15. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

Београд, 02.06.2021.

Решења задатака

1. Применом Коши-Шварцове неједнакости имамо следећу неједнакост

$$(a(9bc+1)+b(9ac+1)+c(9ab+1))\left(\frac{a}{9bc+1}+\frac{b}{9ca+1}+\frac{c}{9ab+1}\right) \geqslant (a+b+c)^2.$$

Одавде следи

$$\frac{a}{9bc+1}+\frac{b}{9ca+1}+\frac{c}{9ab+1} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{27abc+a+b+c}.$$

Применом неједнакости између аритметичке и геометријске неједнакости имамо

$$(a+b+c)^3 \geqslant (3\sqrt[3]{abc})^3 = 27abc,$$

па закључујемо

$$(a+b+c)^3+a+b+c \geqslant 27abc+a+b+c.$$

Сада добијамо неједнакост

$$\frac{(a+b+c)^2}{27abc+a+b+c} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^3+a+b+c},$$

па, користећи претходно добијене неједнакости, следи тражена неједнакост

$$\frac{a}{9bc+1}+\frac{b}{9ca+1}+\frac{c}{9ab+1} \geqslant \frac{a+b+c}{1+(a+b+c)^2}.$$

Видимо да једнакост важи ако и само ако је $a=b=c$, јер тада важи једнакост у неједнакости између аритметичке и геометријске средине, а провером добијамо да су оба израза једнака за $a=b=c$.

2. Приметимо да је x непаран број. Ако је $y \geqslant 3$, тада по модулу 8 имамо

$$1 \equiv x^2 \equiv 5^z \pmod 8,$$

па је z паран број. Напишимо $z=2z_1$, за неко $z_1 \in \mathbb{N}$. Тада можемо раставити на чиниоце

$$(x-2021^{z_1})(x+2021^{z_1}) = 2^y.$$

Означимо са d највећи заједнички делилац бројева $x-2021^{z_1}$ и $x+2021^{z_1}$. Тада $d \mid 2\cdot 2021^{z_1}$ и $d \mid 2^y$, одакле $d \mid 2$, а пошто су оба броја непарна, следи $d=2$. Одавде закључујемо да мора бити $x-2021^{z_1}=2$ и $x+2021^{z_1}=2^{y-1}$, па одузимањем добијамо

$$2021^{z_1} = 2^{y-2}-1.$$

Ако је $y \geqslant 4$, тада добијамо контрадикцију по модулу 4

$$1 \equiv 2021^{z_1} = 2^{y-2}-1 \equiv -1 \pmod 4.$$

Али $y \geqslant 13$, јер $2^{10}-1 < 2021$, па у овом случају нема решења.

Ако је $y=1$, тада 2021^z+2 не може бити квадрат јер даје остатак 3 при дељењу са 5, па ни у овом случају нема решења.

Преостаје случај $y=2$. Тада имамо разлику квадрата

$$(x-2)(x+2) = 2021^z.$$

Пошто су $x-2$ и $x+2$ непарни бројеви који се разликују за 4, они су узајамно прости, па разликујемо следећа два случаја.

(1) $x-2=1$, $x+2=2021^z$, па $x=3$, а то је немогуће због друге једначине.

(2) $x-2=43^z$, $x+2=47^z$, одакле следи $47^z-43^z=4$. Ако је $z>1$, тада

$$47^z-43^z=4(47^{z-1}+\cdots+43^{z-1})>4,$$

па мора бити $z=1$, одакле даље добијамо једино решење $x=45$, $y=2$, $z=1$.

3. Први играч побеђује ако је $n>3$ непаран, док Други играч побеђује у осталим случајевима.

Ако је $n=2k$ паран, поделимо темена многоугла $A_1A_2\ldots A_{2k-1}A_{2k}$ у узастопне парове $\{A_1,A_2\},\ldots,\{A_{2k-1},A_{2k}\}$. Други играч игра тако што у преосталом темену оног пара темена који је Први играч управо одабрао, упише супротан број од оног који је Први играч уписао. Прецизније, ако Први играч упише број i у теме A_{2j-1}, онда Други уписује $1-i$ у A_{2j}; ако Први играч упише број i у теме A_{2j}, онда Други уписује $1-i$ у теме A_{2j-1}. Тада је збир бројева у свака три узастопна темена многоугла једнак 1 или 2 јер тај троугао садржи тачно један пар одабраних темена у којима је збир бројева 1. Други играч овом стратегијом побеђује.

У осталим случајевима побеђује Први играч. Претпоставимо, без умањења општости, да је Први играч у првом потезу уписао број 0 у теме A_1. Ако Други играч не упише 1 у теме A_2 или A_n, онда Први играч брзо побеђује. Заиста, у бар једном од темена A_3 и A_{n-1} није уписан број након првог потеза Другог играча, претпоставимо да је у питању A_3. Први играч уписује 0 у теме A_2 (ако је то већ урадио Други играч, онда Први побеђује уписивањем 0 у теме A_3). Ако је Други играч уписао 0 у теме A_n, то је већ победа за Првог играча, а у супротном поље A_n је празно, као и поље A_3. Након било ког потеза Другог играча, Први играч побеђује тако што уписује 0 у једно од два темена A_3 или A_n где није уписано ништа до тада.

На даље, претпоставимо да је Други играч уписао број 1 у поље A_2 (симетрично се игра за A_n).

Ако је $n=4k+1\geqslant 5$, онда Први играч добија на следећи начин. Први играч у теме A_{4i-1} уписује број 1, а у теме A_{4i+1} уписује број 0, за свако $1\leqslant i\leqslant k$. Видимо да Други играч мора форсирано да игра тако што уписује број 0 у темена A_{4i}, за $1\leqslant i\leqslant k$, и 1 у темена A_{4i+2}, за $1\leqslant i\leqslant k-1$. Ако то не уради, губи, јер Први играч онда уписује у три узастопна темена исти број, дакле збир дељив са 3. Међутим, на крају игре, у теменима A_1, A_{4k+1} и A_{4k} је број 0, тако да Први играч побеђује.

Ако је $n=4k+3\geqslant 7$, онда Први играч добија на следећи начин. Игра се одвија на исти начин као у претходном случају, све до претпоследње рунде потеза. Претпоставимо да су до сада уписани бројеви у теменима $A_1,\ldots,A_{4k}$ као и у претходном случају, у супротном је Први играч већ могао да победи. У теменима A_1 и A_{4k} је уписан број 0, док у теменима $A_{4k+1},A_{4k+2},A_{4k+3}$ нису уписани бројеви. Сада Први играч уписује у теме A_{4k+2} број 0 и побеђује у наредном потезу, уписујући број 0 у преостало теме које не одабере Други играч.

Према томе, за $n=2019$ и $n=2021$ побеђује Први играч, док за $n=2020$ побеђује Други.

4. Докажимо прво да је $OP=OQ$. Нека права која садржи средиште K дужи AH и нормална је на OK сече странице AB и AC редом у тачкама P' и Q'. Означимо са M и N редом средишта страница AB и AC. Због

$$\measuredangle OMP'=\measuredangle OKP'=90^\circ,\qquad \measuredangle ONQ'=\measuredangle OKQ'=90^\circ,$$

четвороуглови $OMP'K$ и $ONQ'K$ су тетивни. Како су дужи MK и NK средње линије у троугловима ABH и ACH, важи $MK\parallel BH$, $NK\parallel CH$, тј. $MK\perp AC$, $NK\perp AB$, па је

$$\measuredangle OP'K=\measuredangle OMK=\measuredangle BAC,\qquad \measuredangle OQ'K=\measuredangle ONK=\measuredangle BAC.$$

Према томе, троугао $OP'Q'$ је једнакокрак и K је средиште дужи $P'Q'$, па је $AP'HQ'$ паралелограм јер му се дијагонале полове, одакле је $P\equiv P'$, $Q\equiv Q'$.

Приметимо, даље, да су правоугли троуглови BPH, CQH и OPK слични, одакле је

$$\frac{BH}{OK}=\frac{PH}{PK}=\frac{BP}{OP},\qquad \frac{CH}{OK}=\frac{QH}{QK}=\frac{CQ}{OQ}.$$

Користећи ове односе и очигледне једнакости $PK=QK=\frac{PQ}{2}$, $AP=QH$, $AQ=PH$, одмах добијамо да важи

$$\frac{PB\cdot PQ}{QA\cdot QO}=\frac{QC\cdot PQ}{PA\cdot PO}=2.$$