значи да је AF симедијана у $\triangle ABC$, а тачка Q лежи на тежишној дужи из темена A.

4А.4. Приметимо да за свако $k = 1, 2, \ldots, n$ дата једначина има тачно једно решење $-\frac{\pi}{2} + \frac{(k-1)\pi}{n} < x_k < -\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n}$, јер функција $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} nx$ расте на тим интервалима од $-\infty$ до $+\infty$. Сабирање нам даје $-\frac{\pi}{2} < X = x_1 + \cdots + x_n < \frac{\pi}{2}$. Користимо идентитет

$$(\cos x + i \sin x)^2 = \frac{i - \operatorname{tg} x}{i + \operatorname{tg} x}\,. \qquad (*)$$

Из њега следи једнакост $\frac{i - \operatorname{tg} nx}{i + \operatorname{tg} nx} = \left(\frac{i - \operatorname{tg} x}{i + \operatorname{tg} x}\right)^n$, па тако бројеви $y_k = \operatorname{tg} x_k$ задовољавају једначину $\frac{i-(2-y)}{i+(2-y)} = \left(\frac{i-y}{i+y}\right)^n$, тј.

$$P(y) = (i - 2 + y)(i + y)^n - (i + 2 - y)(i - y)^n = 0.$$

Пошто је P полином степена n, важи $P(y) = c \prod_{j=1}^{n}(y - y_k)$ за неку константу c. Сада множењем једнакости $(*)$ за $x \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ добијамо

$$\cos 2X + i \sin 2X = \prod_{k=1}^{n} \frac{i - y_k}{i + y_k} = (-1)^n \frac{P(i)}{P(-i)} = (-1)^n \frac{2i - 2}{-2i - 2} = i = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}.$$

па је $X = \frac{\pi}{4}$.

1Б.1. Збир коефицијената полинома $P(x)$ је $P(1)$. При дељењу полинома $P(x)$ полиномом $Q(x)$ добија се неки количник $S(x)$ и остатак $R(x)$, што значи да је

$$P(x) = Q(x) \cdot S(x) + R(x).$$

Одавде је $P(1) = Q(1) \cdot S(1) + R(1) = 0 \cdot S(1) + 2049 = 2049$, што је и одговор.

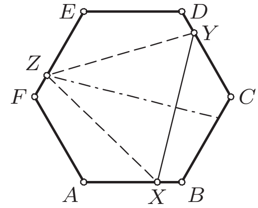
1Б.2. Бројеви из скупа $S = \{23^{2021}, 5^{2021}, 2021^{2021}\}$ дају остатак 2, а осталих шест датих бројева дају остатак 1 при дељењу са 3. Према томе, свака врста (као и колона и дијагонала) мора да садржи или два елемента из скупа S, или ниједан. Међутим, скуп S има непаран број елемената, па је то немогуће.

1Б.3. Чинилац $(p_n + 1)!$ у датом производу дељив је са p_n, али не и са p_n^2. С друге стране, пошто је $p_{n-1} + 1 < p_n$, ниједан од осталих чинилаца није дељив са p_n. Према томе, дати производ је дељив са p_n и није дељив са p_n^2, па он не може бити квадрат природног броја.

1Б.4. Збир свих 100 карата има збир цифара једнак 100, а најмањи број са збиром цифара 100 је 199 999 999 999.

С друге стране, овај збир се достиже ако имамо једну карту с бројем 10^{11} и по девет карата с бројевима $1, 10, 10^2, \ldots, 10^{10}$, а тада су и услови задатка задовољени. Према томе, одговор је 199 999 999 999.

1Б.5. Уочимо тачку Z' на страници EF такву да је $EZ' : Z'F = 3 : 1$. Како је $AX = CY = EZ'$ и $BX = DY = FZ'$, четвороуглови $CBXY$, $EDYZ'$ и $AFZ'X$ су подударни, па је $XY = YZ' = Z'X$. То значи да и тачка Z' припада симетрали дужи XY. Следи да је $Z \equiv Z'$, тј. $EZ : ZF = 3 : 1$.



2Б.1. Лева страна дате неједнакости је

$$\log_2\frac{3}{2}+\log_2\frac{4}{3}+\cdots+\log_2\frac{n^2+1}{n^2}=\log_2\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n^2+1}{n^2}\right)=\log_2\frac{n^2+1}{2},$$

чиме се услов задатка своди на $n^2+1<2^{2022}$. То важи само за $n<2^{1011}$, па тражених бројева има $2^{1011}-2$.

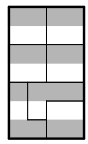
2Б.2. Посматрајмо квадратну функцију $f(x)=ax^2+bx+c$. Из датих услова следи $a\neq 0$. Први, други и трећи услов редом еквивалентни су са

$$f(0)>0,\quad f(-\tfrac{1}{2})<0\quad \text{и}\quad f(a^2)=0.$$

Видимо да функција f расте на интервалу $(-\frac{1}{2},0)$ и опада на интервалу $(0,a^2)$, што значи да је она конкавна, тј. $a<0$. Одатле је $f(-1)=a-b+c<f(-\frac{1}{2})<0$, тј. $b>a+c$.

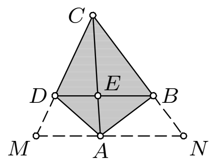
Друго решење. Претпоставимо да је $a+c\geqslant b$. Како је $b>\frac{1}{2}a+2c$, следи да је $a>2c>0$, а отуда и $b>0$. Сада је и $a^5+a^2b+c>0$, што је контрадикција.

2Б.3. Обојмо m врста табле наизменично црно и бело, при чему прву врсту бојимо црно. Тада црних поља има за n више него белих.



Свака фигура типа K покрива једнак број црних и белих поља. С друге стране, фигура типа L покрива за два више поља у једној боји него у другој. Да би се надокнадила разлика од n поља, потребно је бар $\frac{n}{2}$ оваквих фигура.

2Б.4. Означимо дати четвороугао са $ABCD$. Нека се дијагонале AC и BD секу у тачки E тако да је $CE:EA=2:1$.



Поставимо кроз теме A праву паралелну дијагонали BD. Ова права сече полуправе CD и CB у тачкма M и N, редом. Како је по Талесовој теореми је $\frac{CM}{CD}=\frac{CN}{CB}=\frac{3}{2}$, важи $P_{CAM}=\frac{3}{2}P_{CAD}$ и $P_{CAN}=\frac{3}{2}P_{CAB}$. Дакле, четвороугао $ABCD$ се може покрити троуглом CMN чија је површина $\frac{3}{2}P_{ABCD}=\frac{1}{2}$.

2Б.5. Претпоставимо да је дати број A потпун квадрат. Његов збир цифара је $6(a+b)$, па је он дељив са 3, а самим тим и са 9, па $9\mid 6(a+b)$, тј. $3\mid a+b$. Даље, дати број је једнак

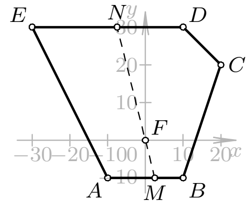
$$100100110110a+110110001001b=11(9100010010a+10010000091b)$$

и дељив је са 11, па мора бити дељив и са 11^2, одакле $11\mid 9100010010a+1001000091b$. Како бројеви 9100010010 и 1001000091 дају остатак 3 при дељењу са 11, следи да $11\mid 3(a+b)$. Следи да је $a+b$ дељиво са 11, па $33\mid a+b$, што је немогуће. Према томе, нема решења.

3Б.1. Да би десна страна неједнакости била дефинисана, мора да важи $n>1$. Неједнакост не важи за $n=2$, јер је $\log_2\sqrt{2^2-2}=\frac{1}{2}<\sin 30^\circ<\sin 1$.

За $n=3$ дата неједнакост постаје $2\sin 1<\log_3 7$. Како је $2\sin 1<2\sin 60^\circ=\sqrt{3}<\frac{7}{4}$, довољно је показати да је $\log_3 7>\frac{7}{4}$, тј. $3^{7/4}<7$, што је тачно јер је $3^7=2187<7^4=2401$. Према томе, одговор је $n=3$.

3Б.2. Површина трапеза $ABDE$ је $\frac{40+20}{2}\cdot 40=1200$, а површина троугла BDC је



$\frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 10 = 200$. Укупна површина парцеле је 1400.

Бојан црта праву $x = ky$ кроз бунар F. Та права сече праве AB и DE редом у тачкама $M(-10k, -10)$ и $N(30k, 30)$. Површина трапеза $AMNE$ који она одсеца је $\frac{(10-10k)+(30+30k)}{2} \cdot 40 = 800 + 400k$, што је једнако 700 за $k = -\frac{1}{4}$. Добијене пресечне тачке $M(\frac{5}{2}, -10)$ и $N(-\frac{15}{2}, 30)$ тада заиста леже на дужима AB и DE, па је жељена подела постигнута повлачењем праве $y = -4x$.

3Б.3. Множење друге једначине са $4xy$ и додавање првој даје

$$s^4 - s^3 - 4s^2 - s + 1 = 0, \quad \text{где је} \quad s = x + y.$$

Увођењем смене $s + \frac{1}{s} = a$, при чему је $s^2 + \frac{1}{s^2} = a^2 - 2$, ова једначина постаје $a^2 - a - 6 = 0$, што даје $a = -2$ или $a = 3$. Одавде налазимо $s = \frac{a \pm \sqrt{a^2-4}}{2}$, а даље замена $y = s - x$ у другу једначину даје $2x^2 - 2sx + s^2 - \frac{3}{4}s - 2 = 0$, одакле налазимо $x, y = \frac{2s \pm \sqrt{-4s^2+6s+16}}{4}$.

(1°) За $a = -2$ налазимо $s = -1$ и $x, y = \frac{1}{4}(-2 \pm \sqrt{6})$.

(2°) За $a = 3$ налазимо $s = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ или $s = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. У првом случају је $x, y = \frac{3+\sqrt{5} \pm \sqrt{11-3\sqrt{5}}}{4}$, а у другом $x, y = \frac{3-\sqrt{5} \pm \sqrt{11+3\sqrt{5}}}{4}$.

3Б.4. Означимо $x = \text{нзд}(a, b)$ и $z = \text{нзс}(a, b)$ и нађимо решења једначине $x^z z^x = 2020^{2021}$. Пошто $x \mid z$, запишимо $z = xy$. Дата једначина постаје $x^{x(y+1)} y^x = 2020^{2021}$, тј.

$$x^{y+1} y = 2020^{\frac{2021}{x}} = 2^{\frac{2021}{x}} \cdot 5^{\frac{2021}{x}} \cdot 101^{\frac{2021}{x}}.$$

Из експонената видимо да $x \mid 2021 = 43 \cdot 47$, а с друге стране, x дели 2020^{2021}, па не може бити дељиво ни са 43, ни са 47. Зато је једина могућност $x = 1$, а тада је $z = y = 2020^{2021}$.

Одредимо a и b. Како је $\text{нзд}(a, b) = 1$ и $\text{нзс}(a, b) = 2020^{2021} = 2^{4042} \cdot 5^{2021} \cdot 101^{2021}$, број a је производ неких од чинилаца 2^{4042}, 5^{2021} и 101^{2021}, а b је производ преосталих чинилаца. Овако уређени пар (a, b) можемо саставити на $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ начина, па је одговор 8.

3Б.5. Највећи број у крњој таблици је $m = n^2 - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n^2+3n-2}{2}$, а збир свих бројева у њој је $\frac{m(m+1)}{2} = \frac{n(n+3)(n^2+3n-2)}{8}$. Према томе, збир бројева у свакој врсти би био $S = \frac{(n+3)(n^2+3n-2)}{8}$.

С друге стране, збир бројева у доњој врсти (са два поља) је мањи од $2m = n^2 + 3n - 2$. Следи да је $n^2 + 3n - 2 > S$, тј.

$$(n-5)(n^2 + 3n - 2) < 0.$$

Горња неједнакост очигледно не важи за $n \geqslant 5$, док за $n = 4$ имамо $S = \frac{91}{4}$, па ни тада нема решења. С друге стране, за $n = 3$ је једно решење дато на слици. Дакле, једина могућност је $n = 3$.

1	6	5
3	2	7
8	4	

4Б.1. Пошто за $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ важи $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, тражена неједнакост је еквивалентна са $f(x) = \operatorname{tg} x + 2\sin x - 3x > 0$. Испитајмо ову функцију: њен извод је

$$f'(x) = \frac{2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} = \frac{(1-\cos x)^2(1+2\cos x)}{\cos^2 x} > 0$$

за $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, тј. функција f је на том интервалу растућа, у тачки $x = 0$ је непрекидна, па је $f(x) > f(0) = 0$ за $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, што је и требало доказати.

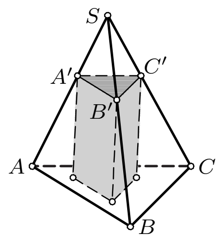
4Б.2. Ако је $|z| > 1$, онда из услова задатка по неједнакости троугла следи $|z| \geqslant |z|^n - 2$, тј. $|z|^n \leqslant |z| + 2$, што није тачно, јер $|z|^n$ неограничено расте када n расте. Ако је пак $|z| < 1$, онда је $|z^n - 2| \geqslant 2 - |z|^n > 1$, па услов задатка ни тада не важи. Према томе, мора бити $|z| = 1$.

Сада услов задатка постаје $|z^n - 2| \leqslant 1$, али опет важи $|z^n - 2| \geqslant 2 - |z|^n = 1$, при чему једнакост важи само ако је z^n позитиван реалан број за свако n. Следи да је $z = 1$, а то очигледно јесте решење.

4Б.3. Са P и P' означавамо површине основа пирамида $SABC$ и $SA'B'C'$, а са h и h' њихове висине, тим редом. Запремина пирамиде $SABC$ је $\frac{1}{3}Ph$.

Пирамида $SA'B'C'$ је слична пирамиди $SABC$ с коефицијентом $k = \frac{SA'}{SA}$, па је $P' = k^2 P$ и $h' = kh$. Висина призме $A'B'C'A''B''C''$ је $h - h'$, а запремина

$$V' = P'(h - h') = k^2(1-k) \cdot Ph = 3k^2(1-k).$$

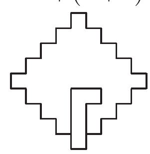


По неједнакости између аритметичке и геометријске средине је $\frac{1}{3} = \frac{\frac{k}{2}+\frac{k}{2}+(1-k)}{3} \geqslant \sqrt[3]{\frac{k}{2} \cdot \frac{k}{2} \cdot (1-k)} = \sqrt[3]{\frac{1}{12}V'}$, тј. $V' \leqslant \frac{4}{9}$, при чему се ова вредност достиже када је $\frac{k}{2} = 1-k$, тј. $k = \frac{2}{3}$. Према томе, одговор је $\frac{4}{9}$.

Напомена. Максимум запремине $f(k) = 3k^2(1-k)$ може се одредити и испитивањем извода: $f'(x) = 3x(2-3x)$ мења знак из негативног у позитиван за $x = \frac{2}{3}$, те је тада $f(x)$ максимално: $\max f = f(\frac{2}{3}) = \frac{4}{9}$.

4Б.4. **(а)** Удица дужине 2 има тачно три квадратна поља. Поплочавање је немогуће, јер дијамант реда n има $1+3+\cdots+(2n+1)+(2n-1)+\cdots+1 = n^2+(n+1)^2$ поља, што увек даје остатак 1 или 2 при дељењу са 3.

(б) Поље у првој врсти одозго може се покрити једино усправном удицом - рецимо, окренутом надесно. Тада се крајње десно поље у другом реду не може никако покрити.



4Б.5. За почетак, приметимо да x^6 при дељењу са 7 даје остатак 0 или 1 за сваки цео број x. Заиста, x^2 даје један од остатака $0, 1, 2, 4$ при дељењу са 7, а бројеви $1^3, 2^3, 4^3$ дају остатак 1.

За $a \geqslant 3$, број $a^{a!}$ је шести степен целог броја (јер $6 \mid a!$), па даје остатак 0 или 1 при дељењу са 7. Такође је $1^{1!} = 1$ и $2^{2!} = 4$. Према томе, $a^{a!}$, а такође и $b^{b!}$, даје остатак 0, 1 или 4 при дељењу са 7.

Сада збир $a^{a!} + b^{b!}$ даје један од остатака $0, 1, 2, 4, 5$ при дељењу са 7, али $21c^2 + 17$ даје остатак 3, па једначина нема решења.

Напомена. „Мала” Фермаова теорема тврди да, кад год је x цео број и p прост број, x^{p-1} даје остатак 0 или 1 при дељењу са p.