Ревијално такмичење Друштва математичара Србије

Решења задатака за 6. разред

1. Одреди све целе бројеве x за које је $|x| < 5$ и $|1 - x| \geq |1 + x|$.

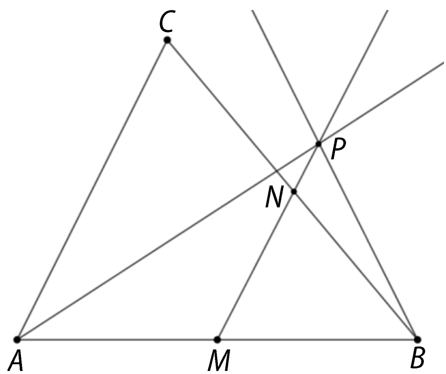
Решење. Из неједнакости $|x| < 5$, следи да је $x \in \{-4, -3, -2. -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Провером се утврђује да друга неједнакост важи за

$$x \in \{-4, -3, -2. -1, 0\}$$

и не важи за позитивне целе бројеве.

2. Нека су тачке M и N редом средишта страница AB и BC троугла ABC и нека је права s симетрала $\measuredangle BAC$. Ако се праве s и MN секу у тачки P, онда је $\measuredangle APB$ прав. Докажи.

Решење. Нека је $\measuredangle BAC = 2x$. Тада је $\measuredangle MAP = \measuredangle CAP = x$, јер је AP симетралала угла BAC. Како је MN средња линија троугла, то је $MN \parallel AC$. Следи да је $\measuredangle CAP = \measuredangle APM = x$, па је троугао AMP једнакокрак и $AM = MP$. Како је $AM = BM$ и $AM = MP$ то је и $BM = MP$ и троугао MBP једнакокрак. Следи да је $\measuredangle BMP = 2x$, а $\measuredangle MBP = \measuredangle BPM = 90° - x$. Тада је $\measuredangle APB = \measuredangle APM + \measuredangle BPM = x + 90° - x = 90°$.

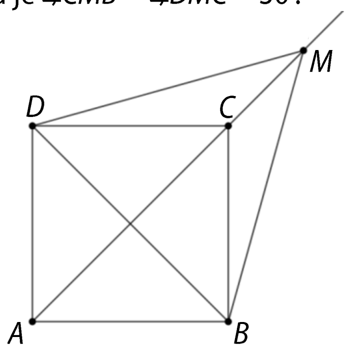


3. Одредити најмањи разломак $\frac{x}{y}$ (x и y су природни бројеви) такав да су количници $\frac{x}{y}:\frac{15}{28}$ и $\frac{x}{y}:\frac{25}{42}$ природни бројеви.

Решење. Разломак $\frac{x}{y}$ је најмањи ако је x најмање могуће, а y највеће могуће. Како је $\frac{x}{y}:\frac{15}{28}=\frac{28x}{15y}$ и $\frac{x}{y}:\frac{25}{42}=\frac{42x}{25y}$, то је очигледно x најмањи природан број који је дељив са 15 и 25, а y највећи број који дели и 28 и 14. Дакле, $x =$ НЗС(15, 25) $= 75$ и $y =$ НЗД(28, 42) $= 14$. Тражени разломак је $\frac{x}{y}=\frac{75}{14}$.

4. Дат је квадрат $ABCD$. На правој AC иза темена C, одређена је тачка M тако да је $AC = BM$. Одреди угао CMB.

Решење.
Ако се уочи троугао CDM, онда је $\Delta BCM \cong \Delta DCM$ (СУС: $BC = DC$, $\measuredangle BCM = \measuredangle DCM = 135^\circ$ и $CM = CM$). Из подударности је $\measuredangle BMC = \measuredangle DMC$ и $BM = DM$. Како је $BM = AC$, то важе једнакости $BM = DM = AC = BD$. Из једнакости $BM = DM = BD$ следи да је ΔBDM једнакостранични. Тада је $\measuredangle BMD = 60^\circ$, па је $\measuredangle CMB = \measuredangle DMC = 30^\circ$.



5. У једнакостраничном троуглу чија је страница 4 cm на случајан начин је размештено 17 тачака. Доказати да при ма каквом распореду тачака постоје две тачке чије је међусобно растојање мање од 1 cm.

Решење. Ако се дати једнакостранични троугао „испарцелише“ на 16 мањих подударних једнакостраничних троуглова чија је страница 1 (као на слици), онда добијемо 7 + 5 + 3 + 1 = 16 мањих једнакостраничних троуглова.
Како имамо 17 тачака, а 16 троуглова, онда на основу Дирихлеовог принципа (17 : 16 = 1 (1) постоји бар један мањи једнакостранични троугао у коме се налазе две дате тачке. Растојање између те две тачке је мање од странице мањег једнакостраничног троугла, дакле мање од 1.