Др Милан Живановић

Логаритам у задацима са пријемних испита на природно-математичким и техничким факултетима у Србији

Област Логаритамска функција је редовно заступљена у програмима и тестовима пријемних испита на природно-математичким и техничким факултетима у Србији. На Београдском универзитету и Универзитету Косовска Митровица тест је затвореног типа где је потребно заокружити тачно од више понуђених решења. На осталим универзитетима проблеми су отвореног типа и бодује се и сам потупак рада а не само резултат. У овом тексту задаци са пријемних испита и збирки за њихово припремање ће бити разврстани по областима:

1. ***Дефиниција и особине логаритма***
2. ***Логаритамска функција***
3. ***Логаритамске једначине***
4. ***Логаритамске неједначине***
5. ***Системи логаритамских једначина***
6. ***Неке нестандардне методе решавања логаритамских једначина и неједначина***

У оквиру сваке области наводимо и неопходан теоријски садржај[1].

1. *Дефиниција и особине логаритма*

$x = \log_a b$ ако и само ако је $a^x = b$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$. Основне особине логаритама:

1° $a^{\log_a b} = b$, за $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$;

2° $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$, за $x > 0,\ y > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$;

3° $\log_a x^s = s \log_a x$, за $a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0,\ s \in \mathbf{R}$;

4° $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, за $x > 0,\ y > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$;

5° $\log_a 1 = 0$, за $a > 0,\ a \neq 1$;

6° $\log_a a = 1$, за $a > 0,\ a \neq 1$;

7° $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$, за $a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1,\ b \neq 1$;

8° $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, за $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ a \neq 1,\ c \neq 1$;

9° $\log_{a^s} x = \dfrac{1}{s} \log_a x$, за $x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ s \neq 0$;

10° $\log_a x = \log_{a^s} x^s$, за $x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ s \neq 0$.

[1] Теоретски садржаји су преузети из књиге 6. са списка литературе.

Примери:

1. (ГРФ) Израчунати вредност израза $3^{1+3\log_3 5+\log_3 2}$

   Решење: $3^{1+3\log_3 5+\log_3 2}=3^1\cdot 3^{3\log_3 5}\cdot 3^{\log_3 2}=3\cdot\left(3^{\log_3 5}\right)^3\cdot 2=6\cdot 5^3=750$

2. (ФОН) Ако је $a=\log_2\sqrt[5]{64}-\sqrt{2}^{\log_8 5}$ израчунати вредност израза $\left(a-\frac{6}{5}\right)^6$.

   Решење: $a=\log_2\sqrt[5]{64}-\sqrt{2}^{\log_8 5}=\log_2\sqrt[5]{2^6}-\sqrt{2}^{\log_{(\sqrt{2})^6}5}=\frac{6}{5}\log_2 2-\sqrt{2}^{\frac{1}{6}\log_{\sqrt{2}}5}$

   $a=\frac{6}{5}-\left(\sqrt{2}^{\log_{\sqrt{2}}5}\right)^{\frac{1}{6}}=\frac{6}{5}-\sqrt[6]{5}$. Дакле, $\left(a-\frac{6}{5}\right)^6=\left(\frac{6}{5}-\sqrt[6]{5}-\frac{6}{5}\right)^6=\left(-\sqrt[6]{5}\right)^6=5$.

3. (ФОН) Ако је $a=\log_2 10$ и $b=\log_5 10$ израчунати вредност израза $\frac{ab}{a+b}$

   Решење: Заменом места аргумента и основе добијамо да је $a^{-1}=\log 2$ и $b^{-1}=\log 5$. Тражени израз трансформишемо тако што га скратино са ab

   $\frac{ab}{a+b}=\frac{1}{b^{-1}+a^{-1}}=\frac{1}{\log 5+\log 2}=\frac{1}{\log 10}=1$

4. (МФ) Одреди најмањи од бројева: $\ln 3$, $\sin 32^0$, $\sqrt{0{,}25}$, $\cos 63^0$ и $\log_3 2$

   Решење: $\ln 3>\ln e=1$, $\sin 32^0>\sin 30^0=\frac{1}{2}$, $\sqrt{0{,}25}=\frac{1}{2}$, $\cos 63^0<\cos 60^0=\frac{1}{2}$ и

   $\log_3 2>\log_3\sqrt{3}=\frac{1}{2}$. Закључујемо да је од датих бројева најмањи $\cos 63^0$.

5. (ФОН) Израчунати вредност израза $\log_2\cos 20^0+\log_2\cos 40^0+\log_2\cos 80^0$.

   Решење: $\log_2\cos 20^0+\log_2\cos 40^0+\log_2\cos 80^0=\log_2\cos 20^0\cos 40^0\cos 80^0$

   Проблем се своди на израчунавање вредности израза:

   $\cos 20^0\cos 40^0\cos 80^0=\sin 10^0\cos 20^0\cos 40^0\cdot\frac{2\cos 10^0}{2\cos 10^0}$

   $=2\sin 10^0\cos 10^0\cos 20^0\cos 40^0\cdot\frac{1}{2\cos 10^0}=\sin 20^0\cos 20^0\cos 40^0\cdot\frac{1}{2\cos 10^0}$

   $=\sin 40^0\cos 40^0\cdot\frac{1}{4\cos 10^0}=\frac{\sin 80^0}{8\cos 10^0}=\frac{\cos 10^0}{8\cos 10^0}=\frac{1}{8}$

   Добијамо на крају: $\log_2\cos 20^0+\log_2\cos 40^0+\log_2\cos 80^0=\log_2\frac{1}{8}=-3$

6. (ЕТФ) Нека је $a=\log_2 3$ и $b=\log_5 2$ израчунати $\log_{24}50$.

   Решење: $\log_{24}50=\frac{\log_2 50}{\log_2 24}=\frac{\log_2 2\cdot 5^2}{\log_2 3\cdot 2^3}=\frac{\log_2 2+2\log_2 5}{\log_2 3+3\log_2 2}=\frac{1+2\cdot\frac{1}{b}}{a+3}$

   $=\frac{\frac{b+2}{b}}{a+3}=\frac{b+2}{b(a+3)}$.

Задаци:

1. (ФТНКМ) Израчунати $2\log 25-\log 125-\log 5$
2. (ВА) Упоредити бројеве $2^{\log_4 2}$ и $3^{\log_{27} 3}$.
3. (ТФЗР) Израчунати $4^{\log_2 3+\log_4 \frac{5}{11}}$
4. (ПМФКГ) Израчунати: а) $\log tg1^0\cdot\log tg2^0\cdot\log tg3^0\cdot\ldots\cdot\log tg89^0$

   b) $\log tg1^0+\log tg2^0+\log tg3^0+\ldots+\log tg89^0$
5. (ПМФНИ) Израчунати $\log_{30} 8$ у зависности од a и b, ако је $a=\log_{10} 5$, $b=\log_{10} 3$.
6. (РГФ) Ако је $\log_7 2=a$, израчунати $\log_{\frac{1}{2}} 28$
7. (МАШБГ) Израчунати вредност израза $(\log_3 4+\log_2 3)^2-(\log_3 4-\log_2 3)^2$.
8. (СФ) Ако је $\log_2 3=a$, изразити $\log_6 4$ помоћу a.
9. (СФ) Израчунати $\log_{\frac{1}{8}}\left(\log_{\sqrt{6}} 2-2\log_{\frac{1}{6}} 3\right)$
10. (МФ) Ако је $\log_3 2=p$, израчунати $\log_3 72$
11. (МАШБ) Упоредити $A=6^{\log_3 11}$ и $B=11^{\log_3 6}$
12. (ФОН) Израчунати $\log_4\log_3\log_2 8+\log_{\sqrt{7}+1}\left(8+2\sqrt{7}\right)\cdot\log_{\sqrt[3]{7}} 7\sqrt{7}$
13. (ЕНИ) Ако је $a=\log_4 11$ и $b=\log_4 13$ израчунати $(\log_{11} 13+\log_{13} 11)^{-1}+\log_{289} 17$
14. (ЕТФ) Израчунати $\log_4 3\log_5 4\log_6 5\log_7 6\log_8 7\log_9 8$
15. (ЕТФ) Ако је $\log_2\left(\sqrt{3}+1\right)+\log_2\left(\sqrt{6}-2\right)=A$ колико је $\log_{\frac{1}{4}}\left(\sqrt{3}-1\right)+\log_{\frac{1}{4}}\left(\sqrt{6}+2\right)$
16. (ЕТФ) Израчунати 2^A, ако је $A=\frac{1}{6}\left((\log_2 3)^3-(\log_2 6)^3-(\log_2 12)^3+(\log_2 24)^3\right)$.
17. (ЕТФ) Израчунати $5^{\frac{3-\log_{10} 5}{\log_{10} 25}}$.
18. (ЕТФ) Ако је $a=\log_2 3$ и $b=\log_5 2$ израчунати $\log_{24} 50$
19. (ТФБ) Ако је $a=\log_5 2$ и $b=\log_5 3$ израчунати $\log_{45} 100$.
20. (ЕТФ) Ако је $\log_a b=\sqrt{2}$ израчунати $\log_{\frac{b}{a}}(ab)$
21. (ФОН) Израчунати $7^{\frac{2-\log_{14} 7}{\log_{14} 49}}$
22. (ФОН) Ако је $a=\log_3 4\log_4 5\log_5 6$ и $b=\frac{\log_2 81}{1+\log_2 3}$, израчунати $\log_2 ab$
23. (ФОН) Израчунати $2^{\log_{0,25}(\log_4 2^{\frac{2}{3}})}$
24. (ФОН) Ако је $a=\log_{\sqrt{2}}\sqrt[3]{64}-\sqrt[3]{3}^{\log_{\sqrt{3}} 27}$, израчунати $(a+9)^{a+\frac{9}{2}}$
25. (МФ) Који од датих исказа су тачни: 1^0 $\log((-2)(-3))=\log(-2)+\log(-3)$

$2^0\ \log(-3)^2 = 2\log(-3)$, $3^0\ \log(-2)^4 = 2\log(-2)^2$, $4^0\ \log\frac{-2}{-3} = \log 2 - \log 3$?

26. (МФ) Одредити најмањи број: $\log_{10}\pi$, $\sqrt{\log_{10}(\pi^2)}$, $\left(\frac{1}{\log_{10}\pi}\right)$, $\frac{1}{\log_{10}\sqrt{\pi}}$, 1.

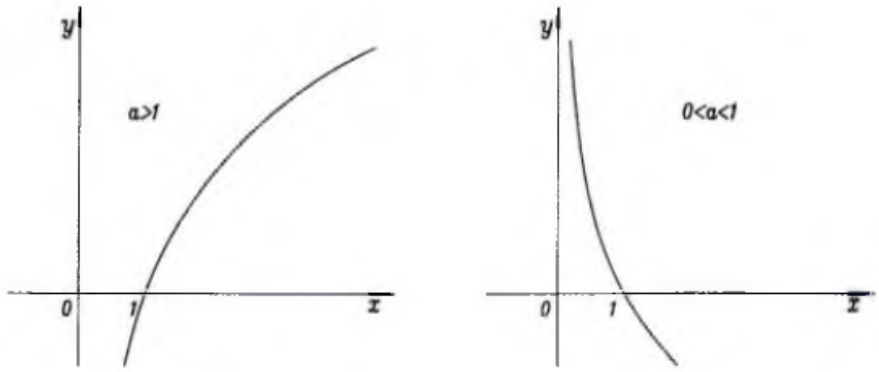
27. (МАШКГ) Доказати неједнакост $\frac{1}{\log_2 7} + \frac{1}{\log_{25} 7} > 2$

28. (МАШКГ) Ако је $\log_a x = p$, $\log_b x = q$, $\log_{abc} x = r$ израчунати $\log_c x$.

29. Одредити највећи цео део броја $\log_2 3 + \log_3 5 + \log_5 8$.

2. *Логаритамска функција*

Логаритамска функција је функција облика $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.



Ако је $a > 1$, тада је функција $y = \log_a x$ строго растућа за све x, позитивна за $x > 1$ и негативна за $0 < x < 1$. Ако је $0 < a < 1$, тада је функција $y = \log_a x$ строго опадајућа за све x, негативна за $x > 1$ и позитивна за $0 < x < 1$.

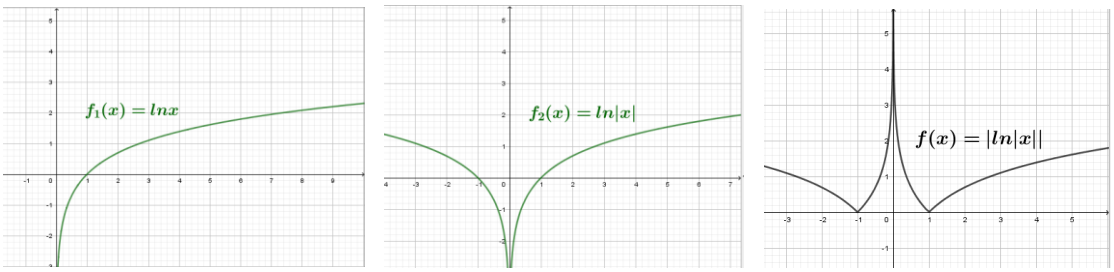
Примери:

1. (ВА) Скицирати график функције $f(x) = |\ln|x||$.

   Решење: До дате функције можемо доћи преко низа функција

   $f_1(x) = \ln x \to f_2(x) = \ln|x| \to f(x) = |\ln|x||$

   Заменом аргумента x са $|x|$ графику дате функције придружујемо његову симетричну слику у односу на y-осу. График функције $|f(x)|$ добијамо тако што задржавамо делове графика $f(x)$ изнад x-осе, а оне који су испод пресликамо осно у односу на x-осу. Графици су представљени на слици 1.

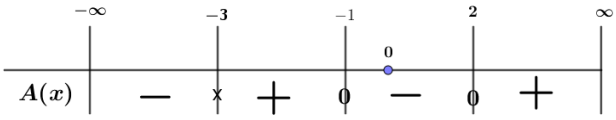


Слика 1. Низ функција $f_1 \to f_2 \to f$

2. (ФТННС) Одредити област дефинисаноцти функције $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2+1}{x+3}}$.

Решење: За дефинисаност функције постављамо следеће услове $\frac{x^2+1}{x+3} > 0$ и $\log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2+1}{x+3} \geq 0$. Из првог услова добијамо $x+3>0 \Leftrightarrow x>-3$. Други услов је еквивалентан са $0 < \frac{x^2+1}{x+3} \leq 1$ тј. $\frac{x^2-x-2}{x+3} \leq 0$. Нуле бројиоца су $x_1 = -1 \vee x_2 = 2$, а нула имениоца $x_3 = -3$. Све нуле су првог реда па у њима израз $A(x) = \frac{x^2-x-2}{x+3}$ мења знак. При томе је још $A(0) = -\frac{2}{3} < 0$. У табели 1. је дат знак израза $A(x)$ по интервалима.

Табела 1. Знак израза $A(x)$



Пресек првог и другог услова за домен функције даје интервал $D_f = [-1,2]$

3. (ВА) Испитати да ли међу функцијама $f_1(x) = \log x$, $f_2(x) = \frac{1}{2}\log x^2$, $f_3(x) = \frac{1}{\log_x 10}$, $f_4(x) = \sqrt{\log^2 x}$, $f_5(x) = \frac{\log_2 x}{\log_2 10}$ има једнаких.

Решење: Функције су једнаке ако имају једнаке домене и једнаке законе придруживања. Трансформишимо законе придруживања датих функција а са D_i обележимо домен функције f_i . Имамо редом:

$f_1(x) = \log x$ и $D_1 = (0,\infty)$, $f_2(x) = \frac{1}{2}\log x^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}\log x = \log x$ и $D_2 = R \setminus \{0\}$,

$f_3(x) = \frac{1}{\log_x 10} = \log x$ и $D_3 = (0,1) \cup (1,\infty)$, $f_4(x) = \sqrt{\log^2 x} = |\log x|$ и $D_4 = (0,\infty)$,

$f_5(x) = \frac{\log_2 x}{\log_2 10} = \log x$ и $D_5 = (0,\infty)$. Закључујемо да је $f_1 = f_5$.

4. (МФ) Функција $f:(0,\infty)\to R$ дефинисана са $f(x)=\log_6 x+3\log_3(9x)$. Колико је $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$?

Решење: $f(x)=\log_6 x+3\log_3(9x)=\log_6 x+3(\log_3 9+\log_3 x)=\log_6 x+6+3\log_3 x$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\log_6\frac{1}{x}+3\log_3\frac{9}{x}=-\log_6 x+3(\log_3 9-\log_3 x)=-\log_6 x+6-3\log_3 x$$

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\log_6 x+6+3\log_3 x-\log_6 x+6-3\log_3 x=12$$

5. (ЕТФ) Функције f и g су задате са $g(f(x))=\frac{x}{2}$ и $g(x)=\log_{16} x$. Колико је $f(-1)+f\left(-\frac{3}{2}\right)$?

Решење: Из дефиниције функције g добијамо да је $g(f(x))=\log_{16} f(x)$. Због тога је $\log_{16} f(x)=\frac{x}{2}$, односно $f(x)=16^{\frac{x}{2}}=4^x$. Имамо даље:

$$f(-1)+f\left(-\frac{3}{2}\right)=4^{-1}+4^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{\sqrt{4^3}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

Задаци:

1. (ВА) Дата је функција $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\in(-1,1) \\ \frac{1}{2}\ln x^2, & x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty) \end{cases}$

   а) Скицирати график функције,

   б) у зависности од реалног параметра a графички одредити број решења једначине $|f(x)|=a$

2. (ФТННС) Дата је функција $f(x)=\sqrt[3]{\log_{\frac{1}{4}}\frac{x^2-x-2}{x^2+x-12}}$

   а) Одредити домен функције, б) одредити нуле функције

3. (ФТННС) Одредити домен и нуле функције $f(x)=\sqrt{\frac{\log_2(x^2-5x+5)}{x+2}}$

4. (МАШНИ) Одредити домен и максимум функције $y=\log(-x^2+6x-5)$.

5. (ВА) Испитати да ли међу функцијама: $f_1(x)=e^{\ln x}$, $f_2(x)=\sqrt{x^2}$, $f_3(x)=\ln e^x$, $f_4(x)=\dfrac{x^2-x}{x-1}$, $f_5(x)=\dfrac{x^2}{|x|}$ има једнаких, а затим скицирати графике функција $f(x)=f_2(x)+f_3(x)$ и $g(x)=f_2(x)\cdot f_3(x)$.

6. (ВА) Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_2 2+\log_2 4+\ldots+\log_2 2^n}{n^2}$

7. (ПМФКГ) Одредити вредности реалног параметра m, за које је функција $f(x)=\left(\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x^2+(m-3)x+1}{2x^2-5x+5}\right)^{\frac{1}{2}}$ дефинисана за свако реално x.

8. (МФ) Одредити број парних и непарних међу датим функцијама: $f_1(x)=\ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$, $f_2(x)=\arcsin x\cdot arctgx$, $f_3(x)=\sin x+\cos x$, $f_4(x)=\dfrac{1+\ln x^2}{\sqrt[3]{x}}$

9. (ЕТФ) Израчунати први извод функције $f(x)=\ln\dfrac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}$ у тачки $x_0=1$.

10. (ЕТФ) Нека је M_1 највећа вредност функције $f_1(x)=(\log_5 6)^{\sin x}$ а M_2 највећа вредност функције $f_2(x)=(\log_6 5)^{\cos x}$. Упоредити M_1 и M_2.

11. (ФОН) Одредити пресек области дефинисаности функција: $f_1(x)=\sqrt{\dfrac{\log_2(x+1)}{x-1}}$, $f_2(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+3x+4}{x-3}}$, $f_3(x)=\log_7(4+5x)+\sqrt{7^{2x}-2401}$.

12. (ГРФ) Ако је $x>0$ и $f(x)=\log_2 x^2+5\log_2 4x$ одредити $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

13. (ГРФ) Ако је $f(x)=\sqrt{x}$ и $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$ израчунати $g(f(2))$.

14. (МАШКГ) Дате су функције $y=\log_2(x+14)$ и $y=6-\log_2(x+2)$. Одредити координате пресечне тачке графика датих функција.

15. (ФТННС) Дата је функција $f(x)=\log_3(9^x-2\cdot 3^x-4)$. Одредити домен функције, а затим решити једначину $f(x)=x$.

3. *Логаритамске једначине*

Логаритамске једначине су такве једначине код којих се непозната налази и под знаком логаритма. Њихово решавање се заснива на чињеници да је логаритамска функција

$$f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}, \qquad \mathbf{R}^+ \ni x \mapsto \log_a x = y \in \mathbf{R}, \qquad a > 0, \quad a \neq 1.$$

бијективно (1-1 и „на“) пресликавање скупа $\mathbf{R}^+$ на скуп $\mathbf{R}$, тако да је за $a > 0$, $a \neq 1$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad \text{ако и само ако} \quad f(x) = g(x),$$
$$f(x) > 0, \;\; g(x) > 0.$$

Примери

1. (МАШКГ) Решити једначину $\log_4\left(4^x - 1\right)\cdot\log_4\left(4^{x+1} - 4\right) = 6$.

   Решење: Одредимо прво домен дефинисаности једначине. $4^{x+1} - 4 = 4\left(4^x - 1\right) > 0$, $4^x > 1$ тј. $x > 0$. Једначина је еквивалентна са: $\log_4\left(4^x - 1\right)\cdot\log_4\left(4\cdot\left(4^x - 1\right)\right) = 6$ $\log_4\left(4^x - 1\right)\cdot\left(1 + \log_4\left(4^x - 1\right)\right) = 6$. Након увођења смене $\log_4\left(4^x - 1\right) = t$ једначина се своди на квадратну $t^2 + t - 6 = 0$ па је $t_1 = -3$ или $t_2 = 2$. Дакле $\log_4\left(4^x - 1\right) = -3$ или $\log_4\left(4^x - 1\right) = 2$. Ово је даље еквивалентно дисјункцији $4^x - 1 = 4^{-3}$ или $4^x - 1 = 4^2$. На крају је $x_1 = \log_4 \frac{65}{64}$ или $x_2 = \log_4 17$.

2. (ПМФКГ) Решити једначину $\log\left(7 - 2^x\right) - \log\left(5 + 4^x\right) + \log 7 = 0$.

   Решење: Услов дефинисаности је $x < \log_2 7$. Једначина је еквивалентна са $\log \frac{7\left(7 - 2^x\right)}{5 + 4^x} = 0$ па је $\frac{7\left(7 - 2^x\right)}{5 + 4^x} = 1$ односно $4^x + 7\cdot 2^x - 44 = 0$. Сменом $2^x = t > 0$ последња једначина се своди на $t^2 + 7t - 44 = 0 \wedge t > 0$ па је $t = 4$. Из $2^x = 4$ добијамо решење $x = 2$.

3. (МАШНИ) Реши једначину $9^{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)} = 5^{\log_{\frac{1}{5}}\left(2x^2+1\right)}$

   Решење: Једначина је дефинисана за $x > -1$ и уз дати услов еквивалентна је са $\left(3^2\right)^{-\log_3(x+1)} = 5^{-\log_5\left(2x^2+1\right)}$. Даље добијамо низ еквивалентних једначина $\left(3^{\log_3(x+1)}\right)^{-2} = \left(5^{\log_5\left(2x^2+1\right)}\right)^{-1}$, $\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{2x^2+1}$, $2x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1$, $x^2 - 2x = 0$.

   Добијамо да је $x_1 = 0 \vee x_2 = 2$.

4. (ПМФНИ) Решити једначину $\log_{x+3}\left(x^2 - x - 2\right)\cdot\log_x(x+3) = 2$.

   Решење: Из услова дефинисаности $0 < x \neq 1 \wedge 0 < x + 3 \neq 1 \wedge x^2 - x - 2 > 0$ добијамо $x > 2$. Једначина је даље еквивалентна са низом једначина

$\frac{\log_{x+3}\left(x^2-x-2\right)}{\log_{x+3} x}=2$, $\log_x\left(x^2-x-2\right)=2$, $x^2-x-2=x^2$, $x=-2$. Добијена вредност не припада домену дефинисаности па једначина нема решења.

5. (ВА) Решити једначину $\log_2 x+\log_2^2 x+\log_2^3 x+....=1$

   Решење: Услов дефинисаности једначине је $x>0$. Поред тога лева страна је збир бесконачне геометријске прогресије па је услов њене конвергенције $\left|\log_2 x\right|<1$ тј. $x\in\left(\frac{1}{2},2\right)$. Једначина је тада еквивалентна са $\frac{\log_2 x}{1-\log_2 x}=1$. Даље је $\log_2 x=\frac{1}{2}$, па је $x=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$.

6. (ФТНЧ) Решити једначину $x^{2+\log_3 x}=3^8$

   Решење: Једначина је дефинисана за $x>0$. После логаритмовања једначине за основу 3 добија се: $\log_3 x^{2+\log_3 x}=\log_3 3^8$, $\left(2+\log_3 x\right)\cdot\log_3 x=8$. Сменом $\log_3 x=t$, последња једначина се своди на $t^2+2t-8=0$, па је $t_1=-2\vee t_2=4$. Враћањем смене добијамо решења $x_1=\frac{1}{9}$ или $x_2=81$.

7. (ФТННС) За које вредности реалног параметра *m* једначина $\log_4(x+3)-\log_{0,25}(1-x)=1+\log_4\log_2 m$ може имати реална решења. Одредити за које целобројне вредности *m* то важи?

   Решење: Једначина је дефинисана за $x\in(-3,1)$ и $m>0$. Изједначавањем основа једначина се своди на $\log_4(x+3)+\log_4(1-x)=\log_4 4+\log_4\log_2 m$, $(x+3)(1-x)=4\log_2 m$, $x^2+2x+4\log_2 m-3=0$. Да би решења била реална треба да буде испуњен услов $4-16\log_2 m+12\geq 0$, $16\log_2 m\leq 16$, $\log_2 m\leq 1$ па добијамо $m\leq 2$. Уз услов дефинисаности добија се $m\in(0,2]$. Одговарајуће целобројне вредности су $m\in\{1,2\}$.

8. (МАШБГ) Познато је да су бројеви $\log_2\left(2^x-1\right)$, $\log_4\left(9+4^x-7\cdot 2^x\right)$ и $\log_2\left(3-2^x\right)$ узастопни чланови аритметичкког низа. Колико има таквих реалних *x*?

   Решење: Решење услова дефинисаности $2^x-1>0\wedge 9+4^x-7\cdot 2^x>0\wedge 3-2^x>0$ је $x\in\left(0,\log_2\frac{7-\sqrt{13}}{2}\right)$. Из услова да су бројеви узастопни чланови аритметичког низа добија се једначина $2\log_4\left(9+4^x-7\cdot 2^x\right)=\log_2\left(2^x-1\right)+\log_2\left(3-2^x\right)$. Добијамо даље $\log_2\left(9+4^x-7\cdot 2^x\right)=\log_2\left(2^x-1\right)\left(3-2^x\right)$, $9+4^x-7\cdot 2^x=-4^x+4\cdot 2^x-3$, $2\cdot 4^x-11\cdot 2^x+12=0$. Последња једначина је еквивалентна дисјункцији $2^x=4$ или $2^x=\frac{3}{2}$. Дакле, $x_1=2$ или $x_2=\log_2 3-1$. Услов дефинисаности задовољава само друго решење па задатак има само једно реално решење.

9. (МФ) Колико целих бројева *x* задовољава једначину $x\cdot 3^{\log_x 5}=15$?

Решење: Скуп допустивих вредности за x је $\{3,5,15\}$. Директном провером добијамо да је $x \in \{3,5\}$.

10. (ФОН) Ако је a збир свих решења једначине $1+\log_2\left(2^x-1\right)=\log_{2^x-1}64$ израчунати вредност израза 2^{a+3}.

Решење: Услов дефинисаности једначине је $0<2^x-1\neq 1$, па је $x\in(0,1)\cup(1,\infty)$. Једначина је еквивалентна са $1+\log_2\left(2^x-1\right)=6\log_{2^x-1}2$,

$1+\log_2\left(2^x-1\right)=\dfrac{6}{\log_2\left(2^x-1\right)}$. Након смене $\log_2\left(2^x-1\right)=t$ добија се једначина

$t^2+t-6=0$, па је $t_1=-3$ или $t_2=2$. Када вратимо првобитну променљиву имаћемо дисјункцију $\log_2\left(2^x-1\right)=-3$ или $\log_2\left(2^x-1\right)=2$, што на крају даје

$x_1=\log_2\dfrac{9}{8}$ или $x_2=\log_2 5$. Сада је $a=x_1+x_2=\log_2\dfrac{9}{8}+\log_2 5=\log_2\dfrac{45}{8}$.

На крају је $2^{a+3}=2^{\log_2\frac{45}{8}+\log_2 8}=2^{\log_2\frac{45}{8}\cdot 8}=2^{\log_2 45}=45$.

11. (ЕТФ) Сва реална решења једначине $\log_{2011}(2010x)=\log_{2010}(2011x)$ припадају интервалу.

A) $\left(0,\dfrac{1}{2011}\right]$, B) $\left(\dfrac{1}{2011},\dfrac{1}{2010}\right]$, C) $\left(\dfrac{1}{2010},1\right]$, D) $\left(1,\dfrac{2011}{2010}\right]$, E) $\left(\dfrac{2011}{2010},+\infty\right]$

Решење: Једначина је дефинисана за $x>0$. Даље је

$\log_{2011}2010+\log_{2011}x=\log_{2010}2011+\log_{2010}x$,

$\log_{2011}x-\log_{2010}x=\log_{2010}2011-\log_{2011}2010$

$\dfrac{\log x}{\log 2011}-\dfrac{\log x}{\log 2010}=\dfrac{\log 2011}{\log 2010}-\dfrac{\log 2010}{\log 2011}\ /\cdot(\log 2011\cdot\log 2010)$

$\log 2010\log x-\log 2011\log x=\log^2 2011-\log^2 2010$

$(\log 2010-\log 2011)\log x=\log^2 2011-\log^2 2010$

$\log x=-\log 2011-\log 2010,\ \ \log x=-\log 2011\cdot 2010$

$x=\dfrac{1}{2010\cdot 2011}\in\left(0,\dfrac{1}{2011}\right]$. Тачан одговор је под А).

12. (ЕТФ) Збир свих решења једначине

$\left(\sqrt{\log_7(-2x-1)}-\log_7\sqrt{4x^2+4x+1}-1\right)\cdot\log_7|x+7|=-3\log_7\sqrt[3]{x+7}$

Решење: Једначина је дефинисана за $x\in\left(-7,-\dfrac{1}{2}\right)$. Пређимо на решавање ј-не.

$\left(\sqrt{\log_7(-2x-1)}-\log_7|2x+1|-1\right)\cdot\log_7|x+7|=-\log_7(x+7)$

$\left(\sqrt{\log_7(-2x-1)}-\log_7(-2x-1)-1\right)\cdot\log_7(x+7)+\log_7(x+7)=0$

$\log_7(x+7)\left(\sqrt{\log_7(-2x-1)}-\log_7(-2x-1)-1+1\right)=0$

$\log_7(x+7)\left(\sqrt{\log_7(-2x-1)}-\log_7(-2x-1)\right)=0$

$\log_7(x+7)=0$ или $\sqrt{\log_7(-2x-1)}-\log_7(-2x-1)=0$

$\log_7(x+7)=0$ или $\sqrt{\log_7(-2x-1)}\left(1-\sqrt{\log_7(-2x-1)}\right)=0$

$\log_7(x+7)=0$ или $\sqrt{\log_7(-2x-1)}=0$ или $1-\sqrt{\log_7(-2x-1)}=0$. Решења су $x_1=-6$ или $x_2\ -1$ или $x_3=-4$, тј. $x_1+x_2+x_3=-11$

Задаци:

(МАШКГ) Решити једначине

1. $\log_5\left(24+5^{1-x}\right)=x+1$
2. $2\log_3 x+3\log_x 3=7$
3. $\log_{b^2} x+\log_{x^2} b=1$
4. $\sqrt{\log_2 x}-\log_2 8x+5=0$

(ПМФКГ) Решити једначине

5. $\log_3 \frac{1}{\sqrt{\log_3 x}}=\log_9 \log_9 \frac{x}{3}$
6. $x^{\log x}=\frac{x^3}{100}$
7. Колико решења има једначина $\sqrt{1-x^2}+\ln x=0$
8. (РГФ) Решити једначину $\log_{16} x+\log_4 x+\log_2 x=14$

(ПМФНИ) Решити једначине

9. $2\log_x a+\log_{ax} a+3\log_{a^2x} a=0$
10. $\log_3 8^{x-1}\cdot\log_2 27=x+7$
11. $|x-1|^{\log^2 x-\log x^2}=|x-1|^3$
12. $x^{\log_2\frac{x}{98}}\cdot 14^{\log_2 7}=1$
13. $x^{\log_{1996}x}=3^{\log_{1996}x^2+\log_{1996}27}$

(ПМФНС) Решити једначине

14. $|\log(x-1)+\log(4-x)-\log x|=|\log x|-\log 2$
15. $\log_{2x+1}\left(x^3-3x^2-6x\right)\cdot\log_x(2x+1)=3$
16. $\log 2+\log\left(4^{x-2}-9\right)=1+\log\left(2^{x-2}+1\right)$
17. $\log_2 x+4\log_x 8=7$
18. (ТФБ) Решити једначину $\log_2\left(2^x+1\right)\cdot\log_2\left(2^{x+1}+2\right)=2$

(ВА) Решити једначине

19. $3^{-\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+|x|\right)}=2$

20. $\log_4|x|-\log_4^2|x|+\log_2^3|x|-....=\frac{1}{3}$

21. $\left(\frac{4}{3}\right)^{\log_{1997}x}+\left(\frac{4}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{1997}}x}=\frac{25}{12}$

(ФТНЧ) Решити једначине

22. $\log_7^3 x-3\log_7 x=-2$

23. $\log_4(x+12)\cdot\log_x 2=1$

(МАШНИ) Решити једначине

24. $\log\sqrt[5]{x}=\frac{18-\log x}{3+\log x^2}$

25. $\log_{\sqrt{2}}x+\log_2 x+\log_{2\sqrt{2}}x+\log_4 x=54$

26. (ФТННС) Решити једначину $\log_2^2(x+2)+\log_{\frac{1}{2}}(x+2)^2=3$

27. (ЕНИ) Решити једначину $\log_3(\log_2 x-9)=2+\log_3(1-\log_x 4)$

28. (ГРФ) Израчунати збир квадрата решења $\left(\frac{2}{3}\right)^{|x|-1}=\log_x x^{\frac{2}{3}}$

29. (МАШБГ) Израчунати суму корена $(x^2-3x-4)\cdot\ln(3x-8)=0$

(ФОН)

30. Израчунати производ реалних решења једначине $\frac{1}{1-\log_x 16}+\frac{4}{1+\log_x 4}=1$.

31. Одредити збир реалних решења једначине $1+\log_2\frac{x+1}{x+2}=\frac{1}{4}\log_{\sqrt{2}}(x-2)^2$

32. Одредити број реалних решења једначине $\log_2(\log_3 x)+\log_2(\log_3 x^2-3)=1/$

33. Одредити број реалних решења једначине

$$\log\sqrt{x-2}+3\log\sqrt{x+2}=\frac{1}{2}+\log\sqrt{x^2-4}$$

34. Одредити број реалних решења једначине $\log_{10-x}\left(\sqrt{x-3}-1\right)=\frac{1}{2}$

(ЕТФ)

35. Одредити производ решења једначине $\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}}=10$.

36. Одредити збир свих решења једначине $2\log_4^2|x+1|+\log_4|x^2-1|+\log_{\frac{1}{4}}|x-1|=0$.

37. Одредити производ свих решења једначине

$$\left(\log_3\frac{3}{x}\right)\cdot\log_2 x-\log_3\frac{x^3}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}+\log_2\sqrt{x}$$

38. Одредити број реалних решења једначине $\left(1+\frac{1}{2x}\right)\log 3+\log 2=\log\left(27-3^{\frac{1}{x}}\right)$.

39. Одредити производ свих реалних решења једначине $\frac{2013x}{2014}=2013^{\log_x 2014}$.

40. Једно од реалних решења једначине $\log_{\cos x}\sin x=4\log_{\sin x}\cos x$ припада интервалу: А)$\left(0,\frac{\pi}{6}\right]$, Б) $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$, В) $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$, Г) $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$, Д)$\left(\frac{5\pi}{6},\pi\right]$.

41. Реално решење једначине $x+\log_{21}(3^x+1)=x\log_{21}7+\log_{21}756$ припада интервалу: А)$(-\infty,-21]$, Б) $(-21,0]$, В) $(0,21]$, Г) $(21,42]$, Д)$(42,\infty]$.

42. Скуп решења једначине $(\log_{\sin x}2)\left(\log_{\sin^2 x}\frac{4}{3}\right)=2\log_{\frac{4}{3}}2$ има тачно три заједничка елемента са скупом S, ако је: А) $S=\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\frac{11\pi}{4},\frac{15\pi}{4}\right\}$

Б) $S=\left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right\}$ В) $S=\left\{\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3},-\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\}$

Г) $S=\left\{\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{3},\frac{13\pi}{3},\frac{19\pi}{3},\frac{25\pi}{3},\frac{31\pi}{3}\right\}$, Д) $S=\left\{\frac{\pi}{3},-\frac{4\pi}{3},-\frac{5\pi}{3},-\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\}$

4. Логаритамске неједначине

При решавању логаритамских неједначина користи се особина логаритамске функције $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1,\ x>0)$ да је строго опадајућа за $0<a<1$, односно строго растућа за $a>1$. Према томе, неједначина облика

$$\log_a f(x)<\log_a g(x)$$

за $0<a<1$ еквивалентна је систему неједначина

$$\begin{cases} f(x)>g(x), \\ g(x)>0 \end{cases}$$

а за $a>1$ систему

$$\begin{cases} f(x)<g(x), \\ f(x)>0. \end{cases}$$

Примери:

1. (ТФБ) Решити неједначину $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x+3)\leq -3$.

Решење: Неједначина је дефинисана за $x \in (-\infty,1) \cup (3,\infty)$. Неједначина је еквивалентна са $x^2 - 4x + 3 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$, $x^2 - 4x - 5 \geq 0$. Решење је $x \in (-\infty,-1] \cup [5,\infty)$

2. (СФ) У скупу целих бројева решити неједначину $\log_2(x+1) + \log_2(x+2) < 2\log_2(5-x)$.

Решење: За домен дефинисаности неједначине добија се интервал $(-1,5)$. Неједначина је еквивалентна са $\log_2(x^2+3x+2) < \log_2(25-10x+x^2)$, $13x < 23$, $x < \frac{23}{13}$. Закључујемо да је $x \in \left(-1, \frac{23}{13}\right)$.

3. (ПМФНИ) Решити неједначину $\log_{\frac{1}{4}} \left| \frac{2x+1}{x+3} + \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{2}$.

Решење: Из услова $\frac{2x+1}{x+3} + \frac{1}{2} \neq 0$ добијамо $x \neq -1$. Дакле, област дефинисаности неједначине је скуп $R \setminus \{-1\}$. Неједначина се своди на $\left| \frac{2x+1}{x+3} + \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}$ или $-\frac{1}{2} < \frac{2x+1}{x+3} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$, $-1 < \frac{2x+1}{x+3} < 0$. Из $\frac{2x+1}{x+3} < 0$ следи $x \in \left(-3, -\frac{1}{2}\right)$, а из $\frac{2x+1}{x+3} > -1$ следи $x \in (-\infty,-3) \cup \left(-\frac{4}{3}, \infty\right)$. У пресеку ових интервала и домена неједначине добијамо решење $x \in \left(-\frac{4}{3}, -1\right) \cup \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

4. (МФ, ФОН) Решити неједначину $\log_2(\log_4 x) + \log_4(\log_2 x) < 2$.

Решење: Услов дефинисаности неједначине је $x > 1$. Неједначину можемо писати у облику $\log_4(\log_4 x)^2 + \log_4(\log_2 x) < 2$, $\log_4\left(\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)^2 \cdot \log_2 x\right) < 2$,

$\frac{1}{4}\log_2^3 x < 16$, $\log_2 x < 4$, $x < 16$.Укључујући домен неједначине добија се решење $x \in (1,16)$.

5. (ЕНИ) Решити неједначину $\log_{x^2-1}(3x-1) < \log_{x^2-1} x^2$.

   Решење: Домен дефинисаности је $x \in (1,\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2},\infty)$. Неједначину ћемо посматрати у два случаја. Прво за $x \in (1,\sqrt{2})$ основа логаритма је мања од 1

па је неједначина еквивалентна са $3x-1>x^2$, $x\in\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2},\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$. У пресеку са посматраним условом добијамо $x\in\left(1,\sqrt{2}\right)$. Друго, ако је $x\in\left(\sqrt{2},\infty\right)$ основа логаритма је већа од 1 па добијамо неједначину $3x-1<x^2$, $x\in\left(-\infty,\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2},\infty\right)$. Уз полазни услов је $x\in\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2},\infty\right)$. Крајње решење је унија решења из посматрана два случаја $x\in\left(1,\sqrt{2}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2},\infty\right)$.

6. (ГРФ) Одредити скуп решења неједначине $\log_{|x|}\left(5x^2-1\right)>2$.

Решење: Домен неједначине је $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\infty\right)$. Дата неједначина се своди на дисјункцију система неједначина $4x^2-1<0\wedge x\in\left(-1,-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{5}},1\right)$ или $4x^2-1>0\wedge x\in\left(-\infty,-1\right)\cup\left(1,\infty\right)$. На крају се добија решење $x\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(1,\infty\right)$.

7. (МАШБГ) Одредити скуп решења неједначине $\log_4\left(3^x-1\right)\cdot\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{3^x-1}{16}\right)\le\frac{3}{4}$.

Решење: Неједначина је дефинисана за $x>0$ и еквивалентна са $\log_4\left(3^x-1\right)\cdot\left(2-\log_4\left(3^x-1\right)\right)\le\frac{3}{4}$. Након смене $\log_4\left(3^x-1\right)=t$ добијамо $4t^2-8t+3\ge0$, тј. $t\le\frac{1}{2}$ или $t\ge\frac{3}{2}$. Након враћања смене имамо дисјункцију $\log_4\left(3^x-1\right)\le\frac{1}{2}$ или $\log_4\left(3^x-1\right)\ge\frac{3}{2}$, па је $x\le1$ или $x\ge2$. Узимајући у обзир услов дефинисаности добијамо решење $x\in\left(0,1\right]\cup\left[2,\infty\right)$.

8. (ВА) Решити неједначину $x^{\log^2 x-3\log x+1}>1000$.

Решење: Услов дефинисаности неједначине је $x>0$. После логаритмовања за основу 10 добија се $\log x\left(\log^2 x-3\log x+1\right)>3$. Сменом $\log x=t$ неједначина се своди на $t^3-3t^2+t-3>0$, $\left(t-3\right)\left(t^2+1\right)>0$, $t-3>0$. После враћања првобитне променљиве имамо $\log x>3$, тј. $x>1000$. Дакле, решење је $x\in\left(1000,\infty\right)$.

9. (ЕТФ) Нека су дати реални бројеви $a<b<c<d<e<f$, тада је скуп решења неједначине $2\log_{\cos x}\sin x\le\log_{\sin x}ctgx,\ \left(0<x<\pi\right)$ облика: А) $\left[a,b\right)$,

Б) $[a,b]\cup[c,d]$, В) $(a,b)\cup(c,d)$, Г) $[a,b]$, Д) $(a,b)\cup(c,d)\cup(e,f)$.

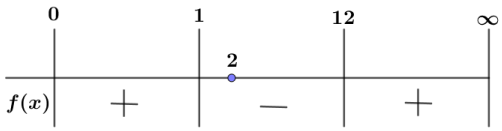
Решење: Неједначина је дефинисана ако је $x\in\left(2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k\in Z$.

Неједначину најпре трансформишемо у $2\log_{\cos x}\sin x\le\log_{\sin x}\cos x-1$, а затим сменом $\log_{\cos x}\sin x=t>0$ на квадратну $2t^2+t-1\le 0$. Закључујемо да је $-1\le t\le\frac{1}{2}$ или $-1\le\log_{\cos x}\sin x\le\frac{1}{2}$. Основа логаритма је мања од 1 па добијамо $\sqrt{\cos x}\le\sin x\le\frac{1}{\cos x}$. Прво $\cos x\le\sin^2 x$, $\cos^2 x+\cos x-1\le 0$, $-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\le\cos x\le\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ па је $x\in\left[\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Друго $\sin x\cos x\le 1$, $\sin 2x\le 2$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Дакле, $x\in\left[\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ па је тачан одговор под А).

10. (ЕТФ) Одредити скуп решења неједначине $\frac{\left|\log_3|2x+3|\right|-3}{\log_3 x}>0$

Решење: Неједначина је дефинисана за $x\in(0,1)\cup(1,\infty)$. Тада је она еквивалентна са $\frac{\left|\log_3(2x+3)\right|-3}{\log_3 x}>0$. Одредимо нуле бројиоца $\left|\log_3(2x+3)\right|=3$, $x_1=-\frac{25}{27}$ или $x_2=12$, Због домена нула је само x_2. Нула имениоца је $x_3=1$ и није у домену. Приликом преласка променљиве x преко ових вредности функција $f(x)=\frac{\left|\log_3(2x+3)\right|-3}{\log_3 x}$ мења знак. С обзиром да је $f(2)=\frac{\log_3 7-3}{\log_3 2}<0$ можемо конструисати табелу знака функције $f(x)$

Табела 2. Знак функције $f(x)$



На основу табеле закључујемо да је решење неједначине $x\in(0,1)\cup(12,\infty)$.

Задаци:

1. (МАШКГ) У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\log_{\frac{1}{3}}\frac{x+1}{4}>\log_3(3-x)$$

(ПМФКГ) Реши неједначине

2. $\log_{\sqrt{2}}(x-3) > \log_{\frac{1}{2}}(x+3)$

3. $\log_x \dfrac{5x-2}{x^2+2} > 0$

(ПМФНИ) Решити неједначине

4. $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1-2x}{1+x} \le 2$

5. $\log_2(x+1) + \log_{(x+1)} 2 \ge \dfrac{5}{2}$

6. $\log_x(x+1) < \log_{\frac{1}{x}}(2-x)$

(СФ) Одредити скуп решења неједначине

7. $\log_{\frac{1}{6}}(x-2) + \log_{\frac{1}{6}}(x+4) \ge \log_{\frac{1}{6}}(9x)$

8. $\log_{\frac{1}{8}} x^3 > 2$

9. $\log_{\frac{1}{4}}\left(x^2 + \dfrac{3}{4}x\right) \ge 1$

(ВА) Решити неједначине

10. $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 4|x| + 3\right) \ge -3$

11. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_2\left|\frac{x-2}{x+1}\right|} < 3$

12. $\log_x \sqrt{x+12} > 1$

13. $x^{\log^2 x + \log x + 2} < 0{,}01$

(ФТНЧ) Решити неједначине

14. $\log_3^2 x - 5\log_3 x + 6 \le 0$

15. $\log_{2x+3} x^2 < \log_{2x+3}(4-3x)$

(МАШНИ) Одредити скуп решења неједначине

16. $\log 10^{\log(x^2+1)} - \log x \le 1$

17. $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}(x^2+2x+4)} > 1{,}25$

18. $\dfrac{\log^2 x - 3\log x + 3}{\log x - 1} \le 1$

(ФТННС) Одредити скуп решења неједначине

19. $\log_{\frac{1}{2}}^{2} x < 4 + \log_{\frac{1}{2}} x^3$

20. $\log_x (6-5x) < 2$

(ЕНИ) Решити неједначине

21. $\sqrt{\log_4 (x-3)} > \log_{\frac{1}{4}} \frac{64}{x-3}$

22. $\log\left(5^x + x - 20\right) > x - x\log 2$

23. $\dfrac{\frac{7}{2}x - x^2 + \frac{3}{2}}{\log_2 |x-1|} > 0$

24. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27x} > 5\sqrt{\log_3 x}$

(ГРФ) Одредити скуп свих решења неједначине

25. $|\log_x (6-x)| \le 1$

26. $\log_{x^2}\left(\sqrt{x^2-1} - 1\right) < 0$

(МАШБГ)

27. Одредити број решења неједначине $\log_{\frac{1}{5}}\left(\log_3 \frac{x-3}{x+3}\right) \ge 0$ скупу $\{-8,-7,-6,..,9,10\}$.

28. Одредити скуп решења $\log_x \sqrt{\frac{5}{2}x - 1} > 1$.

29. (МФ) Решити неједначину $\log_{\frac{1}{3}} x - 6\log_x \frac{1}{3} + 1 > 0$

30. (ФОН) Скуп решења неједначине $\log_3\left(\log_2 (x+3)\right) < 0$ је.

(ЕТФ)

31. Решити неједначину $\dfrac{\log_{2(x+1)^2-1}\left(\log_{2x^2+2x+3}\left(x^2-2x\right)\right)}{\log_{2(x+1)^2-1}\left(x^2+6x+10\right)} \ge 0$

32. Одредити решења неједначине $\log_{\sin x} \cos x + \log_{\cos x} \sin x > 2$ на интервалу $[0, 2\pi]$.

5. *Системи логаритаских једначина*

Примери:

1. (ПМФНИ) Решити систем једначина $5|\log_2 x| - \log_3 y^2 = 0 \wedge \log_2 x^2 - \log_{\frac{1}{3}} y = 9$

Решење: Систем је дефинисан за $x > 0, y > 0$. После елементарних трансформација систем се своди на $5|\log_2 x| - 2\log_3 y = 0 \wedge 2\log_2 x + \log_3 y = 9$, а сменама $\log_2 x = p$, $\log_3 y = q$ на систем линеарних једначина $5|p| - 2q = 0 \wedge 2p + q = 9$. Добијамо $p_1 = 2, q_1 = 5$ или $p_2 = -18, q_2 = 45$, што на крају даје $(x, y) = \{(4, 3^5), (2^{-18}, 3^{45})\}$.

2. (ЕНИ) Решити систем једначина $\dfrac{\log(x-y) - 2\log 2}{1 - \log(x+y)} = 1,\ \dfrac{\log x - \log 3}{\log y - \log 7} = -1$.

Решење: Услови дефинисаности су $x > 0, y > 0,\ x > y, x + y \neq 10, y \neq 7$. Систем трансформишемо у еквивалентне $\log\dfrac{x-y}{4} = \log\dfrac{10}{x+y} \wedge \log\dfrac{x}{3} = -\log\dfrac{y}{7}$, $x^2 - y^2 = 40 \wedge xy = 21$. Једино позитивно решење последњег система је пар $(x, y) = (7, 3)$, али због услова $x + y \neq 10$ то није решење датог система. Дакле, дати систем нема решења.

3. (ФТННС) Решити систем: $\log_2 xy = 2 \wedge \log_2^2 x + \log_2^2 y = 10$

Решење: Услов дефинисаности је $x > 0 \wedge y > 0$. Увођењем смена $\log_2 x = p$, $\log_2 y = q$ добија се конјукција једначина $p + q = 2 \wedge p^2 + q^2 = 10$. Решење последњег система је $p_1 = -1, q_1 = 3$ или $p_2 = 3, q_2 = -1$. На крају добијамо $(x, y) \in \left\{\left(\frac{1}{2}, 8\right), \left(8, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

4. (МАШКГ) Решити систем једначина
$\log(x^2 + y^2) + 1 = \log 13 \wedge \log(x+y) - \log(x-y) = 3\log 2$

Решење: Услови дефинисаности система су $x > 0, x > y$. Систем се лако трансформише у $10(x^2 + y^2) = 13 \wedge \dfrac{x+y}{x-y} = 8$. Услове дефинисаности задовољава решење $(x, y) = \left(\dfrac{9}{10}, \dfrac{7}{10}\right)$.

5. (МФ) Ако је $\log_2 x + 2\log_3 y = 0$ и $2\log_2 x + \log_3 y = 5$ израчунати $9\log_3 x \cdot \log_2 y$.

Решење: Систем је дефинисан за $x>0, y>0$. Најпре елиминацијом решимо систем по $\log_2 x$ и $\log_3 y$. Добија се: $-3\log_2 x=-10$ и $-3\log_3 y=5$, односно $x=2^{\frac{10}{3}}$ и $y=3^{-\frac{5}{3}}$. На крају је:

$$9\log_3 x\cdot\log_2 y=9\log_3 2^{\frac{10}{3}}\cdot\log_2 3^{-\frac{5}{3}}=9\cdot\frac{10}{3}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\log_3 2\cdot\log_2 3=-50\cdot 1=-50$$

6. (ЕТФ) Одредити број реалних решења система једначина

$$y\left(|x|-2\right)^{\log_y(|x|-2)}=\left(|x|-2\right)^{\frac{5}{2}}\wedge\log_4 y\cdot\log_y\left(y-3x+6\right)=1$$

Решење: Услови дефинисаности су $0<y\neq 1$, $|x|>2$ и $x<\frac{y}{3}+2$. Извршимо прво очигледне трансформације на другој једначини $\frac{\log_y\left(y-3x+6\right)}{\log_y 4}=1$, $\log_4\left(y-3x+6\right)=1$, $y=3x-2$. Из услова дефинисаности за y добијамо и $\frac{2}{3}<x\neq 1$, што уз $|x|>2$ даје $x>2$. Заменимо $y=3x-2$ у прву једначину и добијамо: $(3x-2)\left(|x|-2\right)^{\log_{3x-2}(|x|-2)}=\left(|x|-2\right)^{\frac{5}{2}}$. Сада једначину логаритмујемо за основу $3x-2$, па је $\log_{3x-2}(3x-2)\left(|x|-2\right)^{\log_{3x-2}(|x|-2)}=\log_{3x-2}\left(|x|-2\right)^{\frac{5}{2}}$ или $2\log^2_{3x-2}(x-2)-5\log_{3x-2}(x-2)+2=0$. Последња једначина је еквивалентна са дисјункцијом $\log_{3x-2}(x-2)=\frac{1}{2}$ или $\log_{3x-2}(x-2)=2$ односно $x-2=\sqrt{3x-2}$ или $x-2=(3x-2)^2$. После сређивања пар једначина је еквивалентан са $x^2-7x+5=0$ или $9x^2-13x+6=0$. Друга једначина нема решења, а решења прве су $x_1=\frac{7-\sqrt{29}}{2}<2$ или $x_2=\frac{7+\sqrt{29}}{2}>2$. Услов дефинисаности задовољава друго решење, а тада је $y_2=\frac{17+3\sqrt{29}}{2}$. Закључујемо да дати систем има тачно једно реално решење $(x,y)=\left(\frac{7+\sqrt{29}}{2},\frac{17+3\sqrt{29}}{2}\right)$.

Задаци:

(ПМФНИ) Решити системе једначина

1. $$\begin{cases}4|\log_2 x|-3\log_3 y=2\\ 2\log_2 x+\log_3 y=6\end{cases}$$

2. $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2 \\ x^2 - y = 2 \end{cases}$

3. Одредити геометријску прогресију код које је збир прва три члана 14, а збир логаритама тих чланова за основу 2 је 6.

4. (ПМФКГ) Решити систем једначина

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2, \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2, \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2. \end{cases}$$

(ВА) Решити ситеме једначина

5. $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576 \\ \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3^x \cdot 5^y - 225 = 0 \\ \log_{1997}(x - y + 1) = 0 \end{cases}$

(ФТННС) Решити системе једначина

7. $\log_2 x - \log_4 y = 0 \wedge 5x^2 - y^2 = 4$

8. $\log_2 x + \log_9 y = 5 \wedge \log_2 x^3 - \dfrac{4}{\log_y 3} = 4$

9. $\log_2 2x - 2\log_4 y = 1 \wedge \log_4 x \cdot \log_x\left(3y^2 - x\right) = 1$

10. (МФ) Одредити број решења система једначина $y + \log x = 1 \wedge x^y = 0{,}01$

(ЕТФ) Одредити број реалних решења система једначина

11. $2^x \cdot 4^y = 32 \wedge \log(x - y)^2 - 2\log 2 = 0$

12. $\log_{|x-y|} \dfrac{xy}{2} = 2 \wedge x + y = xy + 1$

13. $\left(1 + 2\log_{|xy|} 2\right) \cdot \log_{x+y} |xy| = 1 \wedge x - y = 2\sqrt{3}$

6. *Неке нестандардне методе решавања логаритамских једначина и неједначина*

6.1. Метод рационализације

У решавању логаритамских једначина и неједначина, код којих се у основи логаритма појављује променљива може се доћи до сложених израза који нису једноставни за сређивање те је поступак решавања знатно отежан. Суштина методе рационализације је да се сложен израз $F(x)$ замени једноставнијим $G(x)$ при чему се добија еквивалентна једначина или неједначина на уоченом домену. Другим речима за неку релацију $\rho \in \{=.\geq, \leq, >, <\}$ важи да је $F(x)\rho 0 \Leftrightarrow G(x)\rho 0$.

У табели 3. дате су карактеристичне трансформације које се користе у методи рационализације.

Табела 3. Трансформације у методи рационализације код решавања логаритамских једначина и неједначина

$F(x)$	$G(x)$
$\log_a f$	$(a-1)(f-1)$
$\log_a f-1$	$(a-1)(f-a)$
$\log_a f-\log_a g$	$(a-1)(f-g)$
$\log_f h-\log_g h$	$(f-1)(g-1)(h-1)(g-f)$
$\log_h f\cdot\log_p k$	$(f-1)(h-1)(k-1)(p-1)$
$\dfrac{\log_a f-\log_a g}{\log_b h}$	$\dfrac{(a-1)(f-g)}{(b-1)(h-1)}$

Примери

1. Решити једначину $\log_{\frac{2x+2}{5x-1}}\left(10x^2+x-2\right)=0$

Решење: Из услова дефинисаности $0<\dfrac{2x+2}{5x-1}\neq 1$, $10x^2+x-2>0$ добије се домен једначине $x\in(-\infty,-1)\cup\left(\dfrac{2}{5},1\right)\cup(1,\infty)$. Применом метода рационализације једначина се своди систем једначина $\dfrac{2x+2}{5x-1}-1=0\wedge 10x^2+x-2-1=0$. Решење које задовољава услов дефинисаности је $x=\dfrac{1}{2}$.

2. Решити неједначину $\log_{6-x}\dfrac{(x-6)^2}{x-2}\geq 2$

Решење: Домен дефинисаности неједначине је $x\in(2,5)\cup(5,6)$. Неједначину прво запишемо у облику $\log_{6-x}\dfrac{(x-6)^2}{x-2}-\log_{6-x}(6-x)^2\geq 0$ а онда применимо метод рационализације $(6-x-1)\left(\dfrac{(x-6)^2}{x-2}-(6-x)^2\right)\geq 0$ или

$(5-x)(6-x)^2\left(\dfrac{1}{x-2}-1\geq 0\right)\Leftrightarrow\dfrac{(5-x)(3-x)}{x-2}\geq 0$. Решење је $x\in(2,3]\cup(5,6)$.

6.2. Метод коришћења значајних неједнакости

Најчешће се користи неједнакост аритметичке и геометријске средине (АГ) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, a>0, b>0.$

3. Решити једначину $\sqrt{x^2+2x+4}+\frac{4}{\sqrt{x^2+2x+4}}=4-\log_3^4\left(x^4+x^2+1\right).$

Решење: Једначина је дефинисана за све реалне бројеве. Запишимо леву страну једнакости у облику $2\left(\frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{2}+\frac{2}{\sqrt{x^2+2x+4}}\right)$ и применом АГ неједнакости закључујемо да она није мања од 4 и једнака је 4 за $x=0$. Десна страна је за $x=0$ такође једнака 4, док је у осталим случајевима мања. Закључујемо да једнакост важи само за $x=0$ те је то једино решење дате једначине.

6.3. Метод коришћења домена дефинисаности, ограничености или монотоности функције

4. Решити једначину $\log\left(1+\sqrt{x^2-9}\right)+x^2-3x+1=3^{\sqrt{9-x^2}}$

Решење: Једначина је дефинисана за $x\in\{-3,3\}$. Директном провером вредности из домена закључујемо да је $x=3$ једино решење.

5. Решити неједначину $\sqrt{x^2-7x+12}+\log^2\left(x^2-6x+10\right)\leq 0$

Решење: Неједначина је дефинисана за $x\in(-\infty,3]\cup[4,\infty)$. Сабирци на левој страни неједначине су ненегативни па се неједначина своди на конјукцију $\sqrt{x^2-7x+12}=0\wedge\log^2\left(x^2-6x+10\right)=0$. Решење је $x\in\{3,4\}$.

6. Решити неједначину $\sqrt[6]{x}+2x^3+\log_5(x+4)-\sqrt{1-x}<4$

Решење: Домен неједначине је интервал $[0,1]$. Означимо са $f(x)$ израз на левој страни неједначине. Тада је на домену $f'(x)=\frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}+6x^2+\frac{1}{x+4}+\frac{1}{2\sqrt{(1-x)^3}}>0$, па је $f(x)$ растућа и има максимум $f(1)=4$. Дакле решење неједначине је $x\in[0,1)$.

Задаци:

Решити неједначине

1. $\log_{x-3}\left(x^2-12x+36\right)\leq 0$
2. $\log_{12x^2-41x+35}(3-x)\geq\log_{2x^2-5x+3}(3-x)$
3. $\left(\sqrt{x^2-6x+5}+1\right)\log_5\frac{x}{5}+\frac{1}{x}\left(\sqrt{-2x^2+12x-10}+1\right)>0$

4. $\cos^2(x+1)\cdot\log\left(9-2x-x^2\right)\geq 1$
5. $4\sqrt{(3x-1)^2}+\sqrt{\log_2^2 x^2+16\log_4 x}\leq 4-12x$
6. $\log_{2x}(x-4)\cdot\log_{x-1}(6-x)<0$

Решења задатака

1. *Дефиниција и особине логаритма*

1.0, 2. $2^{\log_4 2} < 3^{\log_{27} 3}$, 3. $\frac{45}{11}$, 4. а)0, б)0, 5. $\frac{3(1-a)}{1+b}$, 6. $\frac{2a+1}{a}$, 7. 8, 8. $\frac{2}{1+a}$, 9. $-\frac{1}{3}$,

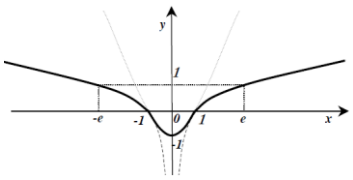
10. $3p+2$, 11. *A=B*, 12. 9, 13. $\frac{(a+b)^2}{2(a^2+b^2)}$, 14. $\frac{1}{2}$, 15. *2A-4*, 16. 72. 17. $10\sqrt{2}$,

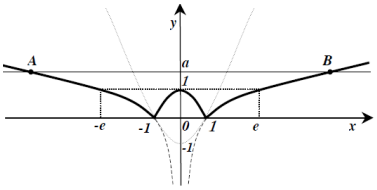
18. $\frac{b+2}{b(a+3)}$, 19. $\frac{2(b^2+1)}{b(a+1)}$, 20. $-(\sqrt{2}-1)^2$, 21. $2\sqrt{7}$, 22. 2, 23. $\sqrt{3}$, 24. 1, 25. Тачни су искази 3^0 и 4^0, 26. $\log_{10}\pi$, 27. На левој страни прећи на реципрочне вредности,

28. $\frac{pq-qr-pr}{pqr}$, 29.

2. *Логаритамска функција*

1.а) График функције је на слици испод лево, б) $a<0$ нема решења, $a=0$ два решење, $0<a<1$ четири решења, $a=1$ три решења, $a>1$ два решења. Видети слику испод десно.





2.а) $x\in(-\infty,-4)\cup(-1,2)\cup(3,\infty)$, б) $x=5$, 3. $x\in(-2,1]\cup[4,\infty)$, $x_1=1$ $x_2=4$,

4. $x\in(1,5)$, $y_{\max}=2$, 5, 5. Нема једнаких функција, 6. $\frac{1}{2}$, 7. $m\in(1,2)$, 8. Једна непарна, две парне, 9. $\sqrt{2}$, 10. $M_1=M_2$, 11. $(3,\infty)$, 12. 20, 13. $-\frac{1}{2}$, 14. $(2,4)$,

15. $x=\log_3 4$.

3. *Логаритамске једначине*

1. $x=1$, 2. $x_1=\sqrt{9}$, $x_2=27$, 3. $x=b$, 4. $x=4$, 5. $x=9$, 6. $x_1=10$, $x_2=100$,

7. Два решења, 8. $x=256$, 9. $x_1=\frac{1}{\sqrt[3]{a^8}}$, $x_2=\frac{1}{\sqrt{a}}$, 10. $x=2$, 11. $x_1=\frac{1}{10}$, $x_2=1000$, $x_3=2$ 12. $x_1=7$, $x_2=14$, 13. $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=27$, 14. $x_1=2$, $x_2=3$, 15. Нема решења, 16. $x=2+\log_2 7$, 17. $x_1=8$, $x_2=16$, 18. $x=0$, 19. $x_{1,2}=\pm 1$, 20. $x_{1,2}=\pm 2$, 21. $x_1=\frac{1}{1997}$, $x_2=1997$, 22. $x_1=\frac{1}{49}$, $x_2=49$, 23. $x=4$,

24. $x_1 = 10^{-9}, x_2 = 10^5$, 25. $x = 2^{\frac{324}{25}}$, 26. $x_1 = -\frac{3}{4}, x_2 = 6$, 27. $x = 2^{9+3\sqrt{7}}$, 28. $x = 2$,

29. 7, 30. $\sqrt[3]{4}$, 31. $1+\sqrt{7}$, 32. Нема решења, 33. Нема решења, 34. Једно решење,

35. 1, 36. -4, 37. $x = \frac{\sqrt{3}}{8}$, 38. Једно решење, 39. $\frac{2014}{2013}$, 40. Б, 41. В, 42. Д.

4. Логаритамске неједначине

1. $x \in (-1,3)$, 2. $x \in (x_1, \infty), x_1 \in (3,4)$, 3. $x \in \left(\frac{2}{5},1\right) \cup (1,\infty)$, 4. $x \in (1,5), y_{\min} = 1$

5. $x \in (3,\infty)$, 6. $x \in (0,1) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, 7. $x \in (2,8)$, 8. $x \in \left(0,\frac{1}{4}\right)$, 9. $x \in \left[-1,-\frac{3}{4}\right) \cup \left(0,\frac{1}{4}\right]$,

10. $x \in [-5,-3) \cup (-1,1) \cup (3,5]$, 11. $x \in (-\infty,-1) \cup \left(-1,\frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{7}{2},\infty\right)$

12. $x \in (1,4)$, 13. $x \in \left(0,\frac{1}{10}\right)$, 14. $x \in [8,27]$, 15. $x \in (-1,0) \cup (0,1)$,

16 $x \in \left[5-2\sqrt{6},5+2\sqrt{6}\right]$, 17. $x \in \left(-\infty,-1-\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}-1,\infty\right)$, 18. $x \in (0,10) \cup \{20\}$,

19. $x \in \left(\frac{1}{16},2\right)$, 20. $x \in (0,1) \cup \left(1,\frac{6}{5}\right)$, 21. $x \in \left[4,4^{\frac{2+\sqrt{3}}{2}+3}\right)$, 22. $x > 20$,

23. $x \in \left(\frac{7-\sqrt{73}}{4},0\right) \cup \left(2,\frac{7+\sqrt{73}}{4}\right)$, 24. $x \in \left(3^{\frac{5+\sqrt{13}}{2}},\infty\right)$, 25. $x \in \left(0,3-2\sqrt{2}\right] \cup \left[3,3+2\sqrt{2}\right]$,

26. $x \in \left(-\infty,-\sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5},\infty\right)$ 27. 3, 28. $x \in \left(\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right) \cup (1,2)$, 29. $x \in \left(0,\frac{1}{9}\right) \cup (1,27)$,

30. $x \in (-2,-1)$, 31. $x \in (-3,-2) \cup \left(-2,-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 32. $x \in \left(0,\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

5. Системи логаритамских једначина

1. $(4,9)$, 2. $(2,2)$, 3. 2,4,8…или 8,4,2,…, 4. $\left(\frac{2}{3},\frac{27}{8},\frac{32}{3}\right)$, 5. $(2,6)$, 6. $(2,2)$,

7. $(1,1),(2,4)$, 8. $(16,9)$, 9. $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$, 10. 2, 11. $(3,1)$, 12. $\left(\frac{1}{2},1\right)$, $\left(1,\frac{1}{2}\right)$,

13. $\left(2+\sqrt{3},2-\sqrt{3}\right),\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{2},\frac{3-2\sqrt{3}}{2}\right)$.

6. Неке нестандардне методе решавања логаритамских једначина и неједначина

1. $x \in (3,4) \cup [5,6) \cup (6,7]$, 2. $x \in \left(\frac{1}{2},1\right) \cup \left[\frac{8}{5},\frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{4},2\right) \cup (2,3)$, 3. $x = 5$, 4. $x = -1$,

5. $x = \frac{1}{4}$, 6. $x \in (4,5) \cup (5,6)$

Литература

1. Владимир Стојановић: Математископ 7, математика за матуранте, Математископ, осмо издање, Београд 2007.
2. Група аутора: Збирка тестова и решења са пријемних испита, ФТН Нови Сад, Нови Сад 2015.
3. Група аутора: Математика комплети задатака за пријемни испит, Електронски факултет Ниш, Ниш 2011.
4. Ђорђе Кртинић: Математика 4^+, Решени задаци са пријемних испита на Универзитету у Београду 2007-2014, Круг, Београд 2017.
5. Ђуришић Душан, Бркић Нада: Збирка задатака из математике на Војној академији, Војна академија, Београд 2005.
6. Живорад Ивановић. Срђан Огњановић: Математика 2, Збирка решених задатака и тестова за II разред гимназија и техничких школа, Круг, Београд 2004.
7. Илија Ћосић и група аутора: Збирка задатака из математике са пријемних испита на техничким факултетима, ФТННС, Нови Сад
8. З. Каделбург, В. Мићић, С. Огњановић: Анализа са алгебром 2, Уџбеник са збирком задатака за II разред Математичке гимназије, Круг, Београд 2002.
9. Љиљана Петковић и група аутора: Збирка решених задатака са пријемних испита, Машински факултет Ниш, Ниш 2014.
10. мр Нада Дамљановић, мр Рале Николић: Збирка задатака за пријемни испит из математике, Технички факултет у Чачку, Чачак 2009.

Интернет странице природно-математичких и техничких факултета у Србији