ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ – РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

1A.1. По неједнакости између аритметичке и геометријске средине је

$$P_1 + P_2 + P_3 \geqslant 3\sqrt[3]{P_1P_2P_3} = 3\sqrt[3]{1{\cdot}2{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}9{\cdot}4{\cdot}16{\cdot}5{\cdot}25} = 3 \cdot 120 = 360.$$

Једнакост не може да важи, јер не може бити $P_1 = P_2 = P_3 = 120$ (заиста, нпр. $9 \nmid 120$).

Према томе, $P_1 + P_2 + P_3 \geqslant 361$. У овом случају пример (на слици) налазимо подешавајући да P_1, P_2 и P_3 буду *приближно* једнаки.

1	5	25	P_1=125
2	4	16	P_2=128
3	4	9	P_3=108

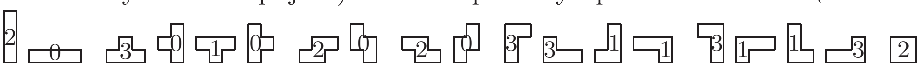
1A.2. Означимо $s = x + y + z$. Тада је $x^2 \equiv 1 \pmod{s}$, $y^2 \equiv 2 \pmod{s}$ и

$$x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2 \equiv z^2 \equiv 4 \pmod{s},$$

одакле следи $2xy \equiv 1 \pmod{s}$. С друге стране, $1 \equiv (2xy)^2 = 4 \cdot x^2 \cdot y^2 \equiv 8 \pmod{s}$, па $s \mid 7$. Како је $s > 1$, мора бити $s = 7$. Сада следи $x \equiv \pm 1$, $y \equiv \pm 3$ и $z \equiv \pm 2 \pmod{7}$, па као једино решење налазимо $(x, y, z) = (1, 4, 2)$.

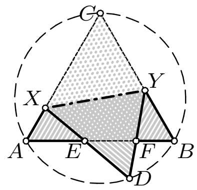
1A.3. Правоугаоник састављен од 19 датих тетромина имао би површину 76 и сваку страницу бар 4. Према томе, његове димензије морају бити 4×19 (или 19×4, што је аналогно).

Попунимо прву врсту тог правоугаоника нулама, другу јединицама, трећу двојкама и четврту тројкама. Овако је, за сваку тетромину, збир бројева које она покрива по модулу 4 независан од њеног положаја (заиста, при хоризонталној транслацији тетромине збир се не мења, а при вертикалној се мења за умножак броја 4). Ови збирови су приказани на слици:



Збир ових бројева је 28, тј. збир бројева које све тетромине покривају је дељив са 4. Међутим, збир свих бројева у правоугаонику је $114 \equiv 2 \pmod{4}$, што је контрадикција. Према томе, одговор је *не*.

1A.4. Пошто је $\sphericalangle AEX = \sphericalangle DEF$, $\sphericalangle BFY = \sphericalangle DFE$ и $\sphericalangle EAX = \sphericalangle EDF = \sphericalangle YBF = 60^\circ$, троуглови AEX, DEF и BYF су слични. Да би имали исту површину, потребно је и довољно да буду подударни, тј. да важи $AE = DE$ и $BF = DF$.



Узмимо тачку D на краћем луку AB описане кружнице $\triangle ABC$. Тачке X и Y налазимо у пресеку симетрале дужи CD са CA и CB - оне су заиста на страницама, јер је $AC > AD$ и $BC > BD$. Ако сада означимо $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD = x$, онда је $\sphericalangle XDC = \sphericalangle DCX = 60^\circ - x$ и $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ADC - \sphericalangle XDC = 60^\circ - (60^\circ - x) = x = \sphericalangle EAD$, па је $AE = DE$. Аналогно важи и $BF = DF$, што нам је и требало. Довољно је још се побринути да $XY \nparallel AB$, тј. да D није средиште лука AB.

Напомена. Услов задатка је испуњен ако и само ако D лежи на краћем луку AB. Заиста, ако је $AE = DE$ и $BF = DF$, онда је $\sphericalangle EAD = \sphericalangle EDA = x$, $\sphericalangle FBD = \sphericalangle FDB = y$, па сабирање углова у четвороуглу $ACBD$ даје $2x + 2y + 240^\circ = 360^\circ$, тј. $x + y = 60^\circ$ и $\sphericalangle ADB = 120^\circ$.

2A.1. Означимо $a_i = \frac{x_i}{|x_i|} = \pm 1$. Ако је S посматрани збир, онда је

$$\begin{aligned} 1 + S &= 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + \cdots + a_1a_2\cdots a_n \\ &= (1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n). \end{aligned}$$

Ако је бар један од бројева a_i једнак -1 (тј. $x_i < 0$), онда је $S = -1$; у супротном је $S = 2^n - 1$.

2A.2. Дати израз се може записати у облику

$$n = (a-b)(a^2-b^2) + (c-a)(c^2-b^2) = (a-b)^2(a+b) + (c-a)(c-b)(c+b).$$

Ако су a, b и c исте парности, оба сабирка, а самим тим и број n, дељиви су са 8. У супротном, n је непаран број.

Ако су нека два броја једнака, рецимо $b = c$, онда је $n = (a-b)^2(a+b)$, што не може бити 1 или 8. С друге стране, узимањем $a = b+1$, односно $a = b+2$, можемо добити редом $n = 2b+1$ и $n = 8(b+1)$ за свако $b \in \mathbb{N}$.

Ако су пак a, b и c међусобно различити и $c > a, b$, онда важи $(a-b)^2 \geqslant 1$ и $(c-a)(c-b) \geqslant 2$, па је $n \geqslant (a+b) + 2(c+b) \geqslant 11$, те опет $n \notin \{1, 8\}$.

Дакле, одговор су сви непарни бројеви $n > 1$ и сви дељиви са 8 већи од 8.

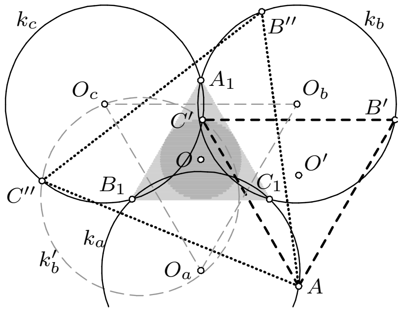
2A.3. Означимо са N број циклуса, а са a_1, a_2, a_3 и a_4 редом бројеве поља чије су стрелице $\rightarrow$, $\uparrow$, $\leftarrow$ и $\downarrow$. Посматрајмо четири поља A_1, A_2, A_3, A_4, редом са стрелицама $\rightarrow$, $\uparrow$, $\leftarrow$ и $\downarrow$, која чине циклус. Тај циклус је потпуно одређен паром поља (A_1, A_3), а он се може одабрати на највише a_1a_3 начина, па је $N \leqslant a_1a_3$. Слично важи $N \leqslant a_2a_4$, па нам неједнакост између средина даје

$$N^2 \leqslant a_1a_3a_2a_4 \leqslant \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^4 = (n^2)^4 = n^8 \quad \Rightarrow \quad N \leqslant n^4.$$

Овај број се може постићи ако таблу поделимо на четири табле $n \times n$, а затим стрелице у пољима доње-леве, доње-десне, горње-десне и горње-леве табле усмеримо редом надесно, нагоре, налево и надоле.

↓	↓	↓	←	←	←
↓	↓	↓	←	←	←
↓	↓	↓	←	←	←
→	→	→	↑	↑	↑
→	→	→	↑	↑	↑
→	→	→	↑	↑	↑

2A.4. Фиксирајмо (позитивно оријентисан) троугао $A_1B_1C_1$ са центром O и тачку A. Нека је $\sphericalangle B_1AC_1 = x < 60^\circ$, O_a тачка са оне стране праве B_1C_1 с које није $\triangle A_1B_1C_1$ таква да је $\sphericalangle B_1O_aC_1 = 2x$, а $r = O_aB_1 = O_aC_1$. Аналогно дефинишемо тачке O_b и O_c. Тачке A, B и C редом леже на кружницама $k_a(O_a, r)$, $k_b(O_b, r)$ и $k_c(O_c, r)$. Тачка C такође лежи и на слици k_b' кружнице k_b при ротацији око тачке A за 60°. Како се кружнице k_b' и k_c не поклапају (једина ротација за 60° која слика k_b у k_c има центар у O_a), за тачку C, а самим тим и за $\triangle ABC$, постоје највише две могућности.



С друге стране, две могућности за троугао ABC одмах запажамо. То су:

(1°) $\triangle AB'C'$ који је слика троугла $O_aO_bO_c$ при транслацији за $\overrightarrow{O_aA}$ - центар овог троугла је тачка O' таква да је $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{O_aA}$;

(2°) $\triangle AB''C''$, где су B'' и C'' редом слике тачке A при ротацији око O за $120°$ и $-120°$ - центар овог троугла је очигледно тачка O.

Доказаћемо да троугао $A_1B_1C_1$ не лежи у целости унутар троугла $AB'C'$, због чега само могућност (2°) долази у обзир. Наиме, пошто круг k_a сече уписани круг $k(O,\rho)$ троугла $A_1B_1C_1$, важи $O'A = O_aO \leqslant r+\rho = O'O+\rho$, па ни круг k не лежи цео унутар $\triangle AB'C'$, што завршава доказ.

3A.1. По услову задатка, за сваки двочлан подскуп у „првој" боји, оба његова једночлана подскупа морају имати „другу" боју. Следи да сви једночлани подскупови имају исту, „другу" боју. Тада и сви двочлани подскупови морају имати „прву" боју. Тако се једночлани и двочлани подскупови могу обојити на само 2 начина.

Сада се преосталих $2^n - \frac{n(n+1)}{2} - 1$ подскупова могу обојити произвољно. Заиста, ако подскуп са бар три елемента има „прву" боју, може се представити као унија једночланих, а ако има „другу" боју, може као унија двочланих.

Према томе, број могућих бојења је $2 \cdot 2^{2^n - \frac{n(n+1)}{2} - 1} = 2^{2^n - \frac{n(n+1)}{2}}$.

3A.2. Ако за неке индексе $0 \leqslant i < j \leqslant 8$ важи $c_i < c_j$, онда се заменом места цифара c_i и c_j дати производ синуса увећава. Заиста,

$$\begin{aligned} &2\sin(10i+c_i)^\circ \sin(10j+c_j)^\circ = \cos\big(10(j-i)+(c_j-c_i)\big)^\circ - \cos\big(10(i+j)+(c_i+c_j)\big)^\circ \\ \leqslant &2\sin(10i+c_j)^\circ \sin(10j+c_i)^\circ = \cos\big(10(j-i)-(c_j-c_i)\big)^\circ - \cos\big(10(i+j)+(c_i+c_j)\big)^\circ. \end{aligned}$$

Зато, не умањујући општост, можемо да претпоставимо да је $c_i > c_j$ кад год је $i < j$. То значи да је $c_i = 9-i$ за $i = 0,1,\dots,8$, па је довољно доказати неједнакост

$$I_{10} = \sin 9^\circ \sin 18^\circ \cdots \sin 81^\circ \leqslant \frac{\sqrt{10}}{2^9}.$$

Покажимо да овде у ствари важи једнакост: имамо

$$\begin{aligned} I_{10} &= \tfrac{\sqrt{2}}{2} \sin 9^\circ \cos 9^\circ \cdot \sin 36^\circ \cos 36^\circ \cdot \sin 18^\circ \cos 18^\circ \cdot \sin 27^\circ \cos 27^\circ \\ &= \tfrac{\sqrt{2}}{2^5} \sin 18^\circ \sin 72^\circ \cdot \sin 36^\circ \sin 54^\circ = \tfrac{\sqrt{2}}{2^7} \sin 36^\circ \sin 72^\circ \\ &= \tfrac{\sqrt{2}}{2^8}(\cos 36^\circ - \cos 108^\circ) = \tfrac{\sqrt{2}}{2^8}\big(\tfrac{1+\sqrt{5}}{4} - \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}\big) = \tfrac{\sqrt{10}}{2^9}. \end{aligned}$$

Напомена. Општије од једнакости $I_{10} = \sqrt{10}/2^9$, за сваки цео број $n \geqslant 2$ важи једнакост

$$I_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Докажимо ово. Прво ћемо приметити да постоји полином U_{n-1}, познат као *Чебишовљев полином друге врсте*, такав да за све t важи $U_{n-1}(\cos t) = \frac{\sin nt}{\sin t}$. Заиста, можемо узети $U_0(x) = 1$ и $U_1(x) = 2x$, док за $k \geqslant 2$ дефинишемо индуктивно $U_k(x) = 2xU_{k-1}(x) - U_{k-2}(x)$. Нуле полинома U_{n-1} су вредности $\cos\frac{k\pi}{2n}$, а водећи коефицијент му је 2^{n-1}, па је $U_{n-1}(x) = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(x - \cos\frac{k\pi}{2n})$.

С друге стране, имамо $2^{2n-2}I_n^2 = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(1-\cos\frac{k\pi}{2n}) = U_{n-1}(1)$, а лако се проверава индукцијом да је $U_{n-1}(1) = n$. Тврђење одмах следи.

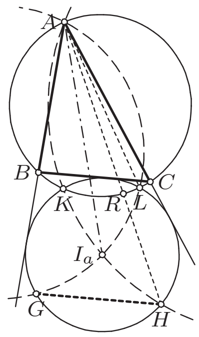
3A.3. Претпоставимо супротно, да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $\omega(an+c) < \omega(bn+c)$. Тада за произвољно $k \in \mathbb{N}$ заменом $n = a^{k-1}$, $n = a^{k-2}b, \dots, n = b^{k-1}$ добијамо

$$\omega(a^k + c) < \omega(a^{k-1}b + c) < \omega(a^{k-2}b^2 + c) < \cdots < \omega(b^k + c),$$

одакле следи $\omega(b^k + c) \geqslant k + 1$. Како је производ $k + 1$ најмањих простих бројева већи од $k!$, мора бити $k! \leqslant b^k + c \leqslant (b + c)^k$.

С друге стране, множење неједнакости $i(k + 1 - i) \geqslant k$ за $i = 1, 2, \ldots, k$ даје $k! \geqslant \sqrt{k}^k$. Следи да је $\sqrt{k} \leqslant b + c$ за свако $k \in \mathbb{N}$, што је контрадикција.

3A.4. Из $I_aK = I_aH$ следи $\sphericalangle KAI_a = \sphericalangle I_aAH$, одакле је $KR \parallel BC$, где је $R \neq A$ пресек праве AH са кружницом Γ. Тврђење следи из рачуна углова:



$$\begin{aligned}\sphericalangle(GH, KL) &= \sphericalangle HGK + \sphericalangle GKL - 180^\circ \\ &= (90^\circ - \sphericalangle I_aKH) + (90^\circ + \sphericalangle I_aGL) - 180^\circ \\ &= \sphericalangle I_aGL - \sphericalangle I_aKH = \sphericalangle I_aAL - \sphericalangle I_aAH \\ &= \sphericalangle HAL = \sphericalangle RKL = \sphericalangle(KR, KL),\end{aligned}$$

што значи да је $GH \parallel KR$, тј. $GH \parallel BC$.

4A.1. Таблица чијих је $m+n-1$ поља последње врсте и колоне обојено задовољава услове. Доказаћемо да не може бити више од $m+n-1$ обојених поља.

Претпоставимо да у таблици има бар $m + n$ обојених поља, као и да је то таблица са минималним збиром $m + n$ у којој то важи. Због минималности, уклањањем једне врсте или колоне остаје таблица са највише $m + n - 2$ обојених поља. Дакле, у свакој врсти или колони бар два поља су обојена. Тада су у првој врсти обојена нека поља $(1, j)$ и $(1, k)$, где је $j < k$, а у j-тој колони је обојено бар још једно поље (i, j), где је $i > 1$. Ова три поља дају контрадикцију, чиме је доказ завршен.

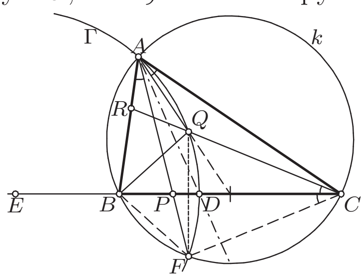
4A.2. Претпоставимо да тражени бројеви x и y не постоје. Тада 3^n посматраних бројева чине потпун систем остатака по модулу 3^n.

За $k \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant i \leqslant 8$ означимо са $x_{k,i}$ број k-тоцифрених бројева сачињених од цифара $1, 2, 3$ који при дељењу са 9 дају остатак i. По претпоставци је $x_{n,i} = 3^{n-2}$ за свако i. С друге стране, важе следеће везе:

$$x_{k+1,i} = x_{k,i-1} + x_{k,i-2} + x_{k,i-3}, \quad \text{где је} \quad x_{k,i-9} = x_{k,i}.$$

Из $x_{n,i} = x_{n,i+3} = x_{n,i+6}$ одмах следи $x_{n-1,i} = x_{n-1,i+3} = x_{n-1,i+6}$ за свако i. Индукцијом следи $x_{k,i} = x_{k,i+3} = x_{k,i+6}$ за свако $k = n-1, n-2, \ldots, 1$. Међутим, $x_{2,0} = 0 \neq x_{2,3} = 2$, што је контрадикција. Према томе, тражени бројеви x и y морају да постоје.

4A.3. Тачка F', симетрична тачки Q у односу на праву BC, такође лежи на кружници Γ, па је $\sphericalangle QAD = \sphericalangle DAF'$ и одатле $\sphericalangle CAF' = \sphericalangle QAB = \sphericalangle QBC = \sphericalangle CBF'$. Следи да тачка F' лежи на кружници k, тј. $F' \equiv F$. Сада је $\sphericalangle RAP = \sphericalangle BCF = \sphericalangle RCP$, што значи да су тачке A, C, P и R концикличне.



Напомена. Пошто је $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$, кружница Γ је Аполонијева за тачке B и C, па је $\frac{BF}{FC} = \frac{BA}{AC}$, што значи да је AF симедијана у $\triangle ABC$, а тачка Q лежи на тежишној дужи из темена A.

4А.4. Приметимо да за свако $k = 1, 2, \dots, n$ дата једначина има тачно једно решење $-\frac{\pi}{2} + \frac{(k-1)\pi}{n} < x_k < -\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n}$, јер функција $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} nx$ расте на тим интервалима од $-\infty$ до $+\infty$. Сабирање нам даје $-\frac{\pi}{2} < X = x_1 + \dots + x_n < \frac{\pi}{2}$. Користимо идентитет

$$(\cos x + i \sin x)^2 = \frac{i - \operatorname{tg} x}{i + \operatorname{tg} x}\,. \qquad (*)$$

Из њега следи једнакост $\frac{i - \operatorname{tg} nx}{i + \operatorname{tg} nx} = \left(\frac{i - \operatorname{tg} x}{i + \operatorname{tg} x}\right)^n$, па тако бројеви $y_k = \operatorname{tg} x_k$ задовољавају једначину $\frac{i-(2-y)}{i+(2-y)} = \left(\frac{i-y}{i+y}\right)^n$, тј.

$$P(y) = (i - 2 + y)(i + y)^n - (i + 2 - y)(i - y)^n = 0.$$

Пошто је P полином степена n, важи $P(y) = c \prod_{j=1}^{n} (y - y_k)$ за неку константу c. Сада множењем једнакости $(*)$ за $x \in \{x_1, \dots, x_n\}$ добијамо

$$\cos 2X + i \sin 2X = \prod_{k=1}^{n} \frac{i - y_k}{i + y_k} = (-1)^n \frac{P(i)}{P(-i)} = (-1)^n \frac{2i - 2}{-2i - 2} = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}.$$

па је $X = \frac{\pi}{4}$.

1Б.1.
1Б.2.
1Б.3.
1Б.4.
1Б.5.
2Б.1.
2Б.2.
2Б.3.
2Б.4.
2Б.5.
3Б.1.
3Б.2.
3Б.3.
3Б.4.
3Б.5.
4Б.1.
4Б.2.
4Б.3.
4Б.4.
4Б.5.