ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

АКРЕДИТОВАНИ СЕМИНАР:

345

ДРЖАВНИ СЕМИНАР О НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ И РАЧУНАРСТВА ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Компетенција: К1
Приоритети: 3

ТЕМА 13:

АРХИМЕДОВ ПРОБЛЕМ О ГОВЕДИМА – УВОД У ДИОФАНТСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ

РЕАЛИЗАТОР СЕМИНАРА:

др ЗОРАН КАДЕЛБУРГ

БЕОГРАД
20. – 21. 02. 2021.

АРХИМЕДОВ ПРОБЛЕМ О ГОВЕДИМА – УВОД У ДИОФАНТСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Зоран Каделбург

Београд, 21.02.2021.

1. Увод

Диофантске једначине имају важну улогу у развоју математике. Због чињенице да, ако се изузму неки најједноставнији примери, углавном не постоје опште методе за њихово решавање, кроз историју су покушаји тог решавања често доводили до развоја нових математичких теорија.

Из сличних разлога, овакве једначине се скоро редовно појављују као задаци на математичким такмичењима скоро свих нивоа. Због тога су оне и неизоставан део припрема за та такмичења.

У овом тексту, кроз причу о једном од најстаријих познатих проблема овог типа, покушаћемо да прикажемо један могући приступ увођењу ученика у ову важну математичку проблематику.

2. Поставка Архимедовог проблема

Велики старогрчки математичар *Архимед* (287(?)–212 п.н.е) волео је, између осталог, да поставља и решава проблеме у којима се појављују веома велики природни бројеви.

Тако је немачки истраживач *Лесинг* (Lessing, 1729–1821) пронашао и 1773. године објавио папирус за који се сматра да садржи Архимедово писмо *Ератостену из Кирене* (Ератостен, око 276–194 п.н.е). У писму се, у стиховима, говори о томе да је бог Сунца имао на Сицилији крдо говеда. Говеда су била од четири различите врсте – бела, црна, шарена и смеђа – и, наравно, у свакој врсти било је и крава и волова. У даљем тексту се дају услови које су задовољавали бројеви крава, односно волова у свакој од тих врста. Преведено на савремене ознаке, ако се са x, y, z, t означе редом бројеви белих, црних, шарених и смеђих волова, а са x', y', z', t' одговарајући бројеви крава, Архимедов задатак је био постављен на следећи начин.

Архимедов проблем

(а) *Одредити природне бројеве x, y, z, t, као и x', y', z', t' који задовољавају следећи систем* (1)-(2) *од седам линеарних једначина*

$$x = \Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Big)y + t, \qquad y = \Big(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\Big)z + t, \qquad z = \Big(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\Big)x + t, \tag{1}$$

$$x' = \Big(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\Big)(y+y'), \qquad z' = \Big(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\Big)(t+t'), \qquad y' = \Big(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\Big)(z+z'), \qquad t' = \Big(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\Big)(x+x'). \tag{2}$$

(б) *Одредити оно решење претходног система код којег је $x+y$ квадратни, а $z+t$ троугаони број.*

Ради се, дакле, о систему од 7 једначина са 8 непознатих. Он се, елиминацијом, може свести на једну једначину са две непознате, облика

$$ax + by = c. \tag{3}$$

Такве једначине, ако је, на пример, $b \neq 0$ и ако нема других услова, имају бесконачан скуп решења

$$\Big\{ \Big(x, \frac{c - ax}{b} \Big) \;\Big|\; x \in \mathbf{R} \Big\}.$$

На пример, једначина $3x - 6y = 5$ има у $\mathbf{R}$ бесконачно много решења: за сваки реалан број x, ако изаберемо број y тако да је $y = \dfrac{3x-5}{6}$, пар (x, y) ће задовољавати дату једначину. Слично, скуп решења једначине $2x - 3y = 1$ у $\mathbf{R}$ је $\Big\{ \Big(x, \dfrac{2x-1}{3} \Big) \;\Big|\; x \in \mathbf{R} \Big\}$. Јасна је и геометријска интерпретација ових закључака.

Међутим, у овом задатку постоји и додатни услов – решења се траже у скупу природних бројева. Како су коефицијенти система (1)-(2) рационални бројеви, после ослобађања од именилаца, добијамо једначину облика (3) у којој су коефицијенти a, b, c цели бројеви. Такве једначине су, као што је познато, касније назване диофантским (*Диофант*, 3. век н.е.).

Приметимо, на пример, да једначина $3x - 6y = 5$ у скупу $\mathbf{Z}$ нема решења (зашто?), док једначина $2x - 3y = 1$ има бесконачно много целобројних решења (x, y), при чему се сва она могу представити у облику $x = 3t - 1$, $y = 2t - 1$, где је t произвољан цео број.

У наредном одељку показујемо како се до резултата претходног типа долази у општем случају.

3. Линеарне диофантске једначине са две непознате

Најпре докажимо следеће помоћно тврђење.

Лема 1. *Ако је $a = bq + r$, онда је* НЗД$(a, b) =$ НЗД(b, r).

Доказ. Нека је d произвољан заједнички делилац бројева a и b. Тада из релације $a = bq + r$ следи да је он и делилац броја r, тј. заједнички делилац бројева b и r. Слично, ако је d произвољан заједнички делилац бројева b и r, из исте релације следи да је он и заједнички делилац бројева a и b. Дакле, скупови заједничких делилаца бројева a и b, односно бројева b и r, поклапају се. Зато су међусобно једнаки и њихови највећи елементи, дакле бројеви НЗД(a, b) и НЗД(b, r). ■

Како наћи највећи заједнички делилац целих бројева a и b? Очигледно је да питање дељивости не зависи од знака, па можемо a и b сматрати природним бројевима. На основу познатог става о дељењу с остатком у скупу целих бројева, може се исписати следећи низ једнакости који представља познати *Еуклидов алгоритам* (*Еуклид*, 4. век п.н.е):

$$\begin{aligned}
a &= bq_1 + r_1, && 0 \leqslant r_1 < b,\\
b &= r_1 q_2 + r_2, && 0 \leqslant r_2 < r_1,\\
r_1 &= r_2 q_3 + r_3, && 0 \leqslant r_3 < r_2,\\
&\dots && \dots\\
r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + r_n, && 0 \leqslant r_n < r_{n-1},\\
r_{n-1} &= r_n q_{n+1}.
\end{aligned}$$

Пошто бројеви r_k чине строго опадајући низ природних бројева, то ће се овај низ након коначног броја корака завршити, тј. доћи ћемо до једнакости облика $r_{n-1} = r_n q_{n+1}$, која говори о дељивости два узастопна остатка.

Теорема 1. *Последњи остатак r_n који је различит од нуле у претходном поступку представља највећи заједнички делилац бројева a и b.*

Доказ. Користећи лему 1 лако је констатовати да је задовољен следећи низ једнакости:

$$\text{НЗД}(a, b) = \text{НЗД}(b, r_1) = \text{НЗД}(r_1, r_2) = \cdots = \text{НЗД}(r_{n-2}, r_{n-1}) = \text{НЗД}(r_{n-1}, r_n).$$

Пошто $r_n \mid r_{n-1}$, то је НЗД$(r_{n-1}, r_n) = r_n$, па коначно добијамо да је НЗД$(a, b) = r_n$, што је и требало доказати. ■

Пример 1. $a = 918$, $b = 252$.

$918 = 252 \cdot 3 + 162$, $252 = 162 \cdot 1 + 90$, $162 = 90 \cdot 1 + 72$, $90 = 72 \cdot 1 + 18$, $72 = 18 \cdot 4$. Према томе, НЗД$\,(918, 252) = 18$. Притом је

$$\begin{aligned} 18 &= 90 - 72 = 90 - (162 - 90) = 2 \cdot 90 - 162 = 2(252 - 162) - 162 \\ &= 2 \cdot 252 - 3 \cdot 162 = 2 \cdot 252 - 3(918 - 3 \cdot 252) \\ &= 11 \cdot 252 - 3 \cdot 918. \quad \triangle \end{aligned}$$

Слично као у претходном примеру се показује да и у општем случају важи

Последица 1. *Ако су a, b произвољни цели бројеви и $d =$ НЗД$\,(a, b)$, онда постоје цели бројеви x_0, y_0 такви да је $ax_0 + by_0 = d$ и они се могу одредити коришћењем Еуклидовог алгоритма. Специјално, ако су a и b узајамно прости, онда постоје $x_0, y_0 \in \mathbf{Z}$ такви да је $ax_0 + by_0 = 1$.*

Посматрајмо сада једначину

$$ax + by = c, \tag{3}$$

где су a, b, c дати цели бројеви и НЗД$\,(a, b) = d$.

1° Ако број c није дељив са d, једначина не може имати целобројних решења (x, y) јер је лева страна сигурно дељива са d, а десна то није.

2° Ако је c дељиво са d, онда једначину можемо скратити са d, чиме она добија еквивалентан облик

$$a'x + b'y = c', \tag{3'}$$

где је $a' = \dfrac{c}{d}$, $b' = \dfrac{b}{d}$, $c' = \dfrac{c}{d}$ и НЗД$\,(a', b') = 1$. На основу последице 1 постоје цели бројеви x_0, y_0 такви да је $a'x_0 + b'y_0 = 1$. Тада је очигледно да једначина $(3')$ има решење (x_1, y_1), где је $x_1 = c'x_0$, $y_1 = c'y_0$. Но, у том случају једначина има бесконачно много решења.

Заиста, претпоставимо да је (u, v) ма који пар целих бројева за који је $a'u + b'v = c'$. Такође је $a'x_1 + b'y_1 = c'$. Према томе имамо да је $a'u + b'v = a'x_1 + b'y_1$, одакле је

$$a'(u - x_1) + b'(v - y_1) = 0.$$

Како је НЗД$\,(a', b') = 1$, имамо да је $u - x_1$ дељиво са b', што даје, након очигледних поступака,

$$u = x_1 + b't, \quad v = y_1 - a't, \quad \text{за неко } t \in \mathbf{Z}.$$

Из

$$a'u + b'v = a'\,(x_1 + b't) + b'\,(y_1 - a't) = a'x_1 + b'y_1 = c'$$

следи да добијени пар (u, v) за произвољно $t \in \mathbf{Z}$ задовољава једначину $(3')$.

Резимирајмо закључке до којих смо дошли.

Теорема 2. *Линеарна диофантска једначина $ax + by = c$ има решења ако и само ако $d \mid c$, где је $d =$ НЗД$\,(a, b)$. У том случају је опште решење једначине облика*

$$x = \frac{c}{d}\,x_0 + \frac{b}{d}\,t, \quad y = \frac{c}{d}\,y_0 - \frac{a}{d}\,t \qquad (t \in \mathbf{Z}),$$

где се посебно решење $(x_0.y_0)$ једначине $\dfrac{a}{d}\,x + \dfrac{b}{d}\,y = 1$ добија Еуклидовим алгоритмом. ■

Специјално, ако су бројеви a и b узајамно прости, тј. ако је НЗД$\,(a, b) = 1$, онда је сваки цео број c дељив са d па једначина $ax + by = c$ сигурно има решења.

Пример 2. Решити диофантску једначину $252x+918y=36$.

Решење. Скраћивањем са $18 =$ НЗД$(252,918)$ добијамо једначину $14x+51y=2$, где је НЗД$(14,51)=1$, па та једначина има решења. На основу примера 1 је $14\cdot 11-51\cdot 3=1$, одакле је $14\cdot 22-51\cdot 6=2$, тј. једно решење дате једначине је пар $(22,-6)$. На основу теореме 2, сва решења су дата са $x=22+51t$, $y=-6+14t$, $t\in\mathbf{Z}$. △

Пример 3. (Државно такмичење за 8. разред, 2018) Правоугаона таблица 29×41 попуњена је природним бројевима $1, 2, \dots, 29\cdot 41$ најпре тако што су у првом реду, почевши од доњег левог угла, редом записани бројеви $1, 2, \dots, 29$, у другом реду бројеви $30, 31, \dots, 58$ и тако даље до краја. Затим је иста таблица попуњена истим бројевима тако што су у првој колони, такође почевши од доњег левог угла, редом записани бројеви $1, 2, \dots, 41$, у другој колони бројеви 42, $43, \dots, 82$ и тако даље до краја. Колико има поља таблице у којима је при оба попуњавања био записан исти број?

$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$29\cdot 41$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$29(x-1)+1$	$29(x-1)+2$	$\dots$	$29(x-1)+y$	$\dots$	$29x$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
30	31	$\dots$	$\dots$	$\dots$	58
1	2	$\dots$	y	$\dots$	29

41	92	$\dots$	$41y$	$\dots$	$29\cdot 41$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x	$\dots$	$\dots$	$41(y-1)+x$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
2	43	$\dots$	$41(y-1)+2$	$\dots$	$\dots$
1	42	$\dots$	$41(y-1)+1$	$\dots$	$\dots$

Решење. Ако се неко поље таблице које задовољава постављени услов налази у x-том реду и y-тој колони, тада (и само тада) важи $29(x-1)+y=41(y-1)+x$. Сређивањем се добија еквивалентна диофантска једначина $10y-7x=3$. Њено очигледно решење је пар $(1,1)$, па је опште решење дато са $x=1+10t$, $y=1+7t$, $t\in\mathbf{Z}$. Решења која задовољавају услове $1\leqslant x\leqslant 41$, $1\leqslant y\leqslant 29$ добијају се за $t\in\{0,1,2,3,4\}$ и има их 5 (то су $(1,1)$, $(11,8)$, $(21,15)$, $(31,22)$, $(41,29)$). △

4. Решење дела (а) Архимедовог проблема

Ако се из система (1) (у Архимедовом проблему) елиминишу две непознате (нпр. z и t), добија се линеарна диофантска једначина

$$267x-371y=0$$

са две непознате. Њено решење се може изразити у облику $x=371\cdot u$, $y=267\cdot u$ за неки природан број u. Заменом у систем (1) добија се

$$x=2226\cdot k,\quad y=1602\cdot k,\quad z=1580\cdot k,\quad t=891\cdot k,$$

за неки природан број k.

Ако се ови изрази уврсте у систем (2) и постави услов да и x', y', z', t' морају бити цели бројеви, добија се да мора бити $k=4657\cdot\ell$ за неки природан број ℓ. Тада је

$$x=10\,366\,482\cdot\ell,\ \ y=7\,460\,514\cdot\ell,\ \ z=7\,358\,060\cdot\ell,\ \ t=4\,149\,387\cdot\ell,$$
$$x'=7\,206\,360\cdot\ell,\ \ y'=4\,893\,246\cdot\ell,\ \ z'=3\,515\,820\cdot\ell,\ \ t'=5\,439\,213\cdot\ell.$$

5. Питагорине тројке

Један од најједноставнијих примера нелинеарне диофантске једначине је

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Решења те једначине представљају такозване *Питагорине тројке* (Питагора, 6. век п.н.е). Одредићемо сва решења ове једначине у скупу природних бројева.

Јасно је да ако нека два од бројева x, y, z који задовољавају дату једначину имају заједнички делилац d (већи од 1), онда је и трећи од њих дељив са d. Зато ћемо даље претпостављати да су бројеви x, y и z узајамно прости у паровима (у противном можемо скратити једначину њиховим заједничким делиоцем d). Такво решење (x, y, z) дате једначине назовимо *примитивним решењем*. Јасно је да налажењем свих примитивних решења (x, y, z) налазимо и сва остала, јер су она облика $(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$, $\alpha \in \mathbf{N}$.

Докажимо да од бројева x и y један мора бити паран, а други непаран и да је z непаран број. Ако су x и y парни бројеви, онда и z мора бити паран, па се једначина може скратити. Ако су x и y непарни бројеви, онда је $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 1 + 1 = 2 \pmod 4$, што се лако проверава да је немогуће.

Нека је $x = 2\alpha$ паран, а y непаран број. Дата једначина може се написати у облику

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z - y)(z + y).$$

Оба чиниоца на десној страни су парни бројеви (представљају разлику и збир два непарна броја), па су бројеви

$$u = \frac{z + y}{2}, \quad v = \frac{z - y}{2}$$

цели. Добијамо да је $x^2 = 4\alpha^2 = 4uv$, па је $\alpha^2 = uv$. Лако је доказати да бројеви u и v немају заједничких делилаца, па следи да они морају бити квадрати целих бројева, рецимо

$$u = m^2, \quad v = n^2,$$

при чему m и n немају заједничких делилаца и различите су парности. Добијамо да је:

$$\begin{aligned} x &= 2\alpha = 2mn, \\ y &= u - v = m^2 - n^2, \\ z &= u + v = m^2 + n^2 \end{aligned} \tag{4}$$

$$(m, n \in \mathbf{N},\ \text{НЗД}\,(m, n) = 1,\ m > n \text{ и } m,\ n \text{ су различите парности}).$$

Није тешко проверити да бројеви (4) заиста задовољавају једначину $x^2 + y^2 = z^2$ и да су при том узајамно прости у паровима. Према томе важи

Теорема 4. *Да би уређена тројка (x, y, z) представљала примитивно решење једначине $x^2 + y^2 = z^2$ у скупу природних бројева, неопходно је и довољно да се x, y и z изражавају у облику (4) или*

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2$$

$$(m, n \in \mathbf{N},\ \text{НЗД}\,(m, n) = 1,\ m > n \text{ и } m,\ n \text{ су различите парности}).$$

Наводимо све примитивне Питагорине тројке облика (4) код којих је $m \leqslant 9$.

m	n	x	y	z	m	n	x	y	z	m	n	x	y	z
2	1	4	3	5	6	1	12	35	37	8	3	48	55	73
3	2	12	5	13	6	5	60	11	61	8	5	80	39	89
4	1	8	15	17	7	2	28	45	53	8	7	112	15	113
4	3	24	7	25	7	4	56	33	65	9	2	36	77	85
5	2	20	21	29	7	6	84	13	85	9	4	72	65	97
5	4	40	9	41	8	1	16	63	65	9	8	144	17	145

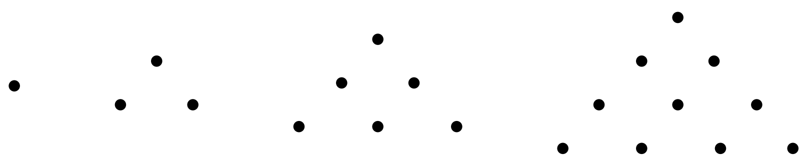
Пример 4. Ако је полупречник круга непаран прост број, тада се око тог круга могу описати тачно два неподударна примитивна Питагорина троугла. Доказати.

Решење. Ако је $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$ примитивна Питагорина тројка, полупречник уписаног круга одговарајућег троугла је $r = \frac{1}{2}(a + b - c) = n(m - n)$. Ако је то непаран прост број p, мора бити: 1° $n = 1$, $m = p + 1$, $a = p(p + 2)$, $b = 2(p + 1)$, $c = p^2 + 2p + 2$ или 2° $n = p$, $m = p + 1$, $a = 2p + 1$, $b = 2p(p + 1)$, $c = 2p^2 + 2p + 1$. $\triangle$

6. Део (б) Архимедовог проблема

(б) *Одредити оно решење Архимедовог проблема код којег је $x + y$ квадратни, а $z + t$ троугаони број.*

Број облика n^2 је „квадратни“, јер се n^2 тачака може распоредити да образују један квадрат. Ако се неких p тачака може распоредити тако да образује једнакостранични троугао, број p је „троугаони“.



1 3 6 10

На пример, троугаони су бројеви (слика)

$$\begin{aligned} T_1 &= 1, \\ T_2 &= 1 + 2 = 3, \\ T_3 &= 1 + 2 + 3 = 6, \\ T_4 &= 1 + 2 + 3 + 4 = 10. \end{aligned}$$

Уопште, сваки троугаони број се може приказати у облику $T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$. Познатим поступком, претходни збир се може изразити као

$$T_n = \frac{1}{2}n(n + 1).$$

На питање како препознати да ли је неки број троугаони или не, одговара следеће тврђење.

Теорема 5. *Природни број p је троугаони ако и само ако је $8p + 1$ квадратни број.*

Доказ. Претпоставимо да је неки број p троугаони, тј. да је за неко n, $p = T_n = \frac{1}{2}n(n + 1)$. Тада је

$$8p + 1 = 8 \cdot \frac{1}{2}n(n + 1) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2,$$

дакле $8p + 1$ је квадратни број.

Обратно, ако је $8p + 1$ квадратни број, он свакако мора бити квадрат неког непарног броја, тј. за неко n је

$$8p + 1 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1.$$

Одатле је

$$p = \frac{4n^2 + 4n}{8} = \frac{n(n + 1)}{2} = T_n,$$

тј. p је троугаони број. ■

Треба, дакле, одредити природан број ℓ (што је могуће мањи) тако да број

$$x + y = 4657 \cdot 3828 \cdot \ell \tag{5}$$

буде потпун квадрат, а да број

$$z + t = 4657 \cdot 2471 \cdot \ell \tag{6}$$

буде троугаони.

Како је $4657 \cdot 3828 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657$ (број 4657 је прост), услов (5) ће бити испуњен ако је $\ell = am^2$, где је $a = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657$, а m је цео број.

Да би број $z + t$ био троугаони, тј. да би $8(z + t) + 1$ био потпун квадрат (нпр. једнак n^2), мора бити, на основу (6),

$$n^2 = 8(z + t) + 1 = 8 \cdot 4657 \cdot 2471 \cdot am^2 + 1,$$

па тако за налажење бројева m и n добијамо нову диофантску једначину

$$n^2 = dm^2 + 1, \tag{7}$$

где је

$$d = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 \cdot (2 \cdot 4657)^2 = 410\,286\,423\,278\,424.$$

7. Историјат Пелове једначине

Једначина (7) је вероватно најстарији познати пример тзв. *Пелове једначине*. Методе решавања таквих једначина развијали су индијски математичари *Брахмагупта* (Brahmagupta, 598–око 660) и *Баскара* (Bhaskara, 1114–1185).

У модерну математику једначине оваквог типа увео је *Ферма* (P. Fermat, 1601–1665), тако што је у једном писму енглеским математичарима упутио „изазов“ решавања поменутог проблема. Он се у том писму најпре „жали“ како се међу математичарима аритметичким проблемима поклања премало пажње (већ се решавају претежно геометријски, па се и аритметика третира геометријски), а затим задаје да се докаже следеће тврђење.

> *За произвољан дати број који није квадрат постоји бесконачно много квадрата, таквих да ако се такав квадрат помножи датим бројем и производу дода јединица, резултат је поново квадрат.*

Другим речима, он тврди да ако природан број d није потпун квадрат, тада једначина

$$dy^2 + 1 = x^2$$

има бесконачно много целобројних решења.

Проблем су покушали да реше енглески математичари *Браункер* (W. Brouncker, 1620–1684) и *Уолис* (J. Wallis, 1616–1703). У првој варијанти они су „превидели“ услов да се решење тражи у целим бројевима, већ су једначину решили за рационалне x и y:

$$x = \frac{dn^2 + m^2}{dn^2 - m^2}, \quad y = \frac{2mn}{dn^2 - m^2}, \qquad m, n \in \mathbf{N}.$$

Ферма је одговорио да он никад не би поставио тако смешно лак задатак. Енглези су се жалили да он накнадно мења услове задатка, али су ипак после извесног времена послали ново решење, које је у суштини било исто као и решење Баскаре. Међутим, Ферма ни овај пут није био задовољан, јер је тврдио (с правом) да понуђени метод решавања додуше доводи до решења, али само ако се унапред претпостави да решење постоји. Притом је тврдио да он зна доказ егзистенције решења и да га је извео методом „бесконачног смањивања“ који је користио и у неким другим ситуацијама. Међутим, тај доказ, као ни већину других својих доказа никад није објавио.

Ојлер (L. Euler, 1707–1783) је, проучавајући Фермаову заоставштину, наишао и на преписку везану за наведени проблем и заинтересовао се за њега. Из неког разлога он је погрешно сматрао да је у решавању учествовао један други енглески математичар, *Пел* (J. Pell, 1610–1685), те је једначину назвао по њему. С обзиром на Ојлеров ауторитет, тај назив се задржао и сви каснији покушаји да се једначини да коректнији назив нису успели. Тако ћемо се и ми држати традиционалне варијанте имена Пелове једначине.

Сам Ојлер је у својим радовима описао алгоритам за налажење решења Пелове једначине, али чак ни он није навео доказ да тај алгоритам увек доводи до решења. Први доказ је 1768. године објавио *Лагранж* (J. L. Lagrange, 1736–1813). Доказ је изведен коришћењем верижних разломака и тај метод је и до данас остао најпознатији. Постоје, међутим, и други докази, од којих ћемо један описати овде.

8. Решавање Пелове једначине

Посматрајмо, дакле, једначину

$$x^2 - dy^2 = 1, \qquad d \text{ није потпун квадрат,} \tag{8}$$

чија решења тражимо у скупу природних бројева. Наведимо најпре нека једноставна својства ове једначине.

Услов да је d различито од потпуног квадрата је очигледно неопходан да би једначина имала решења.

Пример 5. Наћи бар три решења једначине $x^2 - 2y^2 = 1$.

Решење. Очигледно решење је $(x, y) = (3, 2)$.

$$3^2 - 2\cdot 2^2 = 1, \quad (3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}) = 1, \quad (3-2\sqrt{2})^2(3+2\sqrt{2})^2 = 1,$$
$$(17-12\sqrt{2})(17+12\sqrt{2}) = 1, \quad 17^2 - 2\cdot 12^2 = 1.$$

Друго решење је $(17, 12)$. Слично се кубирањем добија решење $(99, 70)$. △

У општем случају, препишимо једначину (8) у облику

$$(x - y\sqrt{d})(x + y\sqrt{d}) = 1.$$

Претпоставимо, даље, да знамо једно решење (x_1, y_1) једначине, тј. да је

$$(x_1 - y_1\sqrt{d})(x_1 + y_1\sqrt{d}) = 1.$$

Степеновањем са n тада добијамо

$$(x_n - y_n\sqrt{d})(x_n + y_n\sqrt{d}) = 1,$$

за неке природне бројеве x_n и y_n. Дакле, дата једначина под наведеним претпоставкама (дакле, да d није потпун квадрат и да бар једно решење постоји) има бесконачно много решења (x_n, y_n) и основни проблем је налажење једног од њих. Најмање од таквих решења (прецизније, оно решење код којег је $x_n + y_n\sqrt{d}$ најмање) назива се *основним решењем.* Оно што није сасвим тривијално је да се докаже да ако је (x_e, y_e) основно решење, тада су претходним поступком описана *сва* решења Пелове једначине. Доказ те чињенице даћемо на крају овог одељка.

Када је основно решење (x_e, y_e) познато, одређивање осталих решења (x_n, y_n) може се извршити било описаним поступком степеновања, било формирањем рекурентне везе између два узастопна решења. Наиме, из

$$\begin{aligned} x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{d} &= (x_n + y_n\sqrt{d})(x_e + y_e\sqrt{d}) \\ &= (x_e x_n + y_e d y_n) + (x_e y_n + y_e x_n)\sqrt{d} \end{aligned}$$

закључујемо да мора да важи

$$x_{n+1} = x_e x_n + y_e d y_n \\ y_{n+1} = x_e y_n + y_e x_n. \tag{9}$$

Дакле, низови (x_n) и (y_n) задовољавају систем диференцних једначина (9), уз почетне услове $x_0 = 1$, $y_0 = 0$. Из овог система низови (x_n) и (y_n) се одређују рекурентно.

Пример 6. Нека је $d = 14$, тј. посматрајмо једначину

$$x^2 - 14y^2 = 1.$$

Пробањем се налази њено основно решење $x_e = 15$, $y_e = 4$ (заиста, $15^2 - 14 \cdot 4^2 = 1$). Квадрирање даје $(15 + 4\sqrt{14})^2 = 449 + 120\sqrt{14}$, па је $x_2 = 449$, $y_2 = 120$. Даље се може наставити степеновањем, међутим једноставније је искористити систем (9). Тако је

$$\begin{aligned} x_2 &= 15^2 + 14 \cdot 4^2 = 449, & x_3 &= 15 \cdot 449 + 4 \cdot 14 \cdot 120 = 13455, & &\dots \\ y_2 &= 2 \cdot 15 \cdot 4 = 120, & y_3 &= 15 \cdot 120 + 4 \cdot 449 = 3596, & &\dots \end{aligned}$$

Даљим рачуном се може добити

n	x_n	y_n
1	15	4
2	449	120
3	13455	3596
4	403201	107760
5	12082575	3229204
6	362074049	96768360

итд. Видимо да решења врло брзо расту. △

Пример 7. (Мала олимпијада, 1993) За дати природан број n одредити један пар (x, y) природних бројева за које важи $x^2 - 2y^2 = 1993^n$.

Решење. Приметимо да је $1993 = 45^2 - 2 \cdot 4^2 = (45 - 4\sqrt{2})(45 + 4\sqrt{2})$. Степеновањем ове релације са n добија се да је $1993^n = (x - y\sqrt{2})(x + y\sqrt{2}) = x^2 - 2y^2$ за

$$\begin{aligned} x &= 45^n + \binom{n}{2} 45^{n-2} (4\sqrt{2})^2 + \binom{n}{4} 45^{n-4} (4\sqrt{2})^4 + \cdots, \\ y &= \binom{n}{1} 45^{n-1} \cdot 4 + \binom{n}{3} 45^{n-3} \cdot 4^3 \cdot 2 + \cdots. \quad \triangle \end{aligned}$$

Вратимо се сада основном проблему налажења најмањег решења. У неким специјалним случајевима то се може учинити једноставно.

Пример 8. (а) Ако је $d = a^2 - 1$, $a \in \mathbf{N}$, основно решење једначине $x^2 - dy^2 = 1$ је $(a, 1)$.

(б) Ако је $d = a^2 + 1$, $a \in \mathbf{N}$, основно решење једначине $x^2 - dy^2 = 1$ је $(2a^2 + 1, 2a)$. △

Наводимо таблицу основних решења Пелове једначине за вредности коефицијента $d \leqslant 33$.

d	x_e	y_e	d	x_e	y_e	d	x_e	y_e	d	x_e	y_e
2	3	2	11	10	3	19	170	39	27	26	5
3	2	1	12	7	2	20	9	2	28	127	24
5	9	4	13	649	180	21	55	12	29	9801	1820
6	5	2	14	15	4	22	197	42	30	11	2
7	8	3	15	4	1	23	24	5	31	1520	273
8	3	1	17	33	8	24	5	1	32	17	3
10	19	6	18	17	4	26	51	10	33	23	4

За неке, релативно мале, вредности коефицијента d, основно решење Пелове једначине је врло велико. На пример, основно решење једначине $x^2 - 61y^2 = 1$ је $(x_e, y_e) = (1766319049, 226153980)$!

У општем случају, међутим, као што је већ речено, није унапред јасно чак ни да ли такво решење постоји. Овде ћемо доказ егзистенције извести коришћењем *Дирихлеове теореме о диофантским апроксимацијама.*

Теорема 6. (P. G. L Dirichlet, 1805–1859) *Нека је α произвољан реалан број и $t \in \mathbf{N}$. Тада постоји рационалан број p/q, такав да важи*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qt} \quad \text{и} \quad q \leqslant t.$$

Доказ. Посматрајмо $t+1$ бројева $\alpha x - [\alpha x]$ за $x = 0, 1, \dots, t$. Сви они припадају интервалу $[0, 1)$. Поделимо тај интервал на t интервала

$$\Big[0, \frac{1}{t}\Big), \quad \Big[\frac{1}{t}, \frac{2}{t}\Big), \quad \dots \quad , \quad \Big[\frac{t-1}{t}, 1\Big).$$

На основу Дирихлеовог принципа, бар један од тих интервала садржи два од датих бројева; нека су то бројеви $\alpha x_1 - [\alpha x_1]$ и $\alpha x_2 - [\alpha x_2]$ и нека је, на пример, $x_2 > x_1$. Тада је

$$\frac{1}{t} > \big|(\alpha x_2 - [\alpha x_2]) - (\alpha x_1 - [\alpha x_1])\big| = \big|\alpha(x_2 - x_1) - ([\alpha x_2] - [\alpha x_1])\big|.$$

Означимо $q = x_2 - x_1$, $[\alpha x_2] - [\alpha x_1] = p$ и важиће $0 < q \leqslant t$ и

$$|\alpha q - p| < \frac{1}{t}, \quad \text{тј.} \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{tq}. \quad \blacksquare$$

Користићемо још и следеће помоћно тврђење.

Лема 2. *Ако су за неко $k \in \mathbf{Z}$ парови (x_1, y_1) и (x_2, y_2) решења једначине $x^2 - dy^2 = k$, онда је условом*

$$X + Y\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})(x_2 \pm y_2\sqrt{d}), \qquad X, Y \in \mathbf{Z}$$

(узима се произвољан знак у последњој загради) одређено решење једначине $X^2 - dY^2 = k^2$.

Доказ. Следи из

$$\begin{aligned} X^2 - dY^2 &= (X + Y\sqrt{d})(X - Y\sqrt{d}) \\ &= (x_1 + y_1\sqrt{d})(x_2 \pm y_2\sqrt{d})(x_1 - y_1\sqrt{d})(x_2 \mp y_2\sqrt{d}) \\ &= (x_1^2 - dy_1^2)(x_2^2 - dy_2^2) = k^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Теорема 7. *За произвољан природан број d који није потпун квадрат, једначина $x^2 - dy^2 = 1$ има решења.*

Доказ. Нека је фиксиран природан број $t_1 > 1$. На основу Дирихлеове теореме постоје природни бројеви p_1 и q_1 за које важи

$$|q_1\sqrt{d} - p_1| < \frac{1}{t_1}, \qquad q_1 \leqslant t_1. \tag{10}$$

Тада је $p_1 < q_1\sqrt{d} + \dfrac{1}{t_1} < q_1\sqrt{d} + 1$, па је

$$q_1\sqrt{d} + p_1 < 2q_1\sqrt{d} + 1. \tag{11}$$

Множећи леве и десне стране неједнакости (10) и (11), с обзиром да је $q_1 \leqslant t_1$, добијамо да је

$$|p_1^2 - q_1^2 d| < 2\sqrt{d} + 1. \tag{12}$$

Изаберимо сада природан број t_2 тако да важи

$$t_2 > t_1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{t_2} < |q_1\sqrt{d} - p_1|.$$

На претходно описани начин нађимо нови пар природних бројева (p_2, q_2) за које важи $|p_2^2 - q_2^2 d| < 2\sqrt{d} + 1$. Затим наставимо овај поступак налазећи низ парова (p_n, q_n) који задовољавају неједначину типа (12).

Посматрајмо вредности $p_n^2 - q_n^2 d$ за све $n \in \mathbf{N}$. Све оне се налазе у интервалу $(-2\sqrt{d} - 1, 2\sqrt{d} + 1)$, па како тај интервал садржи коначно много целих бројева, то постоји цео број $k \neq 0$ у њему такав да је

$$p_n^2 - q_n^2 d = k$$

за бесконачно много вредности n. Међу тако изабраним паровима (p_n, q_n) сигурно ће постојати два, означимо их са (x_1, y_1) и (x_2, y_2), за које важи $x_1 \equiv x_2 \pmod{|k|}$ и $y_1 \equiv y_2 \pmod{|k|}$. Означимо са x_0 и y_0 целе бројеве за које важи

$$x_0 + y_0\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})(x_2 - y_2\sqrt{d}).$$

На основу леме 2 важи

$$x_0^2 - y_0^2 d = k^2. \tag{13}$$

Притом је

$$\begin{aligned} x_0 &= x_1x_2 - y_1y_2d \equiv x_1^2 - y_1^2 d \equiv 0 \pmod{|k|}, \\ y_0 &= -x_1y_2 + x_2y_1 \equiv -x_1y_1 + x_1y_1 \equiv 0 \pmod{|k|}. \end{aligned}$$

Због тога је $x_0 = x|k|$, $y_0 = y|k|$ за неке целе бројеве x и y, за које, заменом у (13) добијамо да важи $x^2 - dy^2 = 1$. ■

Докажимо још, на крају, раније најављено тврђење према којем су напред описаним рекурентним поступком одређена сва решења Пелове једначине.

Теорема 8. *Нека је (x_e, y_e) основно решење једначине $x^2 - dy^2 = 1$ (d није потпун квадрат), тј. нека је то решење за које је израз $x + y\sqrt{d}$ најмањи. Тада је свако решење (x, y) те једначине одређено условом*

$$x + y\sqrt{d} = (x_e + y_e\sqrt{d})^n, \qquad x, y \in \mathbf{N}, \tag{14}$$

за неко $n \in \mathbf{N}$.

Доказ. Да је пар (x, y) одређен условом (14) решење дате једначине, доказали смо раније. Претпоставимо, супротно тврђењу, да постоји решење (x, y) те једначине за које не важи услов (14). Тада за неко $n \in \mathbf{N}$ важи

$$(x_e + y_e\sqrt{d})^n < x + y\sqrt{d} < (x_e + y_e\sqrt{d})^{n+1}.$$

Узимајући у обзир да је $(x_e + y_e\sqrt{d})^{-1} = x_e - y_e\sqrt{d}$, делећи претходну двоструку неједнакост са $(x_e + y_e\sqrt{d})^n$, добијамо

$$1 < X + Y\sqrt{d} < x_e + y_e\sqrt{d}, \tag{15}$$

где су X и Y цели бројеви одређени једнакошћу

$$X + Y\sqrt{d} = \frac{x + y\sqrt{d}}{(x_e + y_e\sqrt{d})^n} = (x + y\sqrt{d})(x_e - y_e\sqrt{d})^n.$$

На основу леме 2, међутим, пар (X, Y) задовољава једначину $X^2 - dY^2 = 1$. Притом су бројеви X и Y позитивни, јер из претходне једнакости следи да је $0 < X - Y\sqrt{d} < 1$, а из (15) је

$X + Y\sqrt{d} > 1$. На тај начин је (X, Y) решење дате Пелове једначине у скупу природних бројева за које је израз $X + Y\sqrt{d}$ мањи од $x_e + y_e\sqrt{d}$, што противречи минималности избора решења (x_e, y_e). Добијена контрадикција доказује теорему. ∎

Није неочекивано да општа формула у затвореном облику за основно решење не постоји.

Пример 9. Одредити све природне бројеве који су истовремено квадратни и троугаони.

Решење. Једначина $\dfrac{x(x+1)}{2} = y^2$ се може записати у облику

$$(2x+1)^2 - 8y^2 = 1.$$

Добијена Пелова једначина ($d = 8$) има основно решење $(3, 1)$ (када је $x_1 = y_1 = 1$), а опште решење се може записати у облику

$$2x_n + 1 = \frac{1}{2}\lfloor(3+\sqrt{8})^n + (3-\sqrt{8})^n\rfloor, \quad y_n = \frac{1}{2\sqrt{8}}\lfloor(3+\sqrt{8})^n - (3-\sqrt{8})^n\rfloor,$$

па је

$$2x_n + 1 = \frac{1}{2}\lfloor(1+\sqrt{2})^{2n} + (1-\sqrt{2})^{2n}\rfloor$$

и

$$x_n = \begin{cases} \left\lfloor \dfrac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2} \right\rfloor^2, & \text{за } n \text{ непарно,} \\ \left\lfloor \dfrac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2} \right\rfloor^2, & \text{за } n \text{ парно.} \end{cases} \qquad \triangle$$

9. Коначно решење Архимедовог проблема

С тачке гледишта теоријског математичара, када се докаже да неки проблем има решење, и још се нађе алгоритам како се до тог решења долази, проблем престаје да буде интересантан. Међутим, у случају Архимедовог проблема има још много изазова које поставља решавање Пелове једначине, а неки од њих би могли бити интересантни и „најтврђим“ теоретичарима.

Као што смо видели, за решавање Архимедовог проблема, тј. за налажење бројева m и n добијамо Пелову једначину

$$n^2 = dm^2 + 1,$$

где је

$$d = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 \cdot (2 \cdot 4657)^2 = 410\,286\,423\,278\,424.$$

Ако се позовемо на Лагранжов резултат, знамо да ова једначина има бесконачно много решења и да се сва она могу лако наћи ако се прво пронађе најмање од њих. Али како доћи до тог најмањег решења и колико је оно? Скоро је сигурно да ни сам Архимед то није знао.

Наиме, после Лесинговог открића, многи математичари су, знајући и Лагранжов метод верижних разломака, покушавали да то решење пронађу. После више неуспешних покушаја тек је 1880. године немачки математичар *Амтор* (A. Amthor) успео да докаже да најмање решење (тачније, најмањи укупни број говеда), представљено у декадном запису има

206 545 цифара!

Амтор је покушао и да нађе бар неке од тих цифара, али је већ четврта била погрешна.

Тачан запис овог најмањег решења је нађен тек у ери рачунара. У раду [2] је 1980. године објављено то решење које у оригиналу заузима 47 страница компјутерског листинга. Наводимо, према чланку [3] неке од цифара:

$$77602714 \ldots 237983357 \ldots 55081800,$$

где свака од шест тачака замењује 34420 изостављених цифара.

И на крају, један шаљиви коментар. Кажу да су се неки математичари почетком XIX века „забринули“ да ли је толики број говеда могао да стане на острво Сицилију. Лесинг је на то одговорио: „Она су припадала богу Сунца, зар не? Ако је он неки бог, ваљда се некако потрудио да их тамо смести“.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Мићић, З. Каделбург, Д. Ђукић: *Увод у теорију бројева*, 4. издање, Друштво математичара Србије, Београд, 2013.
2. H. L. Nelson, *A solution to Archimedes' cattle problem*, Journal of Recreational Mathematics **13**, 3 (1980–81), 162–176.
3. H. W. Lenstra Jr., *Solving the Pell equation*, Notices of the American Mathematical Society **49**, 2 (2002), 182–192.
4. J. R. Goldman, *The Queen of Mathematics. A Historically Motivated Guide to Number Theory*, A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts 1998.