Ревијално такмичење Друштва математичара Србије

Решења задатака за 8. разред

1. Шестоцифрени број има на месту јединица цифру 7. Ако се та цифра премести на прво место (место стотина хиљада) добија се број пет пута већи од полазног. Који је то број ?

Решење. Нека је тражени шестоцифрен број $\overline{abcde7}$. Из услова задатка је $\overline{7abcde} = 5 \cdot \overline{abcde7}$. Ако петоцифрен број $\overline{abcde}$ означимо са x, онда је $700\,000 + x = 5 \cdot (10x + 7)$. Тада је $700\,000 + x = 50x + 35$, па је $49x = 700\,000 - 35$ или $7x = 100\,000 - 5$. Следи да је $x = 99\,995 : 7 = 14\,285$. Тражени број је 142 857. Провера: $5 \cdot 142\,857 = 714\,285$.

2. Одредити природан број n, такав да када му се дода 30, или одузме 27, добија се квадрат целог броја.

Решење. Из услова задатка је $n + 30 = x^2$ и $n - 27 = y^2$. Тада је $x^2 - y^2 = n + 30 - (n - 27) = 57$. Како је $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 57$, могућа су два решења:

1) $x + y = 57$, $x - y = 1$, па је $x = 29$ и $y = 28$. Тада је

$$n = 29^2 - 30 = 28^2 + 27 = 811.$$

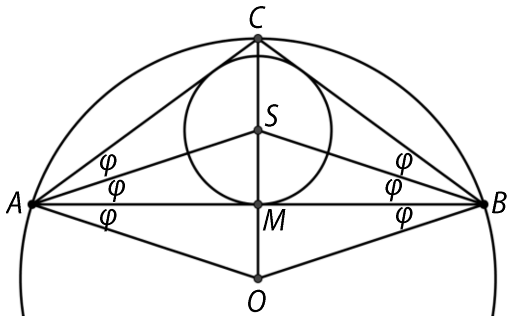
2) $x + y = 19$, $x - y = 3$, па је $x = 11$ и $y = 8$. Тада је

$$n = 11^2 - 30 = 8^2 + 27 = 91.$$

3. Одредити углове троугла ABC коме су центар описаног круга и центар уписаног круга симетрични у односу на страницу AB.

Решење. Нека је O центар описаног, а S центар уписаног круга. Како је тачка O на симетрали странице AB, то и S као тачка симетрична са O у односу на AB мора бити на симетрали дужи AB. То значи и да је троугао ABC једнакокрак и $AC = BC$.

Нека је $\measuredangle BAS = \varphi = \measuredangle ABS$. Тада је због симетрије тачака S и O и $\measuredangle BAO = \measuredangle BAS = \measuredangle ABS = \measuredangle ABO = \varphi$. Троуглао AOC је једнакокрак, јер је $AO = OC$. Тада је $\measuredangle CAO = 3\varphi = \measuredangle ACO = 90° - 2\varphi$ (као комплементан углу $\measuredangle MAC = 2\varphi$). Из једнакости $3\varphi = 90° - 2\varphi$ добија се $5\varphi = 90°$, па је $\varphi = 18°$. Углови троугла ABC су $\alpha = 2\varphi = 36° = \beta$ и $\gamma = 108°$.



4. Висине бочних страна неке n-тостране пирамиде су једнаке. Под којим углом су нагнуте њене бочне стране према равни основе, ако је површина пирамиде 1,5 пута већа од површине њеног омотача.

Решење. Нека су a_1, a_2, ..., a_n основне ивице дате пирамиде, бочне висине дате пирамиде једнаке h и нека су пројекције тих висина на раван основе једнаке x. Тада база пирамиде има површину

$$B = \frac{1}{2}(xa_1 + xa_2 + ... + xa_n) = \frac{x}{2}(a_1 + a_2 + ... + a_n),$$

а омотач има површину

$$M = \frac{1}{2}(ha_1 + ha_2 + ... + ha_n) = \frac{h}{2}(a_1 + a_2 + ... + a_n),$$

Тада је површина пирамиде једнака

$$P = B + M = \frac{x+h}{2}(a_1 + a_2 + ... + a_n).$$

Како је $P = 1{,}5M$, то је

$$\frac{x+h}{2}(a_1 + a_2 + ... + a_n) = 1{,}5 \cdot \frac{h}{2}(a_1 + a_2 + ... + a_n),$$

па је $x + h = 1{,}5h$, односно $x = \frac{1}{2}h$.

Како је у правоуглом троуглу који чине катете висина H и x и хипотенуза h, хипотенуза два пута већа од мање катете, то је угао наспрам мање катете 30°, а угао наспрам веће катете 60°. Према томе угао између бочних страна и основе пирамиде је 60°.

5. Дати су природни бројеви 1, 2, 3 ... 8, 9, 10.

а) Да ли је могуће дате природне бројеве поделити у два дисјунктна скупа A и B тако да производ бројева у скупу A буде једнак производу бројева у скупу B?

б) Да ли је могуће изоставити један од датих бројева и потом преостале природне бројеве поделити у два дисјунктна скупа A и B тако да производ бројева у скупу A буде једнак производу бројева у скупу B?

Напомена: Скупови су дисјунктни ако је њихов пресек празан скуп.

Решење. Производ бројева $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$ једнак је

$$2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

а) При подели скупа од десет бројева на два дисјунктна подскупа скупа очигледно се неће моћи постићи једнакост производа, јер ће производ бројева у једном подскупу бити дељив са 7, а у другом неће бити дељив са 7.

б) Ако изоставимо број 7, онда се може постићи да у сваком од подскупова производ елеменат буде по $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$. Таква је на пример подела:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{и} \quad B = \{8, 9, 10\}.$$

Та подела није јединствена, јер има и других подела које испуњавају услове задатка ($A = \{1, 3, 4, 6, 10\}$ и $B = \{2, 5, 8, 9\}$ или $A = \{1, 2, 4, 9, 10\}$ и $B = \{3, 5, 6, 8\}$, ...)