**Ревијално такмичење Друштва математичара Србије**

## Решења задатака за 7. разред

**1**. Шта је веће: $\sqrt{5}+\sqrt{8}$ или $\sqrt{6}+\sqrt{7}$?

**Решење**. Нека је $x=\sqrt{5}+\sqrt{8}$ и $y=\sqrt{6}+\sqrt{7}$. Тада је

$$x^2 = 5 + 2\sqrt{40} + 8 = 13 + 2\sqrt{40}$$

и

$$y^2 = 6 + 2\sqrt{42} + 7 = 13 + 2\sqrt{42}.$$

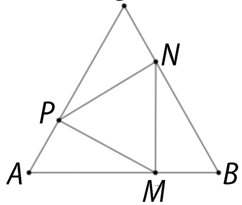
Како је $\sqrt{40}<\sqrt{42}$, то је и $\sqrt{5}+\sqrt{8}<\sqrt{6}+\sqrt{7}$.

**2**. На страницама *AB*, *BC* и *CA* једнакостраничног троугла ABC дате су тачке *M*, *N*, *P* тако да је $AM : MB = BN : NC = CP : PA = 2 : 1$. Докажи да је и троугао *MNP* једнакостранични и одредити однос обима и површине троуглова *ABC* и *MNP*.

**Решење**. Нека је $AB = BC = CA = 3a$. Троуглови *AMP*, *BNC* и *CPN* су подударни (имају једнаке: по једну страницу једнаку $2a$, угао од 60° и још по једну страницу једнаку $a$). Из подударности је $PM = MN = NP = \frac{2a\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$ и троугао *MNP* је једнакостранични.

Обими троуглова су $O = 9a$ и $O_1 = 3a\sqrt{3}$, па је $O : O_1 = 3 : \sqrt{3}$.

Површине троуглова се односе као $\frac{9a^2\sqrt{3}}{4}:\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}=9:3=3:1$.

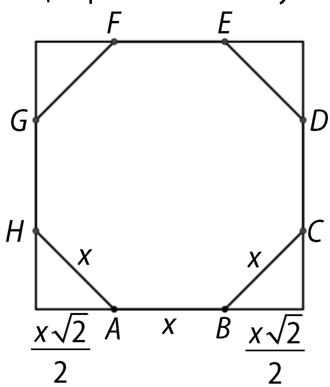


**3**. Дванаест витезова округлог стола треба да изаберу двочлану делегацију за посету краљу Артуру. На колико начина је то могуће урадити, ако у делегацији не могу бити два витеза који су суседи за округлим столом ?

**Решење**. Први члан делегације – витез A може се изабрати на 12 начина. Други члан делегације – витез B може се изабрати на 9 начина (то не може бити витез A, нити било који од два његова суседа). Такав избор се може направити на $12 \cdot 9 = 108$ начина, при чему је свака делегација рачуната два пута (једном као AB, а други пут као BA). Дакле, коначан број начина је $108 : 2 = 54$.

**4**. У квадрат чија је страница $a = 10$ уписан је правилни осмоугао тако да свака страница квадрата садржи два темена правилног осмоугла. Израчунати обим и површину правилног осмоугла.

**Решење**. Нека је страница правилног осмоугла једнака $x$.




Како је

$$a = \frac{x\sqrt{2}}{2} + x + \frac{x\sqrt{2}}{2} = x + x\sqrt{2} = x(1+\sqrt{2}),$$

то је

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}+1} = a(\sqrt{2}-1) = 10(\sqrt{2}-1).$$

Обим осмоугла је $80(\sqrt{2}-1)$. Површина осмоугла се добија када се од површине квадрата (100) одузму 4 површине једнакокрако-правоуглих троуглова, тј. површина квадрата чија је страница $x$, тј. $x^2$. Дакле,

$P = 100 - 100\,(\sqrt{2} - 1)^2 = 100 - 100\,(3 - 2\sqrt{2}) = 100 - 300 + 200\sqrt{2}$,

$P = 200\sqrt{2} - 200 = 200\,(\sqrt{2} - 1)$.

У децималном запису је то приближно $282{,}84 - 200 = 82{,}84$ cm$^2$.

**5.** Нека је $n = 2^k$ ($k$ је природан број већи од 9). Докажи да $n$ не може имати једнаке последње четири цифре.

**Решење**. Ако је $k > 9$, онда је $n = 2^k \geq 2^{10} = 1024$. Тада је број $n = 2^k$ дељив са 2, 4, 8, 16, 32 ... 1024.

Како је $n$ неки степен двојке, то се $n = 2^k$ завршава цифрама 2, 4, 8, 6, па постоје четири могућности:

1) Случај када је $n = 2^k = ...2222$ отпада, јер двоцифрени завршетак 22 није дељив са 4, па и број $n$ није дељив са 4.

2) Случај када је $n = 2^k = ...6666$ отпада, јер двоцифрени завршетак 66 није дељив са 4, па и број $n$ није дељив са 4.

3) Случај када је $n = 2^k = ...4444$ отпада, јер је тада $n = x \cdot 1000 + 444$ ($x$ је неки природан број) и $n$ није дељиво са 8, пошто $1000 = 10^3$ јесте, а други сабирак 444 није дељив са $8 = 2^3$.

4) Случај када је $n = 2^k = ...8888$ отпада, јер је тада $n = y \cdot 10000 + 8888$ ($y$ је неки природан број) и $n$ није дељиво са 16, пошто $10^4$ јесте, а други сабирак 8888 није дељив са $16 = 2^4$.