

**15. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА  
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА**

**Београд, 02.06.2021.**

1. Доказати да за позитивне реалне бројеве  $a, b, c$  важи неједнакост:

$$\frac{a}{9bc+1} + \frac{b}{9ca+1} + \frac{c}{9ab+1} \geq \frac{a+b+c}{1+(a+b+c)^2}.$$

Када важи једнакост у овој неједнакости?

2. Решити следећу једначину у скупу природних бројева:

$$x^2 = 2^y + 2021^z.$$

3. Два играча играју следећу игру: наизменично у темена  $n$ -тоугла уписују бројеве 0 или 1. Први играч започиње игру и побеђује ако након неког од његових потеза постоји троугао, који чине три узастопна темена  $n$ -тоугла, такав да је збир уписаних бројева у његовим теменима дељив са 3. Други играч побеђује ако успе то да спречи. Одредити који играч има победничку стратегију, уколико је:  
(а)  $n = 2019$ ;      (б)  $n = 2020$ ;      (в)  $n = 2021$ .

4. На страницама  $AB$  и  $AC$  оштроуглог троугла  $ABC$ , са ортоцентром  $H$  и центром описане кружнице  $O$ , одабране су редом тачке  $P$  и  $Q$  такве да је  $APHQ$  паралелограм. Доказати да важи:

$$\frac{PB \cdot PQ}{QA \cdot QO} = 2.$$

Време за рад 240 минута.  
Сваки задатак вреди 10 поена.