Ревијално такмичење Друштва математичара Србије

Решења задатака за 5. разред

1. Одреди најмањи и највећи шестоцифрен број који је дељив са 36 ако се:
а) цифре могу понављати; б) цифре не могу понављати.

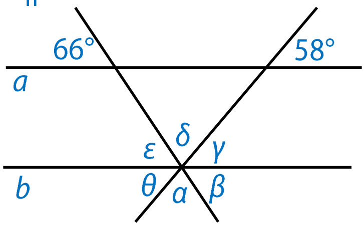
Решење. Ако је природан број дељив са 36, онда је он дељив са 4 и 9, што значи да му двоцифрени завршетак мора бити дељив са 4 и збир цифара дељив са 9.
а) Ако се цифре могу понављати најмањи такав број је 100 008, а највећи 999 972 (јер комбинације 999 990 и 999 981 не могу).
б) Ако се цифре не смеју понављати онда се најмањи број комбинује од цифара 0, 1, 2, 3, 4 и 5, али њихов збир је 15, па се мора тражити комбинација где је збир цифара 18. Најмањи такав број 102 348. Слично, највећи број се може тражити у комбинацији цифара $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 = 39$ у којој се збир мора смањити за 3, да би се добило 36. Највећи такав број је 987 624 (јер комбинације 987 660, 987 651, 987 642, 987 633 не могу).

2. Скуп A је скуп свих троцифрених природних бројева. Скуп B је скуп свих природних бројева који се једнако читају с лева у десно, као и с десна у лево. Скуп C је скуп свих природних бројева дељивих са 4. Колико елемената има скуп $A \cap B \cap C$? Одреди најмањи и највећи елемент у скупу $A \cap B \cap C$.

Решење. Скуп $A \cap B \cap C$ је скуп троцифрених бројева који су дељиви са 4 и који се једнако читају с лева у десно као и с десна у лево (палиндроми).
Тражени бројеви имају двоцифрене завршетке 04, 08, 12, 16, 24, 28, 32, 36, 44, 48, 52, 56, 64, 68, 72, 76, 84, 88, 92 и 96 и једнозначно су одређени, јер прва цифра мора бити једнака трећој. Дакле, 404, 808,

212, 616, 424, 928, 232, 636, 444, 848, 252, 656, 464, 868, 272, 676, 484, 888, 292 и 696.
Има их укупно 20 (а то смо могли знати и без набрајања, јер се из скупа од 25 двоцифрених завршетака морају изоставити они који завршавају 0, а то су 00, 20, 40, 60 и 80).
Најмањи такав број је 212, а највећи 888.

3. На наредној слици дати су углови од 58° и 66°. Одредити углове α, β, γ, δ, ε и θ, ако је $a \parallel b$.



Решење. Угао $\gamma = 58°$, као угао са паралелним крацима са углом на правој a.
Угао $\varepsilon = 66°$, као угао са паралелним крацима са углом на правој a.
Како је $\gamma + \delta + \varepsilon = 180°$, то је $\delta = 180° - 58° - 66° = 56°$.
Следи да су углови $\alpha = \delta = 56°$, $\beta = \varepsilon = 66°$ и $\theta = \gamma = 58°$, као унакрсни углови.

4. У финалној трци на 100 метара на летњим олимпијским играма учествовало је 8 атлетичарки.
а) На колико начина оне могу поделити златну, средбрну и бронзану медаљу?
б) На колико начина 8 атлетичарки могу формирати двочлану делегацију која ће посетити председника Међународног олимпијског комитета?

Решење. а) Медаље се могу поделити на $8 \cdot 7 \cdot 6 = 56 \cdot 6 = 336$ начина, јер за златну медаљу конкурише 8, потом за сребрну 7 и накрају за бронзану 6 стлетичарки.

б) Делегација се може направити на $8 \cdot 7 : 2 = 56 : 2 = 28$ начина (јер је делегација АВ исто што и делегација ВА).

5. Дешифруј рачунске операције

$$\frac{M}{A} = T - E = M \cdot A = \frac{T}{И} = K - A,$$

ако једнаким словима одговарају једнаке цифре, а различитим словима различите цифре.

Решење. Из $M : A = M \cdot A$ следи да је $A = 1$ и $\frac{M}{A} = T - E = M \cdot A = \frac{T}{И} = K - A = M > 1$. Тада је $T : И = M$, па је $T = M \cdot И$, што значи да је T сложен број. Из релације $T = M \cdot И$ закључујемо да T није 4 (јер M и $И$ не могу истовремено бити 2, а комбинација 1, 4 не долази у обзир би тада један од бројева M и $И$ морао бити једнак са T. Слично се закључује да T није ни $9 = 1 \cdot 9 = 3 \cdot 3$. Дакле $T = 6$ или је $T = 8$.
Ако је $T = 6$, онда је $M = 2$ и $И = 3$ или $M = 3$, а $И = 2$. Обе комбинације су немогуће, јер код прве је $K - A = M$, па је $K = 3$, а код друге је $K = 4$, $M = 3$ и $T - E = 6 - E = M$, па је $E = 3$.
Следи да је $T = 8$, $M = 2$, $И = 4$ и $T - E = M = 2$, па је $E = 6$. Комбинација $T = 8$, $M = 4$, $И = 2$, отпада јер би тада $T - E = 8 - E$ било 4, па би и E било 4.
Коначно је: $M = 2$, $A = 1$, $T = 8$, $E = 6$, $И = 4$ и $K = 3$, тј.

$$2 : 1 = 8 - 6 = 2 \cdot 1 = 8 : 4 = 3 - 1 = 2.$$