобројни умножак од 360° је транслација. Према томе, $\mathcal{R}_3\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1$ је транслација. Самим тим транслација је и следеће пресликавање: $\mathcal{R}_{1986}\mathcal{R}_{1985}\cdots\mathcal{R}_1 = (\mathcal{R}_3\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1)^{662}$. Транслација која има фиксну тачку је коинциденција. Наш задатак се своди на то да испитамо када је $\mathcal{R}_3\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1$ коинциденција. Доказаћемо да је $\mathcal{R}_3\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1$ коинциденција ако и само ако је троугао $A_1A_2A_3$ једнакостраничан. Претпоставимо да је троугао $A_1A_2A_3$ једнакостраничан. Нека је A тачка која је симетрична тачки A_1 у односу на средиште дужи A_2A_3. Како је $\mathcal{R}_1(A_1) = A_1$, $\mathcal{R}_2(A_1) = A$ и $\mathcal{R}_3(A) = A_1$, $\mathcal{R}_3\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1$ има фиксну тачку (то је A_1), па је због тога коинциденција. Претпоставимо сада да је $\mathcal{R}_3\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1$ коинциденција. Нека је $\mathcal{R}_2(A_1) = A$. Тада је $\mathcal{R}_3(A) = A_1$. Како је $A_1A_2 = A_2A = AA_3 = A_3A_1$ и $\measuredangle A_1A_2A = \measuredangle AA_3A_1 = 120^\circ$, троугао $A_1A_2A_3$ је једнакостраничан.

ИМО '86.3.

Прво решење. Означимо бројеве, придружене у неком тренутку теменима петоугла, у цикличном поретку, са x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и приметимо да је $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = S > 0$, јер је тај збир очито стална величина. Ако је у том тренутку бар један од тих бројева негативан (нека је, на пример, то број x_3), тада је могуће извршити операцију описану у задатку и петорку $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ заменити петорком $Y = (x_1, x_2 + x_3, -x_3, x_4 + x_3, x_5)$. Означимо $x_0 = x_5$, $x_6 = x_1$ и

$$f(X) = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum_{i=1}^{5} (x_{i+1} - x_{i-1})^2$$

и одредимо како се мења та величина приликом вршења дате операције. Налазимо

$$\begin{aligned} f(Y) - f(X) = (x_2 + x_3 - x_5)^2 + (-x_3 - x_1)^2 + (x_4 - x_2)^2 \\ + (x_5 + x_3)^2 + (x_1 - x_4 - x_3)^2 - (x_2 - x_5)^2 \\ - (x_3 - x_1)^2 - (x_4 - x_2)^2 - (x_5 - x_3)^2 - (x_1 - x_4)^2 \\ = 2x_3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 2x_3 S < 0. \end{aligned}$$

На тај начин је $f(Y) < f(X)$, тј. вредности функције f чине строго опадајући низ ненегативних бројева. Како је сваки такав низ обавезно коначан, то закључујемо да се процес описан у задатку завршава у коначно много корака.

Друго решење (Joseph Keane). У првом решењу уместо функције f разматрати функцију g дефинисану са

$$g(X) = \sum_{i=1}^{5} |x_i| + |x_i + x_{i+1}| + |x_i + x_{i+1} + x_{i+2}| + |x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3}|.$$

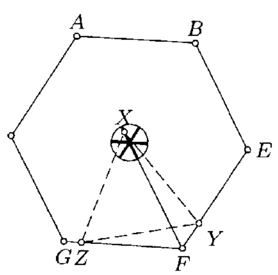
Показује се да је $g(Y) - g(X) = |S + x_3| - |S - x_3| > 0$.

ИМО '86.4.

Нека су E, F и G нека три узастопна темена датог n-тоугла и нека је у одређеном тренутку $Y \in EF$, $Z \in FG$. Како се углови YFZ и ZXY допуњују до $180°$, четвороугао $XYFZ$ је тетивни, па је $\measuredangle YFX = \measuredangle YZX$ $(= 360°/n)$. То значи да теме X припада правој FO, тачније оној полуправој те праве са почетком у O којој не припада F. Јасно је, при том, да је X на највећем могућем растојању од O у тренутку када су Y и Z подједнако удаљени од F. Лако је израчунати да је тада

$$OX = x_n = a\,\frac{1 - \cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{2\pi}{n}},$$

где је a дужина странице n-тоугла. Дакле, тражена фигура коју описује тачка X је звезда која се састоји од n дужи са заједничким крајем O, једнаких дужина x_n, које су распоређене као на слици 5.



Сл. 5

ИМО ’86.5.

Нека је $t > 2$. Стављајући у (i) $x = t - 2$ и $y = 2$ и узимајући у обзир (ii) добијамо $0 = f\big((t-2)f(2)\big) = f(t)$. Због (iii), то значи да важи

$$f(t) = 0 \iff t \geqslant 2.$$

Нека је сада $0 \leqslant y < 2$ и $x \geqslant 0$. Тада је у релацији (i) лева страна једнака нули ако и само ако је $xf(y) \geqslant 2$, а десна страна је једнака нули ако и само ако је $x + y \geqslant 2$. Одатле закључујемо да је за $0 \leqslant y < 2$ и $x \geqslant 0$ испуњено

$$xf(y) \geqslant 2 \iff x + y \geqslant 2$$

или, еквивалентно,

$$x \geqslant \frac{2}{f(y)} \iff x \geqslant 2 - y.$$

Зато је $\dfrac{2}{f(y)} = 2 - y$. Следи да је једина могућа функција f која задовољава услове задатка

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{2-y}, & \text{ако је } 0 \leqslant y < 2, \\ 0, & \text{ако је } y \geqslant 2. \end{cases}$$

Преостаје да се провери да та функција заиста задовољава услов (i) (услови (ii) и (iii) су очигледно испуњени). То је лако учинити, разматрајући случајеве: 1° $x + y < 2$, $xf(y) < 2$; 2° $x + y \geqslant 2$, $xf(y) \geqslant 2$; 3° $x + y \geqslant 2$, $xf(y) < 2$; 4° $x + y < 2$, $xf(y) \geqslant 2$. Детаље ове провере препуштамо читаоцу.

ИМО ’86.6.

Доказаћемо да је одговор на постављено питање потврдан. Уочимо произвољну праву L паралелну некој од оса која сече дати скуп тачака A. Нека су P_1, P_2, $\dots$, P_k тачке скупа $A \cap L$, нумерисане у смислу рашћења променљиве координате. Повежимо дужима P_1 са P_2, P_3 са P_4 итд. Урадимо то за сваку праву L. Добијамо неки скуп дужи, при чему свака од тачака скупа A јесте крај највише две од тих дужи. На тај начин, унија тих дужи се распада на полигоналне линије, затворене или не, без заједничких темена. Оне од њих које су затворене састављене су од парног броја дужи, зато што су им било које две суседне странице међусобно нормалне.

Обојимо темена сваке полигоналне линије наизменично црвено и бело; то је могуће због управо доказане парности циклова. Ако је преостала било која тачка у A која не припада ниједној од дужи, обојимо је произвољно. Такво бојење задовољава све услове задатка.

ИМО ’87.1.

Свакој пермутацији скупа S_n придружимо уређену n-торку $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ тако да је $e_i = 1$ ако је i фиксна тачка те пермутације, а $e_i = 0$ ако није $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Тада постоји $p_n(k)$ таквих n-торки које имају тачно k координата једнаких 1, па је зато тражени збир

$$\sum_{k=0}^{n} kp_n(k)$$

уствари број свих појављивања јединице у свим добијеним n-торкама (којих има $n!$). Међутим, за свако i, $1 \leqslant i \leqslant n$, постоји $(n-1)!$ пермутација скупа S_n које имају фиксну тачку i, дакле оних код којих је $e_i = 1$. Зато постоји тачно $n \cdot (n-1)! = n!$ јединица у свим n-торкама, што доказује тврђење задатка.

Напомена. Применом формуле укључивања-искључивања може се доказати (в. нпр. [7]) да је

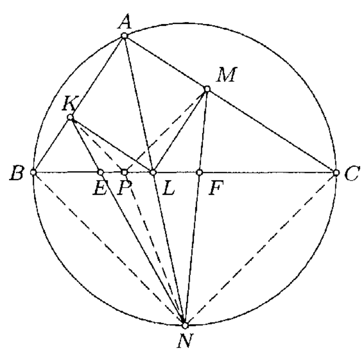
$$p_n(k) = \frac{n!}{k!}\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^{n-k}\frac{1}{(n-k)!}\right).$$

Зато из добијеног резултата следи да је

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!}\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^{n-k}\frac{1}{(n-k)!}\right) = n!,$$

што се може и директно проверити.

ИМО '87.2.



Сл. 6

Означимо са E и F пресеке странице BC са дужима KN и MN, а са P други пресек те странице са кругом описаним око (тетивног) четвороугла $AKLM$. (Претпоставимо, што није ограничавање општости, да је, као на слици 6, тачка P између B и L.) Тада је $\measuredangle BCN = \measuredangle BAN$ и $\measuredangle MAL = \measuredangle MPL$ (периферијски углови). Како је још $\measuredangle BCN = \measuredangle MAL$ (јер је AL симетрала угла BAC), то је $\measuredangle MPL = \measuredangle BCN$, па је $PM \parallel NC$. На сличан начин се доказује и $KP \parallel BN$. Дакле, четвороуглови $BKPN$ и $NPMC$ су трапези, па је $P_{BKE} = P_{NPE}$ и $P_{PNF} = P_{CFM}$, одакле следи $P_{ABC} = P_{AKNM}$.

ИМО '87.3.

Како је $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$, на основу Коши-Шварцове неједнакости важи

$$|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \cdot \sqrt{n} = \sqrt{n}.$$

Због тога сви збирови облика $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ за које је $a_i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, морају припадати интервалу $[0, (k-1)\sqrt{n}]$ дужине

$(k-1)\sqrt{n}$. Како тих збирова има k^n, то бар два од њих морају имати разлику не већу од $\dfrac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$. Зато постоје $a_i \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(k-1)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, такви да је

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n| \leqslant \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}.$$

ИМО '87.4.

Претпоставимо да таква функција постоји. Тада је за све $n \in \mathbf{N}_0$

$$f(n+1987) = f\big(f(f(n))\big) = f(n) + 1987.$$

Одатле се индуктивно добија да је

$$f(n+1987k) = f(n) + 1987k \qquad \text{за све } n,\, k \in \mathbf{N}_0.$$

Нека је a произвољан елемент скупа $\{0, 1, 2, \dots, 1986\}$ и нека је

$$f(a) = 1987q + r, \qquad q, r \in \mathbf{N}_0, \quad r \leqslant 1986.$$

Тада је $f(f(a)) = a + 1987$ и $f(f(a)) = f(1987q + r) = f(r) + 1987q$, па је

$$a + 1987 = f(r) + 1987q.$$

Због $a \leqslant 1986$, јасно је да мора бити $q \in \{0, 1\}$. У случају $q = 0$ добијамо $f(a) = r$ и $f(r) = a + 1987$, па не може бити $a = r$. Слично, за $q = 1$ имамо $f(a) = 1987 + r$ и $f(r) = a$, па опет не може бити $a = r$. На тај начин, скуп $\{0, 1, 2, \dots, 1986\}$ са непарним бројем елемената распада се на парове (a, r), такве да је $a \neq r$ и

$$f(a) = r \quad \text{и} \quad f(r) = a + 1987 \qquad \text{или} \qquad f(r) = a \quad \text{и} \quad f(a) = r + 1987,$$

што је контрадикција.

Дакле, функција са описаним својствима не постоји.

ИМО '87.5.

Показаћемо да све услове задатка задовољавају тачке

$$A_i(i, i^2), \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Да је површина сваког од троуглова $A_iA_jA_k$, $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$, рационалан број следи из

$$P_{A_iA_jA_k} = \frac{1}{2}[(j-i)(k^2-i^2) - (j^2-i^2)(k-i)].$$

Докажимо да је свако од растојања A_iA_j, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, ирационалан број. Када би неко од тих растојања било рационално, тада би због

$$A_iA_j = \sqrt{(j-i)^2 + (j^2-i^2)^2} = (j-i)\sqrt{1 + (j+i)^2}$$

постојао рационалан број p/q, $(p, q) = 1$, за који је

$$1 + (j+i)^2 = \frac{p^2}{q^2}.$$

Но, тада би p^2/q^2 био природан број, тј. важило би $q^2 \mid p^2$, па и $q \mid p$. Но, због $(p, q) = 1$, то би значило да је $q = 1$, па би $1 + (j+i)^2$ био квадрат природног броја, што је наравно немогуће.

ИМО '87.6.

Нека је $f(x) = x^2 + x + n$. Означимо са k најмањи природан број за који је $f(k)$ сложен број. Претпоставимо да је $k \leqslant n-2$. Доказаћемо да је $k \leqslant \sqrt{n/3}$.

Нека је p најмањи прост делилац броја $f(k)$. Имамо да је $p^2 \leqslant f(k)$. Докажимо да је $k < p$. Претпоставимо супротно: нека је $k \geqslant p$. Нека је $k \equiv r \pmod p$, $0 \leqslant r < p$. Тада је $f(r) \equiv f(k) \equiv 0 \pmod p$ и $p \leqslant k \leqslant n-2 < f(r)$. Следи да је $f(r)$ сложен број, а то је противно претпоставци о минималности броја k. Дакле $k < p$. Како је $f(p-k-1) \equiv 0 \pmod p$ и $f(p-k-1) = p + 2p(p-k-1) + (f(k) - p^2) > p$, то је $f(p-k-1)$ сложен број ($p = k+1$ и $f(k) = p^2$ повлачи $n = f(k) - k^2 - k = (k+1)^2 - k^2 - k = k+1$, што је противно претпоставци да је $k \leqslant n-2$). Због претпоставке о минималности броја k имамо да је $k \leqslant p-k-1$, односно да је $2k+1 \leqslant p$. Из $4k^2 + 4k + 1 = p^2 \leqslant f(k) = k^2 + k + n$ следи да је $3k^2 < n$. Последња неједнакост је очигледно еквивалентна са неједнакошћу коју треба доказати.

ИМО '88.1.

(а) Нека је: O центар датих кругова; $\varphi = \measuredangle OPA$; GD пречник већег круга који садржи тачку P; M, N, U, V редом средишта дужи PA, BC, AB, AC, сл. 7. Тада је

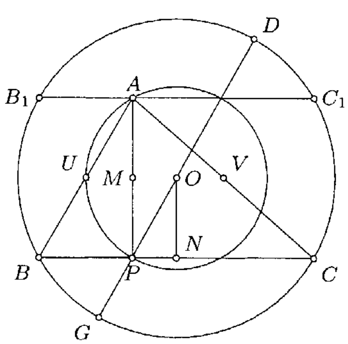
$$\begin{aligned}(1)\qquad \Sigma &= BC^2 + CA^2 + AB^2\\ &= (BP+PC)^2 + PC^2 + PA^2 + PB^2 + PA^2\\ &= 2(PA^2 + PB^2 + PC^2 + PB\cdot PC),\end{aligned}$$

$$(2)\qquad PA = 2r\cos\varphi,$$

$$(3)\qquad PB = BN - PN = \sqrt{R^2 - r^2\cos^2\varphi} - r\sin\varphi,$$

$$(4)\qquad PC = PN + NC = BN + PN = \sqrt{R^2 - r^2\cos^2\varphi} + r\sin\varphi,$$

$$(5)\qquad PB\cdot PC = GP\cdot PD = R^2 - r^2.$$



Сл. 7

Замењујући у једнакости (1) вредности из једнакости (2)–(5), добијамо да је $\Sigma = 6R^2 + 2r^2$. Према томе, разматрани збир је константан, тј. не зависи од угла φ.

(б) Нека права која је паралелна са BC и садржи тачку A сече већи круг у тачкама B_1 и C_1. Тада су четвороуглови $BPAB_1$ и $CPAC_1$ правоугаоници. Средиште U дијагонале BA је и средиште дијагонале PB_1 правоугаоника $BPAB_1$. Зато је $\overrightarrow{PU} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PB_1}$ и слично $\overrightarrow{PV} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PC_1}$.

На основу тога закључујемо да је тражени скуп тачака хомотетичан са већим од датих кругова у односу на центар хомотетије P и са коефицијентом хомотетије $1/2$.

ИМО '88.2.

Доказаћемо да је такво означавање могуће ако и само ако је n паран број. Доказ дајемо у неколико корака:

1° Докажимо прво да из услова задатка следи да је сваки елемент скупа B садржан у тачно два од скупова A_i. Прво приметимо да за свако $j \in \{1, 2, \ldots, 2n+1\}$ важи једнакост:

$$A_j = \bigcup_{i \neq j} (A_i \cap A_j). \tag{1}$$

Заиста, тривијално следи да скуп A_j садржи унију на десној страни једнакости (1), а чињеница да је A_j садржан у тој унији следи из услова (в). Претпоставимо да је неки елемент $a \in B$ садржан у три од скупова A_i, рецимо A_1, A_2, A_3, тј. $a \in A_1 \cap A_2 \cap A_3$. Тада из услова (б) следи да сваки од скупова $(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)$, $A_1 \cap A_4$, $A_1 \cap A_5$, $\ldots$, $A_1 \cap A_{2n+1}$ садржи тачно један елемент. Сада из једнакости (1) добијамо да скуп A_1 садржи највише $2n-1$ елемената, што је контрадикција са условом (а).

2° Претпоставимо да елементи скупа B могу бити означени нулама и јединицама тако да важе услови задатка. Докажимо да је онда n паран број. Дефинишемо матрицу M типа $2n \times 2n$ чији су елементи нуле и јединице на следећи начин. У пресеку i-те врсте и j-те колоне пишемо број којим је означен једини елемент скупа $A_i \cap A_j$, ако је $i \neq j$ и $i, j \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$. На главној дијагонали редом у врстама записујемо бројеве којима су означени јединствени елементи скупова $A_1 \cap A_{2n+1}$, $A_2 \cap A_{2n+1}$, $A_{2n} \cap A_{2n+1}$. Из претпоставки задатка и тврдјења доказаног под тачком 1° следи да свака врста матрице M садржи тачно n нула. Дакле, матрица M садржи тачно $2n^2$ нула. Приметимо да је укупан број нула у матрици M паран и да је та матрица симетрична (у односу на главну дијагоналу). Према томе, ван главне дијагонале има паран број нула, па следи да и на главној дијагонали има паран број нула. Како су бројеви на главној дијагонали придружени елементима скупа A_{2n+1} и медју њима има n нула, то следи да је n паран број.

3° Претпоставимо да је $n = 2k$, где је k природан број. Докажимо да је могуће елементе скупа B означити нулама и јединицама, тако да је тачно n елемената сваког од скупова A_i означено нулом. Нека је Q матрица типа 4×4 дата са

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

и M матрица типа $2n \times 2n$ дата са

$$M = \begin{bmatrix} Q & Q & \dots & Q \\ Q & Q & \dots & Q \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q & Q & \dots & Q \end{bmatrix}.$$

(У свакој врсти и свакој колони Q се појављује k пута.) Ако означавање елемената скупа B нулама и јединицама дефинишемо помоћу матрице M као у тачки 2°, онда за то означавање важи наведени услов.

ИМО '88.3.

Из услова задатка лако израчунавамо вредности функције f за првих неколико природних бројева. Добијамо:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$f(n)$	1	1	3	1	5	3	7	1	9	5	13	3	11	7	15	1	17

Примећујемо да за неколико првих вредности k важе једнакости $f(2^k) = 1$, $f(2^k - 1) = 2^k - 1$, $f(2^k + 1) = 2^k + 1$ и општије, ако је:

$$n = \overline{c_0 c_1 \dots c_k} = \sum_{i=0}^{k} c_i 2^i,$$

где $c_0, c_1, \dots, c_k \in \{0, 1\}$, бинарни запис броја n, онда је

$$f(n) = \overline{c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0} = \sum_{i=0}^{k} c_i 2^{k-i}.$$

Другим речима, ако број n представимо у бинарном запису, онда број $f(n)$ добијамо тако што бинарне цифре броја n запишемо у обрнутом редоследу. Ово тврдјење доказујемо индукцијом. С обзиром да је $f(2n) = n$, то је довољно размотрити непарне вредности n.

Ако је $n = 4m + 1 = \sum_{i=0}^{k} c_i 2^i$, где је $c_0 = 1$ и $c_1 = 0$, онда је $m = \sum_{i=2}^{k} c_i 2^{i-2}$ и $2m + 1 = 1 + \sum_{i=1}^{k} c_i 2^{i-1}$. Користећи индуктивну претпоставку добијамо

$$f(2m+1) = 2^{k-1} + \sum_{i=2}^{k} c_i 2^{k-1-(i-1)} = 2^{k-1} + \sum_{i=2}^{k} c_i 2^{k-i},$$

$$f(m) = \sum_{i=2}^{k} c_i 2^{k-i},$$

$$\begin{aligned} f(4m+1) &= 2f(2m+1) - f(m) = 2^k + 2\sum_{i=2}^{k} c_i 2^{k-i} - \sum_{i=2}^{k} c_i 2^{k-i} \\ &= 2^k + \sum_{i=2}^{k} c_i 2^{k-i} = \sum_{i=0}^{k} c_i 2^{k-i}. \end{aligned}$$

Ако је $n = 4m+3 = \sum_{i=0}^{k} c_i 2^i$, где је $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, онда је $m = \sum_{i=2}^{k} c_i 2^{i-2}$ и $2m+1 = 1 + \sum_{i=2}^{k} c_i 2^{i-1}$ и

$$\begin{aligned} f(n) &= f(4m+3) = 3f(2m+1) - 2f(m) \\ &= 2^k + 2^{k-1} + \sum_{i=2}^{k} c_i 2^{k-i} = \sum_{i=0}^{k} c_i 2^{k-i}. \end{aligned}$$

Према томе, задатак се своди на одређивање броја природних бројева из скупа $\{1, 2, \ldots, 1988\}$ који имају палиндромни бинарни запис. Приметимо да природних бројева, који имају палиндромни бинарни запис са $2m$ цифара, има 2^{m-1}. Природних бројева, који имају палиндромни бинарни запис са $2m-1$ цифара, има такође 2^{m-1}. С обзиром да је $2^{10} < 1988 < 2^{11} = 2048$, то следи да је број природних бројева који су мањи од 2048 и који имају палиндромни бинарни запис, једнак $(1+1)+(2+2)+(4+4)+(8+8)+(16+16)+32 = 94$. Међу њима су тачно два броја већа од $1988 = 11111000100_2$ (проверите то), па на основу тога следи да је тражени број једнак 92.

ИМО '88.4.

Скуп решења дате неједначине по x дат је са $S = \bigcup_{i=1}^{70} (i, x_i]$, где је $i < x_i < i+1 < x_{i+1}$, за $i \in \{1, 2, \ldots, 69\}$, а x_1, x_2, …, x_{70} су нуле полинома

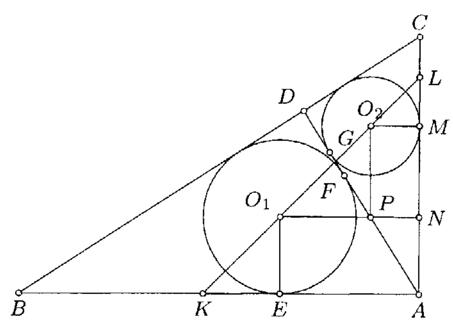
$$5 \prod_{j=1}^{70} (x-j) - 4 \sum_{k=1}^{70} k \prod_{j \neq k} (x-j).$$

Збир нула тог полинома једнак је $\sum_{j=1}^{70} j + \frac{4}{5} \sum_{k=1}^{70} k$, одакле следи да је збир дужина интервала (чија унија представља скуп решења) једнак

$$\sum_{i=1}^{70} (x_i - i) = \frac{4}{5} \sum_{k=1}^{70} = \frac{4}{5} \cdot \frac{70 \cdot 71}{2} = 1988.$$

ИМО '88.5.

Уведимо следеће ознаке: $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $h = AD$; k_1 круг уписан у троугао ABD; k_2 круг уписан у троугао ADC; O_1 и O_2 редом центри кругова k_1 и k_2; r_1 и r_2 редом полупречници кругова k_1 и k_2; E и F тачке додира круга k_1 редом са AB и AD; G и M тачке додира круга k_2 редом са AD и AC; N подножје нормале из O_1 на AC и P подножје нормале из O_2 на O_1N, сл. 8.



Сл. 8

Тада важе следеће једнакости:

$$O_1N = EA = AF = h - r_1,$$

(1) $$O_1P = O_1N - PN = O_1N - O_2M = h - r_1 - r_2,$$

(2) $$O_2P = MN = AM - AN = AG - r = h - r_2 - r_1.$$

Из (1) и (2) следи да је $O_1P = O_2P$, а одатле следи да је $\measuredangle O_1O_2P = 45°$, $\measuredangle O_2LM = 45°$ и $ML = O_2M = r_2$. Према томе, $AL = AM + ML = AG + r_2 = h - r_2 + r_2 = h$. Слично доказујемо да је и $AK = h$. Коначно добијамо:

$$\frac{S}{T} = \frac{ah}{h^2} = \frac{a}{h} = \frac{a^2}{ah} = \frac{a^2}{bc} = \frac{b^2 + c^2}{bc} \geqslant 2.$$

ИМО ’88.6.

Претпоставимо да је $\dfrac{a^2 + b^2}{ab + 1} = k$ природан број. Тада је

(1) $$a^2 - kab + b^2 = k.$$

Претпоставимо да број k није потпун квадрат. Тада је $k \geqslant 2$.

(а) Прво приметимо да ако за произвољан пар (a, b) целих бројева важи (1), онда су бројеви a и b истог знака. Заиста, ниједан од њих није једнак нули (јер k није потпун квадрат), а из услова $ab < 0$ следило би $a^2 - kab + b^2 > k$.

(б) Размотримо сада пар (a, b), где је $a \geqslant b > 0$, који представља минимално решење једначине (1). Тада је $b < a$, јер за $a = b$ добијамо да важи једнакост $(2 - k)a^2 = k$, а то није могуће, јер је $(2 - k)a^2 \leqslant 0$. Размотримо једнакост (1) као квадратну једначину по a. Она има два решења: a и a_1. При томе је $a + a_1 = kb$, одакле следи да је a_1 цео број. Пошто је $aa_1 > 0$, то је $a_1 > 0$. Даље је $aa_1 = b^2 - k$ и

$$a_1 = \frac{b^2 - k}{a} < \frac{a^2 - 1}{a} < a.$$

Према томе, пар бројева (a_1, b) задовољава једначину (1) и важи $0 < a_1 < a$ и $0 < b < a$, што је контрадикција са претпоставком да пар (a, b) представља минимално решење.

ИМО ’89.1.

Решење Радета Тодоровића. Поделимо најпре скуп $\{1, 2, \ldots, 351\}$ на 117 дисјунктних трочланих скупова

$A'_i = \{i, i+175, 353-2i\},\ i = 1, \ldots, 59;$ и $A'_i = \{i, i+58, 470-2i\},\ i = 60, \ldots, 117,$

у сваком од којих је збир елемената 528. Затим, сваки од скупова

$\{3 \cdot 117 + 1, \ldots, 5 \cdot 117\},\ \{5 \cdot 117 + 1, \ldots, 7 \cdot 117\},\ \ldots,\ \{15 \cdot 117 + 1, \ldots, 17 \cdot 117\}$

поделимо на 117 двочланих подскупова. За скуп

$$B_k = \{(2k+1) \cdot 117 + 1, \ldots, (2k+3) \cdot 117\}, \quad k = 1, \ldots, 7,$$

нека су то подскупови

$$B_i^{(k)} = \{(2k+1)\cdot 117 + i, (2k+3)\cdot 117 - (i-1)\}, \quad i = 1,\dots,117.$$

Збир елемената у сваком од тих подскупова је $(4k+4)\cdot 117 + 1$.

Тражену поделу скупа $\{1,2,\dots,17\cdot 117\}$ сада чине скупови

$$A_i = A_i' \cup B_i^{(1)} \cup \dots \cup B_i^{(7)}, \quad i = 1,\dots,117.$$

Сваки од њих има 17 елемената и збир тих елемената у сваком од њих је исти.

Напомена. На сличан начин се доказује тврђење: скуп $\{1,2,\dots,n\}$ може да се разложи на k-елементне подскупове којима су збирови елемената једнаки ако и само ако су k и n исте парности и $k \mid n$.

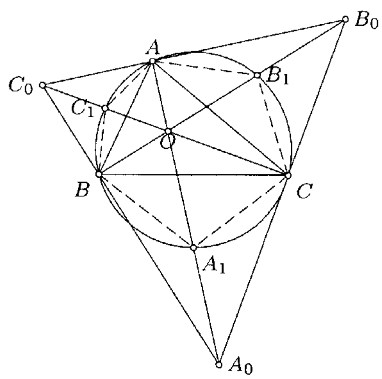
ИМО ’89.2.

(i) Докажимо најпре да је $OA_1 = A_1A_0$, где је O центар уписаног круга троугла ABC.

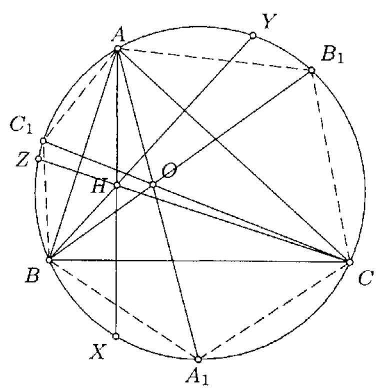
Заиста, како је $\measuredangle A_1OB = \frac{1}{2}\measuredangle A + \frac{1}{2}\measuredangle B$ и $\measuredangle OBA_1 = \frac{1}{2}\measuredangle B + \frac{1}{2}\measuredangle A = \measuredangle AOB$, троугао OA_1B је једнакокраки ($OA_1 = A_1B$). Међутим, $\measuredangle A_1A_0B = 90^\circ - \measuredangle A_1OB$, $\measuredangle A_1BA_0 = 90^\circ - \measuredangle OBA_1$, па је $A_1B = A_1A_0$.

Користећи релацију $OA_1 = A_1A_0$ добијамо да је $P_{OA_1B} = P_{A_0A_1B}$. Понављајући овај поступак за шест троуглова који имају заједничко теме O и сабирајући добијене релације добијамо једнакост

$$P_{A_0B_0C_0} = 2P_{AC_1BA_1CB_1}.$$



Сл. 9



Сл. 10

(ii) Нека је H ортоцентар троугла ABC и нека су X, Y и Z тачке симетричне тачки H у односу на странице троугла (оне припадају описаном кругу). Како је A_1 средиште лука BC, то је $P_{BA_1C} \geqslant P_{BXC}$. Зато је

$$P_{AC_1BA_1CB_1} \geqslant P_{AZBXCY} = 2(P_{BHC} + P_{CHA} + P_{AHB}) = 2P_{ABC},$$

што, на основу доказаног под (i), доказује неједнакост

$$P_{A_0B_0C_0} \geqslant 4P_{ABC}.$$

ИМО '89.3.

Претпоставимо, супротно тврђењу задатка, да је $k \geqslant \dfrac{1}{2} + \sqrt{2n}$. Уочимо произвољну тачку P из S. Како постоји бар k тачака у S на једнаком растојању од P, то постоји бар $\dbinom{k}{2}$ тачака A, $B \in S$, таквих да је $AP = BP$. Како је то тачно за свако $P \in S$, то закључујемо да постоји бар $n\dbinom{k}{2}$ парова тачака A, $B \in S$ за које важи: на симетрали дужи AB лежи (бар једна) тачка из S.

С друге стране, важи

$$\begin{aligned} n\binom{k}{2} &= n\,\frac{k(k-1)}{2} \geqslant \frac{n}{2}\left(\sqrt{2n}+\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{2n}-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{n}{2}\left(2n-\frac{1}{4}\right) = n\left(n-\frac{1}{8}\right) > n(n-1) = 2\binom{n}{2}. \end{aligned}$$

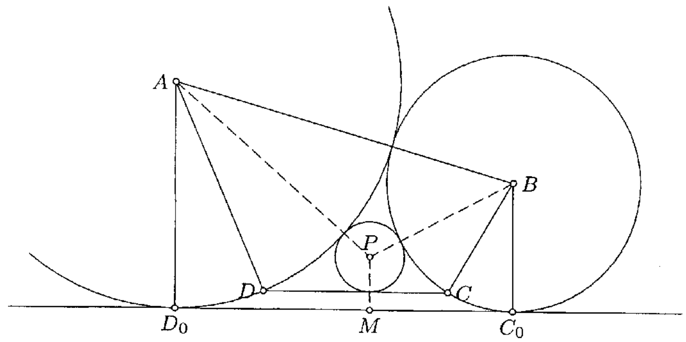
Како је $\dbinom{n}{2}$ број свих могућих парова A, B (са A, $B \in S$), мора постојати пар A, B са P_1, P_2, … , $P_m \in S$, $m > 2$, тако да је $AP_i = BP_i$ за $i = 1, 2, \dots, m$. Те тачке P_1, P_2, … , P_m су колинеарне, супротно претпоставци (i).

ИМО '89.4.

Претпоставимо да је потребно конструисати четвороугао $ABCD$ са својствима описаним у задатку за разне вредности h. Нека је $AD = R$ и $BC = r$. Конструишимо најпре $\triangle ABP$ са страницама чије су дужине $AB = R + r$, $AP = R + h$ и $BP = r + h$, а затим кругове $k_1(A, R)$, $k_2(B, r)$ и $k_3(P, h)$ (сваки од ових кругова очигледно додирује споља остала два). Тачке C и D сада морају припадати круговима k_1 и k_2, тако да је CD тангента круга k_3. Одатле је јасно да је највећа вредност за h за коју је конструкција могућа она када је CD уједно тангента кругова k_1 и k_2, што је еквивалентно са условом да су углови код C и D прави (на слици су у том случају те тачке означене са C_0 и D_0). Доказаћемо да у том случају важи

$$(*) \qquad \frac{1}{\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{AD_0}} + \frac{1}{\sqrt{BC_0}}.$$

Јасно је да одатле следи неједнакост дата у задатку.



Сл. 11

Да бисмо доказали (∗), означимо са M подножје нормале из P на CD. Тада је

$$\begin{aligned} CD &= \sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}, \\ CD &= CM + MD = \sqrt{(r+h)^2-(r-h)^2} + \sqrt{(R+h)^2-(R-h)^2} \\ &= 2\sqrt{rh} + 2\sqrt{Rh}, \end{aligned}$$

па је

$$\sqrt{Rr} = \sqrt{rh} + \sqrt{Rh},$$

што је еквивалентно са (∗).

ИМО '89.5.

Прво решење. За дато $n \in \mathbf{N}$ изаберимо $k = (n+1)!^2 + 1$. Докажимо да ниједан од бројева $k+1$, $k+2$, …, $k+n$ није степен простог броја.

За свако j за које је $1 \leqslant j \leqslant n$ број $1+j$ је прави делилац броја $k+j$. Претпоставимо да је за неко такво j испуњено $k+j = p^\alpha$, где је p прост, а α природан број. Онда је за неко β, $1 \leqslant \beta < \alpha$, испуњено $1+j = p^\beta$. Али тада $p^{\beta+1} \mid (n+1)!^2$ и $p^{\beta+1} \mid p^\alpha$, тј. $p^{\beta+1} \mid k-1$ и $p^{\beta+1} \mid k+j$, па $p^{\beta+1} \mid 1+j$, што је контрадикција.

Друго решење. Нека су p_j, q_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, $2n$ различитих простих бројева. Према кинеској теореми о остацима [2] систем конгруенција

$$x + j \equiv 0 \pmod{p_j q_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

има решење. Број k који је решење овог система конгруенција задовољава дати услов.

ИМО '89.6.

Прво решење. За два различита елемента x, $y \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ казаћемо да су близанци ако је $|x-y| = n$. За пермутацију $(x_1, x_2, \ldots x_{2n})$ скупа $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ казаћемо да је типа P_k ($k = 0$, 1, …, n) ако $|x_i - x_{i+1}| = n$ важи за тачно k вредности индекса i, тј. ако у њој има k парова суседних близанаца. На тај начин у пермутацијама типа P_0 сви близанци су раздвојени, у пермутацијама типа P_1 постоји тачно један пар суседних близанаца итд. Означимо са $f_n(k)$ број пермутација скупа $\{1, 2, \dots, 2n\}$ типа P_k, $k = 0, 1, \dots, n$. У овим терминима тврђење задатка које доказујемо гласи: пермутација типа P_0 има мање него свих осталих пермутација скупа $\{1, 2, \dots, 2n\}$, тј. $f_n(0) < f_n(1) + \cdots + f_n(n)$. Или, с обзиром да је $f_n(0) + f_n(1) + \cdots + f_n(n) = (2n)!$, треба да докажемо

$$p_n = \frac{f_n(0)}{(2n)!} < \frac{1}{2},$$

тј. да је вероватноћа p_n да произвољно изабрана пермутација скупа $\{1, 2, \dots, 2n\}$ нема суседних близанаца, мања од $\frac{1}{2}$.

Нека је $(x_1, x_2, \dots x_{2n})$ пермутација типа P_0. Уклонимо из ње елемент x_{2n} и његовог близанца. Преостаје пермутација од $2n-2$ елемента ($n-1$ парова), и то или типа P_0 (без суседних близанаца), или типа P_1, при чему је једини пар суседних близанаца претходно био раздвојен уклоњеним елементом. Како x_{2n} може узети $2n$ вредности и како, у првом случају, његов близанац може имати било које од $2n-2$ места, док је у другом случају његово место одређеном преосталом P_1-пермутацијом од $2n-2$ елемената, то важи следећа рекурентна формула

$$f_n(0) = 2n[(2n-2)f_{n-1}(0) + f_{n-1}(1)]. \tag{1}$$

Нека је сада $(x_1, x_2, \dots x_{2n})$ пермутација типа P_1 и нека је (x_j, x_{j+1}) њен једини пар суседних близанаца. Издвајајући тај пар добијамо пермутацију од $2n-2$ елемената, и то поново типа P_0 или типа P_1, при чему је једини пар суседних близанаца претходно био раздвојен издвојеним паром. Пар (x_j, x_{j+1}) се бира између n парова близанаца и, због поретка, за то имамо $2n$ могућности. У првом случају тај пар може имати било коју од $2n-1$ позиција, док је у другом случају његова позиција одређена преосталом P_1-пермутацијом од $2n-2$ елемената. Зато је

$$f_n(1) = 2n[(2n-1)f_{n-1}(0) + f_{n-1}(1)]. \tag{2}$$

Одузимајући (1) од (2) добијамо

$$f_n(1) = f_n(0) + 2nf_{n-1}(0).$$

У овој релацији заменимо n са $n-1$ и уврстимо то у (1). Добијамо

$$f_n(0) = 2n[(2n-1)f_{n-1}(0) + (2n-2)f_{n-2}(0)], \tag{3}$$

за $n > 2$. Узимајући у обзир да је, по дефиницији, $p_n = \frac{f_n(0)}{(2n)!}$, из (3) се једноставно изводи следећа веза

$$p_n = p_{n-1} + \frac{p_{n-2}}{(2n-3)(2n-1)}.$$

Одатле је

$$p_n - p_{n-1} < \frac{1}{(2n-3)(2n-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1}\right).$$

Како је $p_1 = 0$, добијамо

$$p_n = \sum_{k=2}^{n}(p_k - p_{k-1}) < \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2k-3} - \frac{1}{2k-1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) < \frac{1}{2},$$

што је и требало доказати.

Напомена. Применом формуле укључивања-искључивања може се показати да је број пермутација у којима има суседних близанаца

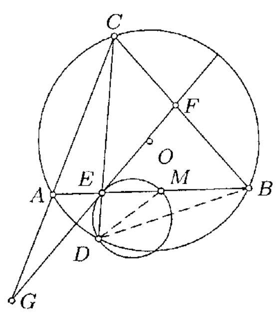
$$f_n(1) + \cdots + f_n(n) =$$
$$2^1\binom{n}{1}(2n-1)! - 2^2\binom{n}{2}(2n-2)! + 2^3\binom{n}{3}(2n-3)! - \cdots + (-1)^{n-1}2^n\binom{n}{n}(2n-n)!,$$

а затим да је наведени израз мањи од $\frac{1}{2}(2n)!$.

Друго решење. За два броја x, $y \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ рећи ћемо да су близанци ако је $|x - y| = n$. Означимо са A скуп пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ у којима се ниједан пар близанаца не налази на суседним местима, а са B скуп преосталих пермутација разматраног скупа. Нека је $f\colon A \to B$ пресликавање дефинисано на следећи начин: ако је $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) \in A$ и ако је x_k, $k > 2$, близанац од x_1, онда је

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_{2n}) = f(x_2, \ldots, x_{k-1}, x_1, x_k, \ldots, x_{2n}).$$

Пресликавање f је 1–1 и није на. Следи $|A| < |B|$.



Сл. 12

ИМО '90.1.

Прво приметимо да је $\measuredangle CEF = \measuredangle DEG = \measuredangle EMD$ и $\measuredangle ECF = \measuredangle MAD$. Из ових једнакости добијамо да је $\triangle CEF \sim \triangle AMD$, сл. 12, а из сличности тих троуглова следи да је:

$$\text{(1)} \qquad \frac{CE}{EF} = \frac{AM}{MD}.$$

Даље, приметимо да је $\measuredangle ECG = \measuredangle EBD$ и $\measuredangle CGE = \measuredangle CEF - \measuredangle GCE = \measuredangle EMD - \measuredangle MBD = \measuredangle BDM$. Из ових једнакости следи да је $\triangle CGE \sim \triangle BDM$, а из сличности троуглова добијамо да је:

$$\frac{GE}{CE} = \frac{MD}{MB}. \tag{2}$$

Користећи једнакости (1) и (2) и услов $\dfrac{AM}{AB} = t$, добијамо:

$$\frac{GE}{EF} = \frac{MD}{MB} \cdot \frac{AM}{MD} = \frac{AM}{MB} = \frac{t \cdot AB}{(1-t)AB} = \frac{t}{1-t}.$$

ИМО '90.2.

Нека је S скуп тетива датог круга чији крајеви припадају скупу E и имају следеће својство: крајеви сваке од тих тетива деле круг на два лука, тако да један од њих садржи тачно n тачака скупа E (различитих од крајева лука). Дужи које припадају скупу S јесу странице једног или више полигона уписаних у дати круг. (Сваки од тих полигона можемо нацртати полазећи од произвољног његовог темена и бирајући за следеће теме увек $(n+1)$-ву тачку скупа E, бројећи од претходног темена у изабраном смеру на кругу.) Одредимо број уписаних полигона. У том циљу приметимо да је $2(n+1) - (2n-1) = 3$, одакле следи да је НЗД $(2n-1, n+1) =$ НЗД $(2n-1, 3)$.

(а) Ако број $2n-1$ није дељив са 3, онда је НЗД $(2n-1, n+1) = 1$ и тада је број уписаних полигона једнак 1. У овом случају минимална вредност броја k са датим својством једнака је $\left[\dfrac{2n-1}{2}\right] + 1 = n$.

(б) Ако је број $2n-1$ дељив са 3, онда је НЗД $(2n-1, n+1) = 3$. У овом случају је број уписаних полигона једнак 3, савки од њих има $\dfrac{2n-1}{3}$ темена, а минимална вредност броја k је

$$3 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2n-1}{3}\right] + 1 = n - 1,$$

јер међу k обојених тачака мора бити више од половине темена једног од тих полигона.

ИМО '90.3.

(а) Докажимо, прво, следећу лему:

Нека су a, b и p природни бројеви. Ако $p \mid 2^a - 1$ и $p \mid 2^b - 1$, онда $p \mid 2^{\text{НЗД}\,(a,b)} - 1$.

Тврдјење леме еквивалентно је тврдјењу: НЗД $(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{\text{НЗД}\,(a,b)} - 1$. При томе, НЗД (a, b) може се одредити помоћу Еуклидовог алгоритма. Ако је $a > b$, онда је НЗД $(a, b) =$ НЗД $(a - b, b)$. Понављајући овај поступак на бројевима

$a-b$ и b добијамо на крају да је НЗД $(a,b) =$ НЗД $(d,0) = d$. Истовремено

$$\begin{aligned}\text{НЗД}\,(2^a-1,2^b-1) &= \text{НЗД}\,(2^a-2^b,2^b-1)\\ &= \text{НЗД}\,(2^b(2^{a-b}-1),2^b-1)\\ &= \text{НЗД}\,(2^{a-b}-1,2^b-1).\end{aligned}$$

Понављајући поступак на бројевима $2^{a-b}-1$ и 2^b-1 добијамо да је

$$\text{НЗД}\,(2^a-1,2^b-1) = \text{НЗД}\,(2^{\text{НЗД}\,(a,b)}-1,0) = 2^{\text{НЗД}\,(a,b)}-1.$$

(б) Ако је n паран број, онда број 2^n+1 није дељив са n^2. Претпоставимо да за непаран број $n \geqslant 3$ важи $n \mid 2^n+1$ и нека је p најмањи прост делилац броја n. Тада је p такодје непаран број и важи

$$p \mid (2^n+1)(2^n-1) = 2^{2n}-1. \tag{1}$$

На основу мале Фермаове теореме добијамо и следећу релацију:

$$p \mid 2^{p-1}-1. \tag{2}$$

С обзиром да је најмањи прост делилац броја n једнак p, то следи да је

$$\text{НЗД}\,(2n,p-1) = 2. \tag{3}$$

На основу доказане леме из релација (1), (2) и (3) закључујемо да $p \mid 2^2-1=3$, тј. $p=3$. Према томе, $n=3m$ за неки природан број m. Ако је $m=1$, онда је $n=3$ и с обзиром да је $\dfrac{2^3+1}{3^2}=1$, то следи да је $n=3$ једно решење задатка.

(в) Докажимо да других решења нема. Означимо са q најмањи прост делилац броја m. Размотримо прво случај $q=3$. Тада је $n=3^k\cdot m_1$, где је $k\geqslant 2$, а бројеви m_1 и 3 су узајамно прости. Ако је број 2^n+1 дељив са n^2, онда је он дељив и са 3^{2k}. Користећи чињеницу да је n непаран број, добијамо:

$$\begin{aligned}2^n+1 = 1+(-1+3)^n &= 1+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}3^i\\ &= 1+(-1)+3n-\binom{n}{2}3^2+\cdots+\binom{n}{i}(-1)^{n-i}3^i+\cdots+3^n.\end{aligned}$$

Из ове једнакости следи да је број $3n=3^{k+1}m_1$ дељив са 3^{k+2}, што је у контрадикцији са условом да су m_1 и 3 узајамно прости бројеви. Размотримо сада случај $q\geqslant 5$. С обзиром да су бројеви $2^{2n}-1$ и $2^{q-1}-1$ дељиви са q, то на основу леме следи да је и број $2^{\text{НЗД}\,(2n,q-1)}-1$ дељив са q. При томе, $d=\text{НЗД}\,(2n,q-1)=\text{НЗД}\,(6m,q-1)\in\{2,6\}$, јер је q најмањи прост делилац броја m. Не може бити $d=2$ јер тада број $2^2-1=3$ није дељив са $q\geqslant 5$. За $d=6$ добијамо $2^d-1=2^6-1=63$, одакле следи да је $q=7$. Из услова да је број 2^3-1 дељив са 7, следи да је број $2^n-1=2^{3m}-1$ дељив са 7, а број $2^n+1=(2^n-1)+2$ није дељив са 7, па према томе ни са n. Тиме је доказ завршен.

ИМО '90.4.

(а) Нека је $f : \mathbf{Q}^+ \to \mathbf{Q}^+$ функција, таква да за све $x, y \in \mathbf{Q}^+$ важи једнакост

$$f(x\,f(y)) = \frac{f(x)}{y}. \tag{1}$$

Докажимо да је функција f инјекција, тј. 1–1 пресликавање. Нека је $f(y_1) = f(y_2)$ за неке бројеве $y_1, y_2 \in \mathbf{Q}^+$. Користећи ту претпоставку и једнакост (1) добијамо

$$\frac{f(y_1)}{y_2} = f(y_1\,f(y_2)) = f(y_1\,f(y_1)) = \frac{f(y_1)}{y_1},$$

одакле следи да је $y_1 = y_2$, тј. f је 1–1 пресликавање. За $y = 1$ из једнакости (1) добијамо да за све $y \in \mathbf{Q}^+$ важи једнакост

$$f(f(y)) = \frac{1}{y}. \tag{2}$$

Из (2) добијамо да за свако $y \in \mathbf{Q}^+$ важи

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = f(f(f(y))) = \frac{1}{f(y)}. \tag{3}$$

Ако у једнакости (1) ставимо $y = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$, добијамо

$$f\left(x\,f\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right) = \frac{f(x)}{f(\frac{1}{t})},$$

одакле, користећи (2) и (3), добијамо да за све бројеве $x, t \in \mathbf{Q}^+$ важи једнакост

$$f(xt) = f(x)\,f(t). \tag{4}$$

(б) Претпоставимо да за функцију $f : \mathbf{Q}^+ \to \mathbf{Q}^+$ важе једнакости (2) и (4) за све позитивне рационалне аргументе. Тада је $\dfrac{f(x)}{y} = f(x)\,f(f(y)) = f(x\,f(y))$, тј. функција f задовољава функционалну једначину (1).

(в) Преостаје да конструишемо функцију $f : \mathbf{Q}^+ \to \mathbf{Q}^+$ за коју важе услови (2) и (4). Нека је $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, p_5, p_6, $\ldots$ низ простих бројева. Дефинишемо $f(1) = 1$ и

$$f(p_k) = \begin{cases} p_{k+1}, & \text{ако је } k \text{ непаран број,} \\ p_{k-1}^{-1}, & \text{ако је } k \text{ паран број.} \end{cases}$$

За $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}$, где су k_1, k_2, $\ldots$, k_m ненегативни цели бројеви, дефинишемо

$$f(n) = f(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}) = (f(p_1))^{k_1} (f(p_2))^{k_2} \ldots (f(p_m))^{k_m}$$

и коначно за сваки позитиван рационалан број $\dfrac{m}{n}$, где су m и n природни бројеви, дефинишемо $f\left(\dfrac{m}{n}\right) = \dfrac{f(m)}{f(n)}$. Читаоцу остављамо да провери да за овако дефинисану функцију $f : \mathbf{Q}^+ \to \mathbf{Q}^+$ важе услови (2) и (4).

ИМО '90.5.

Означимо са S_A скуп свих вредности n_0 за које играч A има победничку стратегију. Докажимо прво следећу лему:

Нека су m и s природни бројеви такви да важи:

(1) $m \leqslant 1990$, $s \leqslant 1990$;

(2) $\{m, m+1, \ldots, 1990\} \subset S_A$;

(3) *За сваки прост делилац p броја s важи неједнакост $s/p^r \geqslant m$, где је r природан број такав да је број s дељив са p^r, али није дељив са p^{r+1}.*

Тада сви природни бројеви n_0 за које важи неједнакост $\sqrt{s} \leqslant n_0 < m (\leqslant s/p^r < s)$ такође припадају скупу S_A.

Заиста, ако је $\sqrt{s} \leqslant n_0 < m$, онда играч A може изабрати број $n_1 = s$. Онда играч B бира број n_2, за који према условима задатка важи $m \leqslant \dfrac{s}{p^r} \leqslant n_2 < s \leqslant 1990$. С обзиром да $n_2 \in \{m, m+1, \ldots, 1990\}$, то је игра добијена за играча A.

Приметимо да је $45^2 = 2025 > 1990$. Одатле следи да $\{45, 46, \ldots, 1990\} \subset S_A$. За бројеве $m = 45$ и $s = 420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ важе услови (1), (2) и (3) претходно доказане леме. С обзиром да је $\sqrt{420} = 21 < 45$, то закључујемо да $\{21, 22, \ldots, 44\} \subset S_A$. Примењујући поново доказану лему на бројеве $m = 21$ и $s = 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$, добијамо да $\{13, 14, \ldots, 20\} \subset S_A$. Примењујући лему на бројеве $m = 13$ и $s = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, добијамо $\{11, 12\} \subset S_A$. Коначно, примењујући лему на бројеве $m = 11$ и $s = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, добијамо да $\{8, 9, 10\} \subset S_A$. Ако је $n_0 > 1990$, онда постоји природан број $r > 7$, такав да је $2^r \cdot 3^2 < n_0 \leqslant 2^{r+1} \cdot 3^2 < n_0^2$. За број n_2 који бира играч B важи $8 \leqslant n_2 < n_0$. Понављајући поступак играч A може постићи да за неко k важи $8 \leqslant n_{2k} \leqslant 1990$, чиме је свео игру на за себе добијену позицију. Према томе, за сваки број $n_0 \geqslant 8$ играч A има победничку стратегију.

Размотримо случај $n_0 \leqslant 5$. С обзиром да производ три различита проста броја има најмању вредност $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 > 5^2$, то играч A мора да изабере број облика $n_1 = p^r q^s$, где је p прост број, а q прост број или јединица, $p^r > q^s$ и $r \geqslant 1$, $s \geqslant 1$. Тада играч B може изабрати број n_2 тако да важи $n_2 = q^s = \dfrac{n_1}{p^r} < \sqrt{n_1} \leqslant n_0$. При томе, или је $n_2 = 1$ или за неколико потеза играч B бира број $n_{2k} = 1$.

Ако је $n_0 \in \{6, 7\}$ играч A бира број $n_1 = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ или број $n_1 = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, а као одговор играч B бира број $n_2 = 6$. После тога играчи A и B наизменично бирају бројеве 30 и 6. У противном, играч који одступи од наведеног правила дозвољава противнику да дође у позицију која је за њега добијена.

ИМО '90.6.

Нека је O центар правилног 1990-угла $A_1 A_2 \ldots A_{1990}$. Означимо: $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA_1}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OA_2}$, ..., $\vec{e}_{1990} = \overrightarrow{OA_{1990}}$. Нека је $(a_1, a_2, \ldots, a_{1990})$ пермутација бројева 1^2, 2^2, ..., 1990^2. Претпоставимо да важи једнакост

$$a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \cdots + a_{1990} \vec{e}_{1990} = \vec{0}. \tag{1}$$

Нека је B_1 произвољна тачка у равни и $B_2, \ldots, B_{1990}$ тачке одредјене са:

$$(2)\qquad \overrightarrow{B_1B_2} = a_1\vec{e}_1, \quad \overrightarrow{B_2B_3} = a_2\vec{e}_2, \quad \ldots, \quad \overrightarrow{B_{1989}B_{1990}} = a_{1989}\vec{e}_{1989}.$$

Из (1) и (2) добијамо $\overrightarrow{B_{1990}B_1} = -(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \cdots + a_{1989}\vec{e}_{1989}) = a_{1990}\vec{e}_{1990}$, на основу чега даље закључујемо да је

$$\overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{B_2B_3} + \cdots + \overrightarrow{B_{1989}B_{1990}} + \overrightarrow{B_{1990}B_1} = \vec{0},$$

тј. $B_1B_2\ldots B_{1990}$ је 1990-угао чије дужине страница су $1^2, 2^2, \ldots, 1990^2$ у некој пермутацији. Према томе, задатак се своди на придруживање бројева $1^2, 2^2, \ldots, 1990^2$ теменима правилног $A_1A_2\ldots A_{1990}$-угла, тако да важи једнакост (1).

Разбијмо скуп темена 1990-угла $A_1A_2\ldots A_{1990}$ на 199 подскупова, при чему темена сваког од тих подскупова представљају темена правилног десетоугла. Нека је $D_1D_2\ldots D_{10}$ један од тих десетоуглова. Осталих 198 десетоуглова добијају се ротацијом десетоугла $D_1D_2\ldots D_{10}$ за углове $\dfrac{2\pi k}{199}$, где је $k \in \{1, 2, \ldots, 198\}$. Скуп бројева $\{1^2, 2^2, \ldots, 1990^2\}$ такодје разбијамо на 199 подскупова: $\{1^2, 2^2, \ldots, 10^2\}$, $\{11^2, 12^2, \ldots, 20^2\}$, $\ldots$, $\{1981^2, 1982^2, \ldots, 1990^2\}$. Бројеве једног подскупа придружујемо теменима једног десетоугла. Теменима десетоугла $D_1D_2\ldots D_{10}$ придружујемо бројеве скупа $\{1^2, 2^2, \ldots, 10^2\}$ на следећи начин:

$$\begin{array}{ccccc} (D_1, 1^2), & (D_2, 8^2), & (D_3, 3^2), & (D_4, 10^2), & (D_5, 5^2), \\ (D_6, 2^2), & (D_7, 7^2), & (D_8, 4^2), & (D_9, 9^2), & (D_{10}, 6^2), \end{array}$$

Означимо

$$\begin{aligned} \vec{v}_0 &= (1^2\cdot\overrightarrow{OD_1} + 2^2\cdot\overrightarrow{OD_6}) + (8^2\cdot\overrightarrow{OD_2} + 7^2\cdot\overrightarrow{OD_7}) \\ &\quad + (3^2\cdot\overrightarrow{OD_3} + 4^2\cdot\overrightarrow{OD_8}) + (10^2\cdot\overrightarrow{OD_4} + 9^2\cdot\overrightarrow{OD_9}) \\ &\quad + (5^2\cdot\overrightarrow{OD_5} + 6^2\cdot\overrightarrow{OD_{10}}). \end{aligned}$$

С обзиром да су D_1 и D_6, D_2 и D_7, D_3 и D_8, D_4 и D_9, D_5 и D_{10} парови дијаметрално супротних тачака круга описаног око 1990-угла $A_1A_2\ldots A_{1990}$, то добијамо:

$$\vec{v}_0 = 3\cdot\overrightarrow{OD_6} + 7\cdot\overrightarrow{OD_8} + 11\cdot\overrightarrow{OD_{10}} + 15\cdot\overrightarrow{OD_2} + 19\cdot\overrightarrow{OD_4}.$$

Ако темена десетоугла $D_1D_2\ldots D_{10}$ означимо бројевима тако што бројеве 1^2, 2^2, $\ldots$, 10^2 заменимо бројевима $(10k+1)^2$, $(10k+2)^2$, $\ldots$, $(10k+10)^2$ и на аналоган начин дефинишемо вектор $\vec{v}_k$, онда користећи једнакост

$$(10k+n+1)^2 - (10k+n)^2 = 20k + 2n + 1 = 20k + (n+1)^2 - n^2,$$

добијамо да је

$$\begin{aligned} \vec{v}_k &= 3\cdot\overrightarrow{OD_6} + 7\cdot\overrightarrow{OD_8} + 11\cdot\overrightarrow{OD_{10}} + 15\cdot\overrightarrow{OD_2} + 19\cdot\overrightarrow{OD_4} \\ &\quad + 20k\cdot(\overrightarrow{OD_2} + \overrightarrow{OD_4} + \overrightarrow{OD_6} + \overrightarrow{OD_8} + \overrightarrow{OD_{10}}). \end{aligned}$$

Приметимо да је збир $\overrightarrow{OD}_2+\overrightarrow{OD}_4+\overrightarrow{OD}_6+\overrightarrow{OD}_8+\overrightarrow{OD}_{10}$ једнак нула вектору (јер тај збир остаје исти ако се сви вектори заротирају око тачке O за угао $2\pi/5$). Према томе, важи једнакост $\overrightarrow{v}_1=\overrightarrow{v}$.

Означимо темена десетоугла $D_1D_2\dots D_{10}$ бројевима 1^2, 2^2, …, 10^2 на описани начин. Затим за свако $k\in\{1,2,\dots,198\}$ означимо темена тог истог десетоугла бројевима $(10k+1)^2$, $(10k+2)^2$, …, $(10k+10)^2$ замењујући број n^2 са $(10k+n)^2$ ($n\in\{1,2,\dots,10\}$) па заротирамо тако означени десетоугао за угао $2k\pi/199$. На тај начин смо сваком од темена полазног 1990-угла придружили један од бројева 1^2, 2^2, …, 1990^2. Ротацијом вектора $\overrightarrow{v}_k$ за угао $2\pi k/199$ добија се вектор $\overrightarrow{v}'_k$. При томе важи једнакост

$$\overrightarrow{v}'_0+\overrightarrow{v}'_1+\cdots+\overrightarrow{v}'_{198}=\overrightarrow{0}, \tag{3}$$

јер збир на левој страни једнакости (3) остаје исти ако се сви вектори заротирају за угао $2\pi/199$ око тачке O. Тај збир је управо једнак збиру на левој страни једнакости (1) за описано придруживање бројева 1^2, 2^2, …, 1990^2 теменима датог 1990-угла, па је тиме доказ завршен.

ИМО '91.1.

(a) Прво приметимо да важе једнакости $\dfrac{BA'}{A'C}=\dfrac{c}{b}$ и $BA'+A'C=a$. Из ових једнакости добијамо да је $BA'=\dfrac{ac}{b+c}$. Даље је

$$\frac{AA'}{AI}=\frac{AI+IA'}{AI}=1+\frac{IA'}{AI}=1+\frac{BA'}{AB}=1+\frac{1}{c}\cdot\frac{ac}{b+c}=\frac{a+b+c}{b+c}.$$

Према томе, важи једнакост

$$\frac{AI}{AA'}=\frac{b+c}{a+b+c}. \tag{1}$$

Аналогно доказујемо да важе и једнакости:

$$\frac{BI}{BB'}=\frac{a+c}{a+b+c},\quad \frac{CI}{CC'}=\frac{a+b}{a+b+c}. \tag{2}$$

Користећи једнакости (1) и (2) и неједнакост између аритметичке и геометријске средине, добијамо да је

$$\begin{aligned}\frac{AI}{AA'}\cdot\frac{BI}{BB'}\cdot\frac{CI}{CC'}&\leqslant\left[\frac{1}{3}\left(\frac{AI}{AA'}+\frac{BI}{BB'}+\frac{CI}{CC'}\right)\right]^3\\&=\frac{1}{27}\left(\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{c+a}{a+b+c}+\frac{a+b}{a+b+c}\right)^3=\frac{8}{27}.\end{aligned}$$

(б) За ненегативне бројеве x, y, u, v важи следеће тврдјење: *ако је* $x+y=u+v$ *и* $|x-y|<|u-v|$, *онда је* $x^3+y^3<u^3+v^3$. Нека за странице a, b и c датог троугла важи $a \geqslant b \geqslant c$. Користећи формулисано тврдјење за четири ненегативна броја, добијамо следеће неједнакости:

$$a^3+b^3<\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^3+\left(\frac{a+b-c}{2}\right)^3, \tag{3}$$

$$\left(\frac{a+b-c}{2}\right)^3+c^3<\left(\frac{a+b+c}{2}\right)+0^3. \tag{4}$$

Сабирајући неједнакости (3) и (4) добијамо да је

$$a^3+b^3+c^3<2\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^3=\frac{1}{4}(a+b+c)^3. \tag{5}$$

Користећи једнакости (1) и (2), неједнакост (5) и идентитет $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(c+a)$, добијамо

$$\begin{aligned}\frac{AI}{AA'}\cdot\frac{BI}{BB'}\cdot\frac{CI}{CC'}&=\frac{3(a+b)(b+c)(c+a)}{3(a+b+c)^3}=\frac{(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3}{3(a+b+c)^3}\\&>\frac{(a+b+c)^3-(a+b+c)^3/4}{3(a+b+c)^3}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

ИМО '91.2.

Нека су a_1, a_2, $\dots$, a_k сви природни бројеви мањи од природног броја $n \in \{7,8,9,\dots\}$ и нека је $a_2-a_1=a_3-a_2=\dots=a_k-a_{k-1}>0$. Означимо са p најмањи прост број који није делилац броја n. Тада је $a_1=1$, $a_2=p$, $a_k=n-1$ и

$$a_2-a_1=p-1, \quad a_3-a_2=p-1, \quad \dots, \quad a_k-a_{k-1}=p-1. \tag{1}$$

(а) Претпоставимо да је $p>3$. Сабирајући једнакости (1) добијамо да је $a_k-a_1=(k-1)(p-1)$, тј. $n-2=(k-1)(p-1)$, одакле следи да

$$p-1 \mid n-2. \tag{2}$$

Нека је q произвољан прост делилац броја $p-1$. Тада из релације (2) следи $q \mid n-2$. Како је p најмањи прост број који није делилац броја n и q прост број мањи од p, то следи да $q \mid n$. Сада из $q \mid n-2$ и $q \mid n$ добијамо $q \mid 2$, тј. $q=2$. Како је q произвољан прост делилац броја $p-1$, то закључујемо да је $p-1=2^l$, тј. $p=2^l+1$ за неки природан број $l \geqslant 2$. С обзиром да је p прост број, то је $l=2^m$ за неки природан број m. Према томе, $p=2^{2^m}+1$. Даље, из претпоставке $p>3$ следи $3 \mid n$. Осим тога,

$$p_3=a_1+2(p-1)=1+2(p-1)=2p-1=2^{2^m+1}+1,$$

одакле следи да $3 \mid p_3$. Према томе, број 3 је заједнички делилац бројева p_3 и n, што је контрадикција. Закључујемо да $p \in \{2,3\}$.

(б) Нека је $p=2$. Тада је n непаран број и важе једнакости $k=n-1$ и $a_1=1$, $a_2=2$, ..., $a_{n-1}=n-1$, тј. сви природни бројеви мањи од n су узајамно прости са n. Према томе, у овом случају n је прост број.

(в) Нека је $n=3$. Тада $2 \mid n$ и $\{a_1,a_2,\dots,a_k\}=\{1,3,\dots,n-1\}$. Према томе, сви непарни бројеви мањи од n су узајамно прости са n. Одатле следи да је број n једнак неком степену броја 2.

ИМО '91.3.

Нека је A_p скуп бројева дељивих са p и који су елементи скупа S. На основу формуле укључивања и искључивања добијамо

$$\begin{aligned}|A_2\cup A_3\cup A_5\cup A_7| &= |A_2|+|A_3|+|A_5|+|A_7|-|A_6|-|A_{10}|-|A_{14}|\\ &\quad -|A_{15}|-|A_{21}|-|A_{35}|+|A_{30}|+|A_{42}|+|A_{70}|+|A_{105}|-|A_{210}|\\ &= 140+93+56+40-46-28-20-18-13-8+9+6+4+2-1\\ &= 216.\end{aligned}$$

На основу Дирихлеовог принципа следи да сваки петочлани подскуп скупа $A_2\cup A_3\cup A_5\cup A_7$ садржи бар два броја из једног од скупова A_2, A_3, A_5, A_7, а та два броја нису узајамно прости. Зато је $n>216$. Докажимо да је $n=217$.

Прво приметимо да скуп $A_2\cup A_3\cup A_5\cup A_7$ садржи просте бројеве 2, 3, 5, 7 и још 212 сложених бројева. Скуп $S\setminus A$ садржи тачно осам сложених бројева. То су бројеви: 11^2, $11\cdot13$, $11\cdot17$, $11\cdot19$, $11\cdot23$, 13^2, $13\cdot17$ и $13\cdot19$. Према томе скуп S садржи тачно $212+8=220$ сложених бројева, јединицу и 59 простих бројева.

Нека је A подскуп скупа S такав да важи $|A|=217$. Претпоставимо да у скупу A не постоји пет бројева који су узајамно прости у паровима. Тада скуп S садржи највише четири броја који нису сложени и најмање 213 сложених бројева. Како скуп S садржи тачно 220 сложених бројева, то скуп $S\setminus A$ садржи највише 7 сложених бројева. Зато скуп $S\setminus A$ садржи елементе из највише 7 од следећих 8 петочланих скупова:

$$\begin{array}{ll}\{2\cdot23,\ 3\cdot19,\ 5\cdot17,\ 7\cdot13,\ 11\cdot11\}, & \{2\cdot29,\ 3\cdot23,\ 5\cdot19,\ 7\cdot17,\ 11\cdot13\},\\ \{2\cdot31,\ 3\cdot29,\ 5\cdot23,\ 7\cdot19,\ 11\cdot17\}, & \{2\cdot37,\ 3\cdot31,\ 5\cdot29,\ 7\cdot23,\ 11\cdot19\},\\ \{2\cdot41,\ 3\cdot37,\ 5\cdot31,\ 7\cdot29,\ 11\cdot23\}, & \{2\cdot43,\ 3\cdot41,\ 5\cdot37,\ 7\cdot31,\ 13\cdot17\},\\ \{2\cdot47,\ 3\cdot43,\ 5\cdot41,\ 7\cdot37,\ 13\cdot19\}, & \{2\cdot2,\ 3\cdot3,\ 5\cdot5,\ 7\cdot7,\ 13\cdot13\}.\end{array}$$

Према томе, бар један од тих 8 скупова је петочлани подскуп скупа A, а његових пет елемената су бројеви узајамно прости у паровима. Зато је $n=217$.

ИМО '91.4.

Нумерисаћемо ивице графа на следећи начин. Нека је V_0 произвољно теме графа. Произвољну ивицу чији је крај V_0 нумеришемо бројем 1. Крећући се по ивици 1 долазимо до другог темена графа. Означимо то теме са V_1. Из темена V_1 полази бар још једна ивица графа. Ту ивицу означимо са 2. Крећући се по ивици два долазимо до следећег темена графа. Из њега полази бар још једна ивица.

Њу означимо са 3. На тај начин настављамо нумерисање ивица графа све док је то могуће. Ако све ивице нису нумерисане, онда из неког темена на путањи која се састоји од нумерисаних ивица полази бар једна ивица која није нумерисана (у противном граф не би био повезан). Произвољну такву ивицу нумеришемо најмањим природним бројем који претходно није употребљен у нумерацији ивица, а затим крећући се по тој ивици до њеног другог краја настављамо нумерисање као и у претходном случају све док је то могуће. Понављајући описани поступак на крају ћемо нумерисати све ивице графа.

Докажимо да за ово нумерисање важи наведени услов. Нека је V произвољно теме графа. Ако је $V = V_0$, онда је једна ивица са крајем V нумерисана бројем 1, па је зато НЗД бројева којима су нумерисане све ивице које полазе из темена V једнак 1. Ако је $V \neq V_0$, онда уочимо ону од ивица са крајем V која је нумерисана најмањим природним бројем. Ако је та ивица нумерисана бројем $k > 1$, онда из начина нумерисања следи да је једна од ивица са крајем V нумерисана бројем $k+1$. С обзиром да је НЗД $(k, k+1) = 1$, то следи да је и НЗД свих бројева којима су нумерисане ивице са крајем V једнак 1.

ИМО '91.5.

Прво решење. Уведимо следеће ознаке: $\measuredangle CAB = \alpha$, $\measuredangle ABC = \beta$, $\measuredangle BCA = \gamma$, $\measuredangle PAB = x$, $\measuredangle PBC = y$, $\measuredangle PCA = z$. За углове троугла α, β и γ важе следеће неједнакости:

$$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \leqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3, \tag{1}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma \geqslant \sqrt{3}. \tag{2}$$

На основу синусне теореме добијамо:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{\sin(\beta - y)}{\sin x}, \quad \frac{PB}{PC} = \frac{\sin(\gamma - z)}{\sin y}, \quad \frac{PC}{PA} = \frac{\sin(\alpha - x)}{\sin z}. \tag{3}$$

Множењем једнакости (3) добијамо

$$\frac{\sin(\alpha - x)\,\sin(\beta - y)\,\sin(\gamma - z)}{\sin x\,\sin y\,\sin z} = 1. \tag{4}$$

Приметимо да је

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(\alpha - x)}{\sin x} &= \sin\alpha(\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}\alpha),\\
\frac{\sin(\beta - y)}{\sin y} &= \sin\beta(\operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg}\beta),\\
\frac{\sin(\gamma - z)}{\sin z} &= \sin\gamma(\operatorname{ctg} z - \operatorname{ctg}\gamma).
\end{aligned}$$

Користећи ове једнакости из (4) добијамо да је

$$(\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}\alpha)(\operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg}\beta)(\operatorname{ctg} z - \operatorname{ctg}\gamma) = \frac{1}{\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma}. \tag{5}$$

Користећи неједнакост између аритметичке и геометријске средине из (5) добијамо

$$(6)\qquad \frac{1}{\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma} \leqslant \left(\frac{\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} y+\operatorname{ctg} z-\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\gamma}{3}\right)^3.$$

Користећи неједнакост (1), из (6) добијамо да је

$$(7)\qquad \operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} y+\operatorname{ctg} z-\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\gamma \geqslant 2\sqrt{3}.$$

Коначно, користећи (2) и (7) добијамо $\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} y+\operatorname{ctg} z \geqslant 3\sqrt{3}$. Према томе, бар један од бројева $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{ctg} y$, $\operatorname{ctg} z$ није мањи од $\sqrt{3}$. Одатле следи да бар један од углова x, y, z није већи од 30°.

Друго решење (Предраг Тановић). Нека су A_1, B_1, C_1 пресечне тачке правих PA, PB, PC са, редом, страницама BC, CA, AB. Претпоставимо да је сваки од углова PAB, PBC, PCA већи од 30° и означимо $PA=x$, $PB=y$, $PC=z$. Тада је: $PC_1>\frac{x}{2}$, $PB_1>\frac{z}{2}$, $PA_1>\frac{y}{2}$. С друге стране,

$$\frac{PC_1}{PC+PC_1}+\frac{PA_1}{PA+PA_1}+\frac{PB_1}{PB+PB_1}=\frac{PC_1}{CC_1}+\frac{PA_1}{AA_1}+\frac{PB_1}{BB_1}=1.$$

Како функција $\dfrac{t}{p+t}$ расте, добијамо

$$1>\frac{\frac{x}{2}}{z+\frac{x}{2}}+\frac{\frac{y}{2}}{x+\frac{y}{2}}+\frac{\frac{z}{2}}{y+\frac{z}{2}}=\frac{x}{2z+x}+\frac{y}{2x+y}+\frac{z}{2y+z}.$$

Доказаћемо да последња неједнакост не може да важи ни за једну тројку позитивних реалних бројева (x,y,z).

Према Јенсеновој неједнакости имамо:

$$\frac{x}{x+y+z}\cdot\frac{1}{2z+x}+\frac{y}{x+y+z}\cdot\frac{1}{2x+y}+\frac{z}{x+y+z}\cdot\frac{1}{2y+z}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{\frac{1}{x+y+z}\big(x(2z+x)+y(2x+y)+z(2y+z)\big)}=\frac{1}{x+y+z}.$$

Значи, $\dfrac{x}{2z+x}+\dfrac{y}{2x+y}+\dfrac{z}{2y+z}\geqslant 1$.

ИМО '91.6.

Докажимо да за произвољне природне бројеве p и q важи неједнакост

$$|q\sqrt{2}-p| > \frac{1}{4q}. \tag{1}$$

Ако за природне бројеве p и q важи неједнакост $p < (4-\sqrt{2})q$, онда је

$$|q\sqrt{2}-p| = \frac{|q\sqrt{2}-p|\cdot(q\sqrt{2}+p)}{q\sqrt{2}+p} = \frac{|2q^2-p^2|}{q\sqrt{2}+p} > \frac{1}{4q}.$$

Ако за природне бројеве p и q важи неједнакост $p \geqslant (4-\sqrt{2})q$, онда је

$$|q\sqrt{2}-p| = p - q\sqrt{2} \geqslant (4-\sqrt{2})q - q\sqrt{2} = (4-2\sqrt{2})q > 1 > \frac{1}{4q}.$$

Нека је $x_n = 4(n\sqrt{2}-[n\sqrt{2}])$, за $n \in \{0,1,2,\dots\}$. Тада за сваки број $n \in \{0,1,2,\dots\}$ важи $x_n \in [0,4]$, тј. низ (x_n) је ограничен. Осим тога за бројеве $i > j \geqslant 0$, на основу неједнакости (1), добијамо

$$|x_i - x_j|\cdot(i-j) = 4\cdot|(i-j)\sqrt{2} - ([i\sqrt{2}]-[j\sqrt{2}])\cdot(i-j) > 4\cdot\frac{1}{4(i-j)}\cdot(i-j) = 1.$$

Сада лако следи да и за произвољне различите ненегативне целе бројеве i и j важи неједнакост $|x_i - x_j|\cdot|i-j| > 1$.

ИМО '92.1.

Нека је

$$F(p,q,r) = \frac{pqr-1}{(p-1)(q-1)(r-1)}, \quad 1 < p < q < r,$$

где су p, q, r цели бројеви. Како је

$$F(p,q,r) =$$
$$= 1 + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{q-1} + \frac{1}{r-1} + \frac{1}{(q-1)(r-1)} + \frac{1}{(r-1)(p-1)} + \frac{1}{(p-1)(q-1)},$$

$F(p,q,r)$ опада по сваком од аргумената. Ако је $F(p,q,r)$ цео број, онда су бројеви p, q и r исте парности. Заиста, ако је неки од бројева p, q и r непаран, онда је број $(p-1)(q-1)(r-1)$ паран, одакле следи да је број $pqr-1$ паран, а то повлачи да су бројеви p, q и r непарни. Ако је $F(p,q,r)$ цео број и ако су бројеви p, q и r парни, онда је $F(p,q,r)$ непаран број.

Ако је $p \geqslant 4$, онда је $1 < F(p,q,r) \leqslant F(4,6,8) = 104/48 < 2$, па $F(p,q,r)$ не може бити цео број. Дакле $p \leqslant 3$.

Нека је $p = 2$. Тада је $1 < F(2,q,r) \leqslant F(2,4,6) = 47/15 < 4$. Следи да је $F(2,q,r) = 3$. Ово је еквивалентно са $(q-3)(r-3) = 5$. Последња једнакост важи ако и само ако је $q = 4$ и $r = 8$.

Нека је $p = 3$. Тада је $1 < F(3,q,r) \leqslant F(3,5,7) = 104/48 < 3$. Следи да је $F(3,q,r) = 2$. Ово је еквивалентно са $(q-4)(r-4) = 11$. Последња једнакост важи ако и само ако је $q = 5$ и $r = 15$.

Закључујемо да задатак има два решења: $(p,q,r) = (2,4,8)$ и $(p,q,r) = (3,5,15)$.

ИМО '92.2.

Решење Владимира Божина. Из $f(f(y)) = y + f(0)^2$ следи да је f бијекција. Претпоставимо да постоји x за које је $f(x) \neq x$. Разматраћемо два случаја.

Нека је $f(x) > x$. Тада постоји такво y да је $f(x) = x + f(y)^2$. Следи да је $f(x) = f(f(x) + y^2)$. Коришћењем инјективности функције f одавде добијамо да је $x = f(x) + y^2$. Ово повлачи $x \geqslant f(x)$, што је контрадикција са полазном претпоставком.

Нека је $f(x) < x$. Тада постоји такво y да је $x = f(x) + y^2$. Следи да је $f(x) = f(f(x) + y^2) = x + f(y)^2$. Ово повлачи $f(x) \geqslant x$, што је контрадикција са полазном претпоставком.

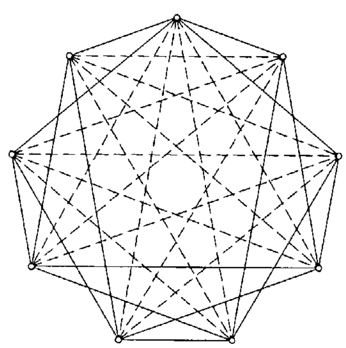
Дакле, мора бити $f(x) = x$ за свако x. Лако се проверава да ова функција задовољава дату функцијску једначину.

ИМО '92.3.

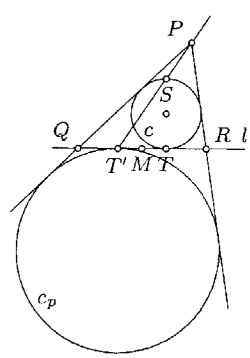
Прво решење. Нека су обојене 33 дужи, тј. нека само 3 дужи нису обојене. Можемо одабрати 3 тачке тако да свака од необојених дужи има бар један од крајева у једној од изабраних тачака. То значи да су сваке 2 од преосталих 6 тачака повезане обојеном дужи. Према познатом резултату, међу тих 6 тачака постоје 3 које су повезане дужима обојеним истом бојом.

Слика 13 показује да се могу обојити 32 дужи тако да странице ниједног троугла не буду обојене истом бојом. (Пуне линије представљају црвене дужи, а испрекидане плаве).

Најмањи број n који задовољава постављени услов је $n = 33$.



Сл. 13



Сл. 14

Друго решење. Користићемо две познате теореме из теорије графова:

Теорема (Ramsey). Нека су k и l природни бројеви. Постоји природан број n који има следеће својство: ако су гране комплетног графа $K(n)$ обојене плавом и црвеном бојом, онда постоји подграф $K(k)$ чије су гране обојене плавом бојом, или постоји подграф $K(l)$ чије су гране обојене црвеном бојом.

Најмањи природан број који има дато својство обележавамо са $r(k, l)$.

Теорема (Turan). Нека прост граф G има n чворова и m грана.

а) Ако G не садржи подграф $K(k)$, онда је

$$m \leqslant \binom{n}{2} - r\binom{q+1}{2} - (k-1-r)\binom{q}{2},$$

где је q количник а r остатак који се добија приликом дељења броја n бројем $k-1$.

б) Ако је

$$m = \binom{n}{2} - r\binom{q+1}{2} - (k-1-r)\binom{q}{2},$$

G не садржи подграф $K(k)$ ако и само ако његов комплемент има $k-1$ компоненту, од којих су њих r комплетни графови реда $q+1$, док су преосталих $k-1-r$ комплетни графови реда q.

Уводимо ознаку

$$t(n,k) = \binom{n}{2} - r\binom{q+1}{2} - (k-1-r)\binom{q}{2}.$$

Помоћу претходне две теореме можемо да изведемо теорему која представља уопштење резултата добијеног решавањем датог задатка:

Теорема. Нека су n, k и l природни бројеви, такви да је $t(n, r(k,l)) < \binom{n}{2}$. Ако је графу $K(n)$ обојено $t(n, r(k,l)) + 1$ грана плавом и црвеном бојом, онда постоји подграф $K(k)$ чије су гране обојене плавом бојом, или постоји подграф $K(l)$ чије су гране обојене црвеном бојом. Постоји такво бојење $t(n, r(k,l))$ грана графа $K(n)$ плавом и црвеном бојом, да ниједном подграфу $K(k)$ нису све гране обојене плавом бојом и да ниједном подграфу $K(l)$ нису све гране обојене црвеном бојом.

Доказ. Нека је $t(n, r(k,l)) + 1$ грана комплетног графа реда n обојено плавом и црвеном бојом. Према Турановој теореми постоји комплетан подграф реда $r(k,l)$ чије су све гране обојене. Према Ремзијевој теореми тај подграф има подграф $K(k)$ чије су гране обојене плавом бојом, или има подграф $K(l)$ чије су све гране обојене црвеном бојом. Тиме је доказано прво тврђење теореме.

Нека су гране графа $K(r(k,l)-1)$ обојене плавом и црвеном бојом, тако да ниједан подграф $K(k)$ нема све гране обојене плавом бојом и да ниједан подграф $K(l)$ нема све гране обојене црвеном бојом. Чворове овог графа ћемо обележавати са v_j, $j = 1, 2, \ldots, r(k,l) - 1$, а e_{ij} ће бити ознака за грану која повезује чворове v_i и v_j, $1 \leqslant i, j \leqslant r(k,l) - 1$, $i \neq j$. Нека су q и r количник и остатак који се добијају дељењем броја n бројем $r(k,l) - 1$. Скуп чворова графа $K(n)$ разложимо на $r(k,l) - 1$ подскупова V_j, тако да r од њих садрже по $q+1$ чвор, а да преосталих $r(k,l) - 1 - r$ садрже по q чворова. Гране које повезују чворове из скупова V_i и V_j, $1 \leqslant i, j \leqslant r(k,l) - 1$, обојимо бојом гране e_{ij} графа $K(r(k,l) - 1)$. Лако је показати да ће на тај начин бити обојено $t(n, r(k,l))$ грана графа $K(n)$, а да при том не постоји подграф $K(k)$ чије су све гране обојене плавом бојом и не постоји подграф $K(l)$ чије су све гране обојене црвеном бојом. Тиме је доказ теореме комплетиран. ■

На основу претходне теореме закључујемо да је број који се тражи у задатку једнак $t(9, r(3,3)) + 1 = t(9,6) + 1 = 33$.

ИМО '92.4.

Означимо са T тачку додира праве l и круга c, са T' тачку симетричну тачки T у односу на M и са S тачку круга c која је дијаметрално супротна тачки T, сл. 14. Нека је PQR троугао описан око круга c, такав да му темена Q и R леже на правој l и то тако да је тачка M средиште дужи QR. Круг c_p споља уписан у троугао PQR, који додирује страницу QR и продужетке преостале две странице, додирује праву l у тачки T'. Тангента круга c у тачки S паралелна је правој l. Зато хомотетија са центром у тачки P која пресликава круг c у круг c_p пресликава тачку S у тачку T'. Следи да су тачке P, S и T' колинеарне. Дакле тачка P припада отвореној полуправој H, која лежи на правој ST', полази из тачке S и не садржи тачку T'. Није тешко доказати да свака тачка полуправе H задовољава услов задатка. Према томе, тражени скуп тачака је полуправа H.

ИМО '92.5.

Прво решење. Нека је

$$\begin{aligned} S(x) &= \{\,(y,z) \mid (x,y,z) \in S\,\},\\ S_y(x) &= \{\,z \mid (x,z) \in S_y\,\},\\ S_z(x) &= \{\,y \mid (x,y) \in S_z\,\}. \end{aligned}$$

Имајући у виду да је $S(x) \subset S_x$ и $S(x) \subset S_y(x) \times S_z(x)$, добијамо

$$\begin{aligned} |S| &= \sum_x |S(x)| \leqslant \sum_x \sqrt{|S_x|\,|S_y(x)|\,|S_z(x)|} = \sqrt{|S_x|}\sum_x \sqrt{|S_y(x)|\,|S_z(x)|}\\ &\leqslant \sqrt{|S_x|}\sqrt{\sum_x |S_y(x)|}\sqrt{\sum_x |S_z(x)|} = \sqrt{|S_x|}\sqrt{|S_y|}\sqrt{|S_z|} = \sqrt{|S_x|\,|S_y|\,|S_z|}. \end{aligned}$$

Друго решење. Нека је

$$\begin{aligned} S(y,z) &= \{\,x \mid (x,y,z) \in S\,\},\\ S_y(z) &= \{\,x \mid (x,z) \in S_y\,\},\\ S_z(y) &= \{\,x \mid (x,y) \in S_z\,\}. \end{aligned}$$

Имајући у виду да је $S(y,z) \subset S_y(z)$, $S(y,z) \subset S_z(y)$, добијамо

$$\begin{aligned} |S| &= \sum_{(y,z)\in S_x} |S(y,z)| \leqslant \sqrt{\sum_{(y,z)\in S_x} 1}\sqrt{\sum_{(y,z)\in S_x} |S(y,z)|^2}\\ &\leqslant \sqrt{|S_x|}\sqrt{\sum_{(y,z)} |S_y(z)|\,|S_z(y)|} = \sqrt{|S_x|}\sqrt{\sum_z |S_y(z)| \sum_y |S_z(y)|}\\ &= \sqrt{|S_x|}\sqrt{|S_y|\,|S_z|} = \sqrt{|S_x|\,|S_y|\,|S_z|}. \end{aligned}$$

ИМО '92.6.

Прво решење. а) Претпоставимо да се број n^2 може представити као збир $k = n^2 - 13$ квадрата природних бројева: $n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2$. Онда се 13 може представити као збир бројева облика $x^2 - 1$, $x \in \mathbf{N}$:

$$13 = n^2 - k = (x_1^2 - 1) + (x_2^2 - 1) + \cdots + (x_k^2 - 1).$$

Лако је видети да је то немогуће, тј. да се 13 не може представити као збир бројева $0, 3, 8, 15, \ldots$. Зато је $S(n) \leqslant n^2 - 14$.

б) Докажимо да је $S(13) = 13^2 - 14 = 155$. Ако је неки број представљен у облику збира k квадрата од којих је један паран, онда можемо да га представимо у облику збира $k + 3$ квадрата тако што сабирак који је квадрат парног броја разбијемо на четири квадрата: $(2x)^2 = x^2 + x^2 + x^2 + x^2$. Полазећи од једнакости

$$13^2 = 8^2 + 8^2 + 4^2 + 4^2 + 3^2,$$

број 13^2 можемо представити као збир k квадрата природних бројева за $k = 5, 8, 11, \ldots, 155$. Слично, из

$$13^2 = 8^2 + 8^2 + 4^2 + 4^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2$$

добијамо репрезентацију броја 13^2 у облику збира $k = 7, 10, 13, \ldots, 154$ квадрата природних бројева, а из

$$13^2 = 8^2 + 8^2 + 4^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$$

добијамо репрезентацију броја 13^2 у облику збира $k = 9, 12, 15, \ldots, 153$ квадрата природних бројева. Преостало је још да покажемо да се 13^2 може представити као збир $k = 2, 3, 4, 6$ квадрата природних бројева:

$$13^2 = 12^2 + 5^2 = 12^2 + 4^2 + 3^2 = 11^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 = 12^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2.$$

в) Нека је $S(n) = n^2 - 14$ за неко $n \geqslant 13$. Доказаћемо да је $S(2n) = (2n)^2 - 14$. Ако n^2 може да се представи као збир k квадрата природних бројева, полазећи од

$$(2n)^2 = (2x_1)^2 + (2x_2)^2 + \cdots + (2x_k)^2,$$

разбијањем парних квадрата добијамо репрезентацију броја n^2 у облику збира $k, k + 3, \ldots, 4k$ квадрата. Значи да се број $(2n)^2$ може представити као збир k квадрата природних бројева, за $1 \leqslant k \leqslant 4n^2 - 62$. Ако је $4n^2 - 63 \leqslant k \leqslant 4n^2 - 14$, онда је $14 \leqslant 4n^2 - k \leqslant 63 \leqslant 4 \cdot 13^2 - 63 \leqslant k$. Лако је доказати да се сваки број $m \geqslant 14$ може представити као збир $k \geqslant m$ бројева облика $x^2 - 1$, $x \in \mathbf{N}$. Ако ову чињеницу применимо на $4n^2 - k$, добијамо

$$4n^2 - k = (x_1^2 - 1) + (x_2^2 - 1) + \cdots + (x_k^2 - 1),$$

а одавде

$$4n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2.$$

Из претходног разматрања следи да је $S(n) = n^2 - 14$ за $n = 2^s \cdot 13$.

Друго решење. Користићемо познату теорему о представљању природног броја у облику збира четири квадрата.

Теорема (Lagrange). Сваки природан број може да се представи као збир четири квадрата целих бројева.

То значи да се сваки природан број може представити као збир не више од четири квадрата природних бројева.

Теорема. Природан број може да се представи као збир пет квадрата природних бројева, изузев у случају када је једнак једном од следећих бројева: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 15, 18, 33.

Доказ. Пођимо од тога да се 169 може представити као збир $k = 1, 2, 3, 4$ квадрата природних бројева,

$$169 = 13^2 = 12^2 + 5^2 = 12^2 + 4^2 + 3^2 = 11^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2.$$

Ако је $m > 169$, онда је $m = (m - 169) + 169$. Према Лагранжовој теореми природан број $m - 169$ може да се представи као збир $k \leqslant 4$ квадрата природних бројева. Преостаје да се 169 представи као збир $5-k$ квадрата природних бројева. Ако је $m \leqslant 169$ непосредно се проверава да се m може представити као збир пет квадрата природних бројева, изузев у дванаест изузетих случајева. ∎

Теорема. Нека је $k \geqslant 6$. Природан број $m \geqslant k$ може да се представи као збир k квадрата природних бројева, изузев ако је m једнак једном од следећих бројева: $k + 1$, $k + 2$, $k + 4$, $k + 5$, $k + 7$, $k + 10$ и $k + 13$.

Доказ. Ако је $m = k + 28$, онда је

$$m = 3^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + \cdots + 1^2.$$

Ако је $m \geqslant k$ и $m \neq k+1, k+2, k+4, k+5, k+7, k+10, k+13, k+28$, онда је $m-k+5 \neq 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 15, 18, 33$. Према претходној теореми, број $m - k + 5$ може да се представи као збир квадрата пет природних бројева. Преостаје да се овој репрезентацији дода $k - 5$ квадрата броја 1. Ако је $m \in \{k+1, k+2, k+4, k+5, k+7, k+10, k+13, k+28\}$, онда је $m - k \in \{1, 2, 4, 5, 7, 10, 13\}$. Лако је видети да се у том случају број $m - k$ не може представити као збир бројева облика $x^2 - 1$, $x \in \mathbf{N}$. Стога се ни број m не може представити као збир k квадрата природних бројева. ∎

Из претходне две теореме следи да се сваки природан број $m \geqslant 19$, $m \neq 33$, може представити као збир k квадрата природних бројева за свако $k = 5, 6, \ldots, m - 14$. Сваки од бројева $169t^2$, $t \in \mathbf{N}$, може да се представи као збир $k = 1, 2, 3, 4$ квадрата природних бројева. Следи да је $S(13t) = 169t^2 - 14$ за свако $t \in \mathbf{N}$.

ИМО '93.1.

Прво решење. Претпоставимо да је $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3 = g(x) \cdot h(x)$, где су $g(x)$ и $h(x)$ полиноми са целим коефицијентима и степена не мањег од 1. Из услова $f(0) = 3$ следи да је $g(0) \cdot h(0) = 3$, одакле добијамо да је један од бројева $|g(0)|$ и $|h(0)|$ једнак 1. Не умањујући општост разматрања можемо претпоставити да је $|g(0)| = 1$. Нека је $g(x) = x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k$. Докажимо да је $k > 1$.

Заиста, ако је $k=1$, тј. $g(x)=x+a_1$, онда због $|g(0)|=1$ добијамо да је $|a_1|=1$. Одатле следи да је $g(1)=0$ или $g(-1)=0$, што је у контрадикцији са чињеницом да је $f(1)\neq 0$ и $f(-1)\neq 0$. Нека су α_1, α_2, $\ldots$, α_k све нуле полинома $g(x)$. Тада је $g(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)$ и

$$g(0)=(-1)^k\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k. \tag{1}$$

Како су α_1, α_2 $\ldots$, α_k такодје и нуле полинома $f(x)$ то следи да је

$$\alpha_j^{n-1}(\alpha_j+5)=-3, \quad \text{за све } j\in\{1,2,\ldots,k\}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) добијамо следећу једнакост

$$|(\alpha_1+5)(\alpha_2+5)\ldots(\alpha_k+5)|=3^k. \tag{3}$$

Даље добијамо: $3=f(-5)=g(-5)h(-5)=(\alpha_1+5)(\alpha_2+5)\ldots(\alpha_k+5)h(-5)$. С обзиром да су f, g, h полиноми са целим коефицијентима, то следи да је

$$|g(-5)|=|(\alpha_1+5)(\alpha_2+5)\ldots(\alpha_k+5)|\in\{1,3\}, \tag{4}$$

Из (3) и (4) следи да је $3^k\in\{1,3\}$, што је у контрадикцији са претходно изведеном последицом $k>1$.

Друго решење. Тврђење овог задатка је последица два релативно позната става.

Став 1. Нека је $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ полином с целобројним коефицијентима за који постоји прост број p који задовољава следећа три услова:

а) $p\mid a_i$, $i=0,1,\ldots,m$, $m<n$,

б) $p^2\nmid a_0$,

в) $p\nmid a_n$.

Тада бар један прост чинилац полинома $f(x)$ над $\mathbf{Z}[x]$ има степен већи од m.

Доказ. Један од простих чинилаца полинома $f(x)$ има слободан члан дељив са p. Нека је то $g(x)=b_kx^k+b_{k-1}x^{k-1}+\cdots+b_0$. Због в) имамо да је $k>0$. Нека је $h(x)=c_lx^l+c_{l-1}x^{l-1}+\cdots+c_0$ количник полинома $f(x)$ и $g(x)$. Из $p\mid b_0$ и $p^2\nmid b_0c_0$ $(=a_0)$ следи да $p\nmid c_0$. Нека је $i\leqslant k$ најмања вредност индекса за коју $p\nmid b_i$. Како је $a_i=b_ic_0+b_{i-1}c_1+\cdots+b_0c_i$ и како су на десној страни ове једнакости сви сабирци сем првог дељиви са p, то $p\nmid a_i$. На основу а) закључујемо да је $i>m$. Како је $k\geqslant i$ то је тим пре $k>m$. ■

Напомена. Ако је $m=n-1$, претходни став се своди на Ејзенштајнов критеријум за иредуцибилност полинома са целобројним коефицијентима.

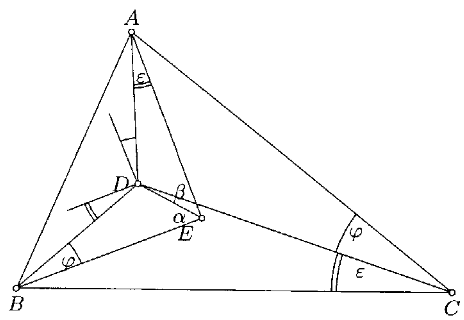
Став 2. Полином $f(x)$ са целобројним коефицијентима нема целобројних корена ако су $f(0)$ и $f(1)$ непарни бројеви.

Доказ. Претпоставимо да је $a\in\mathbf{Z}$ корен полинома $f(x)$. Нека је r остатак који се добија дељењем броја a са 2. Тада је $f(a)\equiv f(r) \pmod 2$. С друге стране имамо да је $f(a)$ паран број $(=0)$ и да је $f(r)$ непаран број $(r\in\{0,1\})$. Контрадикција! ■

На основу става 1, $m = n - 2$ и $p = 3$, закључујемо да је степен једног од простих чинилаца полинома $f(x)$ већи од $n - 2$. На основу става 2 закључујемо да полином $f(x)$ нема целобројних корена, а самим тим нема ни фактора степена 1. Следи да је $f(x)$ прост полином.

ИМО '93.2.

Прво решење. Нека је $\measuredangle DAC = \alpha$ и $\measuredangle DBC = \beta$. Тада је $\alpha + \beta = 90°$. Означимо $\measuredangle ADC = \delta_1$ и $\measuredangle CDB = \delta_2$, сл. 15.



Сл. 15

Нека је $\mathcal{F}_D^{k_1,\delta_1}$ композиција ротације око тачке D за угао δ_1 и хомотетије са центром D и коефицијентом k_1, тако да важи

$$\mathcal{F}_D^{k_1,\delta_1}(D) = D, \quad \mathcal{F}_D^{k_1,\delta_1}(C) = A, \quad \mathcal{F}_D^{k_1,\delta_1}(B) = E.$$

Нека је $\mathcal{F}_D^{k_2,-\delta_2}$ композиција ротације око тачке D за угао $-\delta_2$ и хомотетије са центром D и коефицијентом k_2, тако да важи

$$\mathcal{F}_D^{k_2,-\delta_2}(D) = D, \quad \mathcal{F}_D^{k_2,-\delta_2}(C) = B, \quad \mathcal{F}_D^{k_2,-\delta_2}(A) = E_1.$$

Тада су тачке D, E и E_1 колинеарне и важи

$$\frac{AD}{DE} = \frac{CD}{BD}, \quad \frac{BD}{DE_1} = \frac{CD}{AD}.$$

Из ових једнакости следи да је $\dfrac{AD \cdot BD}{CD} = DE = DE_1$, тј. тачке E и E_1 се поклапају. Осим тога, $\measuredangle AEB = \alpha + \beta = 90°$. Даље, троуглови BED и CAD су слични, одакле следи да је $BE : BD = AC : CD$, тј.

(1) $$AC \cdot BD = CD \cdot BE$$

Из сличности троуглова ADE и CDB добијамо $AD : AE = CD : BC$, тј.

(2) $$AD \cdot BC = CD \cdot AE.$$

Из једнакости (1) и (2) добијамо да је $AC^2 \cdot BD^2 + AD^2 \cdot BC^2 = CD^2 \cdot BE^2 + CD^2 \cdot AE^2 = CD^2(BE^2 + AE^2) = CD^2 \cdot AB^2$, одакле уз коришћење услова задатка добијамо једнакост $2 \cdot AC^2 \cdot BD^2 = AB^2 \cdot CD^2$. Коначно је $\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \sqrt{2}$.

(б) Тврдјење следи из чињенице да је угао измедју тангенте и тетиве једнак периферијском углу над том тетивом.

Друго решење. Није тешко показати да је услов $\measuredangle ADB = \measuredangle ACB + 90^\circ$ еквивалентан услову: кругови описани око троуглова ABC и ABD су узајамно ортогонални. Разматрајмо инверзију у односу на круг са центром у тачки D и полупречником r (r је произвољно). Нека се тачке A, B и C пресликавају у тачке A', B' и C'. Круг описан око троугла ABC пресликава се у круг описан око троугла $A'B'C'$ а круг описан око троугла ABD пресликава се у праву $A'B'$. Како су кругови описани око троуглова ABC и ABD ортогонални, то ће круг описан око троугла $A'B'C'$ и права $A'B'$ бити ортогонални. Дакле A' и B' су дијаметрално супротне тачке круга описаног око троугла $A'B'C'$, односно угао код темена C' троугла $A'B'C'$ је прав. Праве $A'C'$ и $B'C'$ пресликавају се у кругове описане око троуглова ACD и BCD. Следи да су ови кругови узајамно ортогонални. На основу Питагорине теореме имамо да је

$$(A'B')^2 = (A'C')^2 + (B'C')^2.$$

Имајући у виду да је

$$A'B' = \frac{r^2 \cdot AB}{AD \cdot BD}, \quad A'C' = \frac{r^2 \cdot AC}{AD \cdot CD}, \quad B'C' = \frac{r^2 \cdot BC}{BD \cdot CD},$$

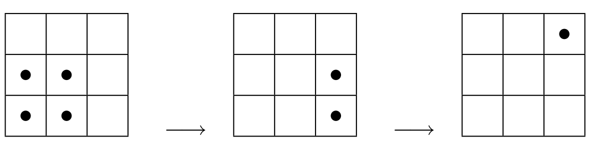
добијамо да је

$$(AB \cdot CD)^2 = (AC \cdot BD)^2 + (BC \cdot AD)^2.$$

Одавде и из претпоставке $AC \cdot BD = AD \cdot BC$ није тешко извести $\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \sqrt{2}$.

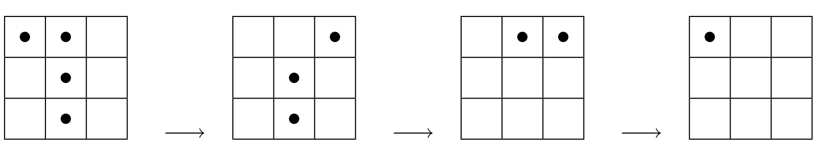
ИМО '93.3.

За $n = 1$ игра је тривијално завршена. За $n = 2$ игра се може завршити, на пример, на следећи начин:



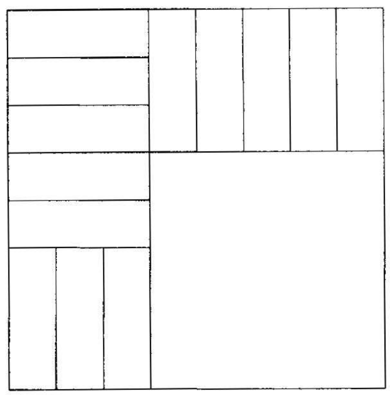
Сл. 16

Уочимо следећу помоћну комбинацију:



Сл. 17

Ова комбинација омогућава да се са табле уклоне три фигуре које стоје у пољима која формирају правоугаоник 3×1, при чему се користи још једна фигура и једно слободно поље. За свако $n \geqslant 4$ квадрат $(n+3)\times(n+3)$ може се применом наведене комбинације редуковати на квадрат $n \times n$, сл. 18. Тиме је доказано да се игра може завршити за сваки природан број n који није дељив са 3.



Сл. 18

Нека је у свако поље квадрата $3k \times 3k$ постављена фигура. Претпоставимо да се игра може играти тако да (на бесконачној табли) остане само једна фигура. То поље на које остаје фигура нумеришемо са 1, а затим бесконачну таблу нумеришемо као на слици 19.

1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2●	3●	1●	2●	3●	1●	2	3
1	2	3●	1●	2●	3●	1●	2●	3	1
2	3	1●	2●	3●	1●	2●	3●	1	2
3	1	2●	3●	1●	2●	3●	1●	2	3
1	2	3●	1●	2●	3●	1●	2●	3	1
2	3	1●	2●	3●	1●	2●	3●	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1

Сл. 19

Сваки распоред фигура на табли зовемо позиција. Назовимо карактеристиком позиције збир бројева којима су нумерисана поља на којима стоје фигуре. Размотримо како се мења карактеристика позиције после сваког одиграног потеза. Ако у неком потезу фигура са поља 1 прескаче поље 2 и долази на поље 3, при чему се уклања фигура са поља 2, онда је промена карактеристике једнака $-1-2+3=0$. Остале могућности за промену карактеристике су: $-1-3+2=-2$, $-2-1+3=0$, $-2-3+1=-4$, $-3-1+2=-2$, $-3-2+1=-4$. У свим случајевима карактеристика се мења за паран број. Карактеристика почетне позиције је $18k^2$ (јер је збир бројева којима су нумерисана поља било ког квадрата 3×3 једнака 18), а карактеристика завршне позиције једнака је 1. Медјутим, полазећи од позиције чија је карактеристика паран број и променом те карактеристике увек за паран број, не може се добити јединица. Контрадикција.

Напомена. На 26. Међурепубличкој математичкој олимпијади [8], која је одржана 1992. године, био је постављен следећи задатак:

На бесконачној шаховској табли лежи неколико фигура. У једном потезу допуштено је (уколико је то могуће) „прескочити“ било којом фигуром преко фигуре која стоји на суседном пољу (суседним се сматрају поља која имају заједничку страницу), и стати на следеће слободно поље. При том се „прескочена“ фигура скида са табле. Који најмањи број фигура може остати на табли, ако су на почетку фигуре биле постављене у облику правоугаоника $m\times n$ ($m\geqslant 2$, $n\geqslant 2$), окруженог слободним пољима?

Одговор. 2, ако је mn дељиво са 3; 1 у противном случају.

ИМО '93.4.

Нека је ω ограничена фигура у равни. Са $d(\omega)$ и $w(\omega)$ ћемо означавати дијаметар и ширину фигуре ω. Користићемо следећа два својства функција d и w.

а) Ако су ω и ω' две ограничене равне фигуре и ако је $\omega\subset\omega'$, онда је $d(\omega)\leqslant d(\omega')$ и $w(\omega)\leqslant w(\omega')$.

б) Ако је ω троугао, онда је $d(\omega)$ једнако његовој најдужој страници, а $w(\omega)$ је једнако најмањој висини тог троугла, тј. $m(\omega)$.

Из б) следи да за троугао ω важи $m(\omega)=2S(\omega)/d(\omega)$. Нека се тачка X налази унутар троугла ABC или на његовом рубу. Тада је

$$\begin{aligned}
m(ABX)+m(BCX)+m(CAX) &= \frac{2S(ABX)}{d(ABX)}+\frac{2S(BCX)}{d(BCX)}+\frac{2S(CAX)}{d(CAX)}\\
&\geqslant \frac{2S(ABX)}{d(ABC)}+\frac{2S(BCX)}{d(ABC)}+\frac{2S(CAX)}{d(ABC)}\\
&\geqslant \frac{2(S(ABX)+S(BCX)+S(CAX))}{d(ABC)}\\
&= \frac{2S(ABC)}{d(ABC)} = m(ABC).
\end{aligned}$$

Нека се тачка X налази изван троугла ABC, унутар угла BAC. Означимо са Y тачку пресека дужи AX и BC. Овај случај можемо свести на претходни:

$$m(ABX)+m(BCX)+m(CAX) \geqslant m(ABY)+m(BCY)+m(CAY) \geqslant m(ABC).$$

Нека се тачка X налази изван троугла ABC, унутар угла који је унакрсан углу BAC. Тада је

$$m(ABX)+m(BCX)+m(CAX) \geqslant m(BCX) \geqslant m(ABC).$$

Издискутовали смо све битно различите позиције тачке X у односу на троугао ABC.

ИМО '93.5.

Прво решење. Нека је $\alpha = (\sqrt{5}+1)/2$ и $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ функција одређена једнакошћу $g(x) = \alpha x$. С обзиром да је $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$, то за сваки природан број n важи једнакост $g(g(n)) - g(n) - n = 0$. Дефинишемо функцију $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ помоћу једнакости

$$f(n) = \left[g(n) + \frac{1}{2}\right].$$

Докажимо да функција f има тражена својства.

(а) С обзиром да је $\alpha > 1$, то добијамо $g(n+1) = \alpha\cdot(n+1) > \alpha n+1 = g(n)+1$, па на основу дефиниције функције f лако добијамо да је f строго растућа функција.

(б) Приметимо да је $2 < \alpha + 1/2 < 3$. Одатле следди да је $f(1) = 2$.

(в) Из дефиниција функција g и f следи да за сваки природан број n важи неједнакост $|f(n) - g(n)| < 1/2$ и да је $f(f(n)) - f(n) - n$ цео број. На основу тога и следећих релација

$$\begin{aligned}
&|f(f(n)) - f(n) - n| = \\
&\qquad = |g(g(n)) - g(n) - n - g(g(n)) + f(f(n)) - f(n) + g(n)| \\
&\qquad = |-g(g(n)) + f(f(n)) - f(n) + g(n)| \\
&\qquad = |-g(g(n)) + f(f(n)) - f(n) + g(n)| \\
&\qquad = |g(g(n)) - g(f(n)) + g(f(n)) - f(f(n)) + f(n) - g(n)| \\
&\qquad = |(\alpha-1)(g(n) - f(n)) + g(f(n)) - f(f(nn)| \\
&\qquad \leqslant (\alpha-1)|g(n) - f(n)| + |g(f(n)) - f(f(n))| \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{2}(\alpha-1) + \frac{1}{2} = \frac{\alpha}{2} < 1,
\end{aligned}$$

следи да за сваки природан број n важи једнакост $f(f(n)) = f(n) + n$.

Друго решење. Даћемо комплетну анализу решења разматраног проблема из које ће произаћи конструктивни поступак којим се може добити свако решење.

Под Фибоначијевом рекурентном једначином подразумеваћемо $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, а за растући низ природних бројева ћемо рећи да је Фибоначијев уколико је он решење Фибоначијеве рекурентне једначине. (Напомињемо да се обично под Фибоначијевим низом подразумева оно решење Фибоначијеве рекурентне једначине које задовољава услов $F_1 = F_2 = 1$.) За Фибоначијев низ F' ћемо рећи да се преплиће са Фибоначијевим низом F уколико постоји $k \geqslant 1$, такво да је $F_{k+n-1} < F'_n < F_{k+n}$, $n \geqslant 1$. Није тешко доказати да се Фибоначијев низ F' преплиће са Фибоначијевим низом F ако и само ако постоји $k \geqslant 1$ такво да је $F_k < F'_1 < F_{k+1} < F'_2 < F_{k+2}$. Уколико се Фибоначијев низ F' преплиће са Фибоначијевим низом F низови $F'_n - F_{k+n-1}$ и $F_{k+n} - F'_n$, монотоно расту за $n \geqslant 2$ (почетна два члана сваког од ових низова су позитивни а сваки од њих задовољава Фибоначијеву рекурентну једначину). Ако ови низови расту за $n \geqslant 1$ рећи ћемо да се Фибоначијев низ F' правилно преплиће са Фибоначијевим низом F. Према томе Фибоначијев низ F' се правилно преплиће са Фибоначијевим низом F ако и само ако постоји $k \geqslant 1$ такво да је $0 < F'_1 - F_k \leqslant F'_2 - F_{k+1}$ и $0 < F_{k+1} - F'_1 \leqslant F_{k+2} - F'_2$.

Нека је $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ растућа функција која задовољава дату функцијску једначину. Сваки итеративни низ $(m, f(m), f(f(m)), \dots)$ је Фибоначијев. Означимо са F^1 онај итеративни низ чији је почетни члан $m_1 = 1$. Означимо са m_2 природан број који се не налази међу члановима овог низа. Нека је F^2 итеративни низ чији је почетни члан m_2. Означимо са m_3 најмањи природан број који се не појављује међу члановима низова F^1 и F^2. Нека је F^3 итеративни низ чији је почетни члан m_3. Настављањем овог поступка добијамо низ Фибоначијевих низова таквих да је сваки природан број члан тачно једног од њих. Није тешко доказати да се сваки од ових низова правилно преплиће са свим својим претходницима. Заиста, ако је $1 \leqslant i < j$ и ако је $F^i_k < F^j_1 < F^i_{k+1}$, онда је

$$\begin{aligned}
F^j_1 - F^i_k &= 1 + |\{n \mid F^i_k < n < F^j_1\}| = 1 + |\{f(n) \mid F^i_k < n < F^j_1\}| \\
&\leqslant 1 + |\{n \mid F^i_{k+1} < n < F^j_2\}| = F^j_2 - F^i_{k+1}, \\
F^i_{k+1} - F^j_1 &= 1 + |\{n \mid F^j_1 < n < F^i_{k+1}\}| = 1 + |\{f(n) \mid F^j_1 < n < F^i_{k+1}\}| \\
&\leqslant 1 + |\{n \mid F^j_2 < n < F^i_{k+2}\}| = F^i_{k+2} - F^j_2.
\end{aligned}$$

Нека је F^1, F^2, F^3, ... фамилија Фибоначијевих низова таквих да се сваки од њих преплиће са свим својим претходницима и да је сваки природан број члан тачно једног од њих. Није тешко показати да постоји јединствена функција $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ за коју су разматрани Фибоначијеви низови итеративни низови. Та функција је монотоно растућа и задовољава дату функцијску једначину.

Нека је F^1 Фибоначијев низ чија су прва два члана 1 ($= m_1$) и 2. Тада је $m_2 = 4$ најмањи природан број који није члан низа F^1. Фибоначијев низ F^2 чија су прва два члана 4 и 6 (или 4 и 7) правилно се преплиће са F^1. Нека је F^1, F^2, ... , F^k фамилија Фибоначијевих низова таквих да се сваки од њих правилно преплиће са свим својим претходницима и да је први члан m_i низа F^i, $i = 1, 2, \dots, k$, најмањи природан број који није члан ниједног од низова F^1, F^2, ... , F^{i-1}. Нека је m_{k+1} најмањи природан број који није члан ниједног од низова

F^1, F^2, ... , F^k. Постоји Фибоначијев низ F^{k+1} коме је m_{k+1} први члан и који се правилно преплиће са сваким од низова F^1, F^2, ... , F^k. Такав је, на пример, Фибоначијев низ чији је други члан једнак $F^i_{j+1}+1$, где је $F^i_j = m_{k+1}-1$.

На основу напред изложеног закључујемо да постоји низ Фибоначијевих низова $F^1, F^2, F^3, \ldots$ такав да се сваки од њих преплиће са свим својим претходницима и да је први члан m_k низа F^k најмањи природан број који није члан ниједног од низова F^1, F^2, ... , F^{k-1}. Сваки природан број је члан тачно једног од њих. Функција $f\colon \mathbf{N}\to\mathbf{N}$ којој су разматрани Фибоначијеви низови итеративни низови је монотоно растућа и задовољава дату функцијску једначину.

ИМО '93.6.

Прво решење. Свако стање лампи L_0, L_1, ..., L_{n-1} означимо вектором $v=(v_0,v_1,\ldots,v_{n-1})$, где је

$$v_k=\begin{cases}0, & \text{ако је лампа } L_k \text{ угашена,}\\ 1, & \text{ако је лампа } L_k \text{ упаљена.}\end{cases}$$

Почетно стање, када су по услову задатка све лампе упаљене, означено је вектором $e=(1,1,\ldots,1)$. Деловање операције S_j дато је са

$$(v_0,v_1,\ldots,v_{n-1}) \xmapsto{S_j} (v_0,v_1,\ldots,v_{j-1},v_{j-1}+v_j,v_{j+1},\ldots,v_{n-1}),$$

где се сабирање координата вектора врши по модулу 2.

(а) За доказ овог тврдјења довољно је доказати да постоји природан број r, такав да је $S_rS_{r-1}\ldots S_1S_0e = e$. Означимо са R операцију која вектор $(v_0,v_1,\ldots,v_{n-1})$ преводи у вектор $(v_1,v_2,\ldots,v_{n-1},v_0)$. Тада је $S_j=R^{-1}S_0R^j$ и

$$\begin{aligned}S_rS_{r-1}\ldots S_1S_0 &= (R^{-r}S_0R^r)(R^{-r+1}S_0R^{r-1})\ldots(R^{-2}S_0R^2)(R^{-1}S_0R)S_0\\ &= R^{-r}S_0(RS_0)^r = R^{-r-1}(RS_0)^{r+1}.\end{aligned}$$

Према томе, услов $S_rS_{r-1}\ldots S_1S_0e=e$, еквивалентан је са $(RS_0)^{r+1}e=e$. С обзиром да постоји укупно 2^n различитих стања лампи (јер свака од n лампи може бити угашена или упаљена), то у низу e, RS_0e, $(RS_0)^2e$, $(RS_0)^3e$, ... има једнаких чланова. Другим речима постоје природни бројеви m и n, такви да је $m<n$ и $(RS_0)^me=(RS_0)^ne$. Тада за $r=n-m-1$ важи $(RS_0)^{r+1}e=(RS_0)^{n-m}e=e$.

(б) Вектору $v=(v_0,v_1,\ldots,v_{n-1})$ придружимо полином

$$P(x)=v_{n-1}x^{n-1}+v_0x^{n-2}+\cdots+v_{n-4}x^2+v_{n-3}x+v_{n-2}.$$

Пошто је $RS_0v = R(v_{n-1}+v_0,v_1,\ldots,v_{n-1}) = (v_1,v_2,\ldots,v_{n-1},v_{n-1}+v_0)$, то следи да је вектору RS_0v придружен полином

$$Q(x)=(v_{n-1}+v_0)x^{n-1}+v_1x^{n-2}+\cdots+v_{n-3}x^2+v_{n-2}x+v_{n-1}.$$

Приметимо да је $Q(x) \equiv xP(x) \pmod{x^n - x^{n-1} - 1}$. На основу тога следи да је услов $(RS_0)^r e = e$ еквивалентан са $x^r \equiv 1 \pmod{x^n - x^{n-1} - 1}$. Надаље ће знак $\equiv$ увек означавати конгруенцију по модулу $x^n - x^{n-1} - 1$. Ако је $n = 2^k$, онда је

$$x^{n^2} \equiv (x^n)^n \equiv (x^{n-1}+1)^n \equiv x^{n^2-n} + 1, \tag{1}$$

јер су сви биномни коефицијенти реда 2^k, осим првог и последњег, парни. Користећи (1) добијамо

$$1 \equiv x^{n^2} - x^{n^2-n} \equiv x^{n^2-n}(x^n - 1) \equiv x^{n^2-n} \cdot x^{n-1} \equiv x^{n^2-1}.$$

Према томе, после $n^2 - 1$ корака све лампе ће поново бити упаљене.

(в) Нека је $n = 2^k + 1$. Тада, слично као у претходном случају, добијамо

$$x^{n^2-1} \equiv (x^{n+1})^{n-1} \equiv [x(x^{n-1}+1)]^{n-1} \equiv (x^n + x)^{n-1} \equiv x^{n(n-1)} + x^{n-1},$$

јер је број $n-1$ једнак степену броја 2, па су сви биномни коефицијенти реда $n-1$, осим првог и последњег, парни, тј. једнаки нули по модулу 2. Даље је $x^{n^2-1} - x^{n(n-1)} \equiv x^{n-1}$, тј. $x^{n^2-n}(x^{n-1}-1) \equiv x^{n-1}$. Сада налазимо да је $x^{n^2-n} \cdot x^n \equiv x^{n-1}$ и коначно $x^{n^2-n+1} \equiv 1$. Према томе, за $n = 2^k + 1$ све лампе ће бити упаљене после $n^2 - n + 1$ корака.

Друго решење.

а) Тренутно стање можемо кодирати n-торком $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$, где је $x_j = 0$ ако је лампа L_j искључена, односно $x_j = 1$ ако је лампа L_j укључена. Операције S_j су инјективне: стање настало после операције S_j једнозначно одређује стање које је постојало пре тога. Чланови низа $(S_{n-1} \cdots S_1 S_0)^k (1, 1, \ldots, 1)$, $k \geqslant 0$, припадају коначном скупу. Зато ће постојати два једнака члана у овом низу. Нека је

$$(S_{n-1} \cdots S_1 S_0)^l (1, 1, \ldots, 1) = (S_{n-1} \cdots S_1 S_0)^k (1, 1, \ldots, 1),$$

где је $0 \leqslant k < l$. Тада је

$$(S_{n-1} \cdots S_1 S_0)^m (1, 1, \ldots, 1) = (1, 1, \ldots, 1),$$

где је $m = l - k > 0$. Дакле после mn описаних операција све лампе ће бити поново укључене.

б) Нека је низ матрица U_k, $k \geqslant 1$, задат са $U_1 = [0]$,

$$U_{k+1} = \begin{bmatrix} & & & 1 & & & \\ & \boxed{U_k} & & \vdots & & \boxed{U_k} & \\ & & & 1 & & & \\ 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & & & 0 & & & \\ & \boxed{U_k} & & \vdots & & \boxed{0} & \\ & & & 0 & & & \end{bmatrix}, \quad k \geqslant 1.$$

U_k је квадратна матрица реда $2^k - 1$.

Може се показати методом математичке индукције да за свако k чланови матрице

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & & & & 1 \\ \vdots & & \boxed{U_k} & & \vdots \\ 1 & & & & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

задовољавају услов $u_{ij} = u_{i-1,j} + u_{i,j-1}$ (подразумева се аритметика из $\mathbf{Z}_2$). Приликом извођења индуктивног корака, довољно је доказати да дато својство имају четири подматрице (б) реда $2^k + 1$ смештене у угловима матрице (а) реда $2^{k+1} + 1$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & & & & 1 & & & & 1 \\ \vdots & & \boxed{U_k} & & \vdots & & \boxed{U_k} & & \vdots \\ 1 & & & & 1 & & & & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 & & & & 1 \\ \vdots & & \boxed{U_k} & & \vdots & & \boxed{0} & & \vdots \\ 1 & & & & 0 & & & & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(а)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & & & & 1 \\ \vdots & & \boxed{U_k} & & \vdots \\ 1 & & & & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & & & & 1 \\ \vdots & & \boxed{U_k} & & \vdots \\ 1 & & & & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & & & & 0 \\ \vdots & & \boxed{U_k} & & \vdots \\ 1 & & & & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & & & & 1 \\ \vdots & & \boxed{0} & & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(б)

За прве три од ове четири матрице ово својство се доказује применом индуктивне претпоставке а за четврту се директно проверава.

Разматрајмо матрицу

$$X_k = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ & & & 1 \\ & \boxed{U_k} & & 1 \\ & & & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Није тешко видети да је i-та врста ове матрице ($0 \leqslant i \leqslant 2^k = n$) стање које настаје после i-тог циклуса примене описаних операција. У моменту пре него што је извршена последња операција n-тог циклуса стање је описано n-торком $(1,1,\dots,1)$. Дакле после n^2-1 операција све лампе ће бити укључене.

в) За $k=1$ тврђење може непосредно да се провери.

Нека је низ матрица V_k, $k \geqslant 2$, задат са

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad V_{k+1} = \left[\begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & & & \\ & \boxed{V_k} & & \vdots & \vdots & & \boxed{V_k} & \\ & & & 0 & 0 & & & \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & 1 & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & & & \\ & \boxed{V_k} & & \vdots & \vdots & & \boxed{0} & \\ & & & 0 & 0 & & & \end{array}\right], \quad k \geqslant 2.$$

V_k је матрица димензија $(2^k-1)\times(2^k-2)$.

Може се показати методом математичке индукције да за свако $k \geqslant 2$ чланови матрице

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \boxed{V_k} & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

задовољавају услов $v_{ij} = v_{i-1,j} + v_{i,j-1}$ (подразумева се аритметика из $\mathbf{Z}_2$). Приликом извођења индуктивног корака, довољно је доказати да дато својство имају четири подматрице (б) реда $(2^k+1)\times(2^k+2)$ смештене у угловима матрице (а) реда $(2^{k+1}+1)\times(2^{k+1}+2)$.

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & & & & 1 & 0 & & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & & & 0 & 0 & & & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \boxed{V_k} & & \vdots & \vdots & & \boxed{V_k} & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & & & 0 & 0 & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & 1 & 0 & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & 0 & 0 & & & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \boxed{V_k} & & \vdots & \vdots & & \boxed{0} & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & & & 0 & 0 & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

(а)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \boxed{V_k} & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \boxed{V_k} & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & & & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \boxed{V_k} & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \boxed{0} & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & & & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(б)

За прве три од ове четири матрице ово својство се доказује применом индуктивне претпоставке а за четврту се директно проверава.

Размајтрајмо матрицу

$$Y_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & & & & 1 & 0 \\ 0 & & & & 0 & 0 \\ \vdots & & \boxed{V_k} & & \vdots & \vdots \\ 0 & & & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Није тешко видети да је i-та врста ове матрице ($0 \leqslant i \leqslant 2^k = n-1$) стање које настаје после i-тог циклуса примене описаних операција. Стање које настаје када се изврши $n-1$ циклус и још једна операција описано је n-торком $(1, 1, \dots, 1)$. Дакле после $n^2 - n + 1$ операција све лампе ће бити укључене.

Треће решење. Доказ тврђења под а) исти је као у претходном решењу. Са $B(n)$ ћемо означавати скуп експонената у бинарном запису броја n. Доказе тврђења под б) и в) ћемо извести коришћењем познатог става: *Биномни коефицијент* $\binom{m}{k}$ *је непаран број ако и само ако је* $B(k) \subset B(m)$. У аритметици прстена $\mathbf{Z}_2$ у којој ћемо надаље радити ово тврђење гласи:

$$\binom{m}{k} = 1 \quad \textit{ако и само ако је } B(k) \subset B(m).$$

б) Индукцијом ћемо доказати да је стање j-те лампе после i-тог циклуса операција, $0 \leqslant i \leqslant n = 2^k$, једнако $\binom{i+j+1}{i}$. Нека је $i = 0$. На почетку су све лампе укључене, а $\binom{j+1}{0} = 1$, $j = 0, 1, \dots, n-1$. Дакле за $i = 0$ тврђење важи. Нека је $i > 0$. Разматраћемо два случаја. Прво разматрајмо случај $j = 0$.

После $i-1$ циклуса операција стање лампе L_0 је $\binom{i}{i-1}$, а стање лампе L_{n-1} је $\binom{i+n-1}{i-1}=1$. Имамо да је стање лампе L_0 после i-тог циклуса операција једнако $\binom{i}{i-1}+\binom{i+n-1}{i-1}=i+1=\binom{i+1}{i}$. Сада разматрајмо случај $j>0$. Стање лампе L_j после $i-1$ циклуса операција је $\binom{i+j}{i-1}$, а стање лампе L_{j-1} после i-тог циклуса операција једнако је $\binom{i+j}{i}$. Стање лампе L_j после i-тог циклуса операција биће $\binom{i+j}{i-1}+\binom{i+j}{i}=\binom{i+j+1}{i}$. Тиме је доказ индукцијом завршен. Стање после n^2-1 операција одређено је вредностима следећих биномних коефицијената: $\binom{n+1}{n}$, $\binom{n+2}{n}$, ..., $\binom{2n-1}{n}$, $\binom{2n-1}{n-1}$. Сви су једнаки 1. Дакле после n^2-1 операција све ће лампе бити укључене.

в) Индукцијом ћемо доказати да је стање j-те лампе после i-тог циклуса операција, $0\leqslant i\leqslant n-1=2^k$, једнако $\binom{i+j+2n-3}{i}$. Нека је $i=0$. На почетку су све лампе укључене, а $\binom{j+2n-3}{0}=1$, $j=0,1,\ldots,n-1$. Дакле за $i=0$ тврђење важи. Нека је $i>0$. Разматраћемо два случаја. Прво разматрајмо случај $j=0$. После $i-1$ циклуса операција стање лампе L_0 је $\binom{i+2n-4}{i-1}$, а стање лампе L_{n-1} је $\binom{i+3n-5}{i-1}$. Имамо да је стање лампе L_0 после i-тог циклуса операција једнако $\binom{i+2n-4}{i-1}+\binom{i+3n-5}{i-1}=\binom{i+2n-3}{i}$ $(1+1=0$ за $i=1$, $0+0=0$ за $i>1)$. Сада разматрајмо случај $j>0$. Стање лампе L_j после $i-1$ циклуса операција је $\binom{i+j+2n-4}{i-1}$, а стање лампе L_{j-1} после i-тог циклуса операција једнако је $\binom{i+j+2n-4}{i}$. Стање лампе L_j после i-тог циклуса операција биће

$$\binom{i+j+2n-4}{i-1}+\binom{i+j+2n-4}{i}=\binom{i+j+2n-3}{i}.$$

Тиме је доказ индукцијом завршен. Стање после $n-1$ циклуса операција одређено је вредностима следећих биномних коефицијената: $\binom{3n-4}{n-1}$, $\binom{3n-3}{n-1}$, ..., $\binom{4n-6}{n-1}$, $\binom{4n-5}{n-1}$. Први је једнак 0 а остали су једнаки 1. Значи да ће после n^2-n операција лампа L_0 бити искључена а да ће остале лампе бити укључене. После n^2-n+1 операција све лампе ће бити укључене.

ИМО ’94.1.

Можемо претпоставити да је $a_1 > a_2 > \cdots > a_m$. Докажимо да је $a_i + a_{m+1-i} \geqslant n+1$ за $1 \leqslant i \leqslant m$. Претпоставимо да је за неко i, $a_i + a_{m+1-i} \leqslant n$. Тада је $a_i < a_i + a_m < a_i + a_{m-1} < \cdots < a_i + a_{m-i+1} \leqslant n$. Следи да су i бројева $a_i + a_m$, $a_i + a_{m-1}$, ..., $a_i + a_{m-i+1}$ различити међу собом и да је сваки од њих једнак једном од $i-1$ бројева a_1, a_2, ..., a_{i-1}, а то је немогуће. На основу доказане неједнакости имамо да је

$$2(a_1 + a_2 + \cdots + a_m) = (a_1 + a_m) + (a_2 + a_{m-1}) + \cdots + (a_m + a_1) \geqslant m(n+1),$$

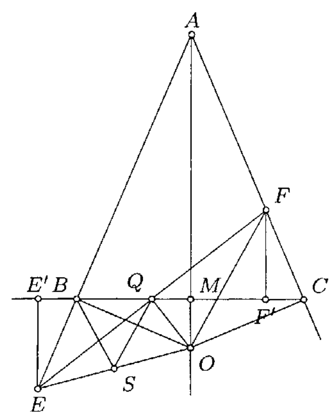
односно

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} \geqslant \frac{n+1}{2}.$$

ИМО ’94.2.

Нека је $OQ \perp EF$. Четвороуглови $OEBQ$ и $OCFQ$ су тетивни. Зато је $\measuredangle OEQ = \measuredangle OBQ = \measuredangle OCQ = \measuredangle OFQ$. Следи да је $\triangle OEQ \cong \triangle OFQ$, а одатле да је $QE = QF$, сл. 20.

Нека је $QE = QF$. Означимо са E' и F' пројекције тачака E и F на праву BC. Како је $\triangle QEE' \cong \triangle QFF'$ ($QE = QF$, $\measuredangle EQE' = \measuredangle FQF'$, $\measuredangle QE'E = \measuredangle QF'F$), то је $EE' = FF'$ и $QE' = QF'$. Како је $\triangle BEE' \cong \triangle CFF'$ ($EE' = FF'$, $\measuredangle EBE' = \measuredangle FCF'$, $\measuredangle BE'E = \measuredangle CF'F$), то је $BE' = CF'$. Дакле дуж $E'F'$ је једнака дужи BC, а Q је њено средиште. Следи $E'Q = BM$, па зато дужи $E'M$ и BQ имају заједничко средиште. Њихова заједничка симетрала пролази кроз средиште S дужи OE. Како је $SQ = SO = SE$ $(= SB)$, то је угао OQE прав, тј $OQ \perp EF$.



Сл. 20

ИМО ’94.3.

Прво решење. (а) Означимо са $g(k)$ број елемената скупа $\{1, 2, \ldots, k\}$ чија бинарна репрезентација садржи тачно три јединице. Очигледно је да је $g(k)$ неопадајућа функција и да је $f(k) = g(2k) - g(k)$. Дакле

$$\begin{aligned} f(k+1) - f(k) &= (g(2k+2) - g(k+1)) - (g(2k) - g(k)) \\ &= (g(2k+2) - g(2k)) - (g(k+1)) - g(k)). \end{aligned}$$

Како $2k+2$ и $k+1$ у бинарној репрезентацији имају исти број јединица, то је $f(k+1) - f(k) = 1$ или 0 у зависности од тога да ли $2k+1$ има у бинарној репрезентацији тачно три јединице или не. Следи да $f(k)$ неће прескочити ниједан природан број. Како је $g(2^n) = g(2^n - 1) = \binom{n}{3}$, то је $f(2^n) = g(2^{n+1}) - g(2^n) = \binom{n+1}{3} - \binom{n}{3} = \binom{n}{2}$. Дакле функција $f(k)$ је неограничена одозго. Следи да је скуп њених вредности једнак скупу свих ненегативних бројева. Зато за сваки природан број m једначина $f(k) = m$ има бар једно решење.

(б) Претпоставимо да једначина $f(k) = m$ има јединствено решење. То је испуњено ако и само ако је $f(k+1) - f(k) = 1$ и $f(k) - f(k-1) = 1$. Први услов је задовољен ако и само ако $2k+1$ има у бинарној репрезентацији три јединице, тј. ако и само ако k има у бинарној репрезентацији две јединице. Исто треба да важи и за $k-1$. То је могуће ако и само ако број $k-1$ има у бинарној репрезентацији бар 3 цифре, при чему су прва и последња цифра јединице, а остале су нуле. Другим речима, $k = 2^n + 2$ за неко $n \geqslant 2$. Сада имамо

$$f(2^n + 2) = g(2^{n+1} + 4) - g(2^n + 2) = 1 + g(2^{n+1}) - g(2^n) = 1 + \binom{n}{2}.$$

Следи да једначина $f(k) = m$ има јединствено решење ако и само ако је $m = 1 + \binom{n}{2}$ за неко $n \geqslant 2$.

Друго решење. Означимо са $b(k)$ број јединица у бинарној репрезентацији природног броја k. Ако се има у виду да је $b(2k+2) = b(k+1)$ и $b(2k+1) = b(k)+1$, лако се добија да је

$$f(k+1) - f(k) = \begin{cases} 1, & \text{за } b(k) = 2, \\ 0, & \text{за } b(k) \neq 2. \end{cases}$$

Одавде и из $f(1) = 0$ следи да је

$$f(k) = |\{x \mid 1 \leqslant x < k, b(x) = 2\}|.$$

Тврђење тачке (а) следи из чињенице да је скуп природних бројева који у бинарном систему имају тачно две јединице бесконачан.

Како је функција f неопадајућа, задатак под (б) ћемо решити ако одредимо вредности $f(k)$ за оне природне бројеве k који задовољавају услов $f(k-1) < f(k) < f(k+1)$. Овај услов је еквивалентан са $b(k-1) = b(k) = 2$ и биће задовољен ако и само ако број k у бинарном систему има облик $10\ldots010$, тј. ако и само ако је $k = 2^n + 2$ за неко $n \geqslant 2$. Природан број $x < k$ задовољава услов $b(x) = 2$ ако и само ако у бинарном систему има не више од n цифара или има облик $10\ldots001$ ($n+1$ цифра). Таквих бројева има $m = \binom{n}{2} + 1$. Дакле, једначина $f(k) = m$ има тачно једно решење ако и само ако m може да се представи у облику $m = \binom{n}{2} + 1$ за неко $n \geqslant 2$.

ИМО '94.4.

Прво решење. Ако је $m = n$, имамо да је $\dfrac{n^3+1}{mn-1} = \dfrac{n^3+1}{n^2-1} = n + \dfrac{1}{n-1}$. Вредност овог израза је цео број ако и само ако је $n = 2$.

Нека је $m > n$. Ако је $n = 1$, онда је $\dfrac{n^3+1}{mn-1} = \dfrac{2}{m-1}$. Вредност овог израза ја цео број ако и само ако је $m = 2$ или $m = 3$. Нека је $n \geqslant 2$. Како је $n^3 + 1 \equiv 1 \pmod{n}$ и $mn - 1 \equiv -1 \pmod{n}$, то је $\dfrac{n^3+1}{mn-1} = kn - 1$ за неки природан број k. Из $kn - 1 < \dfrac{n^3+1}{n^2-1} = n + \dfrac{1}{n-1}$ добијамо да је $(k-1)n < 1 + \dfrac{1}{n-1} \leqslant 2$. Дакле $k = 1$, па је $n^3+1 = (mn-1)(n-1)$. Одавде добијамо да је $m = \dfrac{n^2+1}{n-1} = n + 1 + \dfrac{2}{n-1}$, а то ће бити цео број ако и само ако је $n = 2$ или $n = 3$. У оба случаја је $m = 5$.

Нека је $m < n$. Како су $mn - 1$ и m^3 узајамно прости и како је

$$(mn-1)(m^2n^2 + mn + 1) = m^3n^3 - 1 = m^3(n^3+1) - (m^3+1),$$

то $mn - 1$ дели $n^3 + 1$ ако и само ако $mn - 1$ дели $m^3 + 1$. Зато овај случај можемо решити на сличан начин као и претходни.

Задатак има девет решења: $(2,2)$, $(2,1)$, $(3,1)$, $(5,2)$, $(5,3)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,5)$ и $(3,5)$.

Друго решење. Нека је $\dfrac{n^3+1}{mn-1} = l$. Одавде добијамо да је $l+1 = lmn - n^3$, одакле следи да је $l + 1$ дељиво са n. Нека је $l = kn - 1$. Надаље тражимо природне бројеве k, m и n који задовољавају услов $n^3 + 1 = (kn-1)(mn-1)$, односно

$$n^2 - kmn + k + m = 0. \tag{1}$$

Како је $n(km - n) = k + m$, то је $km - n > 0$. Услов (1) је еквивалентан са

$$(k-1)(m-1) + (n-1)(km-n-1) = 2. \tag{2}$$

Приметимо да су $n-1$, $km-n-1$, $k-1$ и $m-1$ ненегативни цели бројеви. Зато је $(k-1)(m-1) \leqslant 2$ и $(n-1)(km-n-1) \leqslant 2$. Разликоваћемо три случаја.

Нека је $(k-1)(m-1) = 0$ и $(n-1)(km-n-1) = 2$. Прва једнакост је еквивалентна са $k = 1$ или $m = 1$. Из друге једнакости следи да је један од бројева $n-1$ и $km-n-1$ једнак 2 а други 3, одакле сабирањем добијамо да је $km = 5$. Следи да је $k = 1$ и $m = 5$ или $k = 5$ и $m = 1$. Друга једнакост се своди на $(n-1)(4-n) = 2$, па је зато еквивалентна са $n = 2$ или $n = 3$.

Нека је $(k-1)(m-1) = 1$ и $(n-1)(km-n-1) = 1$. Ове две једнакости су еквивалентне са $k = m = n = 2$ (примећујемо да је у том случају $km-n-1 = 2$).

Нека је $(k-1)(m-1)=2$ и $(n-1)(km-n-1)=0$. Прва једнакост је еквивалентна са $k=2$ и $m=3$ или $k=3$ и $m=2$. Друга једнакост се своди на $(n-1)(5-n)=0$, па је зато еквивалентна са $n=1$ или $n=5$.

Задатак има девет решења: $(1,2)$, $(1,3)$, $(5,2)$, $(5,3)$, $(2,2)$, $(2,1)$, $(2,5)$, $(3,1)$ и $(3,5)$.

ИМО ’94.5.

Прво решење. Услов (ii) повлачи да једначина $f(x)=x$ има највише три решења: једно у $(-1,0)$, једно једнако 0 и једно у $(0,+\infty)$. Претпоставимо да је $f(u)=u$ за неко $u\in(-1,0)$. Стављајући $x=y=u$ у услов (i), добијамо $f(u^2+2u)=u^2+2u$. Како је $0<u+1<1$, $u^2+2u=(u+1)^2-1$ такође припада $(-1,0)$. Дакле $u^2+2u=u$, а то повлачи да је $u=-1$ или $u=0$, те да стога $u\notin(-1,0)$. Претпоставка да је $f(v)=v$ за неко $v\in(0,+\infty)$ води у сличну контрадикцију. Како је $f(x+(1+x)f(x))=x+(1+x)f(x)$ за свако $x\in S$, то је $x+(1+x)f(x)=0$, па је $f(x)=-\dfrac{x}{1+x}$. Преостаје да проверимо да ова функција задовољава дате услове. Очигледно је да $\dfrac{f(x)}{x}=-\dfrac{1}{1+x}$ расте на $(-1,0)$ и $(0,+\infty)$. За $x,y\in S$ имамо да је

$$y+(1+x)f(x)=y-\frac{x(1+y)}{1+x}=\frac{y-x}{1+x}$$

и

$$f(x+(1+x)f(y))=f\left(\frac{x-y}{1+y}\right)=-\frac{\dfrac{x-y}{1+y}}{1+\dfrac{x-y}{1+y}}=\frac{y-x}{1+x}.$$

Друго решење. Решићемо општији проблем:
Наћи све функције $f\colon S\to S$ које задовољавају услов (i) и услов
(iii) f је ограничена на неком подинтервалу од S.
Услов (i) је еквивалентан са

$$f((x+1)(f(y)+1)-1)=(y+1)(f(x)+1)-1,\qquad x,y\in S,$$

односно са

$$f(x(f(y-1)+1)-1)=y(f(x-1)+1)-1,\qquad x,y\in(0,+\infty).$$

Сменом $g(x)=f(x-1)+1$ претходна функцијска једначина се своди на

$$(1)\qquad g(xg(y))=yg(x),\qquad x,y\in(0,+\infty).$$

Проблем се своди на проблем одређивања оних решења функцијске једначине (1) која су ограничена на бар једном подинтервалу интервала $(0,+\infty)$. Ако у (1) ставимо $x=1$, добијамо да је

$$(2)\qquad g(g(y))=yg(1)\quad\text{за}\quad y\in(0,+\infty).$$

Помоћу (2) добијамо да је

$$g(1)g(1) = g(g(g(1))) = g(g(1)) = g(1).$$

Одавде, имајући у виду $g(1) > 0$, добијамо $g(1) = 1$. Услов (2) се своди на

$$g(g(y)) = y \quad \text{за} \quad y \in (0, +\infty). \tag{3}$$

На основу (3) и (1) имамо да је $g(xy) = g(xg(g(y))) = g(x)g(y)$. Дакле (1) и (3) повлаче

$$g(xy) = g(x)g(y) \quad \text{за} \quad x, y \in (0, +\infty). \tag{4}$$

Функцијска једначина (4) се, као што је познато, решава тако што се сменом $h(x) = \ln(g(\exp(x)))$ сведе на Кошијеву функцијску једначину. Њена решења која имају својство да су ограничена на неком интервалу су степене функције $g(x) = x^a$. При том је услов (3) задовољен за $a = -1$ и $a = 1$. Лако је проверити да су функције g_0 и g_1, које су дефинисане са $g_0(x) = -x$ и $g_1(x) = x$ на $(0, +\infty)$, решења функцијске једначине (1). Одговарајуће функције $f_0(x) = -\dfrac{x}{1+x}$ и $f_1(x) = x$ су решења функцијске једначине (i) која задовољавају услов (iii).

Функција $f_1(x) = x$ не задовољава услов (ii). Дакле постоји тачно једна функција која задовољава услове (i) и (ii). То је функција $f_0(x) = -\dfrac{x}{1+x}$.

ИМО '94.6.

Нека је A скуп природних бројева облика $q_1 q_2 \cdots q_{q_1}$, где су $q_1 < q_2 < \cdots < q_{q_1}$ прости бројеви. Другим речима

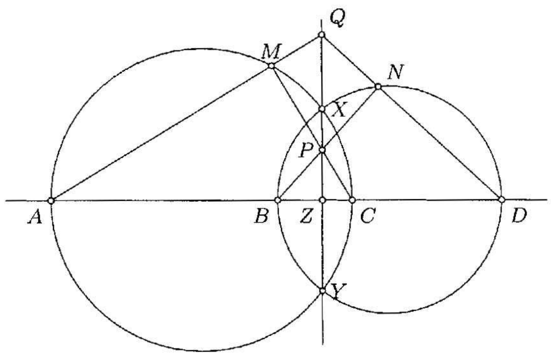
$$A = \{2\times3,\ 2\times5,\ 2\times7,\ \dots\} \cup \{3\times5\times7,\ 3\times5\times11,\ \dots\} \cup \{5\times7\times11\times13\times17,\ \dots\} \cup \cdots$$

За произвољан бесконачан скуп $S = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ простих бројева $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots$, постављени услов задовољавају бројеви $k = p_1$, $m = p_1 p_2 \cdots p_k$ и $n = p_2 p_3 \cdots p_{k+1}$.

ИМО '95.1.

Прво решење. Нека права AM сече праву XY у тачки Q и нека права DN сече праву XY у тачки R, сл. 21. Троуглови AZQ и PZC су слични (зашто?). Следи да је $ZA : ZQ = ZP : ZC$, а одавде $ZQ = ZA \cdot ZC / ZP$. Ако имамо у виду да је $ZA \cdot ZC = ZX \cdot ZY$ (потенција) добијамо да је $ZQ = ZX \cdot ZY / ZP$. На сличан начин може да се добије да је $ZR = ZX \cdot ZY / ZP$. Како тачке Q и R леже са исте стране тачке Z као и тачка P, и како је $ZQ = ZR$, то се оне поклапају.

Друго решење. Нека права AM сече праву XY у тачки Q и нека права DN сече праву XY у тачки R. Праве MP и MQ су симетрале углова код темена M троугла MXY. Зато су тачке P и Q хармонијски спрегнуте са тачкама X и Y. На сличан начин може да се докаже да су тачке P и R хармонијски спрегнуте са тачкама X и Y. Следи да се тачке Q и R поклапају.



Сл. 21

ИМО '95.2.

Прво решење. Нека је $x = 1/a$, $y = 1/b$ и $z = 1/c$. Тада је $xyz = 1$ и

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}.$$

На основу Кошијеве неједнакости имамо да је

$$[(y+z)+(z+x)+(x+y)]\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\right) \geqslant (x+y+z)^2.$$

Одавде следи

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{3}{2} \cdot \frac{x+y+z}{3} \geqslant \frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz} = \frac{3}{2}.$$

Једнакост важи ако и само ако је $x = y = z = 1$, тј. ако и само ако је $a = b = c = 1$.

Друго решење (Ђорђе Милићевић). Ова неједнакост може да се докаже помоћу следеће теореме:

Теорема (Muirhead). Нека је x n-торка позитивних бројева и нека су α и β n-торке реалних бројева који задовољавају услове:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k \geqslant \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, \\ &\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n. \end{aligned}$$

Тада је $T_\alpha(x) \geqslant T_\beta(x)$, при чему је

$$T_\alpha(x) = \sum_\pi x_{\pi_1}^{\alpha_1} x_{\pi_2}^{\alpha_2} \cdots x_{\pi_n}^{\alpha_n},$$

где се сумирање врши по свим пермутацијама π скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Нека је $a = x^3$, $b = y^3$ и $c = z^3$. Тада је $xyz = 1$, па је дата неједнакост еквивалентна следећој хомогеној неједнакости

$$\frac{1}{x^9(y^3+z^3)} + \frac{1}{y^9(z^3+x^3)} + \frac{1}{z^9(x^3+y^3)} \geqslant \frac{3}{2x^4y^4z^4}.$$

После ослобађања од разломака добијамо еквивалентну неједнакост

$$T_{(12,12,0)}(x,y,z) + 2T_{(12,9,3)}(x,y,z) + T_{(9,9,6)}(x,y,z) \geqslant 3T_{(11,8,5)}(x,y,z) + T_{(8,8,8)}(x,y,z).$$

Она је задовољена јер је на основу Мјурхедове теореме

$$\begin{aligned} T_{(12,12,0)}(x,y,z) &\geqslant T_{(11,8,5)}(x,y,z), \\ T_{(12,9,3)}(x,y,z) &\geqslant T_{(11,8,5)}(x,y,z), \\ T_{(9,9,6)}(x,y,z) &\geqslant T_{(8,8,8)}(x,y,z). \end{aligned}$$

Треће решење. Функција $f\colon (0,+\infty)^3 \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ дефинисана са

$$f(x,y,z,t) = \frac{x^t}{y+z} + \frac{y^t}{z+x} + \frac{z^t}{x+y}.$$

конвексна је по t. Ако је $xyz = 1$, онда важе следеће три неједнакости:

$$f(x,y,z,-1/2) \leqslant 3/2, \quad f(x,y,z,1) \geqslant 3/2, \quad f(x,y,z,-2) \geqslant 3/2.$$

Заиста

$$\begin{aligned} f\left(x,y,z,-\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{x}\,(y+z)} + \frac{1}{\sqrt{y}\,(z+x)} + \frac{1}{\sqrt{z}\,(x+y)} \\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{y}\cdot 2\sqrt{zx}} + \frac{1}{\sqrt{z}\cdot 2\sqrt{xy}} = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x,y,z,1) &= \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = \frac{x+y+z}{y+z} + \frac{x+y+z}{z+x} + \frac{x+y+z}{x+y} - 3 \\ &= \frac{1}{2}[(y+z)+(z+x)+(x+y)]\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}\right) - 3 \\ &\geqslant \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

а како је $f(x,y,z,-t) = f(1/x,1/y,1/z,t-1)$, за $xyz = 1$, то је

$$f(x,y,z,-2) = f\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z},1\right) \geqslant \frac{3}{2}.$$

Следи да је $f(x,y,z,t) \geqslant 3/2$, ако је $xyz = 1$ и $t \leqslant -2$ или $t \geqslant 1$.

Напомена. Може се доказати да за $-2 < t < 1$ не постоји позитиван број који минорира функцију $f(x,y,z,t)$ на скупу тројки позитивних бројева (x,y,z) које задовољавају услов $xyz = 1$.

Четврто решење (Ђорђе Дугошија). Функција $g\colon \mathbf{R}\times(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ дефинисана са $g(u,v)=u^2/v$ је конвексна. Нека је $x=1/a$, $y=1/b$ и $z=1/c$. Тада је $xyz=1$, па имамо

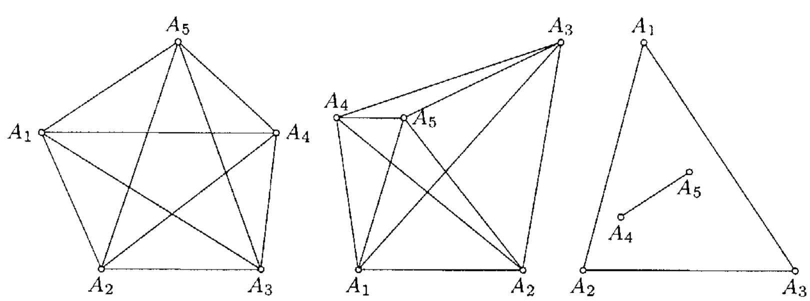
$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$$
$$=g(x,y+z)+g(y,z+x)+g(z,x+y)\geqslant 3g\left(\frac{x+y+z}{3},\frac{2(x+y+z)}{3}\right)$$
$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{x+y+z}{3}\geqslant\frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz}\geqslant\frac{3}{2}.$$

ИМО '95.3.

За је $n=4$ услове задатка задовољавају темена квадрата A_1, A_2, A_3 и A_4 и бројеви $p_1=p_2=p_3=p_4=1/6$. Доказаћемо да никојих пет тачака у равни не задовољавају услове задатка.

Претпоставимо да пет тачака у равни A_1, A_2, A_3, A_4 и A_5 и пет реалних бројева p_1, p_2, p_3, p_4 и p_5 задовољавају услове задатка. Ако је $A_iA_jA_kA_l$ конвексан четвороугао, онда је $S(A_lA_iA_j)+S(A_jA_kA_l)=S(A_iA_jA_k)+S(A_kA_lA_i)$, што повлачи $p_i+p_k=p_j+p_l$. Ако тачка A_l лежи унутар троугла $A_iA_jA_k$, онда је $S(A_iA_jA_k)=S(A_iA_jA_l)+S(A_jA_kA_l)+S(A_kA_iA_l)$, што повлачи $p_i+p_j+p_k+3p_l=0$. Разматраћемо три случаја.

Прво претпоставимо да је конвексан омотач разматраног скупа тачака петоугао $A_1A_2A_3A_4A_5$. Четвороуглови $A_1A_2A_3A_4$ и $A_1A_2A_3A_5$ су конвексни. Зато је $p_1+p_3=p_2+p_4$ и $p_1+p_3=p_2+p_5$ што повлачи $p_4=p_5$. Одавде добијамо да је $S(A_1A_2A_4)=S(A_1A_2A_5)$, а одатле да је $A_1A_2\parallel A_4A_5$. На сличан начин можемо добити да је $A_2A_3\parallel A_4A_5$. Следи да су тачке A_1, A_2 и A_3 колинеарне, што је противно претпоставци.



Сл. 22

Даље, претпоставимо да је конвексан омотач разматраног скупа тачака четвороугао $A_1A_2A_3A_4$. Можемо претпоставити да тачка A_5 лежи унутар троугла $A_3A_4A_1$. Четвороуглови $A_1A_2A_3A_4$ и $A_1A_2A_3A_5$ су конвексни, а то нас води у исту контрадикцију до које смо дошли у првом случају.

На крају, претпоставимо да је конвексан омотач разматраног скупа тачака троугао $A_1A_2A_3$. Тачке A_4 и A_5 леже унутар троугла $A_1A_2A_3$. Зато је $p_1+p_2+p_3+3p_4=p_1+p_2+p_3+3p_5$, што повлачи $p_4=p_5$. То води у исту контрадикцију до које смо дошли у претходна два случаја.

ИМО '95.4.

Прво решење. Други услов је еквивалентан са

$$(2x_i-x_{i-1})(x_ix_{i-1}-1)=0,$$

одакле следи да је $x_i=x_{i-1}/2$ или $x_i=1/x_{i-1}$ за $i=1,2,\dots,1995$. Доказаћемо методом математичке индукције по $i\geqslant 0$ да је $x_i=2^{k_i}x_0^{\varepsilon_i}$, за неко $k_i\in\mathbf{Z}$, $|k_i|\leqslant i$, и $\varepsilon_i=(-1)^{k_i+i}$. За $i=0$ тврђење важи ако се узме да је $k_i=0$. Нека тврђење важи за $i-1$, $i>0$. Ако је $x_i=x_{i-1}/2$ ставимо да је $k_i=k_{i-1}-1$ и $\varepsilon_i=\varepsilon_{i-1}$, а ако је $x_i=1/x_{i-1}$ ставимо да је $k_i=-k_{i-1}$ и $\varepsilon_i=-\varepsilon_{i-1}$. У оба случаја биће $|k_i|\leqslant i$, и $\varepsilon_i=(-1)^{k_i+i}$. Дакле, $x_0=x_{1995}=2^kx_0^{\varepsilon}$, где је $k\in\mathbf{Z}$, $|k|\leqslant 1995$, и $\varepsilon=(-1)^{k+1995}$. Ако би било $\varepsilon=1$ онда би k било непарно и $x_0=2^kx_0$, што је немогуће. Дакле имамо да је $\varepsilon=-1$, што повлачи да је k парно. Следи да је $k\leqslant 1994$ и да је $x_0=2^kx_0^{-1}$. Одавде добијамо да је $x_0^2\leqslant 2^{1994}$, тј. да је $x_0\leqslant 2^{997}$. Низ задат са $x_i=2^{997-i}$ за $i=0,1,2,\dots,1994$ и $x_{1995}=2^{997}$ задовољава услове зататкa. Дакле, максимално x_0 је 2^{997}.

Друго решење. Други услов је еквивалентан са

$$(2x_i-x_{i-1})(x_ix_{i-1}-1)=0,$$

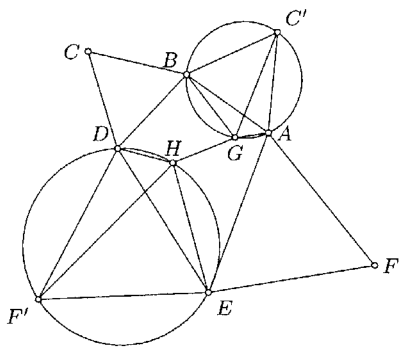
одакле следи да је $x_i=x_{i-1}/2$ или $x_i=1/x_{i-1}$ за $i=1,2,\dots,1995$. Докажимо да бар један члан низа мора бити једнак 1. Претпоставимо да то није тачно. Тада сви чланови низа леже у скупу $(0,1)\cup(1,+\infty)$, који може да се представи као унија дисјунктних интервала

$$\cdots\cup\left[\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)\cup\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{1}{2},1\right)\cup(1,2]\cup(2,4]\cup(4,8]\cup\cdots$$

Обојимо ове интервале наизменично црном и белом бојом. Узастопни чланови низа x_i припадају интервалима супротних боја. Како је 1995 непаран број, x_0 и x_{1995} припадају интервалима различитих боја, а то је противно претпоставци да су они једнаки. Дакле за неко $k\in\mathbf{Z}$, $0\leqslant k\leqslant 1995$, $x_k=1$. Нека је $t_i=|\log_2 x_i|$. Лако је видети да је $t_i-t_{i-1}\in\{-1,0,1\}$. Како је $t_k=0$, то је $t_0\leqslant k$ и $t_{1995}\leqslant 1995-k$. Један од бројева k и $1995-k$ није већи од 997. Дакле $t_0=t_{1995}\leqslant 997$, одакле следи да је $x_0\leqslant 2^{997}$. Низ задат са $x_i=2^{997-i}$ за $i=0,1,2,\dots,1994$ и $x_{1995}=2^{997}$ задовољава услове задатка. Дакле, максимално x_0 је 2^{997}.

ИМО '95.5.

Приметимо да су BCD и EFA једнакостранични троуглови. Четвороугао $ABDE$ је делтоид, а права BE је његова оса симетрије. Нека су C' и F' тачке



Сл. 23

симетричне тачкама C и F у односу на праву BE. Троуглови ABC' и DEF' су једнакостранични, а тачке G и H леже на њиховим описаним круговима. Према познатој последици Птолемејеве теореме, $AG + GB = C'G$ и $DH + HE = HF'$. Одавде следи да је

$$CF = C'F' \leqslant C'G + CH + HF' = AG + GB + GH + DH + HE.$$

ИМО '95.6.

Прво решење. Уместо скупа $\{1, 2, \ldots, 2p\}$, разматраћемо скуп $M = \{0, 1, \ldots, 2p-1\}$. Нека је $K = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ и $L = \{p, p+1, \ldots, 2p-1\}$; $M = K \cup L$. Ако је $A \subset M$, са $|A|$ и $\sigma(A)$ ћемо означавати број елемената скупа A и њихов збир. Означимо са C_p фамилију p-елементних подскупова скупа M. Пресликавање $T\colon C_p \to C_p$ дефинишемо са

$$T(A) = \{\, x+1 \mid x \in A \cap K \,\} \cup (A \cap L),$$

где подразумевамо сабирање по модулу p. Ово пресликавање очигледно има две фиксне тачке: K и L. Нека је $A \in C_p \setminus \{K, L\}$. Ако је $k = |A \cap K|$, онда је $1 \leqslant k \leqslant p-1$. Како је

$$\sigma(T^i(A)) = \sigma(A) + ik, \qquad i = 0, 1, \ldots, p-1,$$

бројеви $\sigma(T^i(A))$, $i = 0, 1, \ldots, p-1$, формирају потпун систем остатака по модулу p. Зато су скупови

$$A,\ T(A),\ T^2(A),\ \ldots,\ T^{p-1}(A)$$

различити међу собом и тачно један од њих има збир елемената дељив са p. Следи да се орбите пресликавања T које не садрже фиксне тачке K и L, састоје од по p скупова од којих један има збир елемената дељив са p. Приметимо да је $\sigma(K) \equiv \sigma(L) \equiv 0 \pmod p$. Из претходних чињеница следи да је тражени број једнак

$$\frac{1}{p}\left[\binom{2p}{p} - 2\right] + 2.$$

Друго решење. Уместо скупа $\{1, 2, \ldots, 2p\}$, разматраћемо скуп $M = \{0, 1, \ldots, 2p-1\}$. Ако је $A \subset M$, са $|A|$ и $\sigma(A)$ ћемо означавати број елемената скупа A и њихов збир. Уводимо ознаке

$$\begin{aligned} a_k &= |\,\{\, A \subset M \mid |A| = k,\, p \mid \sigma(A) \,\}\,|, \\ b_k &= |\,\{\, A \subset M \mid |A| = k,\, p \mid \sigma(A),\, 0 \notin A \,\}\,|, \\ c_k &= |\,\{\, A \subset M \mid |A| = k,\, p \mid \sigma(A),\, 0 \in A \,\}\,|, \end{aligned}$$

где је $k = 1, 2, \ldots, p$.

Нека је $T(A) = \{x + 1 \mid x \in A\}$, за $A \subset M$, где се подразумева сабирање по модулу $2p$. Тада је

$$\sigma(T^i(A)) = \sigma(A) + ik, \quad i = 0, 1, \ldots, 2p-1,$$

где је $k = |A|$. Нека је $k < p$. Ако је $T(A) = A$, онда скупови

$$A,\ T(A),\ T^2(A),\ \ldots,\ T^{p-1}(A)$$

формирају једну орбиту пресликавања T, и међу њима тачно један има збир елемената дељив са p. Ако је $T(A) \neq A$, онда скупови

$$A,\ T(A),\ T^2(A),\ \ldots,\ T^{2p-1}(A)$$

формирају једну орбиту пресликавања T, и међу њима тачно два имају збир елемената дељив са p. Из претходне две чињенице и

$$|\,\{\, A \subset M \mid |A| = k \,\}\,| = \binom{2p}{k}$$

следи да је $a_k = \dfrac{1}{p}\dbinom{2p}{k}$, $k = 1, 2, \ldots, p-1$.

Нека је $C(A) = M \setminus A$, за $A \subset M$, $|A| = p$. Имамо да $p \mid \sigma(C(A))$ ако и само ако $p \mid \sigma(A)$. Одавде и из чињенице да тачно један од скупова A и $C(A)$ садржи 0 следи да је $b_p = c_p$.

Следеће чињенице се лако доказују:

$$\begin{aligned} &b_1 = c_1 = 1; \\ &a_k = b_k + c_k, \quad k = 1, 2, \ldots, p; \\ &c_k = b_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, p; \end{aligned}$$

уз додатну дефиницију $b_0 = 1$.

Низ b_k одређујемо решавањем рекурентне једначине

$$b_k + b_{k-1} = \frac{1}{p}\binom{2p}{k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, p-1; \quad b_0 = 1.$$

Из

$$\begin{aligned} b_k - (-1)^k &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i}[b_i + b_{i-1}] = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}\binom{2p}{i} \\ &= \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}\left[\binom{2p-1}{i} + \binom{2p-1}{i-1}\right] = \frac{1}{p}\left[\binom{2p-1}{k} - (-1)^k\right] \end{aligned}$$

следи да је

$$b_k = \frac{1}{p}\left[\binom{2p-1}{k} - (-1)^k\right] + (-1)^k$$

за $k = 1, 2, \ldots, p-1$. Ова једнакост важи и за $k = 0$. Како је $c_k = b_{k-1}$, то је

$$c_k = \frac{1}{p}\left[\binom{2p-1}{k-1} + (-1)^k\right] - (-1)^k$$

за $k = 1, 2, \ldots, p$. Одавде и из претходних релација можемо наћи a_p:

$$a_p = b_p + c_p = 2c_p = \frac{2}{p}\left[\binom{2p-1}{p-1} - 1\right] - 2 = \frac{1}{p}\left[\binom{2p}{p} - 2\right] + 2.$$

Треће решење (Ngo Dac Tuan). Означимо са S_k, $k = 1, 2, \ldots, p$, фамилију k-елементних подскупова скупа $\{1, 2, \ldots, 2p\}$. Означимо са M_k, $k = 1, 2, \ldots, p$, фамилију p-елементних мултискупова који садрже по k различитих елемената скупа $\{1, 2, \ldots, 2p\}$, од којих се највише један појављује више од једанпут, и којима је збир свих p елемената дељив са p. Нека је $k < p$. За $X \in S_k$ означимо са s збир елемената скупа X. Како конгруенција $(p-k)x + s \equiv 0 \pmod{p}$ има тачно два решења у скупу $\{1, 2, \ldots, 2p\}$, то се скуп X може на тачно два начина допунити до мултискупа $Y \in M_k \cup M_{k+1}$. Сваки мултискуп $Y \in M_k$ може да се добије допуњавањем тачно једног скупа из S_k. Ако је $k < p-1$, сваки мултискуп $Y \in M_{k+1}$ може да се добије допуњавањем тачно једног скупа из S_k. Сваки мултискуп $Y \in M_p$ може да се добије допуњавањем тачно p скупова из S_{p-1}. Из ових чињеница следи да је

$$|M_k| + |M_{k+1}| = 2|S_k| = 2\binom{2p}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots, p-2;$$
$$|M_{p-1}| + p|M_p| = 2|S_{p-1}| = 2\binom{2p}{p-1}.$$

Лако је видети да је $|M_1| = 2p$. На основу ових релација имамо да је

$$\begin{aligned} p|M_p| - 2p &= p|M_p| + |M_{p-1}| + \sum_{k=1}^{p-2}(-1)^k[|M_{k+1}| + |M_k|] \\ &= 2\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^k\binom{2p}{k} = 2\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^k\left[\binom{2p-1}{k} + \binom{2p-1}{k-1}\right] \\ &= 2\left[\binom{2p-1}{p-1} - \binom{2p-1}{0}\right] = \binom{2p}{p} - 2, \end{aligned}$$

одакле следи

$$|M_p| = \frac{1}{p}\left[\binom{2p}{p} - 2\right] + 2.$$

Ово је број који је требало наћи.

Четврто решење (Roberto Dvornicich, Николай Николов). Нека је $\omega = \cos\dfrac{2\pi}{p} + i\sin\dfrac{2\pi}{p}$. Имамо да је

$$\prod_{i=1}^{2p}(x-\omega^i) = \left(\prod_{i=1}^{p}(x-\omega^i)\right)^2 = (x^p-1)^2 = x^{2p} - 2x^p + 1.$$

Упоређивањем коефицијената уз x^p добијамо да је

$$2 = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant 2p} \omega^{i_1+\cdots+i_p} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i\omega^i,$$

где је a_i број p-елементних подскупова $\{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ од $\{1,2,\dots,2p\}$ за које је

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_p \equiv i \pmod p.$$

Како је $1 + x + \cdots + x^{p-1}$ минимални полином за ω над $\mathbf{Q}$, следи да је

$$(a_0 - 2) + \sum_{i=1}^{p-1} a_i x^i = \mathrm{const}\cdot(1 + x + \cdots + x^{p-1}).$$

Одавде добијамо да је $a_0 - 2 = a_1 = a_2 = \cdots = a_{p-1}$, што, заједно са

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{p-1} = \binom{2p}{p}$$

повлачи да је $a_0 = \dfrac{1}{p}\left[\dbinom{2p}{p} - 2\right] + 2$.

Пето решење. Разматраћемо полином

$$F(x,y) = \sum c_{ks}x^ky^s = (1+xy)(1+xy^2)\cdots(1+xy^{2p}),$$

где је c_{ks} број k-елементних подскупова скупа $\{1,2,\dots,2p\}$ којима је збир елемената једнак s. Број који треба да одредимо једнак је $\sum_{p|s} c_{ks}$. Нека је $\omega = \cos\dfrac{2\pi}{p} + i\sin\dfrac{2\pi}{p}$. Тада је

$$\sum_{i=0}^{p-1}\omega^{si} = \begin{cases} p, & \text{за } p \mid s,\\ 0, & \text{за } p \nmid s.\end{cases}$$

Због тога је

$$\sum_{i=0}^{p-1} F(x,\omega^i) = \sum c_{ks}x^k \sum_{i=0}^{p-1}\omega^{si} = p\sum_{p|s} c_{ks}x^k,$$

па је зато коефицијент уз x^p у овој суми једнак $p\sum_{p|s} c_{ps}$. С друге стране, како је

$$F(x,\omega^i) = \prod_{j=1}^{p}(1+x\omega^{ij}) = \left(\prod_{j=0}^{p-1}(1+x\omega^{ij})\right)^2 = \begin{cases} (1+x^p)^2, & \text{за } j\neq 0,\\ (1+x)^{2p}, & \text{за } j = 0,\end{cases}$$

то је

$$\sum_{i=0}^{p-1} F(x,\omega^i) = (p-1)(1+x^p)^2 + (1+x)^{2p},$$

па је зато коефицијент уз x^p у овој суми једнак $2(p-1)+\binom{2p}{p}$. Упоређивањем ова два резултата добијамо да је тражени број једнак

$$\frac{1}{p}\left[\binom{2p}{p}-2\right]+2.$$

БМО ’84.1.

Прво решење. Неједнакост дата у задатку може се, с обзиром на услов $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 1$, записати у облику

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2-a_k} \geqslant \frac{n}{2n-1}. \tag{1}$$

Како је $\dfrac{a_k}{2-a_k} = \dfrac{a_k-2+2}{2-a_k} = 2\,\dfrac{1}{2-a_k} - 1$, та неједнакост је еквивалентна са

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2-a_k} - n \geqslant \frac{n}{2n-1},$$

тј. са

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2-a_k} \geqslant \frac{n^2}{2n-1}.$$

Ову, пак, неједнакост добијамо ако на бројеве $2-a_k>0$, $k=1,2,\ldots,n$, применимо неједнакост између хармонијске и аритметичке средине:

$$\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2-a_k}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(2-a_k) = \frac{2n-1}{n}.$$

Друго решење (Предраг Тановић). Функција $f(x) = \dfrac{x}{2-x}$ је конвексна на $[0,1]$, па се неједнакост (1) може добити применом Јенсенове неједнакости:

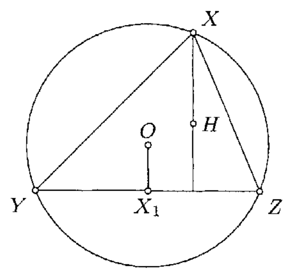
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2-a_k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k) \geqslant f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n-1}.$$

БМО ’84.2.

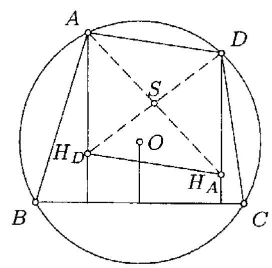
Прво решење. Доказаћемо да су четвороуглови ABH_AH_B, BCH_BH_C, CDH_CH_D и DAH_DH_A паралелограми, одакле ће следити да су четвороуглови $ABCD$ и $H_AH_BH_CH_D$ међусобно централно симетрични (у односу на заједничко средиште S дијагонала AH_A, BH_B, CH_C и DH_D тих паралелограма).

Користићемо следећу познату чињеницу: Ако је O средиште описаног круга, а H ортоцентар троугла XYZ и X_1 средиште странице YZ, тада је $XH = 2OX_1$ (и, наравно, $XH \parallel OX_1$), сл. 24.

Примењена на троуглове BCD и ABC, сл. 25, ова чињеница има за непосредну последицу да је $DH_A = AH_D$ и $DH_A \parallel AH_D$, што значи да је четвороугао DAH_DH_A паралелограм. Слично се доказује да су и остала три наведена четвороугла паралелограми.



Сл. 24



Сл. 25

Приметимо да се специјални случајеви кад су, на пример, углови $\measuredangle ADC$ и $\measuredangle ABC$ прави (и према томе $B = H_D$) могу размотрити на још једноставнији начин, што препуштамо читаоцу.

Друго решење.

Лема. Ако су O и H центар описаног круга и ортоцентар троугла ABC, онда је $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Доказ. Нека је H тачка чији је вектор положаја у односу на O дат са $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Тада је $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) = OB^2 - OC^2 = 0$. Следи $HA \perp BC$. На сличан начин се доказује да је $HB \perp CA$ и $HC \perp AB$. Дакле H је ортоцентар троугла ABC. ∎

Нека су $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{h}_a$, $\vec{h}_b$, $\vec{h}_c$ и $\vec{h}_d$ вектори положаја тачаха A, B, C, D, H_A, H_B, H_C и H_D у односу на тачку O. Имамо да је

$$\vec{h}_a = \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}, \quad \vec{h}_b = \vec{a} + \vec{c} + \vec{d}, \quad \vec{h}_c = \vec{a} + \vec{b} + \vec{d}, \quad \vec{h}_d = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

Нека је S тачка чији је вектор положаја у односу на тачку O дат са $\vec{s} = \dfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$. Како је $\vec{h}_a - \vec{s} = -(\vec{a} - \vec{s})$, тачке H_A и A су симетричне у односу на тачку S. Даље закључујемо као у првом решењу.

БМО '84.3.

Нека је $5^m = \overline{a_k \ldots a_0}$. Треба доказати да је за неко n и за неке цифре a_{k+1}, $\ldots$, a_l испуњено $5^n = \overline{a_l \ldots a_k \ldots a_0}$, што је еквивалентно са

(1) $$5^n - 5^m \equiv 0 \pmod{10^{k+1}}.$$

При том је јасно да је $k+1 \leqslant m$. Према томе је $5^n - 5^m$ дељиво са 5^{k+1} за све $n > m$. Дакле, да бисмо доказали (1), још само треба да покажемо да постоји $n > m$ тако да је $5^n - 5^m$ дељиво са 2^{k+1}, тј. да је

$$5^{n-m} - 1 \equiv 0 \pmod{2^{k+1}}.$$

Како су 5 и 2^{k+1} узајамно прости бројеви, на основу Ојлерове теореме је

$$5^{\varphi(2^{k+1})} - 1 \equiv 0 \pmod{2^{k+1}},$$

па је довољно узети $n = m + \varphi(2^{k+1})$.

БМО '84.4.

Прво решење. Ако од половине збира све три једначине одузмемо другу једначину добићемо да је

$$ax = \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (x-z)^2 - (y-z)^2] = (x-y)(x-z).$$

На сличан начин можемо да добијемо да је

$$by = (y-x)(y-z), \qquad cz = (z-x)(z-y).$$

Ако је, на пример, $x \geqslant y \geqslant z$, онда је $by \leqslant 0$ и $cz \geqslant 0$. Дакле имамо да је $y \geqslant z$ и $y \leqslant 0 \leqslant z$. Следи да је $y = z = 0$. Из $ax = x^2$ следи да је $x = 0$ или $x = a$. Добили смо два решења датог система: $(0,0,0)$ и $(a,0,0)$. Разматрањем других распореда бројева x, y и z на реалној правој добићемо још два решења: $(0,b,0)$ и $(0,0,c)$.

Дати систем има четири реална решења: $(0,0,0)$, $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ и $(0,0,c)$.

Друго решење. Наћи ћемо сва решења датог система једначина у скупу комплексних бројева под претпоставком да су a, b и c комплексни бројеви.

Ако је $a = b = c = 0$ решења датог система једначина су тројке једнаких бројева (t,t,t), $t \in \mathbf{C}$.

Нека је један од бројева a, b и c различит од 0. Нека је, на пример, $c \neq 0$. Уводимо смену $x = z+u$, $y = z+v$. Дати систем једначина се трансформише у

$$\begin{cases} a(z+u) + b(z+v) = (u-v)^2 \\ b(z+v) + cz = v^2 \\ cz + a(z+u) = u^2 \end{cases} \tag{1}$$

Ако од прве једначине система (1) одузмемо другу и трећу, после сређивања добићемо $cz = uv$. Елиминацијом непознате z из друге и треће једначине добијамо

$$\begin{cases} (bc + (b+c)u - cv)v = 0 \\ (ac + (a+c)v - cu)u = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Скуп решења система једначина (2) једнак је унији скупова решења следећа четири система једначина

(3)

$$\begin{cases} v=0 \\ u=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} v=0 \\ cu-(a+c)v=ac \end{cases}, \quad \begin{cases} cv-(b+c)u=bc \\ u=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} cv-(b+c)u=bc \\ cu-(a+c)v=ac \end{cases}.$$

Решења прва три од ова четири система једначина су $(0,0)$, $(a,0)$ и $(0,b)$. Детерминанта последњег система једначина једнака је $bc+ca+ab$. Ако је $bc+ca+ab\neq 0$, онда он има јединствено решење $(-c,-c)$. Ако је $bc+ca+ab=0$, једначине овог система су еквивалентне а други и трећи систем једначина су његове последице. Последњи систем у том случају има бесконачно много решења која се могу дати у параметарском облику $(ct, b+(b+c)t)$, $t\in\mathbf{C}$.

На основу претходног није тешко дати комплетну дискусију датог система једначина.

а) Ако је $bc+ca+ab\neq 0$, решења датог система једначина су: $(0,0,0)$, $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ и $(0,0,c)$.

б) Ако је $bc+ca+ab=0$ и ако није $a=b=c=0$, дати систем једначина има бесконачно много решења. Ако је, на пример, $c\neq 0$, решења су $(0,0,0)$ и $((b+c)(1+t)t, (b+(b+c)t)(1+t), (b+(b+c)t)t)$, $t\in\mathbf{C}$.

в) Ако је $a=b=c=0$ дати систем једначина има бесконачно много решења: (t,t,t), $t\in\mathbf{C}$.

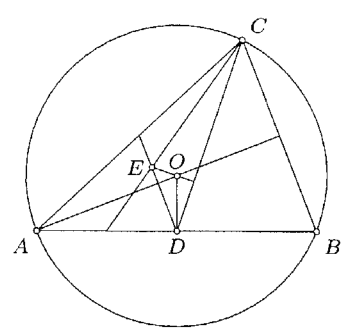
БМО '85.1.

Како је $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$, то је

$$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}) = \frac{1}{6}(3\,\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\,\overrightarrow{OC}),$$

сл. 26. Даље је

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\,\overrightarrow{OC}).$$



Сл. 26

Користећи да је $OA=OB=OC$, скаларним множењем претходних релација добијамо да је

$$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{12}(4\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-4\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC})=\frac{1}{3}\,\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=\frac{1}{3}\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CB}.$$

Зато је

$$OE\perp CD \iff OA\perp CB \iff AB=AC.$$

БМО '85.2.

Означимо $x = \sin a$, $y = \sin b$, $z = \sin c$, $t = \sin d$. Довољно је доказати да је, на пример, $x \in [0, 1/2]$. Користећи да је $\cos 2a = 1 - 2x^2$, $\cos 2b = 1 - 2y^2$, $\cos 2c = 1 - 2z^2$ и $\cos 2d = 1 - 2t^2$, из датих релација добијамо да је

$$(*)\qquad \begin{aligned} x + y + z + t &= 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 &\leqslant \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Применом неједнакости између аритметичке и квадратне средине следи да је

$$\frac{y+z+t}{3} \leqslant \sqrt{\frac{y^2+z^2+t^2}{3}}, \quad \text{тј.} \quad \frac{(y+z+t)^2}{3} \leqslant y^2 + z^2 + t^2.$$

Користећи релације $(*)$ сада добијамо

$$\frac{1}{3} \geqslant x^2 + (y^2 + z^2 + t^2) \geqslant x^2 + \frac{(y+z+t)^2}{3} = x^2 + \frac{(1-x)^2}{3},$$

одакле сређивањем $2x^2 - x \geqslant 0$, што и значи да је $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$.

БМО '85.3.

Докажимо најпре следеће помоћно тврђење.

Лема. Ако су p и q узајамно прости природни бројеви, тада је pq највећи природан број који се не може приказати у облику

$$pa + qb, \qquad a, b \in \mathbf{N}.$$

Треба доказати: 1° број pq се не може представити у наведеном облику; 2° сваки број $n > pq$ се може тако приказати.

1° Претпоставимо, супротно тврђењу, да постоје природни бројеви a и b, такви да је $pq = pa + qb$. Како су p и q узајамно прости, одатле следи да $p \mid b$ и $q \mid a$. При том је $b \neq p$ (иначе би било $a = 0$) и, слично, $a \neq q$. Зато је $p < b$ и $q < a$, па је

$$pq = pa + qb > pq + pq = 2pq,$$

што је немогуће.

2° Нека је $n > pq$. Нека је (a_0, b_0) произвољно целобројно решење Диофантове једначине $pa + qb = n$ (оно постоји јер су p и q узајамно прости). Опште решење те једначине је дато са

$$a = a_0 + qt, \quad b = b_0 - pt, \qquad t \in \mathbf{Z}.$$

Изаберимо t тако да је $0 < a \leqslant q$. Тада је $t \leqslant \dfrac{q - a_0}{q}$ и

$$b = b_0 - p\frac{q - a_0}{q} = \frac{a_0 p + b_0 q - pq}{q} = \frac{n - pq}{q} > 0,$$

чиме је доказано да се број n може репрезентовати на описани начин. ■

Напомена. Доказана лема се може уопштити на случај више природних бројева $p_1, p_2, \dots, p_n$, узајамно простих у паровима. Случај $n = 3$ је био један од задатака на ИМО '83 (в. [1]).

Стављајући у доказаном тврђењу $a = 19$ и $b = 85$ закључујемо да је $19 \cdot 85 = 1615$ највећи природан број који је, под условима датим у задатку, обојен зелено, тј. да су све веће целобројне тачке црвене. С друге стране, очигледно је да су сви цели бројеви мањи од $19 + 85 = 104$ зелени, при чему је сама тачка 104 црвена. Дакле, једини број који би могао да задовољава услове задатака јесте

$$A = \frac{1615 + 104}{2} = \frac{1719}{2}.$$

Докажимо да број A заиста има особину да су сваке две целобројне тачке, које су у односу на њега симетричне, разнобојне. Јасно је да је то довољно учинити за тачке n и $1719 - n$, где је $n \in \mathbf{Z}$, $104 < n < 1615$.

Претпоставимо да то није случај, тј. да су за неко такво n наведене тачке исто обојене и размотримо две могућности.

1° Тачке n и $1719 - n$ су црвене. Тада постоје природни бројеви a_1, a_2, b_1 и b_2, такви да је

$$n = 19a_1 + 85b_1, \quad 1719 - n = 19a_2 + 85b_2.$$

Сабирајући добијамо $1719 = 19(a_1 + a_2) + 85(b_1 + b_2)$, одакле, редуковањем по модулу 85, следи $19(a_1 + a_2) \equiv 19 \pmod{85}$, односно $a_1 + a_2 \equiv 1 \pmod{85}$. Како су a_1 и a_2 природни, добијамо $a_1 + a_2 \geqslant 86$, одакле је $1719 \geqslant 19 \cdot 86 + 85 \cdot 2 = 1804$, што је контрадикција.

2° Тачке n и $1719 - n$ су зелене. Слично као у доказу Леме, изаберимо решења (a_1, b_1) и (a_2, b_2) Диофантових једначина $19a + 85b = n$, односно $19a + 85b = 1719 - n$ за која су a_1, односно a_2 најмањи могући природни бројеви; за њих тада важи и $a_1 \leqslant 85$, $a_2 \leqslant 85$. У овом случају бројеви b_1 и b_2 морају бити непозитивни (јер су наведене тачке зелене). Из $1719 = 19(a_1 + a_2) + 85(b_1 + b_2)$, као под 1°, следи да је $a_1 + a_2 \equiv 1 \pmod{85}$, што у овом случају даје $a_1 + a_2 = 86$ и, заменом у претходну једначину, $b_1 + b_2 = 1$. Последње је, међутим, немогуће, због непозитивности бројева b_1 и b_2.

Тиме је показано да тачка $A = \dfrac{1719}{2}$ задовољава услове задатка.

БМО '85.4.

Размотримо следећа два случаја.

(а) Сваке две особе говоре бар један заједнички језик. Произвољна особа A говори с преостала 1984 човека неким језиком из скупа од датих пет језика, тако да постоји језик који говори бар $\left[\dfrac{1984}{5}\right] > 200$ учесника конгреса.

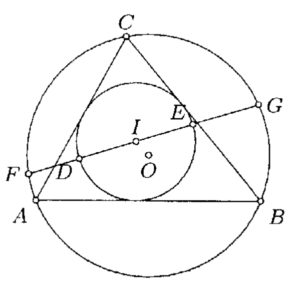
(б) Постоје две особе A и B које не говоре заједничким језиком. Тада, на основу услова задтака, сваки од преостала 1983 учесника говори заједничким језиком са бар једном од особа A и B. Према томе, бар 992 учесника говоре с једном од те две особе, рецимо са A. То значи да A говори истим језиком с још бар 199 учесника, јер би у противном могао говорити с највише $5 \cdot 188 < 992$ људи. Та група људи заједно с особом A чини тражених 200 учесника који говоре истим језиком.

БМО ’86.1.

Означимо са O и R центар и полупречник описаног круга троугла ABC. Користећи релације $DF = IF - r$, $EG = IG - r$ и $IF \cdot IG = R^2 - IO^2$ (потенција тачке у односу на круг), сл. 27, закључујемо да је неједнакост $DF \cdot EG \geqslant r^2$ коју доказујемо еквивалентна неједнакости

$$FG \leqslant \frac{R^2 - OI^2}{r}.$$

Ако искористимо Ојлерову формулу $IO^2 = R(R - 2r)$ за растојање између центара описаног и уписаног круга, последњу неједнакост можемо трансформисати у њој еквивалентну очигледну неједнакост $FG \leqslant 2R$.



Сл. 27

БМО ’86.2.

Нека је $\sigma(O, R)$ сфера описана око датог тетраедра. Користећи својство потенције тачке у односу на сферу (аналогно одговарајућем својству потенције у односу на круг које је коришћено у претходном задатку), добијамо да је

$$OE^2 = R^2 - AE \cdot BE$$

и слично за тачке F, G, H, K и L. Из релација датих у задатку онда следи да је $OE = OF = OG = OH = OK = OL$, тј. да наведене тачке леже на сфери са центром O и полупречником $\sqrt{R^2 - AE \cdot BE}$.

БМО ’86.3.

Приметимо најпре да из услова задатка следи да су сви бројеви $a_n \neq 0$. Из дате рекурентне везе произлази да за све $n \in \mathbf{N}$ важи

$$\frac{a_n^2 + a_{n+1}^2 + c}{a_n a_{n+1}} = \frac{a_n^2 + \left(\dfrac{a_n^2 + c}{a_{n-1}}\right)^2 + c}{a_n \dfrac{a_n^2 + c}{a_{n-1}}} = \frac{a_{n-1}^2 + a_n^2 + c}{a_{n-1} a_n},$$

одакле индукцијом следи да је израз $\dfrac{a_n^2+a_{n+1}^2+c}{a_n a_{n+1}}$ константан (не зависи од n) и вредност му је $\dfrac{a^2+b^2+c}{ab}$ – означимо ту константу са k. Тада је

$$a_{n+1}=\frac{a_n^2+c}{a_{n-1}}=\frac{a_{n-1}^2+a_n^2+c}{a_{n-1}a_n}a_n-a_{n-1}=ka_n-a_{n-1},\quad n\geqslant 2. \tag{1}$$

Претпоставимо да су бројеви a, b, k цели. Из претходне релације непосредно следи да су сви бројеви a_n цели.

Обрнуто, нека су за све $n\in\mathbf{N}$ бројеви a_n цели. Тада су $a_1=a$ и $a_2=b$ цели, а

$$k=\frac{a^2+b^2+c}{ab}=\frac{a+\dfrac{b^2+c}{a}}{b}=\frac{a_1+a_3}{a_2}$$

рационалан број, $k=\dfrac{p}{q}$, $p\in\mathbf{Z}$, $q\in\mathbf{N}$, $(p,q)=1$. Релација (1) може се написати у облику $pa_n=qa_{n-1}+qa_{n+1}$. Стављајући у њој редом $n=2,3,\ldots$, добија се да $q\mid a_n$ за $n\geqslant 2$, затим да $q^2\mid a_n$ за $n\geqslant 3$, $q^3\mid a_n$ за $n\geqslant 4$ итд. Дакле, $q^\alpha\mid a_n$ за све $n\geqslant \alpha+1$. Сада из $c=a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2$, $n\geqslant 2$, следи да је c цео број и да $q^{2\alpha}\mid c$ за свако $\alpha\in\mathbf{N}$, што је могуће једино за $q=1$. Дакле, $k=\dfrac{a^2+b^2+c}{ab}$ је цео број.

БМО '86.4.

(а) Означимо са P заједничку вредност површина троуглова TAB, TBC и TCA. Даље, нека права AT сече страницу BC у A', при чему је $BA'=a_1$, $A'C=a_2$ и нека су P_1 и P_2 површине троуглова $BA'T$ и $A'CT$, сл. 28. Троуглови ABA' и $AA'C$ имају заједничку висину, па је

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{P_{ABA'}}{P_{AA'C}}=\frac{P+P_1}{P+P_2}.$$

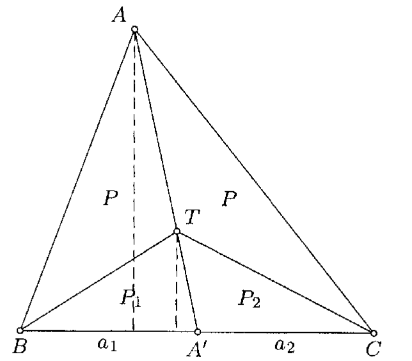
Слично је

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{P_{BA'T}}{P_{A'CT}}=\frac{P_1}{P_2}.$$

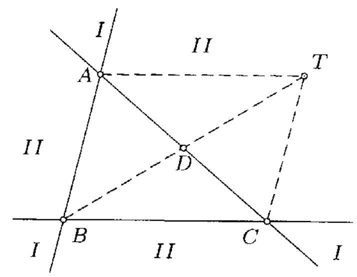
Комбиновањем претходних релација добија се $P_1=P_2$ и $a_1=a_2$. Дакле је AA' тежишна дуж; аналогно важи за остала темена, па је T тежиште троугла ABC.

Претпоставимо да троугао ABC није једнакостраничан. Нека је, на пример, $AB<AC$. Тачка A лежи са оне стране симетрале дужи BC са које и тачка B. Тачке A и T леже са исте стране симетрале дужи BC. Зато је и тачка T ближа тачки B него тачки C: $TB<TC$. Према томе, $AT+AB+TB<AT+AC+TC$, а то је противно претпоставци да троуглови ABT и ACT имају једнаке обиме. Дакле троугао ABC је једнакостраничан.

(б) Лако се проверава да тачка T не припада ниједној од правих AB, BC, CA, а такође ниједном од сектора означених са I на слици 29. Претпоставимо зато да



Сл. 28



Сл. 29

она, на пример, има положај као на тој слици и означимо са D пресек правих BT и AC. Из

$$P_{BCD}+P_{TDC}=P_{TAD}+P_{ABD}=P_{TDC}+P_{TAD}$$

следи $P_{BCD}=P_{TAD}$ и $P_{TDC}=P_{ABD}$. Одатле је $BD\cdot CD=AD\cdot TD$ и $BD\cdot AD=CD\cdot TD$. Из те две релације лако добијамо $BD=DT$ и $AD=CD$, тј. $ABCT$ је паралелограм. Користећи једнакост обима добијамо да су дијагонале тог паралелограма једнаке, тј. у питању је правоугаоник и троугао ABC је правоугли.

БМО '87.1.

Стављајући $y=0$ у дату релацију добијамо

$$f(x)=f(x)f(a)+f(0)f(a-x). \tag{1}$$

Специјално, за $x=0$ је $\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}f(a)+\dfrac{1}{2}f(a)$, одакле $f(a)=\dfrac{1}{2}$. Из (1) следи и $f(x)=f(a-x)$ за све x. Ако се то замени у дату релацију, она постаје

$$f(x+y)=2f(x)f(y). \tag{2}$$

Сада је $\dfrac{1}{2}=f(a)=2f(x)f(a-x)=2[f(x)]^2$, па је $f(x)=\pm\dfrac{1}{2}$. На основу (2), међутим, $f(x)=2f\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\geqslant 0$ за свако x, па закључујемо да је $f(x)=\dfrac{1}{2}$ за све $x\in\mathbf{R}$.

БМО '87.2.

Прво решење. Функција $f(t)=\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}$ је растућа и за свако $t\geqslant 1$ важи неједнакост $f(t)\geqslant f(1)=\sqrt{2}$. Одавде следи да је

$$0<b-a=\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}+\frac{2}{\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}}=\frac{2}{f(x)}+\frac{2}{f(y)}\leqslant 2\sqrt{2}<3.$$

Како су a и b неузастопни цели бројеви, то је $b-a=2$.

Квадрирањем датих релација добија се

$$a^2 = x - 1 + y - 1 + 2\sqrt{xy - x - y + 1}, \quad b^2 = x + 1 + y + 1 + 2\sqrt{xy + x + y + 1}.$$

Означимо $x + y = s$ и $xy = p$. Тада, коришћењем доказане једнакости $b = a + 2$, следи

$$a^2 + 2 - s = 2\sqrt{p - s + 1} \geqslant 0, \quad a^2 + 4a + 2 - s = 2\sqrt{p + s + 1}.$$

одакле се квадрирањем и одузимањем добија да је

$$a^3 + 2a^2 + 2a = (a + 1)s \leqslant (a + 1)(a^2 + 2).$$

Следи да је $a^2 \leqslant 2$ и, како је a природан број, $a = 1$. Одатле даље лако добијамо $s = 5/2$, $p = 25/16$ и $x = y = 5/4$.

Друго решење. Решићемо еквивалентан проблем: Ако је

$$u + v = a, \qquad \sqrt{u^2 + 2} + \sqrt{v^2 + 2} = b,$$

где су u, $v \in \mathbf{R}$, u, $v \geqslant 0$ и a, $b \in \mathbf{Z}$, $b - a > 1$, онда је $b = a + 2$ и $u = v = \dfrac{1}{2}$.

Функција $g\colon [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ задата са $g(t) = \sqrt{t^2 + 2}$ је конвексна. Из

$$b = g(u) + g(v) \leqslant g(a) + g(0) = \sqrt{a^2 + 2} + \sqrt{2} < a + 2\sqrt{2} < a + 3$$

следи да је $b = a + 2$. Из $a + 2 \leqslant \sqrt{a^2 + 2} + \sqrt{2}$ добијамо

$$2 - \sqrt{2} \leqslant \sqrt{a^2 + 2} - a = \frac{2}{\sqrt{a^2 + 2} + a},$$

а одатле $\sqrt{a^2 + 2} + a \leqslant 2 + \sqrt{2}$. Није тешко закључити да је $a = 1$. Рачунањем се добија да је

$$2f\left(\frac{u + v}{2}\right) = f(u) + f(v) = 3.$$

На основу Јенсенове неједнакости следи $u = v$. Дакле $u = v = \dfrac{1}{2}$.

БМО '87.3.

Прво решење. Непосредно се проверава да је функција

$$f(x) = \frac{\sin^{23} x}{\cos^{48} x}$$

строго растућа на интервалу $(0, \pi/2)$. Како је, по претпоставци, $f(\alpha/2) = f(\beta/2)$, то мора бити $\alpha = \beta$, одакле је $AC/BC = 1$.

Друго решење. Нека је $\alpha \neq \beta$, на пример, $0 < \alpha < \beta < \pi$. Тада је

$$0 < \sin\frac{\alpha}{2} < \sin\frac{\beta}{2}, \quad 0 < \cos\frac{\beta}{2} < \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Следи

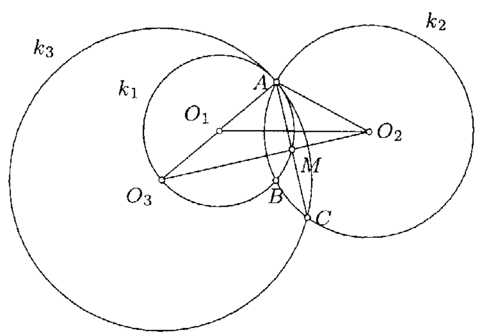
$$\sin^{23}\frac{\alpha}{2}\cos^{48}\frac{\beta}{2} < \sin^{23}\frac{\beta}{2}\cos^{48}\frac{\alpha}{2}.$$

Контрадикција! Дакле $\alpha = \beta$, па је $AC/BC = 1$.

БМО '87.4.

Решење Радета Тодоровића. Ако са k_3 означимо круг настао пресликавањем круга k_1 хомотетијом с центром A и коефицијентом 2, онда, будући да је k_1 садржао средиште дужи AC, k_3 ће сећи k_2 у C. Центар O_3 круга k_3 је на правој одређеној пречником O_1A круга k_1. Уочимо троуглове AO_1O_2 и AO_2O_3. Због $\measuredangle O_1AO_2 = \measuredangle O_2AO_3$ и $O_1A : AO_2 = 1 : \sqrt{2} = \sqrt{2} : 2 = AO_2 : AO_3$, они су слични (са коефицијентом $1 : \sqrt{2}$), па је и $O_2O_3 = \sqrt{2}\,O_1O_2 = 2\sqrt{2}$. Дакле, у троуглу AO_2O_3 имамо све странице, па се његова површина $P_{\triangle AO_2O_3} = \sqrt{7}/2$ добија помоћу Херонове формуле. Како је AC двострука висина из темена A тог троугла, следи

$$AC = 2 \cdot \frac{2P_{\triangle AO_2O_3}}{O_2O_3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}.$$



Сл. 30

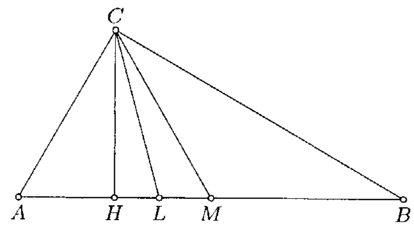
БМО '88.1.

Користићемо стандардне ознаке за странице троугла: $a = BC$, $b = CA$ и $c = AB$. Претпоставимо да је $a > b$. У том случају тачка L припада дужи AM, сл. 31. Из услова $S(LMC)/S(ABC) = 1 - \sqrt{3}/2$ добијамо да је $LM/AB = 1 - \sqrt{3}/2$. Имајући то у виду наћи ћемо a/b:

$$\frac{a}{b} = \frac{LB}{AL} = \frac{LM + MB}{AM - LM} = \frac{\dfrac{LM}{AB} + \dfrac{MB}{AB}}{\dfrac{AM}{AB} - \dfrac{LM}{AB}} = \frac{\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2} - \left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3}.$$

Из услова $S(HMC) : S(ABC) = 1 : 4$ следи да је H средиште дужи AM. Нека је h висина из темена C троугла ABC. Како је

$$\frac{HB^2}{AH^2} = \frac{a^2 - h^2}{b^2 - h^2} = \frac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 - \left(\dfrac{h}{b}\right)^2}{1 - \left(\dfrac{h}{b}\right)^2}, \qquad \text{то је} \qquad \frac{3 - \left(\dfrac{h}{b}\right)^2}{1 - \left(\dfrac{h}{b}\right)^2} = 9.$$



Сл. 31

Одавде се лако добија да је $h/b = \sqrt{3}/2$. Следи да је $\measuredangle A = 60°$. Троугао AMC је једнакостраничан. Зато је $MA = MB = MC$. Следи да је $\measuredangle C = 90°$. Сада није тешко израчунати да је $\measuredangle B = 30°$.

БМО '88.2.

Прво решење.

Лема. Нека је P полином две промењливе са комплексним коефицијентима.

а) Ако је $P(t,t) = 0$, онда је полином P дељив са $x - y$.

б) Ако је $P(t,-t) = 0$, онда је полином P дељив са $x + y$.

Доказ. Тврђење о дељењу полинома са остатком гласи: ако су F и G два полинома једне промењливе над неким пољем и ако је $G \neq 0$, онда постоје полиноми Q и Rтакви да је $F = GQ + R$ и да је при том $\deg R < \deg G$ или $R = 0$. Ако се проанализира доказ овог тврђења, видеће се да оно важи и под претпоставком да су F и G полиноми над неким интегралним доменом уколико је најстарији коефицијент у полиному G делилац јединице. Полином P две промењливе x и y може да се схвати као полином по једној промењливој x над прстеном полинома по промењливој y. Полином P може да се подели полиномом $x - y$. Том приликом се добија количник Q, полином две промењливе x и y, и остатак R. Ако полином R није 0 онда је он степена нула по промењливој x. Другим речима, R је полином једне промењливе y. Дакле полином P може да се представи у облику

$$P(x,y) = (x - y)Q(x,y) + R(y).$$

Ако претпоставимо да је $P(t,t) = 0$, из горње једнакости добијамо да је $R = 0$ (довољно је у њу уврстити $x = y = t$). Тиме смо доказали тврђење леме под а). Тврђење под б) може да се докаже на сличан начин. ■

Констатујмо неколико тривијалних чињеница. Ако два полинома задовољавају дату једначину, онда и њихов производ и количник задовољавају дату једначину (наравно, количник два полинома не мора бити полином). Константе 0 и 1 задовољавају дату једначину. Полиноми првог степена $x - y$ и $x + y$ задовољавају дату једначину.

Нека полином P различит од 0 задовољава дату једначину. Ако ставимо да је $a = x$, $b = 0$, $c = y$ и $d = 0$, добијамо да је

$$P(x,0)P(y,0) = P(xy,0).$$

Одавде није тешко закључити да је $P(x,0)=x^m$ за неко $m>0$. Ако ставимо да је $a=t$, $b=0$, $c=x$ и $d=y$ добијамо да је

$$t^m P(x,y)=P(t,0)P(x,y)=P(tx,ty).$$

Дакле полином P је хомоген.

Нека полином P различит од 0 задовољава дату једначину. Он се може представити у облику

$$P(x,y)=(x+y)^k(x-y)^l Q(x,y), \qquad k,l\geqslant 0,$$

где је Q полином који је различит од 0 и није дељив полиномима $x+y$ и $x-y$. Полином Q такође задовољава дату једначину. Он је хомоген полином. Означимо његов степен са m. Ако ставимо $a=x$, $b=y$, $c=y=1$, добијамо

$$Q(x,y)Q(1,1)=Q(x+y,x+y)=(x+y)^m Q(1,1).$$

Како је полином Q хомоген и није дељив са $x-y$, то је $Q(1,1)\neq 0$. Следи да је $Q(x,y)=(x+y)^m$ за неко $m\geqslant 0$. Како полином Q није дељив са $x+y$, то је $m=0$. Дакле $Q(x,y)=1$, а $P(x,y)=(x+y)^k(x-y)^l$.

Према томе скуп полинома који задовољавају дату једначину састоји се од нула полинома и полинома облика $P(x,y)=(x+y)^k(x-y)^l$, $k,l\geqslant 0$.

Друго решење. Нека је P полином две променљиве. Уводимо полином Q две променљиве са

$$Q(x,y)=P\left(\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2}\right).$$

Полином P можемо изразити преко полинома Q:

$$P(a,b)=Q(a+b,a-b).$$

Ово следи из чињенице да је $a+b=x$ и $a-b=y$ еквивалентно са $(x+y)/2=a$ и $(x-y)/2=b$. Доказаћемо да полином P задовољава једначину

$$P(a,b)P(c,d)=P(ac+bd,ad+bc), \tag{1}$$

ако и само ако полином Q задовољава једначину

$$Q(x,y)Q(u,v)=Q(xu,yv). \tag{2}$$

Претпоставимо да полином Q задовољава (2). Ставимо да је $a+b=x$, $a-b=y$, $c+d=u$ и $c-d=v$. Имамо да је $(ac+bd)+(ad+bc)=(a+b)(c+d)=xu$ и $(ac+bd)-(ad+bc)=(a-b)(c-d)=yv$. Зато важи $P(a,b)=Q(x,y)$, $P(c,d)=Q(u,v)$ и $P(ac+bd,ad+bc)=Q(xu,yv)$. Сада је очигледно да полином P задовољава (1).

Претпоставимо да полином P задовољава (1). Ставимо да је $(x+y)/2=a$, $(x-y)/2=b$, $(u+v)/2=c$, $(u-v)/2=d$. Како је $a+b=x$, $a-b=y$, $c+d=u$ и $c-d=v$, као и у претходном случају важе једнакости $Q(x,y)=P(a,b)$, $Q(u,v)=P(c,d)$ и $Q(xu,yv)=P(ac+bd,ad+bc)$. Сада је очигледно да полином Q задовољава (2).

Лако је видети да нула полином задовољава (2). Нека је Q полином који је различит од нуле и који задовољава једначину (2). Ако у (2) ставимо $y = v = 1$, добијамо

$$Q(x,1)Q(u,1) = Q(xu,1).$$

Одавде није тешко извести да је $Q(x,1) = x^k$, за неки цео број $k \geqslant 0$. На сличан начин може да се покаже да је $Q(1,y) = y^l$, за неки цео број $l \geqslant 0$. Следи да је

$$Q(x,y) = Q(x,1)Q(1,y) = x^k y^l,$$

где су $k, l \geqslant 0$. Лако се проверава да сваки полином овог типа задовољава једначину (2).

Према томе скуп полинома који задовољавају једначину (1) састоји се од нула полинома и полинома облика $P(x,y) = (x+y)^k (x-y)^l$, $k, l \geqslant 0$.

У књизи [6] формулисан је проблем аналоган претходном: Наћи све полиноме P три променљиве, такве да је

$$P(a,b,c)P(d,e,f) = P(ad+bf+ce, ae+bd+cf, af+be+cd). \tag{3}$$

Хипотеза аутора књиге [6] је да су тражени полиноми нула полином и полиноми облика

$$P(x,y,z) = (x+y+z)^k (x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)^l,$$

где су k и l ненегативни цели бројеви. Даћемо комплетно решење овог проблема.

Нека је P полином три променљиве. Уводимо полином Q три променљиве са

$$Q(x,y,z) = P\left(\frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y\omega^2+z\omega}{3}, \frac{x+y\omega+z\omega^2}{3}\right),$$

где је $\omega = (-1+i\sqrt{3})/2$ ($\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$). Полином P можемо изразити преко полинома Q:

$$P(a,b,c) = Q(a+b+c, a+b\omega+c\omega^2, a+b\omega^2+c\omega).$$

Ово следи из чињенице да је

$$a+b+c = x, a+b\omega+c\omega^2 = y, a+b\omega^2+c\omega = z$$

еквивалентно са

$$\frac{x+y+z}{3} = a, \quad \frac{x+y\omega^2+z\omega}{3} = b, \quad \frac{x+y\omega+z\omega^2}{3} = c.$$

Доказаћемо да полином P задовољава једначину (3) ако и само ако полином Q задовољава једначину

$$Q(x,y,z)Q(u,v,w) = Q(xu,yv,zw). \tag{4}$$

Претпоставимо да полином Q задовољава (4). Ставимо да је

$$a+b+c=x,\quad a+b\omega+c\omega^2=y,\quad a+b\omega^2+c\omega=z,$$
$$d+e+f=u,\quad d+e\omega+f\omega^2=v,\quad d+e\omega^2+f\omega=w.$$

Имамо да је

$$\begin{aligned}(ad+bf+ce)+(ae+bd+cf)+(af+be+cd)&\\ =(a+b+c)(d+e+f)&=xu,\\ (ad+bf+ce)+(ae+bd+cf)\omega+(af+be+cd)\omega^2&\\ =(a+b\omega+c\omega^2)(d+e\omega+f\omega^2)&=yv,\\ (ad+bf+ce)+(ae+bd+cf)\omega^2+(af+be+cd)\omega&\\ =(a+b\omega^2+c\omega)(d+e\omega^2+f\omega)&=zw.\end{aligned}$$

Зато важи

$$P(a,b,c)=Q(x,y,z),\quad P(d,e,f)=Q(u,v,w),$$
$$P(ad+bf+ce,ae+bd+cf,af+be+cd)=Q(xu,yv,zw).$$

Сада је очигледно да полином P задовољава (3). Претпоставимо да полином P задовољава (3). Ставимо да је

$$\frac{x+y+z}{3}=a\quad \frac{x+y\omega^2+z\omega}{3}=b,\quad \frac{x+y\omega+z\omega^2}{3}=c,$$
$$\frac{u+v+w}{3}=d\quad \frac{u+v\omega^2+w\omega}{3}=e,\quad \frac{u+v\omega+w\omega^2}{3}=f.$$

Како је

$$a+b+c=x,\quad a+b\omega+c\omega^2=y,\quad a+b\omega^2+c\omega=z,$$
$$d+e+f=u,\quad d+e\omega+f\omega^2=v,\quad d+e\omega^2+f\omega=w,$$

као и у претходном случају важе једнакости

$$Q(x,y,z)=P(a,b,c),\quad Q(u,v,w)=P(d,e,f),$$
$$Q(xu,yv,zw)=P(ad+bf+ce,ae+bd+cf,af+be+cd).$$

Сада је очигледно да полином Q задовољава (4). Лако је видети да нула полином задовољава (4). Нека је Q полином који је различит од нуле и који задовољава једначину (4). Ако у (4) ставимо $y=z=v=w=1$, добијамо

$$Q(x,1,1)Q(u,1,1)=Q(xu,1,1).$$

Одавде није тешко извести да је $Q(x,1,1)=x^k$, за неки цео број $k\geqslant 0$. На сличан начин може да се покаже да је $Q(1,y,1)=y^l$, за неки цео број $l\geqslant 0$, и да је $Q(1,1,z)=z^m$, за неки цео број $m\geqslant 0$. Следи да је

$$Q(x,y,z)=Q(x,1,1)Q(1,y,1)Q(1,1,z)=x^ky^lz^m,$$

где су $k, l, m \geqslant 0$. Лако се проверава да сваки полином овог типа задовољава једначину (4).

Према томе скуп полинома који задовољавају дату једначину састоји се од нула полинома и полинома облика

$$P(x,y,z) = (x+y+z)^k(x+y\omega+z\omega^2)^l(x+y\omega^2+z\omega)^m, \qquad k,l,m \geqslant 0.$$

Као што видимо, хипотеза аутора књиге [6] је тачна уколико се разматрају само полиноми са реалним коефицијентима. У општем случају она није тачна.

БМО '88.3.

Означимо са A_{ij} средиште дужи A_iA_j, $1 \leqslant i,j \leqslant 4$, $i \neq j$. Како је $A_{12}A_{13}A_{34}A_{24}$ паралелограм, то је

$$A_{12}A_{34}^2 + A_{13}A_{24}^2 = 2\,A_{12}A_{24}^2 + 2\,A_{12}A_{13}^2,$$

што заједно са $A_{12}A_{24} = \dfrac{1}{2}\,A_1A_4$ и $A_{12}A_{13} = \dfrac{1}{2}\,A_2A_3$, даје

$$A_{12}A_{34}^2 + A_{13}A_{24}^2 = \frac{1}{2}\,A_1A_4^2 + \frac{1}{2}\,A_2A_3^2.$$

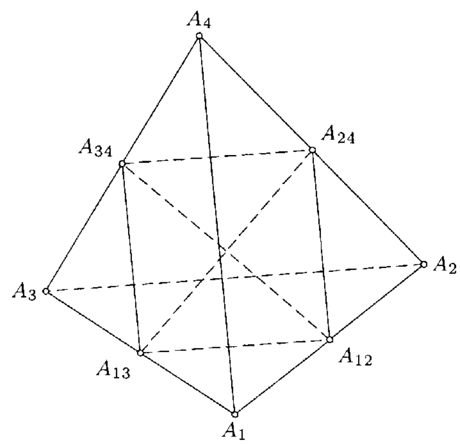
На сличан начин доказујемо да је

$$A_{12}A_{34}^2 + A_{14}A_{23}^2 = \frac{1}{2}\,A_1A_3^2 + \frac{1}{2}\,A_2A_4^2,$$

$$A_{13}A_{24}^2 + A_{14}A_{23}^2 = \frac{1}{2}\,A_1A_2^2 + \frac{1}{2}\,A_3A_4^2.$$

Сабирањем ове три једнакости и дељењем збира са 2 добијамо да је

$$A_{12}A_{34}^2 + A_{13}A_{24}^2 + A_{14}A_{23}^2 = \frac{P}{4}.$$



Сл. 32

Нека је, на пример, $A_{12}A_{34}$ најкраћа од три дужи које спајају средишта наспрамних ивица тетраедра $A_1A_2A_3A_4$. Тада је $A_{12}A_{34}^2 \leqslant \dfrac{P}{12}$, тј. $A_{12}A_{34} \leqslant \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{P}{3}}$. Растојање правих A_1A_2 и A_3A_4 није веће од $A_{12}A_{34}$, па тим пре није веће од $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{P}{3}}$. Растојање паралелних равни које садрже праве A_1A_2 и A_3A_4 једнако је растојању између те две праве, па према томе није веће од $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{P}{3}}$. Тетраедар $A_1A_2A_3A_4$ лежи између те две равни.

БМО ’88.4.

Прво решење. Нека a_n и a_{n+1} задовољавају постављене услове. Приметимо да $3 \mid a_k$ за непарно k. Заиста, ако је k непаран природан број, онда је

$$a_k = 2^k + 49 \equiv (-1)^k + 49 \equiv 48 \equiv 0 \pmod 3.$$

Како је један од бројева a_n и a_{n+1} дељив са 3 и како су оба непарни, најмањи међу бројевима p, q, r и s једнак је 3. Дакле $p = 3$. Нека је $x = q - p = s - r$. Тада је $a_n = p(p + x)$ и $a_{n+1} = r(r + x)$. Из $a_{n+1} = 2a_n - 49 < 2a_n$ имамо да је $r(r + x) < 2p(p + x)$, а како је $p + x < r + x$, одавде добијамо да је $r < 2p = 6$. Следи да је $r = 5$. Из $a_{n+1} = 2a_n - 49$ добијамо $5(5+x) = 6(3+x) - 49$, а одавде $x = 56$. Коначно из $2^n + 49 = 3(3 + 56) = 177$ добијамо да је $n = 7$. Како је $a_7 = 177 = 3 \cdot 59$ и $a_8 = 305 = 5 \cdot 61$, тражени чланови низа су a_7 и a_8.

Друго решење. Нека a_n и a_{n+1} задовољавају постављене услове. Као и у првом решењу најпре показујемо да је $p = 3$. Нека је $y = r - p = s - q$. Из $r = y + 3$ и $s = y + q = y + \dfrac{2^n + 49}{3}$ добијамо

$$(y + 3)\left(y + \frac{2^n + 49}{3}\right) = 2^{n+1} + 49,$$

а одавде

$$(3 - y)2^n = 3y^2 + 58y.$$

Да би лева страна ове једнакости била позитивна, мора бити $y < 3$. Да би десна страна ове једнакости била паран број, y мора бити парно. Следи да је $y = 2$. Из $2^n = 128$ добијамо да је $n = 7$. Како је $a_7 = 177 = 3 \cdot 59$ и $a_8 = 305 = 5 \cdot 61$, тражени чланови низа су a_7 и a_8.

БМО ’89.1.

Прво докажимо да је n паран број. Претпоставимо супротно: нека је n непаран број. Тада су сви делиоци броја n непарни, па су зато d_1, d_2, d_3 и d_4 непарни. Следи да је $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$ паран, што је противно полазној претпоставци. Како је n паран број, то је $d_2 = 2$. Из једнакости $1^2 + 2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n$ следи да је један од бројева d_3 и d_4 паран а други непаран. Разматраћемо два случаја:

Први случај: $d_3 = 2a$, $a > 1$. Како је a делилац броја n мањи од d_3, то је $a = 2$. Дакле $d_3 = 4$. Како је $n = 1^2 + 2^2 + 4^2 + d_4^2 = 21 + d_4^2$, то n није дељиво са $4 = d_3$. Контрадикција!

Други случај: $d_4 = 2a$, $a > 1$. Како је $a < d_4$ и $a \mid n$, то је $a = d_2 = 2$ или $a = d_3$. У првом случају било би $d_4 = 4$, $d_3 = 3$ и $n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$. Како $4 \nmid 30$, овај случај отпада. Преостаје да је $a = d_3$. У том случају имамо да је $n = 1^2 + 2^2 + d_3^2 + 4d_3^2 = 5(1 + d_3^2)$. Како $d_3 \mid n$ и како су бројеви d_3 и $1 + d_3^2$ узајамно прости, то је $d_3 = 5$. Следи да је $d_4 = 10$ и $n = 1^2 + 2^2 + 5^2 + 10^2 = 130$. Лако је проверити да су 1, 2, 5 и 10 четири најмања делиоца броја 130.

Једини број који задовољава дати услов је 130.

БМО '89.2.

Прво решење. Прво докажимо једну лему која даје оцену корена полинома:

Лема 1. Апсолутне вредности корена полинома $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ мање су од $1+m$, где је $m = \max\limits_{0\leqslant k<n} |a_k/a_n|$.

Доказ. Нека је $|x| \geqslant 1+m$. Тада имамо

$$\begin{aligned}
|a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0| &\geqslant |a_nx^n| \left|1 + \frac{a_{n-1}}{a_nx^1} + \frac{a_{n-2}}{a_nx^2} + \cdots + \frac{a_0}{a_nx^n}\right| \\
&\geqslant |a_nx^n| \left(1 - \left|\frac{a_{n-1}}{a_nx^1}\right| - \left|\frac{a_{n-2}}{a_nx^2}\right| - \cdots - \left|\frac{a_0}{a_nx^n}\right|\right) \\
&\geqslant |a_nx^n| \left(1 - \frac{m}{|x|^1} - \frac{m}{|x|^2} - \cdots - \frac{m}{|x|^n}\right) \\
&> |a_nx^n| \left(1 - \frac{m}{|x|-1}\right) \geqslant 0. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Претпоставимо да је $P(x) = Q(x)R(x)$, где су Q и R полиноми са целобројним коефицијентима. Нека су x_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, корени полинома Q. Сви они су уједно корени полинома P, па су зато мањи од $1 + 9/2 < 9$. Како је $Q(x) = b\prod\limits_{i=1}^{k}(x - x_i)$, где је b најстарији коефицијент полинома Q, то је

$$|Q(10)| = |b| \left|\prod_{i=1}^{k}(10 - x_i)\right| \geqslant |b| \prod_{i=1}^{k}(10 - |x_i|) > 1.$$

На сличан начин може да се докаже да је $|R(10)| > 1$. Како је $P(10) = Q(10)R(10)$, $P(10)$ није прост број. Контрадикција!

Друго решење. Доказаћемо тврђење задатка без претпоставке да је $a_n > 1$.

Лема 2. Нека је количник a_{n-1}/a_n позитиван реалан број. Корени полинома $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ чији су реални делови позитивни, по апсолутној вредности су мањи од $(1 + \sqrt{1+4m})/2$, где је $m = \max\limits_{0\leqslant k<n} |a_k/a_n|$.

Доказ. Ако је $\operatorname{Re} x > 0$, онда је $\operatorname{Re}\dfrac{1}{x} > 0$. Ако је осим тога $|x| \geqslant (1 + \sqrt{1+4m})/2$, тада имамо

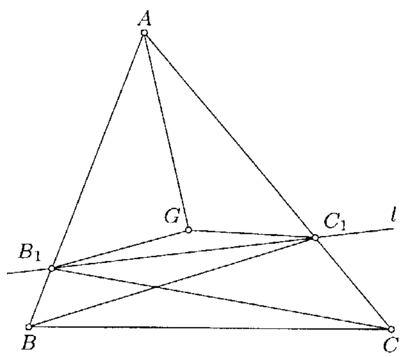
$$\begin{aligned}
|a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0| &\geqslant |a_nx^n| \left|1 + \frac{a_{n-1}}{a_nx^1} + \frac{a_{n-2}}{a_nx^2} + \cdots + \frac{a_0}{a_nx^n}\right| \\
&\geqslant |a_nx^n| \left(\left|1 + \frac{a_{n-1}}{a_nx^1}\right| - \left|\frac{a_{n-2}}{a_nx^2}\right| - \cdots - \left|\frac{a_0}{a_nx^n}\right|\right) \\
&\geqslant |a_nx^n| \left(1 - \frac{m}{|x|^2} - \cdots - \frac{m}{|x|^n}\right) \\
&> |a_nx^n| \left(1 - \frac{m}{|x|^2 - |x|}\right) \geqslant 0. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Претпоставимо да је $P(x) = Q(x)R(x)$, где су Q и R полиноми са целобројним коефицијентима. Нека су x_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, корени полинома Q. Сви они су уједно корени полинома P, па су зато њихови реални делови мањи од $(1+\sqrt{1+4\cdot 9})/2 <$ 9,5. Како су сви коефицијенти полинома Q ненегативни, то је $Q(9) \geqslant 1$. Како је $Q(x) = b\prod_{i=1}^{k}(x - x_i)$, где је b најстарији коефицијент полинома Q, то је

$$|Q(10)/Q(9)| = \prod_{i=1}^{k} |(10 - x_i)/(9 - x_i)| > 1.$$

Следи да је $|Q(10)| > |Q(9)| \geqslant 1$. На сличан начин може да се докаже да је $|R(10)| > 1$. Како је $P(10) = Q(10)R(10)$, $P(10)$ није прост број. Контрадикција!

БМО '89.3.



Сл. 33

Означимо са S, S_0, S_1 и S_2 површине троуглова ABC, AB_1C_1, AB_1G и AC_1G. Висине које одговарају страници AB_1 троуглова AB_1C и AB_1G односе се као $3:1$. Следи да је $S(AB_1C) = 3S_1$. На сличан начин може да се докаже да је $S(AC_1B) = 3S_2$. Из

$$\begin{aligned} S(BB_1GC_1) &= S(AC_1B) - S_1 - S_2 \\ &= 2S_2 - S_1, \\ S(CC_1GB_1) &= S(AB_1C) - S_1 - S_2 \\ &= 2S_1 - S_2 \end{aligned}$$

следи да је

$$S(BB_1GC_1) + S(CC_1GB_1) = S_1 + S_2.$$

Неједнакост коју доказујемо еквивалентна је са $S_1 + S_2 \geqslant \frac{4}{9}S$. Како је $S_1 = \frac{1}{3}S(AB_1C) = \frac{1}{3}\cdot\frac{AB_1}{AB}S$, $S_2 = \frac{1}{3}S(AC_1B) = \frac{1}{3}\cdot\frac{AC_1}{AC}S$, $\frac{AB_1\cdot AC_1}{AB\cdot AC} = \frac{S_0}{S}$ и $S_0 \geqslant S_1 + S_2$, то је

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= \frac{1}{3}\left(\frac{AB_1}{AB} + \frac{AC_1}{AC}\right)S \geqslant \frac{2S}{3}\sqrt{\frac{AB_1\cdot AC_1}{AB\cdot AC}} = \frac{2S}{3}\sqrt{\frac{S_0}{S}} \\ &\geqslant \frac{2S}{3}\sqrt{\frac{S_1+S_2}{S}} \geqslant \frac{2}{3}\sqrt{S(S_1+S_2)}. \end{aligned}$$

Из неједнакости $S_1+S_2 \geqslant \frac{2}{3}\sqrt{S(S_1+S_2)}$ није тешко добити $S_1+S_2 \geqslant \frac{4}{9}S$. Једнакост важи ако и само ако је права l паралелна са BC и пролази кроз тежиште G.

БМО '89.4.

Нека је $\mathcal{F}$ фамилија трочланих подскупова скупа $\{1,2,\ldots,n\}$, таква да је $|A\cap B|\leqslant 1$ за $A,B\in\mathcal{F}$, $A\neq B$. Сваки $A\in\mathcal{F}$ има $\binom{3}{2}=3$ двочлана подскупа, при том $A,B\in\mathcal{F}$, $A\neq B$, немају заједничких двочланих подскупова. Према томе укупан број двочланих подскупова садржаних у скуповима из $\mathcal{F}$ једнак је $3|\mathcal{F}|$. Број двочланих подскупова скупа $\{1,2,\ldots,n\}$ једнак је $\binom{n}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$. Следи да је $3|\mathcal{F}|\leqslant\dfrac{n(n-1)}{2}$, тј. $|\mathcal{F}|\leqslant\dfrac{n(n-1)}{6}$. Како је $\mathcal{F}$ произвољна фамилија скупова са задатим својстима, то је $f(n)\leqslant\dfrac{n(n-1)}{6}$.

Нека је

$$\mathcal{F}_0=\{\,(x,y,z)\mid x,y,z\in\{1,2,\ldots,n\},\ x\neq y\neq z\neq x,\ x+y+z\equiv 0\pmod n\,\}.$$

Лако је видети да фамилија скупова $\mathcal{F}_0$ задовољава постављене услове. Одредимо број њених елемената c. Означимо са a број решења конгруенције $3x\equiv 0\pmod n$, а са b број решења конгруенције $2x+y\equiv 0\pmod n$, $x\neq y$. Имамо да је $a=1$ ако $3\nmid n$, и да је $a=3$ ако $3\mid n$. Број решења конгруенције $2x+y\equiv 0\pmod n$ једнак је n (за свако x постоји тачно једно y које задовољава ову конгруенцију). При том њих a задовољава услов $x=y$, а њих b задовољава услов $x\neq y$. Следи да је $b=n-a$. Број решења конгруенције $x+y+z\equiv 0\pmod n$ једнак је n^2 (за свако x и свако y постоји тачно једно z које задовољава ову конгруенцију). При том су a решења тројке једнаких бројева, $3b$ решења су тројке бројева од којих су два међусобно једнака а трећи је различит од њих, а $6c$ решења су тројке различитих бројева. Дакле $n^2=a+3b+6c=6c+3n-2a$. Одавде добијамо да је $c=\dfrac{n^2-3n+2a}{6}=\left[\dfrac{n^2-3n+6}{6}\right]$. Како је $f(n)\geqslant c$, то је $f(n)\geqslant\left[\dfrac{n^2-3n+6}{6}\right]$. Ово је боља оцена од оне која се тражи у задатку.

БМО '90.1.

Прво решење. Нека је r_n остатак који се добија дељењем a_n са 11. Ако се има у виду да је

$$r_{n+2}\equiv(n+3)r_{n+1}+(n+2)r_n\pmod{11},\tag{1}$$

није тешко израчунати првих 11 чланова низа (r_n):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
r_n	1	3	9	0	10	4	6	0	1	0	0

Методом математичке индукције може да се докаже да је $r_n=0$ за $n\geqslant 10$. При том се користи рекурентна веза (1) и чињеница да је $r_{10}=r_{11}=0$. Према томе дељиви су са 11 чланови низа са индексима $n=4$, $n=8$ и $n\geqslant 10$.

Друго решење. Прво ћемо решити дату рекурентну једначину. Она је еквивалентна са

$$a_{n+2} - a_{n+1} = (n+2)(a_{n+1} - a_n), \qquad n \geqslant 1,$$

тј. са $a_n - a_{n-1} = n(a_{n-1} - a_{n-2})$, $n \geqslant 3$. Одавде добијамо да је

$$a_n - a_{n-1} = n(n-1)\cdots 3(a_2 - a_1) = n!,$$

за $n \geqslant 2$, а одавде да је

$$a_n - a_1 = \sum_{j=2}^{n}(a_j - a_{j-1}) = \sum_{j=2}^{n} n!,$$

за $n \geqslant 2$. Коначно $a_n = \sum\limits_{j=1}^{n} n!$, $n \geqslant 1$.

За $k \geqslant 10$ имамо да је $k!$ дељиво са 11. Зато је $a_n \equiv a_{10} \pmod{11}$. Да бисмо завршили решење задатка довољно је да одредимо који су чланови низа (a_n) дељиви са 11 за $n = 1, 2, \ldots, 10$. Лако је утврдити да су то a_4, a_8 и a_{10}. Према томе дељиви су са 11 чланови низа са индексима $n = 4$, $n = 8$ и $n \geqslant 10$.

БМО '90.2.

Како је

$$a_k = \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i+j=k}} ij,$$

то је

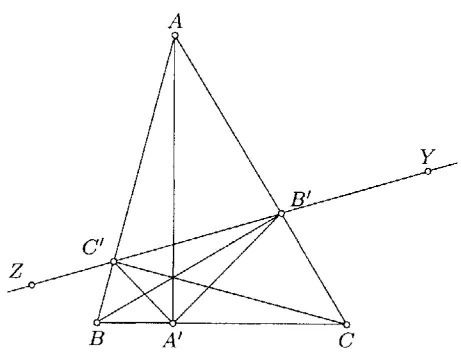
$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{2n} a_k &= \sum_{k=n+1}^{2n} \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i+j=k}} ij = \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i+j>n}} ij \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=n+1-i}^{n} ij = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=n+1-i} j \\
&= \sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{1}{2} i(2n+1-i) = \frac{2n+1}{2} \sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} i^3 \\
&= \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{24} n(n+1)[2(2n+1)^2 - 3n(n+1)] \\
&= \frac{1}{24} n(n+1)(5n^2 + 5n + 2).
\end{aligned}$$

БМО '90.3.

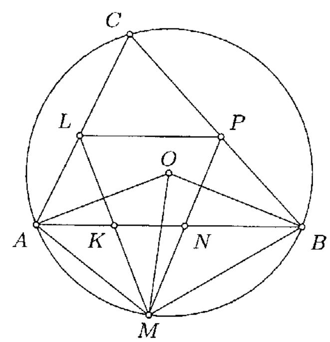
Прво ћемо доказати једну теорему.

Теорема. Висине оштроуглог троугла су симетрале унутрашњих углова троугла чија су темена подножја тих висина.

Доказ. Нека је ABC оштроугли троугао. Означимо са A' подножје висине из темена A, а са Y и Z тачке симетрична тачки A' у односу на праве AC и AB, сл. 34. Није тешко показати да дуж YZ пресеца дужи AC и AB (за то је битна претпоставка да су углови троугла ABC оштри). Означимо са B' и C' тачке у којима дуж YZ пресеца дужи AC и AB. Праве AC и AB су симетрале спољашњих углова код темена B' и C' троугла $A'B'C'$, па је зато права AA' симетрала унутрашњег угла код темена A' троугла $A'B'C'$. Како је права BC ортогонална на правој AA', то је она симетрала спољашњег угла код темена A' троугла $A'B'C'$. Праве BA и BC су симетрале спољашњих углова код темена C' и A' троугла $A'B'C'$, па је зато права BB' симетрала унутрашњег угла код темена B' троугла $A'B'C'$. Како су праве BB' и CA симетрале унутрашњег и спољашњег угла код темена B' троугла $A'B'C'$, то су оне узајамно ортогоналне, тј. BB' је висина троугла ABC. На сличан начин може да се покаже да је CC' симетрала унутрашњег угла код темена C' троугла $A'B'C'$ и висина троугла ABC. ∎



Сл. 34



Сл. 35

Напомена. У претходном доказу није коришћена теорема по којој се висине троугла секу у једној тачки. Та теорема се можи добити као последица управо доказане теореме и још једне теореме која је слична претходној а односи се на тупоугли троугао.

Решење задатка. Према претходној теореми, ортоцентар H троугла ABC је центар круга уписаног у троугао $A_1B_1C_1$, тј. центар круга описаног око троугла $A_2B_2C_2$. Како је $A_1B_2 = A_1C_2$, то је $B_2C_2 \perp AA_1$, па је зато $B_2C_2 \parallel BC$. На сличан начин може да се докаже да је $C_2A_2 \parallel CA$ и $A_2B_2 \parallel AB$. Троуглови ABC и $A_2B_2C_2$ имају паралелене странице, па су зато хомотетични. Хомотетија која пресликава троугао ABC у троугао $A_2B_2C_2$ пресликава Ојлерову праву троугла

ABC у Ојлерову праву троугла $A_2B_2C_2$. Зато су Ојлерове праве троуглова ABC и $A_2B_2C_2$ паралелне међу собом, а како обе пролазе кроз тачку H, то се оне поклапају.

БМО '90.4.

Нека је $f\colon \mathbf{N} \to A$ функција која задовољава услов: ако је $|i-j|$ прост број, онда је $f(i) \neq f(j)$. Разматрајмо бројеве 1, 3, 6 и 8. Разлика свака два од њих је прост број. Следи да су $f(1)$, $f(3)$, $f(6)$ и $f(8)$ различити међу собом. Зато је $|A| \geqslant 4$.

Нека је $A = \{0,1,2,3\}$ и нека је $f(x)$ остатак који се добија дељењем природног броја x са 4. Ако је $f(i) = f(j)$, онда је $|i-j|$ сложен број, јер је дељив са 4. Дакле функција f задовољава дати услов.

Тражени број је 4.

БМО '91.1.

Нека су α, β и γ уобичајене ознаке за углове троугла ABC, сл. 35. Како је $\measuredangle AOB = 2\gamma$, и како је $OA = OB$, то је $\measuredangle OAB = \measuredangle OBA = 90^\circ - \gamma$. Следи $\measuredangle AKL = \measuredangle BNP = \gamma$, а одавде $\measuredangle MKN = \measuredangle MNK = \gamma$. Дакле $MK = MN = KL$. Троуглови ALK и PBN су слични (једнаки су им одговарајући углови). Зато је $AK : KL = PN : NB$. Троуглови AKM и MNB су слични ($\measuredangle AKM = \measuredangle MNB$, $\measuredangle KMA = \dfrac{1}{2}\measuredangle AOM = \measuredangle ABM = \measuredangle NBM$). Зато је $AK : KM = MN : NB$. Из $KL = KM$, $AK : KL = PN : NB$ и $AK : KM = MN : NB$ следи да је $MN = NP$. Дакле KN је средња линија троугла MLP. Зато је $\measuredangle MLP = \measuredangle MKN = \gamma$.

БМО '91.2.

Површина троугла је дата Хероновом формулом:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

где су a, b и c странице и s полуобим тог троугла. Ако би било $s-a = 4n^4$, $s-b = 4n^2$, $s-c = 1$, где је n природан број, било би $s = 4n^4+4n^2+1 = (2n^2+1)^2$, па би површина троугла била цео број: $S = 4n^3(2n^2+1)$. То је испуњено ако је $a = 4n^2+1$, $b = 4n^4+1$ и $c = 4n^2(n^2+1)$. Како је

$$(4n+1, 4n^2) = 1, \quad (4n^2+1, n^2+1) = ((4n^2+4)-3, n^2+1) = (3, n^2+1) = 1,$$

a и c су узајамно прости бројеви. Следи да је задовољен услов (i).

Преостаје нам да испитамо да ли су висине троугла цели бројеви. Имамо да је

$$h_a = \frac{8n^3(2n^2+1)}{4n^2+1}, \quad h_b = \frac{8n^3(2n^2+1)}{4n^4+1}, \quad h_c = \frac{2n(2n^2+1)}{n^2+1}.$$

Није тешко показати да се прва два разломка не могу скратити, те да зато h_a и h_b нису цели бројеви, а да се трећи разломак може скратити само са 2 и то у случају када је n непаран број, те да је зато h_c цео број само за $n = 1$. Према томе разматрани троугао задовољава све услове задатка ако је $n \geqslant 2$. Одавде следи да постоји бесконачно много троуглова који задовољавају постављене услове.

БМО '91.3.

Прво решење. Нека ја $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ разматрани правилни шестоугао. Нека су B_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, тачке у којима се секу праве $A_{i-1}A_i$ и $A_{i+1}A_{i+2}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ (при том подразумевамо да је $A_{i+6} = A_i$), сл. 36. Описани полигон је садржан у дванаестоуглу $A_1B_1A_2B_2A_3B_3A_4B_4A_5B_5A_6B_6$. Даље, нека су l_i, $i = 2, 4, 6$, праве које садрже темена A_i, $i = 2, 4, 6$, и не пролазе кроз унутрашњост описаног полигона и нека су C_i и D_i, $i = 2, 4, 6$, тачке у којима праве l_i секу праве $A_{i-2}A_{i-1}$ и $A_{i+1}A_{i+2}$. Описани полигон је садржан у полигону $A_1C_2D_2A_3C_4D_4A_5C_6D_6$. Троуглови $A_2A_3D_2$ и $A_2B_1C_2$ су подударни. Зато је

$$S(A_1A_2C_2) + S(A_2A_3D_2) = S(A_1A_2B_1) = \frac{1}{6}H.$$

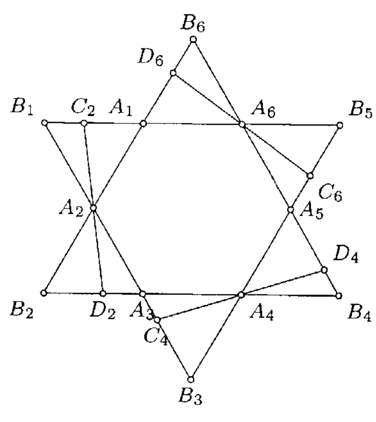
На сличан начин се показује да је

$$S(A_3A_4C_4) + S(A_4A_5D_4) = S(A_3A_4B_3) = \frac{1}{6}H,$$
$$S(A_5A_6C_6) + S(A_6A_1D_6) = S(A_5A_6B_5) = \frac{1}{6}H.$$

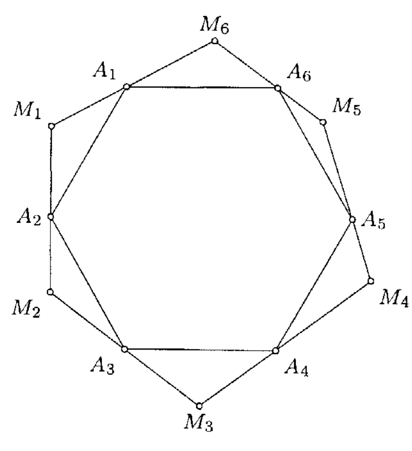
Следи да је

$$\begin{aligned}P \leqslant S(A_1C_2D_2A_3C_4D_4A_5C_6D_6) &= S(A_1A_2A_3A_4A_5A_6) + S(A_1A_2C_2)+\\ &+ S(A_2A_3D_2) + S(A_3A_4C_4) + S(A_4A_5D_4) + S(A_5A_6C_6) + S(A_6A_1D_6) =\\ &= H + \frac{1}{6}H + \frac{1}{6}H + \frac{1}{6}H = \frac{3}{2}H.\end{aligned}$$

Једнакост ће важити ако и само ако се описани полигон поклапа са полигоном $A_1C_2D_2A_3C_4D_4A_5C_6D_6$. Последњи полигон ће бити конвексан ако и само ако се поклапа са једним од троуглова $B_1B_3B_5$ и $B_2B_4B_6$. Према томе једнакост ће важити ако и само ако се описани полигон поклапа са једним од троуглова $B_1B_3B_5$ и $B_2B_4B_6$.



Сл. 36



Сл. 37

Друго решење. Нека ја $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ разматрани правилни шестоугао. Даље, нека су l_i, $i=1,2,3,4,5,6$, праве које садрже темена A_i и не пролазе кроз унутрашњост описаног полигона, нека су M_i, $i=1,2,3,4,5,6$, тачке у којима се секу праве l_i и l_{i+1}, и нека је $\varphi_i = \measuredangle M_iA_iA_{i+1}$, $i=1,2,3,4,5,6$, сл. 37. Очигледно је $0 \leqslant \varphi_i \leqslant \dfrac{\pi}{3}$ за $i=1,2,3,4,5,6$. Ако је a страница шестоугла $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, онда је

$$\begin{aligned} S(A_iA_{i+1}M_i) &= \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sin\varphi_i\sin(\frac{\pi}{3}-\varphi_{i+1})}{\sin(\varphi_i+\frac{\pi}{3}-\varphi_{i+1})} = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{\operatorname{ctg}\varphi_i+\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{3}-\varphi_{i+1})} \\ &\leqslant \frac{a^2}{8}[\operatorname{tg}\varphi_i+\operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{3}-\varphi_{i+1})]. \end{aligned}$$

за $i=1,2,3,4,5,6$. Једнакост важи ако и само ако је $\varphi_i = \frac{\pi}{3}-\varphi_{i+1}$. Описани полигон је садржан у шестоуглу $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$. Зато је

$$\begin{aligned} P &\leqslant S(M_1M_2M_3M_4M_5M_6) = S(A_1A_2A_3A_4A_5A_6) + \sum_{i=1}^{6} S(A_iA_{i+1}M_i) \\ &\leqslant H + \frac{a^2}{8}\sum_{i=1}^{6}[\operatorname{tg}\varphi_i+\operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{3}-\varphi_{i+1})] = H + \frac{a^2}{8}\sum_{i=1}^{6}[\operatorname{tg}\varphi_i+\operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{3}-\varphi_i)] \\ &\leqslant H + \frac{a^2}{8}\cdot 6\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = H + \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}H. \end{aligned}$$

Једнакост важи ако и само ако је $\varphi_i = \frac{\pi}{3}-\varphi_{i+1}$ и $\varphi_i \in \{0, \frac{\pi}{3}\}$ за $i=1,2,3,4,5,6$, тј. ако и само ако је $\varphi_1=\varphi_3=\varphi_5=0$ и $\varphi_2=\varphi_4=\varphi_6=\frac{\pi}{3}$ или $\varphi_1=\varphi_3=\varphi_5=\frac{\pi}{3}$ и $\varphi_2=\varphi_4=\varphi_6=0$. Према томе једнакост ће важити ако и само ако се описани полигон поклапа са једним од троуглова који су одређени правим A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6 и A_6A_1, A_2A_3, A_4A_5.

Напомена. На сличан начин може да се докаже следеће тврђење:

Правилан $2n$-тоугао је уписан у конвексну фигуру ω. Ако је H површина $2n$-тоугла и P површина фигуре ω, онда је

$$P \leqslant \left(1+\frac{1}{4\cos\frac{\pi}{n}}\right)H.$$

БМО '91.4.

Претпоставимо да постоји функција $f\colon \{1,2,\dots\} \to \{0,1,2,\dots\}$ која задовољава постављене услове. Функција $g\colon \{1,2,\dots\} \to \{1,4,7,\dots\}$ задата са $g(x) = 3f(x)+1$ је бијекција и задовољава услов $g(xy)=g(x)g(y)$ за произвољне природне бројеве x и y. Нека су p, q и r природни бројеви које функција g пресликава у 4, 10 и 25. Они су прости зато што се ниједан од бројева 4, 10 и 25 не може представити као производ два броја из $\{1,4,7,\dots\}$. Како је $4\cdot 25 = 10^2$, то је $pr=q^2$. Контрадикција!

БМО '92.1.

(а) Прво докажимо следеће помоћно тврдјење:

Ако су a и b узајамно прости природни бројеви, k најмањи природан број за који важи $a^k \equiv 1 \pmod{b}$ и n произвољан природан број за који важи $a^n \equiv 1 \pmod{b}$, онда важи $k \mid n$.

Нека је $n = pk + r$, где је p ненегативан цео број и $0 \leqslant r < k$. Тада је $a^r \equiv (a^k)^p \cdot a^r \equiv a^{pk+r} \equiv a^n \equiv 1 \pmod{b}$, одакле следи да је $r = 0$, тј. $k \mid n$.

(б) Даље, приметимо да је $1992 = 2^3 \cdot 3 \cdot 83$ и

$$A(m,n) = (m-1)m^3(m+1)\big(m^{3^{4n}+1} - 1\big). \tag{1}$$

Лако се проверава да за сваки природан број m важи $2^3 \cdot 3 \mid (m-1)m^3(m+1)$. Према томе, број $A(m,n)$ дељив је са 1992 ако и само ако је дељив са 83.

(в) Нека је n природан број, такав да $83 \mid A(m,n)$ важи за сваки природан број m. Докажимо да је n непаран број.

Ако $83 \mid A(m,n)$ за сваки природан број m, онда $83 \mid A(2,n)$, а одатле следи

$$83 \mid 2^{3^{4n}+1} - 1. \tag{2}$$

Нека је k најмањи природан број за који важи $83 \mid 2^k - 1$, тј. $2^k \equiv 1 \pmod{83}$. На основу тврдјења доказаног под (а) и релације (2) следи да $k \mid 3^{4n}+1$. Одредимо број k. На основу мале Фермаове теореме следи да је $2^{82} \equiv 1 \pmod{83}$, па, опет на основу тврдјења доказаног под (а), закључујемо да $k \mid 82$, тј. $k \in \{1, 2, 41, 82\}$. Лако се проверава да важи:

$$2^1 \not\equiv 1 \pmod{83}, \quad 2^2 \not\equiv 1 \pmod{83},$$
$$2^{41} = 2 \cdot (2^{10})^4 = 2 \cdot 1024^4 \equiv 2 \cdot 28^4 \equiv 82 \pmod{83},$$

па следи да је $k = 82$ и, према томе, $82 \mid 3^{4n} + 1$, тј. $3^{4n} \equiv -1 \pmod{82}$. Како је $3^{4n} = 81^n \equiv (-1)^n \pmod{82}$, то следи да је n непаран број.

(г) Нека је n непаран број. Тада за сваки природан број m важи $83 \mid A(m,n)$. Ако је $m = 1$ или $83 \mid m$, онда тврдјење следи непосредно из (1). Размотримо још случај када је m природан број већи од 1 и који није дељив са 83. Како је 83 прост број, у том случају су бројеви m и 83 узајамно прости, па на основу мале Фермаове теореме добијамо $m^{82} \equiv 1 \pmod{83}$. Даље, користећи претпоставку да је n непаран број, добијамо $3^{4n}+1 = 81^n + 1^n = 82 \cdot (81^{n-1} - 81^{n-2} + \cdots - 81 + 1)$, и коначно

$$m^{3^{4n}+1} = (m^{82})^{81^{n-1} - 81^{n-2} + \cdots - 81 + 1} \equiv 1 \pmod{83}.$$

БМО '92.2.

Примењујући неједнакост измедју аритметичке и геометријске средине на бројеве 1^2, 2^2, ..., n^2, добијамо

$$\frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n} \geqslant \sqrt[n]{(n!)^2}. \tag{1}$$

Замењујући у неједнакости (1) збир $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ са $n(n+1)(2n+1)/6$, добијамо $(n+1)(2n+1)/6 \geqslant \sqrt[n]{(n!)^2}$. Степенујући ову неједнакост n-тим степеном и имајући у виду да је $(n+1)(2n+1) = 2n^2+3n+1$, добијамо да је $(2n^2+3n+1)^n \geqslant 6^n(n!)^2$.

БМО '92.3.

Важи следећи низ релација:

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad \frac{P_{ABC}}{P_{DEF}} &= \frac{P_{ABD}+P_{ACD}}{P_{DEF}} = \frac{P_{ABD}}{P_{DEF}} + \frac{P_{ACD}}{P_{DEF}}\\
&= \frac{AB\cdot AD\cdot \sin\measuredangle FAD}{DE\cdot EF\cdot \sin\measuredangle DEF} + \frac{AC\cdot AD\cdot \sin\measuredangle DAE}{DF\cdot EF\cdot \sin\measuredangle DFE}\\
&= \frac{AB\cdot AD}{DE\cdot EF} + \frac{AC\cdot AD}{DF\cdot EF} = \frac{AD}{EF}\left(\frac{AB}{DE}+\frac{AC}{DF}\right)\\
&\geqslant 2\cdot\frac{AD}{EF}\cdot\sqrt{\frac{AB\cdot AC}{DE\cdot DF}}.
\end{aligned}
$$

Даље, из једнакости $\measuredangle BAC + \measuredangle EDF = 2\pi$, добијамо да је $\sin\measuredangle BAC = \sin\measuredangle EDF$ и

$$(2)\qquad \frac{P_{ABC}}{P_{DEF}} = \frac{AB\cdot AC\cdot\sin\measuredangle BAC}{DE\cdot DF\cdot\sin\measuredangle EDF} = \frac{AB\cdot AC}{DE\cdot DF}.$$

Користећи (1) и (2) добијамо

$$\frac{P_{ABC}}{P_{DEF}} \geqslant 2\cdot\frac{AD}{EF}\cdot\sqrt{\frac{P_{ABC}}{P_{DEF}}},$$

одакле лако и непосредно следи неједнакост коју треба доказати. Једнакост важи ако и само ако је D средиште странице BC.

БМО '92.4.

Доказаћемо да за сваки природан број n важи једнакост

$$(1)\qquad f(n) = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n}{6}\right] + 1.$$

Нека је A скуп парних природних бројева не већих од n и B скуп природних бројева не већих од n и дељивих са 3. Скуп $A\cup B$ садржи $\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n}{6}\right]$ елемената. Сваки трочлани подскуп скупа $A\cup B$ садржи два парна броја или два броја дељива са 3. Одатле следи

$$(2)\qquad f(n) \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n}{6}\right] + 1.$$

За доказ једнакости (1) довољно је још доказати обрнуту неједнакост:

$$(3)\qquad f(n) \leqslant \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n}{6}\right] + 1.$$

Докажимо прво следећу лему:

Нека је k природан број. За сваки избор 5 бројева из скупа $C = \{k, k+1, k+2, k+3, k+4, k+5\}$ међу изабраним бројевима постоје три који су узајамно прости у паровима.

Заиста, постоји непаран број x такав да важи $x, x+2, x+4 \in C$ и при томе су x, $x+2$, $x+4$ у паровима узајамно прости бројеви. Нека је $y \in \{x+1, x+3\}$ број који није дељив са 3. Тада су бројеви x, $x+2$, $x+4$, y узајамно прости у паровима. Приметимо даље да ако из скупа C изаберемо 5 елемената, онда се међу њима налазе бар три од бројева x, $x+2$, $x+4$, y, тј. изабрана су три броја који су узајамно прости у паровима.

Неједнакост (3) доказујемо индукцијом са n на $n+6$. Прво проверавамо да та неједнакост важи за $n \in \{3, 4, \ldots, 8\}$.

Пошто су 1, 2, 3 у паровима узајамно прости бројеви, то је $f(3) \leqslant 3$ и $f(4) \leqslant 4$, тј. неједнакост (3) важи за $n = 3$ и $n = 4$.

Докажимо да је $f(5) \leqslant 4 = [5/2] + [5/3] - [5/6] + 1$. Ако је изабран број 1 и три од бројева 2, 3, 4, 5, онда су изабрани бројеви 1, 2, 3 или 1, 4, 5, тј. изабрана су три у паровима узајамно проста броја. Ако су изабрани бројеви 2, 3, 4, 5 онда су 3, 4, 5 у паровима узајамно прости међу изабраним бројевима.

Неједнакост $f(6) \leqslant 5 = [6/2] + [6/3] - [6/6] + 1$ следи из доказане леме.

Докажимо да је $f(7) \leqslant 5 = [7/2] + [7/3] - [7/6] + 1$. Заиста, ако је изабрано пет од бројева 2, 3, ..., 7, онда из доказане леме следи да међу њима има три у паровима узајамно проста броја. Ако је изабран број 1 и четири од бројева 2, 3, ..., 7, онда су осим јединице изабрана још два броја који су узастопни, па они са јединицом чине тројку у паровима узајамно простих бројева.

Докажимо да је $f(8) \leqslant 6 = [8/2] + [8/3] - [8/6] + 1$. Ако је изабрано пет од бројева 3, 4, ..., 8, онда из доказане леме следи да међу њима има три у паровима узајамно проста броја. Ако су изабрана четири од бројева 3, 4, ..., 8 и бројеви 1, 2, онда су од бројева 3, 4, ..., 8 изабрана два узастопна броја који заједно са јединицом чине тројку узајамно простих бројева у паровима.

Претпоставимо да неједнакост (3) важи за неки природан број $n \geqslant 3$ и докажимо да та неједнакост важи за број $n+6$. Ако означимо $g(n) = [n/2] + [n/3] - [n/6] + 1$, онда лако доказујемо да важи једнакост $g(n+6) = g(n) + 4$. Размотримо подскуп A скупа $\{1, 2, \ldots, n+6\}$ такав да је $|A| = g(n+6)$. Ако је $|A \cap \{n+1, n+2, \ldots, n+6\}| \geqslant 5$, онда на основу доказане леме следи да скуп A садржи три узајамно проста броја у паровима. У супротном случају скуп A садржи бар $g(n+6) - 4 = g(n)$ елемената скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ и на основу индуктивне хипотезе међу њима постоје три броја који су узајамно прости у паровима. Тиме је доказано да неједнакост (3) важи за сваки природан број $n \geqslant 3$.

БМО '93.1.

Из једнакости (1) и (2) добијамо

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 = 2(a + b + c + d + e + f) = 20.$$

Користећи неједнакост између квадратне и аритметичке средине добијамо

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2}{5} \geqslant \left(\frac{a + b + c + d + e}{5}\right)^2,$$

одакле следи $5(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2) \geqslant (a+b+c+d+e)^2$. Како је $a+b+c+d+e = 10-f$ и $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 = 20-f^2$, то даље добијамо $5\cdot(20-f^2) \geqslant (10-f)^2$. Последња неједнакост је еквивалентна са $6f^2 - 20f \leqslant 0$, тј. $0 \leqslant f \leqslant 10/3$. Лако је видети да за $a = b = c = d = e = 4/3$ важи $f = 10/3$. Према томе, максимална вредност броја f при датим условима једнака је $10/3$.

БМО '93.2.

Нека је A скуп свих монотоних бројева са не више од 1993 цифре и B скуп свих низова дужине 1993 који имају следећи облик

$$\underbrace{00\ldots0}\ \underbrace{11\ldots1}\ \underbrace{22\ldots2}\ \cdots\ \underbrace{99\ldots9}$$

и садрже бар један члан различит од нуле. (У неким низовима могу се појављивати само неке, а не све цифре.) Низови таквог облика су 1993-комбинације са понављањем елемената 0, 1, ..., 9, па је број елемената скупа B једнак $\binom{1993+10-1}{10-1} - 1$. Између скупова A и B постоји бијекција, па следи да је и број елемената скупа A једнак $\binom{2002}{9} - 1$.

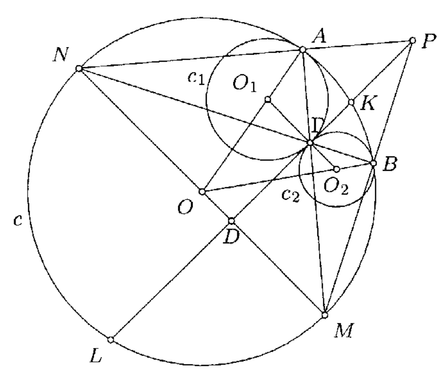
БМО '93.3.

Прво решење. Нека су M, N тачке у којима праве $A\Gamma$, $B\Gamma$, респективно, секу круг C, сл. 38. Тада је $O_1O_2 \parallel OM$ и $O_1O_2 \parallel ON$. Према томе, тачке M, D, O, N су колинеарне и троугао ABD је троугао чија су темена подножја висина троугла MNP, где је P пресек правих AN и BM. Пошто је тачка O средиште дужи MN, то тачке A, O, D и B припадају Ојлеровом кругу троугла MNP. На основу тога следи $\measuredangle O_1OO_2 = \measuredangle AOB = \measuredangle ADB$.

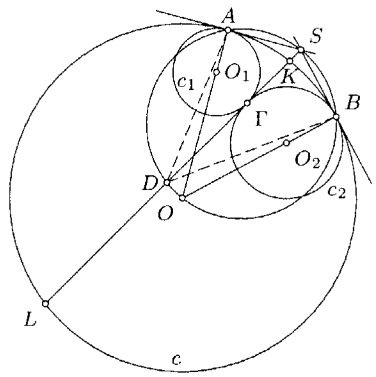
Друго решење. Заједничка тангента кругова C и C_1 у тачки A, заједничка тангента кругова C и C_2 у тачки B и зједничка тангента кругова C_1 и C_2 у тачки Γ секу се у једној тачки. (Докажите то!) Означимо ту тачку са S, сл. 39. Тада важе следеће једнакости

$$\measuredangle SAO = \measuredangle SDO = \measuredangle SBO = 90^\circ.$$

Зато тачке S, A, D, O и B припадају кругу са пречником SO, па одатле следи $\measuredangle O_1OO_2 = \measuredangle AOB = \measuredangle ADB$.



Сл. 38



Сл. 39

БМО '93.4.

За $m = p$ једначина (3) прима облик $\dfrac{x^p + y^p}{2} = \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^p$ и има бесконачно много решења облика (x, x), где је x позитиван цео број.

Обрнуто, претпоставимо да једначина (3) има решење (x, y), где су x и y позитивни цели бројеви. Ако је $x = y$, онда (3) прима облик $x^p = x^m$, одакле следи $m = p$. Размотримо сада случај $x \neq y$. Довољно је још показати да у том случају једнакост (3) доводи до контрадикције. Заиста, за $x \neq y$ добијамо $x^2 + y^2 > 2\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$ и

$$x^{n+1} + y^{n+1} = \frac{x+y}{2}(x^n + y^n) + \frac{x-y}{2}(x^n - y^n) > \frac{x+y}{2}(x^n + y^n),$$

одакле индуктивно добијамо да за сваки цео број $n \geqslant 2$ важи неједнакост $x^n + y^n > 2\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$. Како за бројеве x и y по претпоставци важи једнакост (3), то следи

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^m = \frac{x^p + y^p}{2} > \left(\frac{x+y}{2}\right)^p,$$

па одатле добијамо $m > p$. Нека је $(x, y) = d$, $x = ud$, $y = vd$, где је $(u, v) = 1$. Тада једнакост (3) прима облик

$$u^p + v^p = 2d^{m-p}\left(\frac{u+v}{2}\right)^m. \tag{4}$$

Ако $x \not\equiv y \pmod 2$, онда је $u + v$ непаран број и важи $(u+v)^m \mid u^p + v^p$, а то је контрадикција, јер је $m > p$. Према томе, u и v су оба непарни бројеви. Претпоставимо да је $u + v = 2^\alpha t$, где је $\alpha \geqslant 1$ и t непаран број. У том случају, за $p = 2$ имамо

$$u^2 + v^2 = (2^\alpha t - v)^2 + v^2 = 2^{2\alpha}t^2 - 2^{\alpha+1}tv + 2v^2, \tag{5}$$

а за $p \geqslant 3$ добијамо

(6)
$$\begin{aligned} u^p + v^p &= (2^\alpha t - v)^p + v^p \\ &= 2^\alpha t\left[(2^\alpha t)^{p-1} - \binom{p}{1}(2^\alpha t)^{p-2}v + \cdots - \binom{p}{p-2}2^\alpha t v^{p-2} + pv^{p-1}\right], \end{aligned}$$

где је pv^{p-1} непаран број. Из једнакости (5) и (6) следи да степен броја 2 у канонској репрезентацији броја $u^p + v^p$ није већи од α. Како је степен двојке у десној страни једнакости (4) већи или једнак $(\alpha-1)m+1$, то следи неједнакост

(7) $$(\alpha - 1)m + 1 \leqslant \alpha.$$

Како је $m > p \geqslant 2$, то из неједнакости (7) следи $\alpha = 1$. Према томе, $u + v = 2t$, где је t непаран број и $t \geqslant 3$, а једнакост (4) прима облик

(8) $$(2t - u)^p + u^p = 2d^{m-p}t^m.$$

Пошто је $(u, v) = 1$, то следи да је и $(u, t) = 1$, па из једнакости (8) следи да је $p \neq 2$. Према томе, p је непаран број, а једнакост (8) прима облик

(9) $$(2t)^p - \binom{p}{1}(2t)^{p-1}u + \cdots - \binom{p}{p-2}(2t)^2u^{p-2} + 2ptu^{p-1} = 2d^{m-p}t^m.$$

једнакост (9) можемо записати у следећем погоднијем облику:

(10) $$2^pt^{p-1} - \binom{p}{1}(2^{p-1}t^{p-2} + \cdots - \binom{p}{2}4tu^{p-2} + 2pu^{p-1} = 2d^{m-p}t^{m-1}.$$

Из једнакости (10) следи да $t \mid p$. Према томе, $t = p \geqslant 3$. Пошто је p прост број, то следи $p \mid \binom{p}{2}$. Зато су сви сабирци у једнакости (10), различити од $2pu^{p-1}$, дељиви са p^2, а сабирак $2pu^{p-1}$ није дељив са p^2. Контрадикција.

БМО '94.1.

Нека је ABC тражени троугао и нека су D и E тачке на правој AB, тако да је $PD \parallel AC$ и $PE \perp AB$, слика 40. Означимо $AP = p$, $AD = d$, $PE = h$ и $DB = x$. Дужи p, d и h су дате, а задатак је да се конструише дуж x.

Из услова $PD \parallel AC$, следи да је $\triangle ABC \sim \triangle DBP$. Користећи ту чињеницу и означавајући површину троугла XYZ са S_{XYZ}, добијамо

$$\frac{(d+x)^2}{x^2} = \frac{AB^2}{DB^2} = \frac{S_{ABC}}{S_{DBP}} = \frac{p^2}{xh/2} = \frac{2p^2}{xh},$$

и следствено томе

(1) $$x^2 - 2\frac{p^2 - dh}{h}x + d^2 = 0.$$

Означимо $b = \dfrac{p^2 - dh}{h}$. Тада се једначина (1) може записати у следећем облику

$$x^2 - 2bx + d^2 = 0. \tag{2}$$

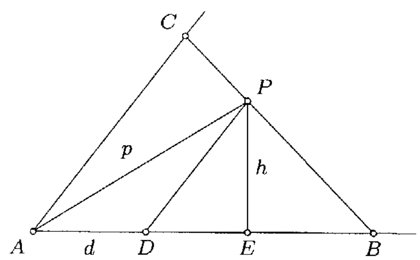
Ако су x_1 и x_2 решења једначине (2), онда је $x_1 + x_2 = 2b$ и $x_1x_2 = d^2$.

Конструкција. Прво конструишемо дуж $b = \dfrac{p^2 - dh}{h} = \dfrac{p^2}{h} - d$. Затим конструишемо дуж $MN = 2b$ и круг k са пречником MN. Конструишемо праву s тако да је $s \parallel MN$ и да је растојање између s и MN једнако d. Нека је S пресечна тачка праве s и круга k. Конструишемо праву t која садржи тачку S и нормална је на праву MN. Нека је T пресечна тачка правих t и MN. Тада, дужи MT и NT могу бити узете за дуж x.

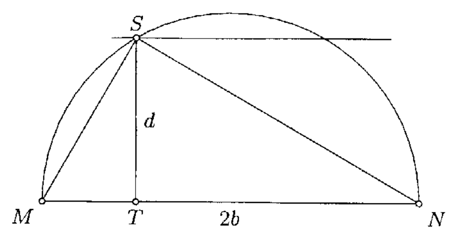
Заиста, из конструкције следи да је $\triangle SMT \sim \triangle NST$ и $MT : ST = ST : TN$. Даље добијамо да је

$$MT \cdot TN = ST^2 = d^2, \qquad MT + TN = MN = 2b.$$

Према томе, $x_1 = MT$, $x_2 = TN$. Приметимо да задатак има два решења ако је $d < b$, тј. $2dh < p^2$, односно једно решење ако је $2dh = p^2$.



Сл. 40



Сл. 41

БМО '94.2.

Прво решење (Мирослав Тремл). Нека су x_1, x_2, x_3, x_4 нуле датог полинома. Претпоставимо да су бар две од њих, на пример x_1 и x_2, цели бројеви. На основу Виетове теореме добијамо

$$x_1x_2x_3x_4 = m, \tag{1}$$
$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 11, \tag{2}$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 1993 + m, \tag{3}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1994. \tag{4}$$

Једнакости (2) и (3) могу се записати у облику:

$$(x_1 + x_2)x_3x_4 + x_1x_2(x_3 + x_4) = 11, \tag{5}$$
$$x_1x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3x_4 = 1993 + m. \tag{6}$$

Из једнакости (4) следи да је x_3+x_4 цео број. Користећи ту чињеницу добијамо из (6) да је x_3x_4 такође цео број. Размотримо следећа два случаја:

Случај 1. *Бар један од бројева x_1 и x_2 је паран.* Претпоставимо, на пример, да је x_1 паран број. Из (1) следи да је m паран број. Из (5) следи да је сваки од бројева x_1+x_2 и x_3x_4 непаран. Користећи ове чињенице добијамо из (6) да је x_3+x_4 паран број, а из (4) следи да је x_3+x_4 непаран број. Контрадикција.

Случај 2. *Бројеви x_1 и x_2 су оба непарни.* Из (4) следи да је x_3+x_4 паран број, а из (5) следи да је x_3+x_4 непаран број. Контрадикција.

Друго решење. Доказаћемо више него што се тражи у задатку: дати полином се не може представити као производ два квадратна тринома с целобројним коефицијентима.

Претпоставимо да је

$$x^4-1994x^3+(1993+m)x^2-11x+m=(x^2-px+q)(x^2-rx+s),$$

где су p, q, r и s цели бројеви. Упоређивањем коефицијената уз исте потенције променљиве x на левој и десној страни ове једнакости добијамо

$$p+r=1994, \tag{1}$$

$$pr+q+s=1993+m, \tag{2}$$

$$ps+qr=11, \tag{3}$$

$$qs=m. \tag{4}$$

Из (1) следи да су p и r исте парности. Из (3) следи да p и r не могу бити парни. Дакле p и r су непарни. Ако имамо у виду ту чињеницу, из (3) добијамо да су q и s супротне парности. Лева страна у (4) је парна. Следи да је m паран. Сада можемо извести закључак да је лева страна у (2) парна а десна непарна, а то је немогуће. Дакле полазна претпоставка да се дати полином може представити као производ два квадратна тринома с целобројним коефицијентима није тачна.

Треће решење. Једначину

$$x^4-1994x^3+(1993+m)x^2-11x+m=0$$

решимо по m:

$$m=\frac{x^4-1994x^3+1993x^2-11x}{x^2+1}=-x^2+1994x-1992-\frac{1983x-1992}{x^2+1}.$$

Поставља се питање за које целобројне вредности променљиве x израз $(1983x-1992)/(x^2+1)$ има целобројну вредност. Из $x\geqslant 1983$ следи да је $0<(1983x-1992)/(x^2+1)<1$, а из $x\leqslant -1985$ следи да је $-1<(1983x-1992)/(x^2+1)<0$. Дакле довољно је испитати само коначно много случајева: $-1984\leqslant x\leqslant 1982$. Уз помоћ компјутера није тешко закључити да $(1983x-1992)/(x^2+1)$ узима целобројну вредност само за $x=0$. У том случају је $m=0$, па се дати полином своди на

$$x^4-1994x^3+1993x^2-11x=x(x^3-1994x^2+1993x-11).$$

Лако је показати да полином $x^3-1994x^2+1993x-11$ нема целобројних корена.

БМО '94.3.

Прво решење. За сваку пермутацију $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ бројева 1, 2, …, n размотримо збир

$$S(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{k=1}^{n-1} |a_{k+1} - a_k| + |a_1 - a_n|.$$

Тај збир се може представити у облику

$$S(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n} (\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k) a_k,$$

где је $\varepsilon_k \in \{-1, 1\}$ и $a_{n+1} = a_1$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_n$. Означимо $b_k = \varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k$ за $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Тада се збир $S(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ може представити у облику

$$S(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot k,$$

где је $b_k \in \{-2, 0, +2\}$ и $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 0$. Према томе, бројеви $+2$ и -2 појављују се једнак број пута међу b_k-овима. Следи да је

$$S(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_m) - 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_m),$$

где су x_1, x_2, …, x_m, y_1, y_2, …, y_m различити бројеви из $\{1, 2, \ldots, n\}$. Лако је установити да се максимална вредност израза $2(x_1 + x_2 + \cdots + x_m) - 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_m)$ достиже када је $m = \left[\dfrac{n}{2}\right]$ и

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} = \{n, n-1, \ldots, n-m+1\},$$
$$\{y_1, y_2, \ldots, y_m\} = \{1, 2, \ldots, m\},$$

а та максимална вредност је $2m(n-m)$. Сада, размотримо следећу пермутацију бројева 1, 2, …, n: $a_{2k-1} = n - m + k$ и $a_{2k} = k$ за $k \leqslant \left[\dfrac{n}{2}\right] = m$, и, ако је n непаран број, $a_n = m + 1$. За ту пермутацију важи $S(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 2m(n-m)$ и $|a_1 - a_n| = 1$. Према томе, тражени максимум збира $S(a_1, a_2, \ldots, a_n) - |a_1 - a_n|$ једнак је

$$2\left[\frac{n}{2}\right]\left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right) - 1,$$

тј. $\dfrac{n^2-2}{2}$ ако је n паран број, односно $\dfrac{n^2-3}{2}$ ако је n непаран број.

Друго решење. Нека је

$$S(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{k=1}^{n-1} |a_{k+1} - a_k| + |a_1 - a_n|,$$

где је $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ пермутација бројева $1, 2, \ldots, n$. Даље, нека су A_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, тачке реалне праве са координатама a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, респективно. $S(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ је дужина затворене полигоналне линије $A_1A_2 \ldots A_n$. Ако је $k < \frac{n}{2}$, одсечак $[k, k+1]$ покрива највише $2k$ сегмената посматране полигоналне линије. Заиста, сваки сегмент који покрива одсечак $[k, k+1]$ мора имати један крај у скупу $\{1, 2, \ldots, k\}$, а свака тачка је крај тачно два сегмента. На сличан начин закључујемо да у случају $\frac{n}{2} \leqslant k < n$ број сегмената који покривају одсечак $[k, k+1]$ није већи од $2(n-k)$. Следи да за $n = 2m$ важи

$$S(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqslant 2[1 + 2 + \cdots + (m-1) + m + (m-1) + \cdots + 2 + 1] = 2m^2,$$

а за $n = 2m + 1$ важи

$$S(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqslant 2[1 + 2 + \cdots + m + m + \cdots + 2 + 1] = 2m(m+1).$$

Ове две неједнакости можемо записати у јединственом облику

$$S(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqslant 2m(n-m), \qquad \text{где је } m = \left[\frac{n}{2}\right].$$

Вредност разматране суме није већа од $2m(n-m)-1$. Ова вредност се достиже, на пример, за пермутацију задату са $a_{2k-1} = n - m + k$ и $a_{2k} = k$, $k = 1, 2, \ldots, m$ и $a_n = m + 1$ ако је n непаран број. Према томе, тражени максимум једнак је $2\left[\frac{n}{2}\right]\left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right) - 1$.

БМО '94.4.

Прво решење. Нека је A лице из скупа од n људи, за који важе услови задатка. Означимо са a_1, a_2, $\ldots$, a_p све познанике лица A, а са u_1, u_2, $\ldots$, u_q сва лица која не познају особу A. Постоји бијекција између скупа $\{u_1, u_2, \ldots, u_q\}$ и скупа свих парова (a_i, a_j), где је $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant p$ и $i \neq j$. Заиста, пошто су a_i и a_j познаници лица A, то се они медјусобно не познају (ако би се познавали, онда би (A, a_i, a_j) била тројка познаника, каква не постоји сагласно условима задатка). Следи да постоји лице B које познаје и a_i и a_j истовремено. Лице B не познаје A (ако B познаје A, тада су (A, B, a_i) и (A, B, a_j) тројке познаника, што је немогуће).

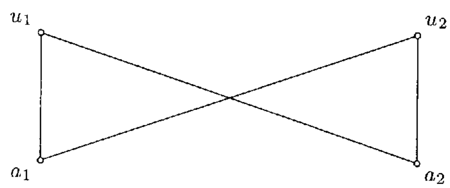
Обрнуто, ако B не познаје A, тада сагласно условима задатка постоје тачно две особе a_i и a_j које су познаници и A и B истовремено. Пар (a_i, a_j) кореспондирамо лицу B. Ова кореспонденција је инјективна. Заиста, ако су (a_i, a_j) и (a_k, a_l) различити парови који су кореспондирани истој особи B која не познаје A, тада међу a_i, a_j, a_k, a_l постоје најмање три различита познаника лица A и B, што је немогуће. На основу претходно реченог закључујемо да је

$$q = \frac{p(p-1)}{2} \quad \text{и према томе} \quad n = \frac{p(p-1)}{2} + p + 1.$$

Дакле, $p^2+p-2(n-1)=0$ и та једначина има тачно једно позитивно решење. Према томе, број p је исти за све чланове датог скупа од n људи. Даље добијамо:

ако је $p=1$, онда је $n=2$;
ако је $p=2$, онда је $n=4$;
ако је $p=3$, онда је $n=7$;
ако је $p=4$, онда је $n=11$;
ако је $p=5$, онда је $n=16$; итд.

Размотримо случај $p \geqslant 3$. Следи да постоје две особе a_1 и a_2 које се не познају међусобно. На основу услова задатка постоје тачно две особе u_1 и u_2 које су познаници пара (a_1, a_2). Имамо следећи граф:



Сл. 42

У сваком врху постоје још $p-2$ странице графа. Дакле, има најмање $4(p-2)+4=4(p-1)$ страница. Даље добијамо да је $n \geqslant 4(p-1)$, што не важи за $p=3$ и $p=4$. Случај $p=5$ $(n=16)$ има конкретну реализацију. То показује пример скупа од 16 људи $\{1,2,\ldots,16\}$, где су сви парови познаника следећи парови: $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(1,6)$, $(2,10)$, $(2,13)$, $(2,15)$, $(2,16)$, $(3,9)$, $(3,12)$, $(3,14)$, $(3,16)$, $(4,8)$, $(4,11)$, $(4,14)$, $(4,15)$, $(5,7)$, $(5,11)$, $(5,12)$, $(5,13)$, $(6,7)$, $(6,8)$, $(6,9)$, $(6,10)$, $(7,14)$, $(7,15)$, $(7,16)$, $(8,12)$, $(8,13)$, $(8,16)$, $(9,11)$, $(9,13)$, $(9,15)$, $(10,11)$, $(10,12)$, $(10,14)$, $(11,16)$, $(12,15)$, $(13,14)$. Према томе, одговор је $n=16$.

Друго решење. Нека је a једна особа из скупа људи који задовољава услове задатка. Нека она има r познаника: a_1, a_2, $\ldots$, a_r. Очигледно је да се сваке две особе a_i и a_j, $1 \leqslant i < j \leqslant r$, међусобно не познају и да имају тачно једног заједничког познаника a_{ij} различитог од a. Никоје две особе a_{ij} се не познају, јер би у противном постојала особа која има три заједничка познаника са a. Скуп особа a_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant r$, поклапа се са скупом особа које не познају a. Следи да је $n = 1 + r + \binom{r}{2}$, а одавде је $r = \dfrac{\sqrt{8n-7}-1}{2}$. Дакле, сваке две особе из разматраног скупа имају исти број познаника. За $r=2$ имамо да је $n=4$. Нека је $r \geqslant 3$. Познаници особе a_{12} су a_1, a_2 и још $r-2$ особе из скупа који се састоји од $\binom{r-2}{2}$ особе a_{ij}, $3 \leqslant i < j \leqslant r$. Следи да је $r-2 \leqslant \binom{r-2}{2}$, а одавде да је $r \geqslant 5$ и $n \geqslant 16$. Скуп од 16 особа $\{a, a_1, a_2, \ldots, a_5, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{4,5}\}$ међу којима се познају следећи парови:

1. (a, a_1), $1 \leqslant i < j \leqslant 5$;
2. (a_i, a_{ij}), (a_j, a_{ij}), $1 \leqslant i < j \leqslant 5$;
3. (a_{ij}, a_{kl}), $1 \leqslant i < j \leqslant 5$, $1 \leqslant k < l \leqslant 5$, $\{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset$,

задовољава услове задатка. Према томе, решење задатка је $n = 16$.

БМО '95.1.

Операција $*$ је добро дефинисана и важи једнакост $(x * y) * z = x * (y * z)$. Доказаћемо индукцијом да за сваки непаран број $n \geqslant 3$ важи једнакост

$$f(n) = 2 * 3 * 4 * \cdots * n = \frac{n(n+1)-2}{n(n+1)+2}. \tag{1}$$

За $n = 3$ непосредним проверавањем добијамо да је

$$f(3) = 2 * 3 = \frac{2+3}{1+2\cdot 3} = \frac{5}{7} = \frac{3\cdot 4-2}{3\cdot 4+2}.$$

Претпоставимо да једнакост (1) важи за неки непаран број $n \geqslant 3$. Тада за број $n+2$ добијамо:

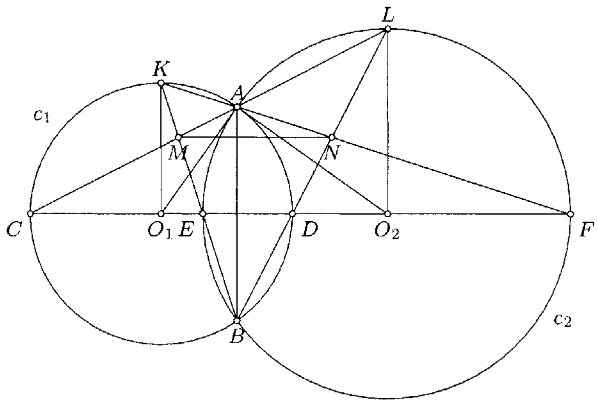
$$\begin{aligned} f(n+2) = f(n) * (n+1) * (n+2) &= \frac{n(n+1)-2}{n(n+1)+2} * \frac{2n+3}{n^2+3n+3} \\ &= \frac{\dfrac{n^2+n-2}{n^2+n+2} + \dfrac{2n+3}{n^2+3n+3}}{1 + \dfrac{n^2+n-2}{n^2+n+2}\cdot\dfrac{2n+3}{n^2+3n+3}} = \frac{n^4+6n^3+9n^2+4n}{n^4+6n^3+13n^2+8n} \\ &= \frac{(n+2)(n+3)-2}{(n+2)(n+3)+2}. \end{aligned}$$

Према томе, једнакост (1) важи за сваки непаран број $n \geqslant 3$, па следи да је

$$f(1995) = \frac{1995\cdot 1996-2}{1995\cdot 1996+2} = \frac{1991009}{1991011}.$$

БМО '95.2.

Прво ћемо доказати да су C, A и L колинеарне тачке. Означимо $\measuredangle ACO_1 = \alpha$ и $\measuredangle AFO_2 = \beta$. Тада је $\measuredangle AO_1O_2 = 2\alpha$, $\measuredangle AO_2O_1 = 2\beta$ и $2\alpha + 2\beta = 90^\circ$. Даље је $\measuredangle CAO_2 + \measuredangle O_2AL = 90^\circ + \alpha + \measuredangle O_2AL$. Како је $\measuredangle AO_2L = 2\measuredangle ABL = 2\alpha$, то следи да је $\measuredangle CAO_2 + \measuredangle O_2AL = 90^\circ + \alpha + 90^\circ - \alpha = 180^\circ$, тј. тачке C, A и L припадају истој правој. Аналогно доказујемо да и тачке F, A и K припадају истој правој, сл. 43.



Сл. 43

Из једнакости $\measuredangle MAN + \measuredangle MBN = \alpha + 90^\circ + \beta + \beta + \alpha = 180^\circ$ следи да је четвороугао $ABMN$ тетиван. Примењујући Менелајеву теорему на троугао MCE и праву KAF, односно троугао NDF и праву LAC добијамо да је

$$\frac{KM}{KE} \cdot \frac{AC}{AM} \cdot \frac{EF}{CF} = 1, \qquad \frac{LN}{LD} \cdot \frac{AF}{AN} \cdot \frac{CD}{CF} = 1.$$

Даље добијамо $\frac{KM}{KE} \cdot \frac{AC}{AM} \cdot 2r_2 = \frac{LN}{LD} \cdot \frac{AF}{AN} \cdot 2r_1$, односно $\frac{r_2}{r_1} = \frac{LN}{LD} \cdot \frac{AF}{AN} \cdot \frac{KE}{KM} \cdot \frac{AM}{AC}$. Пошто је $AMBN$ тетиван четвороугао, то је $\measuredangle AMN = \measuredangle ABN = \alpha$, па следи да је $MN \parallel EF$ и коначно $\frac{r_2}{r_1} = \frac{LN}{LD} \cdot \frac{KE}{KM}$.

БМО '95.3.

Лако се добија да су $x_1 = b^2 + 1$ и $x_2 = a^2 - b^2 - a$ решења дате једначине. Очигледно је да су x_1 и x_2 позитивни цели бројеви и да x_1 није потпун квадрат.

Претпоставимо да постоје позитивни цели бројеви a и b, такви да је $a > b$, $a+b$ паран број и $a^2 - b^2 - a = c^2$, за неки позитиван цео број c. Пошто је $a + b$ паран број, то следи да су $m = \frac{a+b}{2}$ и $n = \frac{a-b}{2}$ позитивни цели бројеви. Тада је $4mn - m - n = a^2 - b^2 - a = c^2$ и

$$(4m - 1)(4n - 1) = 4(4mn - m - n) + 1 = (2c)^2 + 1.$$

Сада добијамо да збир $(2c)^2 + 1^2$ има прост делилац p облика $p = 4k - 1$, одакле следи да p дели број 1, што је контрадикција.

Користили смо следећу теорему:

Ако је прост број p делилац збира $u^2 + v^2$, где су u и v цели бројеви, онда је p делилац сваког од бројева u и v.

БМО '95.4.

Број парова тачака из скупа S једнак је

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = \binom{n^2}{2} = \frac{(n-1)n^2(n+1)}{2}.$$

Број квадрата из T чије су странице једнаке k и паралелне су координатним осама једнак је $(n-k)^2$. Сваки од њих садржи $k-1$ квадрата чија темена леже на његовим страницама и чије странице нису паралелне координатним осама. Према томе, број свих квадрата из T једнак је

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)^2 = \sum_{j=1}^{n-1}(n-j)j^2 = n\sum_{j=1}^{n-1} j^2 - \sum_{j=1}^{n-1} j^3 = \frac{(n-1)n^2(n+1)}{12}.$$

С друге стране, имајући у виду да темена једног квадрата одредјују 6 парова тачака из S, добијамо да је број свих квадрата из T једнак $(a_1 + 2a_2 + 3a_3)/6$. Према томе, важе једнакости

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 = \frac{(n-1)n^2(n+1)}{2} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3.$$

одакле добијамо да је $a_0 = a_2 + 2a_3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Ašić i dr: *Međunarodne matematičke olimpijade*, drugo izdanje, Društvo matematičara Srbije, Beograd 1986.

2. И. М. Виноградов: *Основы теории чисел*, Наука, Москва 1972.

3. С. Гроздев, Л. Давидов, О. Мушкаров, Н. Райков: *Балкански олимпиади по математика*, Съюз на математиците в България, Ст. Загора 1994.

4. M. Klamkin: *International Mathematical Olympiads 1979–1985*, The Mathematical Association of America, 1986.

5. Материјали Жирија Међународних и Балканских математичких олимпијада, 1984--1995.

6. U. Milutinović, D. Žubrinić: *Balkanske matematičke olimpijade*, Školska knjiga, Zagreb 1991.

7. P. Mladenović: *Kombinatorika*, drugo izdanje, Društvo matematičara Srbije, Beograd 1992.

8. Часопис „Квант“

9. Часопис „Тангента“