О ПОВРШИНИ МНОГОУГЛА У КООРДИНАТНОЈ РАВНИ

Ђурић Жарко
улица Париске комуне 14-2/18, Врање
mail: zarkocr@gmail.com

САДРЖАЈ

УВОД

Ако је у равни Оху дат троугао $A_1A_2A_3$ одређен координатама својих темена $A_1(x_{1,}y_1)$, $A_2(x_{2,}y_2)$, $A_3(x_{3,}y_3)$ онда је површина тог троугла одређена формулом

а) $\boldsymbol{P}= \frac{1}{2}\ |\boldsymbol{x_1}(\boldsymbol{y_2}-\boldsymbol{y_3})+\mathbf{x_2}(\boldsymbol{y_3}-\boldsymbol{y_1})+\mathbf{x_3}(\boldsymbol{y_1}-\mathbf{y_2})|$ односно

б) $\boldsymbol{P} = \frac{1}{2}|\mathbf{y_1}(\mathbf{x_2}-\mathbf{x_3})+\mathbf{y_2}(\mathbf{x_3}-\mathbf{x_1})+\mathbf{y_3}(\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2})|$

Ако треба израчунати површину многоугла који је дат са координатама својих темена,онда тај многоугао делимо на троуглове и површину многоугла добијамо као збир површина тих троуглова.

Поставља се питање да ли постоји формула помоћу које бисмо могли израчунати површину многоугла, не делећи тај многоугао на троуглове. Одговор је потврдан.

ПОВРШИНА ТРОУГЛА

Нека је у равни Оху дат троугао $A_1A_2A_3$ одређен координатама својих темена, $A_1(x_{1,}y_1)$ $A_2(x_{2,}y_2)$, $A_3(x_{3,}y_3)$. Ако овај троугао посматрамо у координатном систему у простору онда тачке $A_1\,A_2,A_3$ имају координате $A_1(x_1,y_1,0)$, $A_2(x_2,y_2,0)$, $A_3(x_3,y_3,0)$. Нека је $2\vec{P} = \overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}$. Интензитет овог векторског производа једнак је по дефиницији површини паралелограма конструисаног над векторима $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$. Како је: $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2\text{-}x_1,y_2\text{-}y_1,0)$, $\overrightarrow{A_1A_3}(x_3\text{-}x_1,y_3\text{-}y_1,0)$ то је

$2\vec{P}=\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=(\,(x_2\text{-}x_1)\vec{\imath}+(y_2\text{-}y_1)\vec{\jmath}+0\cdot\vec{k}\,)\times(\,(x_3\text{-}x_1)\vec{\imath}+(y_3\text{-}y_1)\vec{\jmath}+0\cdot\vec{k}\,)$

$2\vec{P} = \big(x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\big)\vec{k}$, односно $2\vec{P} = -\big(y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2)\big)\vec{k}$. Па је $2|\vec{P}| = \left|\big(x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\big)\right|$, односно $2|\vec{P}| = |y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2)|$.

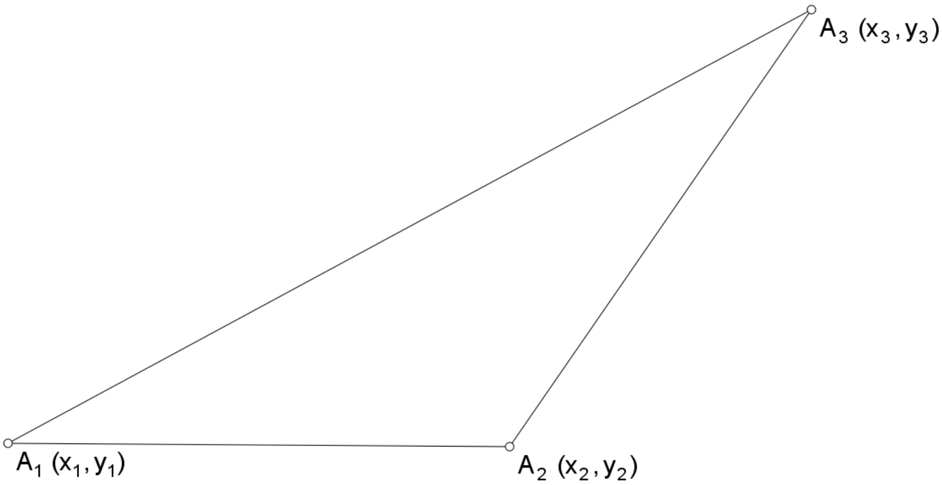
Означимо са P површину троугла то је $P=\frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$,

односно $P=\frac{1}{2}\left|y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)-y_3(x_1-x_2)\right|$.

У овим посматраним формулама видимо да се јавља апсолутна вредност. То значи да израз под ознаком апсолутно може бити некада позитиван а некада негативан. Од чега то зависи?

Докажимо следеће тврђење:
Нека је у равни Оху дат троугао $A_1A_2A_3$ одређен координатама својих темена $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$, $A_3(x_3,y_3)$, нека је троугао са теменима A_1, A_2 и A_3 тим редом позитивно оријентисан и нека је $\boldsymbol{P_3}=\frac{1}{2}\,(\mathbf{x_1(y_2\text{-}y_3)+x_2(y_3\text{-}y_1)+x_3(y_1\text{-}y_2)})$, односно

$\boldsymbol{P_3}=\frac{1}{2}\left(-\left(\boldsymbol{y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2)}\right)\right)$ (Опрез, P_3 не означава површину троугла већ наведени израз), Тада је
$\left(x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right)>0$, или $-(y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2))>0$, односно $P_3>0$
Уколико је наведени троугао $A_1A_2A_3$ негативно оријентисан, тада $\left(x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right)<0$, или $-(y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2))<0$ односно $P_3<0$.



Слика 1

Доказ:
Нека је $A_1A_2A_3$ позитивно оријентисан троугао (Слика 1) , тада вектори $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, и $2\vec{P}$ тим редом чине десни систем вектора, па је израз $\left(x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right)$ уз $\vec{k}$ позитиван тј. $P_3>0$ (јер је $2\vec{P}$ истог смера као z - оса), па P_3 представља површину посматраног троугла.
Израз $-(y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2))$ је еквивалентан претходном изразу.
Уколико је наведени троугао негативно оријентисан,тада вектор $2\vec{P}$ има смер супротан вектору $\vec{k}$. То значи да је израз $\left(x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right)<0$, а

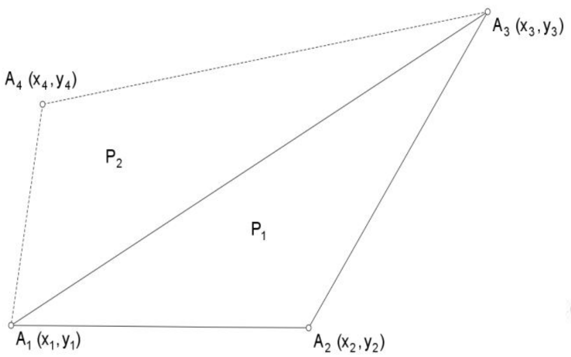
по апсолутној вредности једнак двострукој вредности површине наведеног троугла тј. $P_3<0$. Израз
$-(y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2))$ је еквивалентан претходном изразу.

Једнакост $\boldsymbol{P_3} = \frac{1}{2}(\mathbf{x_1(y_2\text{-}y_3) + x_2(y_3\text{-}y_1) + x_3(y_1\text{-}y_2)})$ се може написати и облику

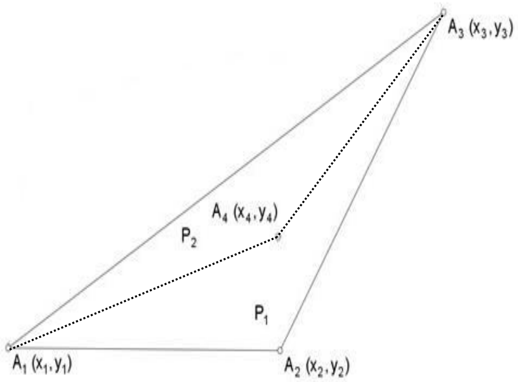
$\boldsymbol{P_3} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} x_k(y_{k+1} - y_{k-1})$, **где је:** $y_0 = y_3$ **и** $y_4 = y_1$, или

$\boldsymbol{P_3} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} y_k(x_{k+1} - x_{k-1})$, **где је:** $x_0 = x_3$ **и** $x_4 = x_1$

ПОВРШИНА МНОГОУГЛА



Слика 2а



Слика 2б

Нека је $\Delta A_1A_2A_3$ позитивно оријентисан. Узмимо произвољну тачку A_4, различиту од тачака A_1, A_2, A_3 (Слика 2а, Слика 2б). Тачка A_4 може бити ван троугла $\Delta A_1A_2A_3$, или унутар њега. Њих можемо тако означити да четвороугао $A_1A_2A_3A_4$ буде позитивно оријентисан.

Посматрајмо троуглове $\Delta A_1A_2A_3$ и $\Delta A_3A_4A_1$.Нека су: $P_1=\frac{1}{2}(x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2))$ и $P_2=\frac{1}{2}(x_3(y_4-y_1)+x_4(y_1-y_3)+x_1(y_3-y_4))$ и $P_4 = P_1 + P_2$

У првом случају су $\Delta A_1A_2A_3$ и $\Delta A_3A_4A_1$ позитивно оријентисани (Слика 2а), то су
$P_1=\frac{1}{2}(x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2))$ и $P_2=\frac{1}{2}(x_3(y_4-y_1)+x_4(y_1-y_3)+x_1(y_3-y_4))$
позитивни изрази, па P_1 и P_2 представљају површине наведених троуглова. Дакле, површина четвороугла $A_1A_2A_3A_4$ је

$P_1+P_2=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)] + \frac{1}{2}[x_3(y_4-y_1)+x_4(y_1-y_3)+x_1(y_3-y_4)]=$

$\frac{1}{2}(x_1(y_2-y_4)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_4-y_2)+x_4(y_1-y_3)) = P_4$

Ако је тачка A_4 унутар троугла, онда је $\Delta A_1A_2A_3$ позитивно оријентисан, а $\Delta A_3A_4A_1$ негативно оријентисан (Слика 2б), а то значи да је P_1 позитиван израз и P_2 негативан. Одатле произилази да је $P_1+P_2 = P_4$ па долазимо до исте формуле.
Уколико је четвороугао негативно оријентисан, онда је P_4 негативан број, а по апсолутној вредности једнак површини тог четвороугла.

Дакле $P_4=\frac{1}{2}(x_1(y_2-y_4)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_4-y_2)+x_4(y_1-y_3))$, или другачије записано

$\boldsymbol{P_4}= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4} x_k(y_{k+1}-y_{k-1})$ **где је:** $y_0 = y_4$ **и** $y_5 = y_1$, односно

$\boldsymbol{P_4}= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4} y_k(x_{k+1}-x_{k-1})$ **где је:** $x_0 = x_4$ **и** $x_5 = x_1$.

Нека је P површина четвороугла. Из претходног следи:

$\boldsymbol{P} = \frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{4} x_k(y_{k+1}-y_{k-1})\right|$ **где је:** $y_0 = y_4$ **и** $y_5 = y_1$, или

$\boldsymbol{P} = \frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{4} y_k(x_{k+1}-x_{k-1})\right|$ **где је:** $x_0 = x_4$ **и** $x_5 = x_1$

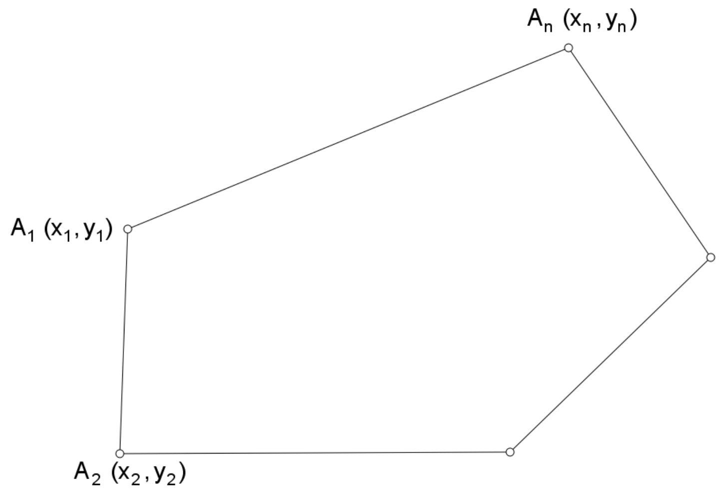
Тврђење:

Нека је дат позитивно оријентисан многоугао $A_1A_2...A_n$ са координатама $A_i(x_i,y_i)$, $i=1…n$.За дати многоугао показаћемо да важе следеће формуле:

(1) $\boldsymbol{P_n} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k(y_{k+1}-y_{k-1})$ **где је:** $y_0 = y_n$ **и** $y_{n+1} = y_1$,или

(2) $\boldsymbol{P_n} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} y_k(x_{k+1}-x_{k-1})$ **где је:** $x_0 = x_n$ **и** $x_{n+1} = x_1$. где P_n представља површину наведеног многоугла.

Уколико је многоугао $A_1A_2\cdots A_n$ негативно оријентисан тада је P_n негативан број, који је по апсолутној вредности једнак површини многоугла $A_1A_2\cdots A_n$.



Слика 3

Доказ:
Показано је да за позитивно оријентисан троугао важи формула:

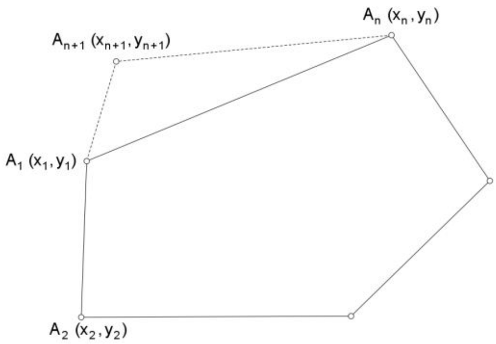
$P_3 = \frac{1}{2}\left(x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right)$, што је посебан случај формуле

$P_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k(y_{k+1} - y_{k-1})$ где је: $y_0 = y_n$ и $y_{n+1} = y_1$ за n=3.

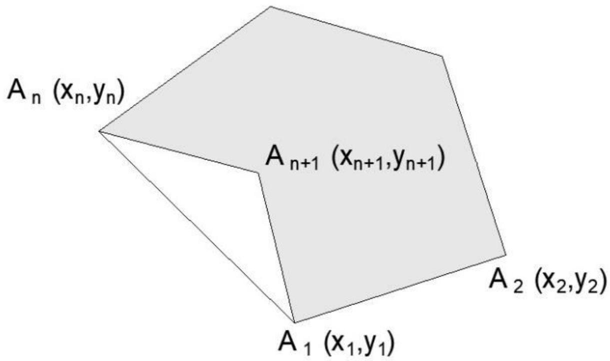
Претпоставимо да за неко n важи формула

$P_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k(y_{k+1} - y_{k-1})$ где је: $y_0 = y_n$ и $y_{n+1} = y_1$, или другачије записана

$2P_n = x_1(y_2-y_n)+x_2(y_3-y_1)+\cdots+x_n(y_1-y_{n-1})$ за многоугао $A_1A_2...A_n$.(видети Слику 3.)



Слика 4а



Слика 4б

Нека је A_{n+1} ван многоугла (Слике 4а). (Њих можемо тако означити да многоугао $A_1A_2\cdots A_nA_{n+1}$ буде позитивно оријентисан),P_n претходни израз и $2P_\Delta = x_n(y_{n+1}-y_1)+x_{n+1}(y_1-y_n)+x_1(y_n-y_{n+1})$ површина троугла $A_nA_{n+1}A_1$ (троугао $A_nA_{n+1}A_1$ је позитивно оријентисан). За многоугао $A_1A_2\cdots A_nA_{n+1}$ површина P_{n+1} биће једнака збиру површина P_n многоугла $A_1A_2\cdots A_n$ и површине P_Δ торугла $A_nA_{n+1}A_1$ који је позитивно оријентисан, тј.

$2P_n+2P_\Delta=[x_1(y_2-y_n)+x_2(y_3-y_1)+\cdots+x_n(y_1-y_{n-1})]+[x_n(y_{n+1}-y_1)+x_{n+1}(y_1-y_n)+x_1(y_n-y_{n+1})] =$

$x_1(y_2-y_n)+x_2(y_3-y_1)+\cdots+x_n(y_1-y_{n-1})+x_n(y_{n+1}-y_1)+x_{n+1}(y_1-y_n)+x_1(y_n-y_{n+1}) =$

$(x_1(y_2-y_n)+x_1(y_n-y_{n+1}))+x_2(y_3-y_1)+\cdots+x_{n-1}(y_n-y_{n-2})+(x_n(y_1-y_{n-1})+x_n(y_{n+1}-y_1))+x_{n+1}(y_1-y_n)$

$= x_1(y_2-y_{n+1})+x_2(y_3-y_1)+\cdots+x_{n-1}(y_n-y_{n-2})+x_n(y_{n+1}-y_{n-1})+x_{n+1}(y_1-y_n) = 2P_{n+1}$

Ако је тачка A_{n+1} унутар посматраног многоугла(Слика 4б) и многоугао $A_1A_2\cdots A_nA_{n+1}$ позитивно оријентисан , тада је $\Delta A_nA_{n+1}A_1$ негативно оријентисан и $P_\Delta<0$,па је опет $2P_n+2P_\Delta = 2P_{n+1}$

Уколико је многоугао $A_1A_2\cdots A_n$ негативно оријентисан тада је P_n негативан број, који је по апсолутној вредности једнак површини многоугла $A_1A_2\cdots A_n$.

Формула (2) добија се непосредно из формуле (1).

Нека је P површина многоугла. Из претходног следи:

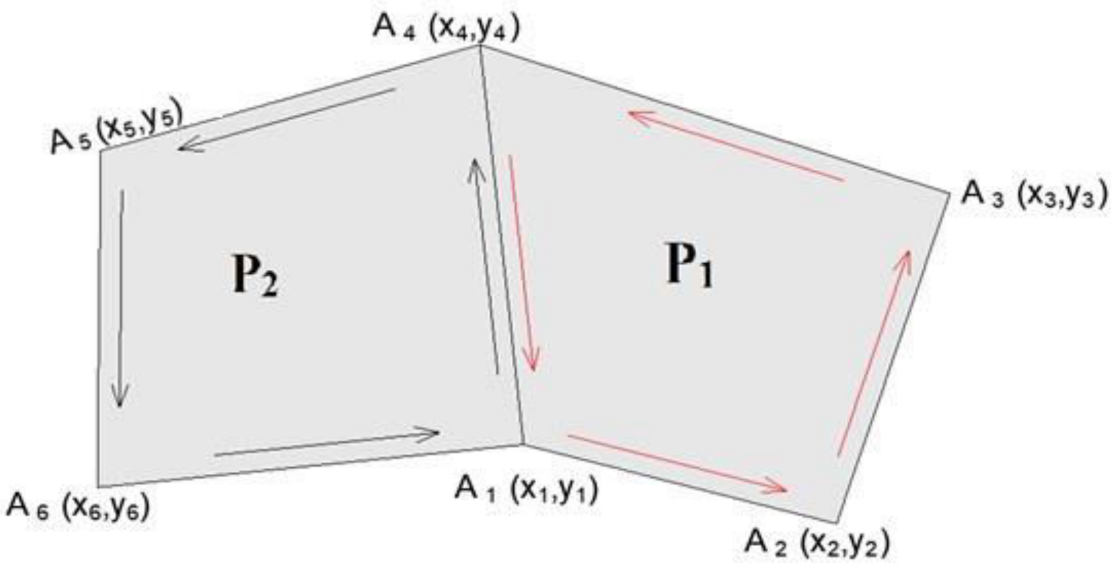
$\boldsymbol{P = \frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{n} x_k(y_{k+1} - y_{k-1})\right|}$ **где је:**$\boldsymbol{y_0 = y_n}$ **и** $\boldsymbol{y_{n+1} = y_1}$, или

$\boldsymbol{P = \frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{n} y_k(x_{k+1} - x_{k-1})\right|}$ **где је:**$\boldsymbol{x_0 = x_n}$ **и** $\boldsymbol{x_{n+1} = x_1}$

Формуле за површину троугла наведене у уводу под а) и б) су само посебни случајеви ових формула.

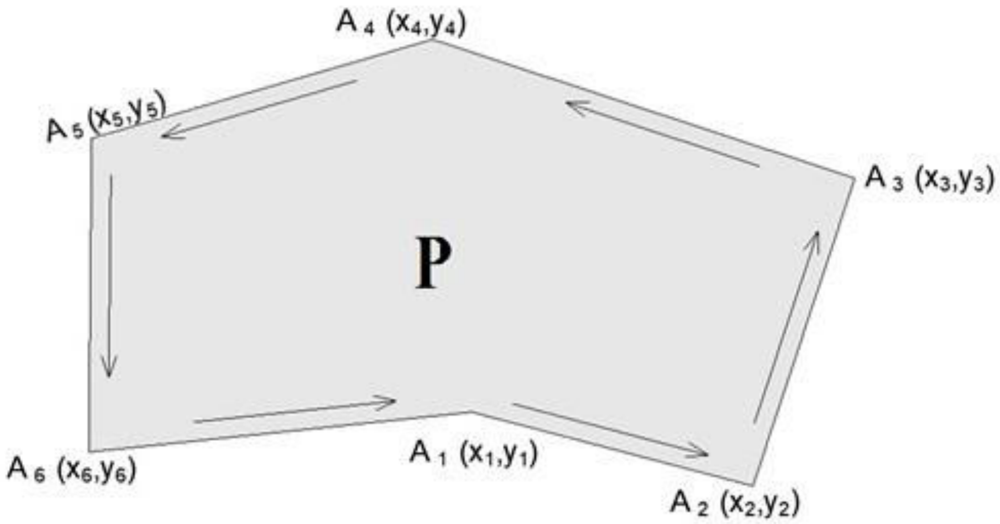
НЕКЕ ОСОБИНЕ КОЈЕ ПРОИЗИЛАЗЕ ИЗ НАВЕДЕНИХ ФОРМУЛА

Ако имамо два позитивно оријенатисана четвороугла $A_1A_2A_3A_4$ и $A_4A_5A_6A_1$ са заједничком страницом A_4A_1 (Слика 5а) и нека су P_1 и P_2 њихове површине тим редом, а P површина многоугла $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ тада је: $2P_1+2P_2 = 2P$
Примењујући формулу (1) на слику 5а имамо:
$2P_1+2P_2 =[x_1(y_2-y_4)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_4-y_2)+x_4(y_1-y_3)]+[x_4(y_5-y_1)+x_5(y_6-y_4)+x_6(y_1-y_5)+x_1(y_4-y_6)] = x_1(y_2-y_6)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_4-y_2)+x_4(y_5-y_3)+x_5(y_6-y_4)+x_6(y_1-y_5) =2P$.
Дакле, добијамо резултат површине многоугла $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.



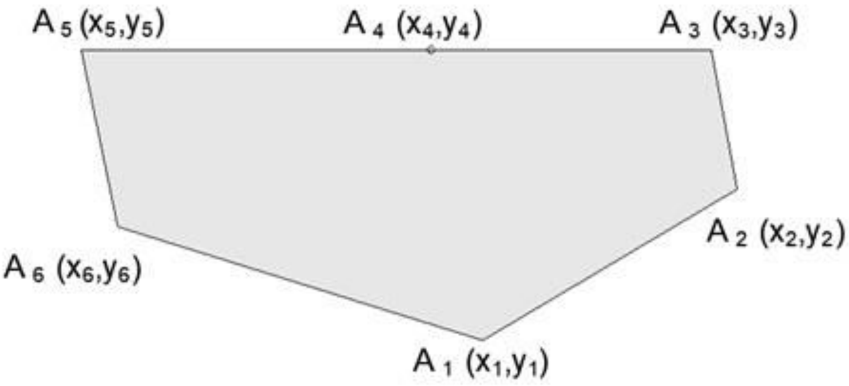
Слика 5а

Добијамо резултат површине многоугла $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Дакле заједничка дуж A_4A_1 „ишчезава”.(слика 5б)

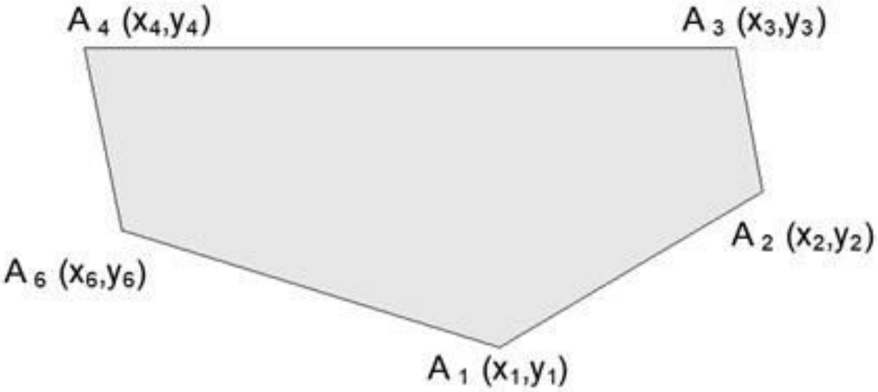


Слика 5б

Ако су код неког многоугла тачке $A_{к-1}$, $A_к$ и $A_{к+1}$ колинеарне(у нашем случају тачке A_3, A_4 и A_5) онда тачка $A_к$ која је између $A_{к-1}$ и $A_{к+1}$ „ишчезава”
(Слика 6а и Слика 6б)**.**
Размотримо ову тврдњу.
Ако посматрамо слику 6а видимо да је:
$2P = \sum_{k=1}^{6} x_k(y_{k+1} - y_{k-1})$
Одавде имамо: $\sum_{k=1}^{6} x_k(y_{k+1} - y_{k-1}) = x_1(y_2 - y_6) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_5 - y_3) + x_5(y_6 - y_4) + x_6(y_1 - y_5) = x_1(y_2 - y_6) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_5 - y_2 + y_4 - y_5) + x_4(y_5 - y_3) + x_5(y_6 - y_4 + y_3 - y_3) + x_6(y_1 - y_5) = x_1(y_2 - y_6) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_5 - y_2) + x_3(y_4 - y_5) + x_4(y_5 - y_3) + x_5(y_6 - y_3) + x_5(y_3 - y_4) + x_6(y_1 - y_5) = x_1(y_2 - y_6) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_5 - y_2) + x_5(y_6 - y_3) + x_6(y_1 - y_5) + x_3(y_4 - y_5) + x_4(y_5 - y_3) + x_5(y_3 - y_4) = [x_1(y_2 - y_6) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_5 - y_2) + x_5(y_6 - y_3) + x_6(y_1 - y_5)] + [x_3(y_4 - y_5) + x_4(y_5 - y_3) + x_5(y_3 - y_4)]$ Из наведеног следи:
$2P = 2P_{A_1A_2A_3A_5A_6} + 2P_{A_3A_4A_5}$. Како је: $2P_{A_3A_4A_5} = x_3(y_4 - y_5) + x_4(y_5 - y_3) + x_5(y_3 - y_4) = 0$ ($P_{A_3A_4A_5} = 0$ јер су тачке: A_3, A_4, A_5 колинеарне). Што значи да је:
$2P = 2P_{A_1A_2A_3A_5A_6}$.Дакле A_4 „ишчезава”.



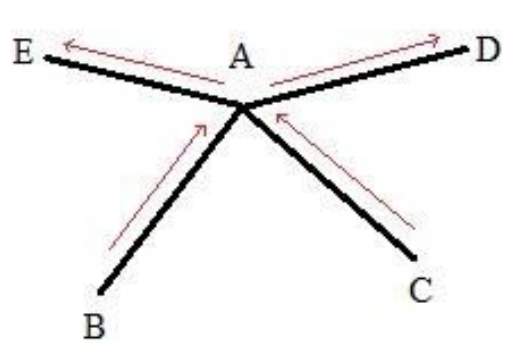
Слика 6а



Слика 6б

Дакле, применом претходног и формула (1) или (2) примећујемо да уколико у некој фигури имамо више колинеарних тачака, онда тачке између „ишчезавају”, односно можемо их изоставити. Видети слике 6а и 6б.

Полигонална линија не мора да буде проста. Размотримо тај проблем.



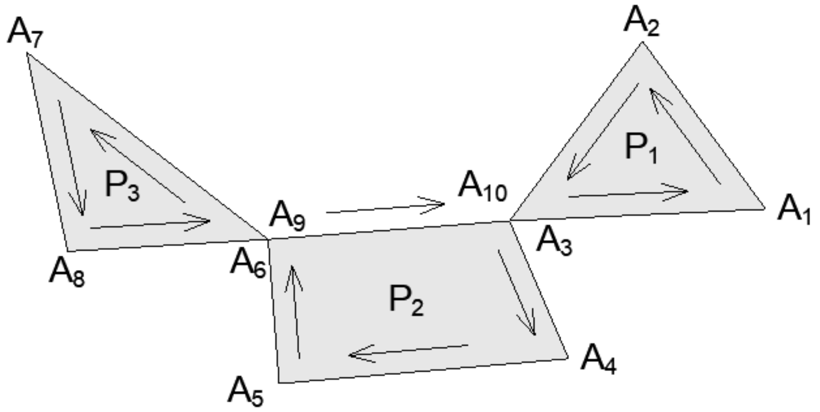
Слика 7

У следећим разматрањима користићемо једнакост:
$x_A(y_D - y_C)+x_A(y_E - y_B) = x_A(y_D - y_B)+x_A(y_E - y_C)$, где су x_A, y_D, y_C, y_E, y_B, одговарајуће координате тачака A,D,C,E и B (слика 7).
Ако применимо формулу (1) или (2) на фигуре са слике 8а и 8б које су само различито оријентисане добићемо различите резултате.
Нека су P_1, P_2, P_3 резултати који се добијају применом формуле (1), односно (2) на фигуре $A_1A_2A_3$, $A_3A_4A_5A_6$, $A_6A_7A_8$, оријентисане као на слици 8а. Нека је P резултат који се добија применом истих формула на фигуру слика 8а, тада је
$\boldsymbol{P_1+P_2+P_3 = P}$
Овде су $A_6 = A_9$ и $A_3 = A_{10}$, фигуре $A_1A_2A_3$ и $A_6A_7A_8$ позитивно оријентисане, а $A_3A_4A_5A_6$ негативно оријентисана.
Дакле P се добија кад се од површина фигура $A_1A_2A_3$, $A_6A_7A_8$ одузме површина фигуре $A_3A_4A_5A_6$. Овде су P_1 и P_3 једнаке површинама одговајућим фигурама, а P_2 је негативан број чија је апсолутна вредност једнака површини одговарајуће фигуре.

$$2P_1 + 2P_2 + 2P_3 = [x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1)+ x_3(y_1-y_2)]+ [x_3(y_4-y_6)+ x_4(y_5-y_3)+ x_5(y_6-y_4)+ x_6(y_3-y_5)]+[x_6(y_7-y_8)+ x_7(y_8-y_6) + x_8(x_6 - x_7)] = x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1)+ x_3(y_1-y_2)+ x_3(y_4-y_6)+ x_4(y_5-y_3) + x_5(y_6-y_4)+ x_6(y_3-y_5)+ x_6(y_7-y_8) + x_7(y_8-y_6) + x_8(x_6 - x_7) =$$
$$x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1)+x_3(y_4-y_2)+ x_{10}(y_1-y_9)+ x_4(y_5-y_3) +x_5(y_6-y_4)+ x_6(y_7-y_5) + x_9(y_{10} - y_8) + x_7(y_8-y_6) +x_8(y_9- y_7) =$$
$$x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1)+ x_3(y_4-y_2)+ x_4(y_5-y_3) + x_5(y_6-y_4) + x_6(y_7-y_5) + x_7(y_8-y_6) + x_8(y_9-y_7)+ x_9(y_{10}-y_8)+ x_{10}(y_1- y_9) = 2P$$

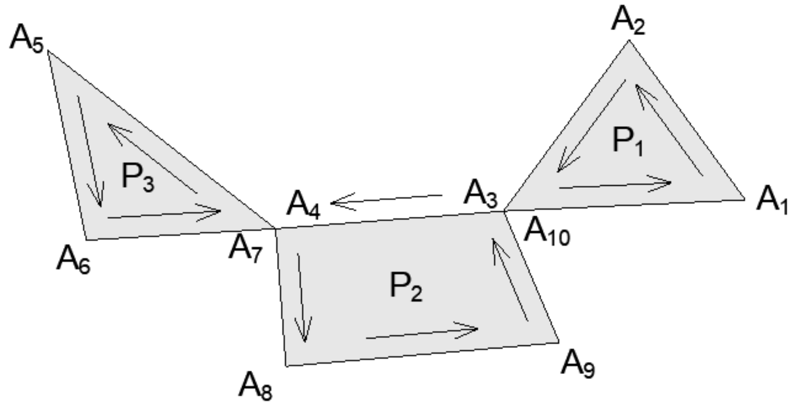
Овде смо користили разматрање у вези слике 7 и да је $A_3 = A_{10}$ и $A_6 = A_9$

.



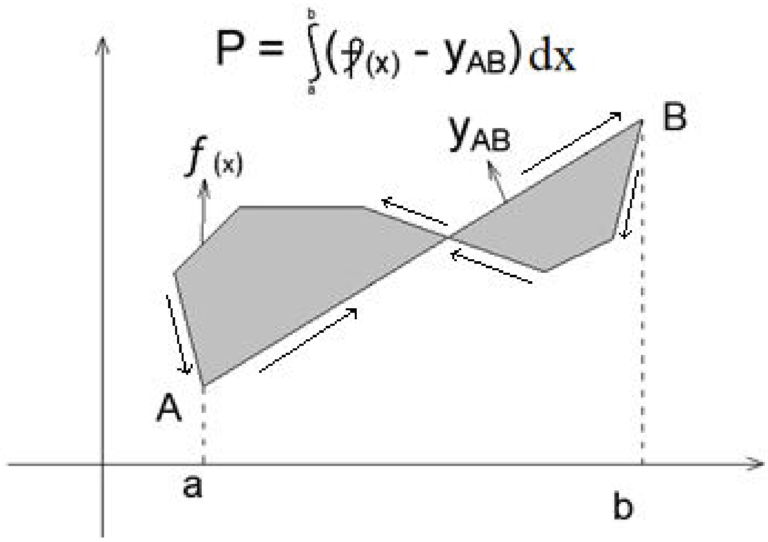
Слика 8а

На слици 8б такође важи једнакост $P_1+P_2+P_3=P$**.** Овде је P једнако збиру површина посматраних фигура.

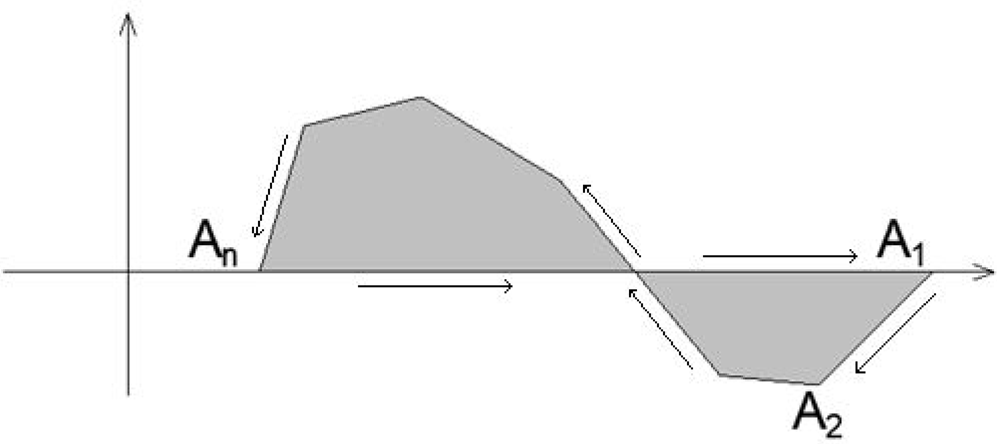


Слика 8б

Примењујући ф-лу (1) или (2) на фигуру на слици 9а или 9б добијамо резултат као и примена одређеног интеграла. Ово нас наводи на питање у каквој су вези разматране формуле и одређени интеграл.

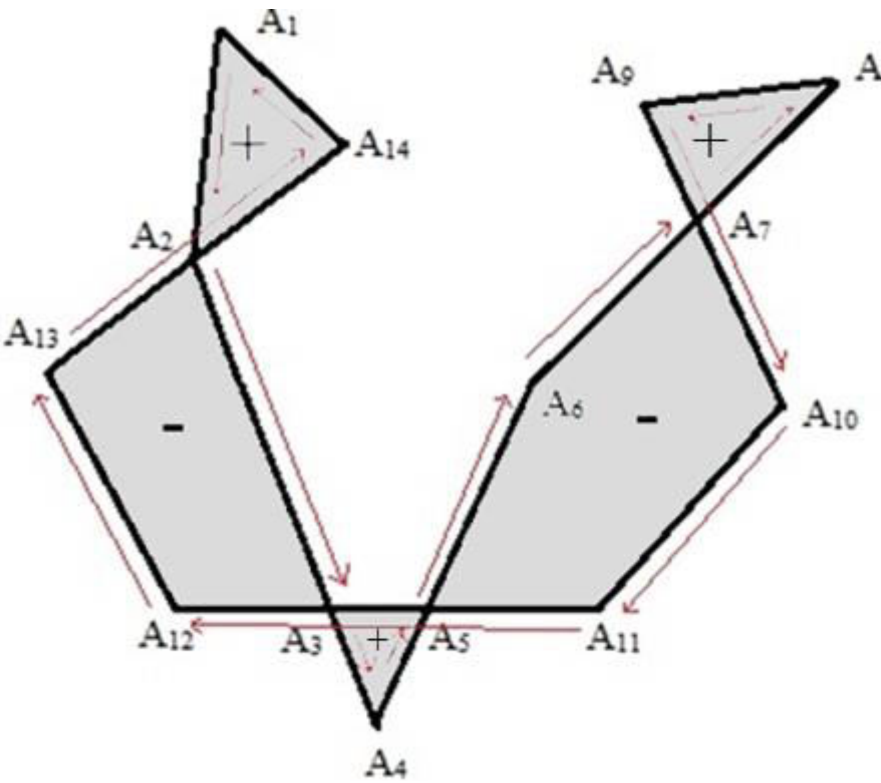


Слика 9а



Сликка 9б

Слика 10 представља поопштење слике 9а и 9б. Оно што је изломљена линија $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ код слике 10 то је Y_{AB} код слике 9а и х – оса код 9б. Оно што је f(x) код 9а и 9б то је изломљена линија $A_1A_{14}A_{13}A_{12}A_5A_{11}A_{10}A_9A_8$ код слике 10.



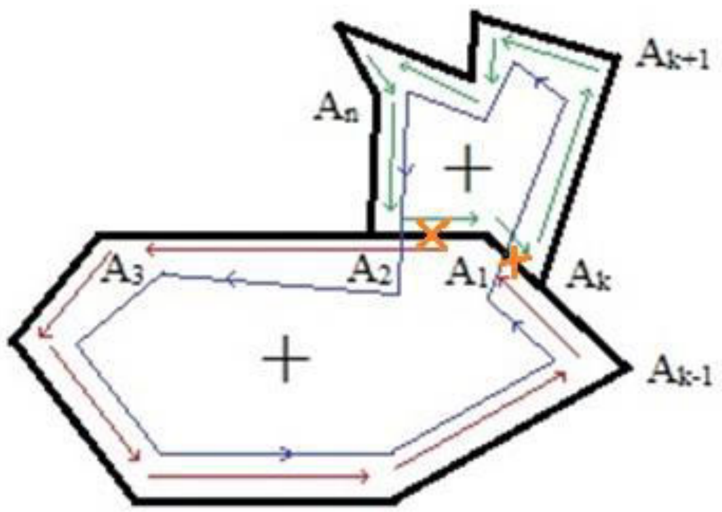
Слика 10

„ЛЕПЉЕЊЕ" МНОГОУГЛА НА МНОГОУГАО И ПРИМЕНА РАЗМАТРАНЕ ФОРМУЛЕ НА НОВОДОБИЈЕНУ ФИГУРУ

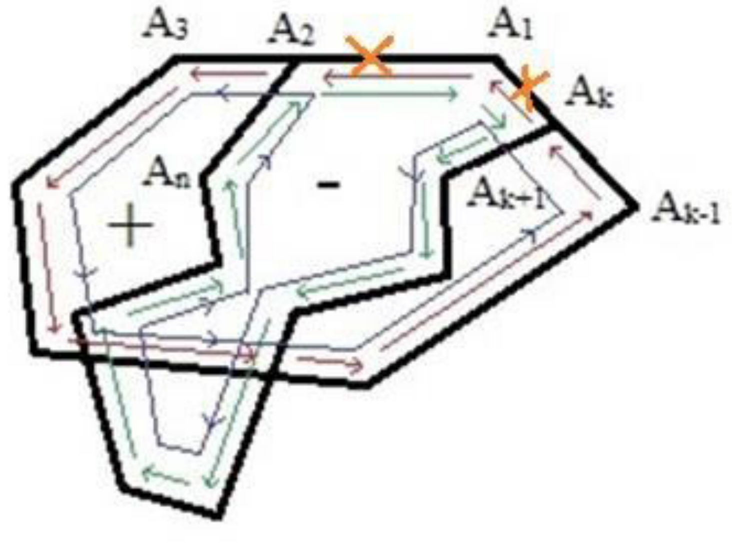
Нека на многоугао $A_1A_3 \cdots A_{k-1}A_k$ додамо многоугао $A_1A_kA_{k+1} \cdots A_nA_2$ и оријентисани као на сликама 11а и 11б. Нека су P_1 и P_2 резултати примене формуле (1) односно (2) на наведене многоуглове, тада је $2P_1 + 2P_2 = 2P$, где је P резултат примене формуле(1) односно (2) на фигуру чија је полигонална линија $A_2A_3 \ldots A_{k-1}A_kA_{k+1} \cdots A_n$. Па је:

$2P_1 + 2P_2 = [x_1(y_2-y_k)+x_2(y_3-y_1)+ \cdots + x_k(y_1-y_{k-1})]+$
$[x_k(y_{k+1}-y_1)+x_{k+1}(y_{k+2}-y_k)+ x_{k+2}(y_{k+3}-y_{k+1})+\ldots+ x_n(y_2-y_{n-1})+x_2(y_1-y_n)+x_1(y_k-y_2)] =$
$x_2(y_3-y_n)+x_3(y_4-y_2)+ \cdots + x_k(y_{k+1}-y_{k-1})+ x_{k+1}(y_{k+2}-y_k)+\ldots+x_n(y_2-y_{n-1}) = 2P$

Овде странице A_1A_2 и A_1A_k „ишчезавају" и добијамо полигоналну линију $A_2A_3 \cdots A_{k-1}A_kA_{k+1}A_n$.



Слика 11а

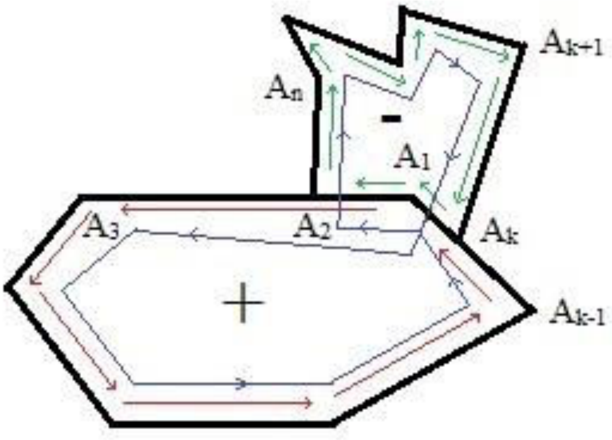


Слика 11б

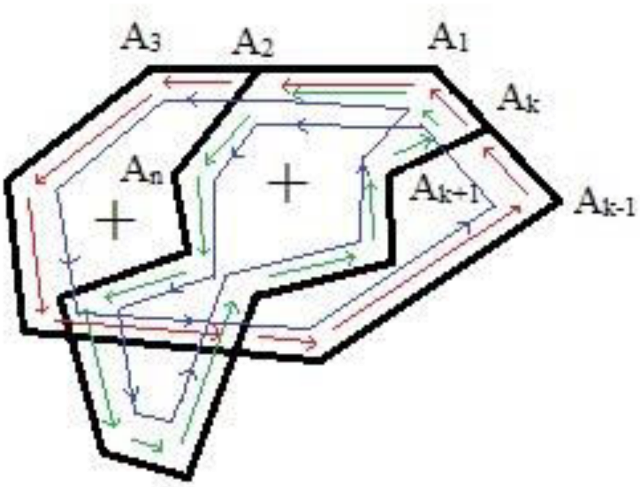
Нека на многоугао $A_1A_3\cdots A_{k-1}\ A_k$ додамо многоугао$A_1A_2A_n\cdots A_{k+1}A_k$ и оријентисани као на сликама 12а и 12б. Нека су P_1 и P_2 резултати примене формуле (1) односно (2) на наведене многоуглове, тада је $2P_1+2P_2=2P$,где је P резултат примене формуле (1) односно (2) на фигуру чија је полигонална Линија $A_kA_1A_2A_3\cdots A_{k-1}A_kA_1A_2A_nA_{k+1}$.

$2P_1+2P_2=[\ x_1(y_2-y_k)+x_2(y_3-y_1)+\cdots+x_k(y_1-y_{k-1})]+$
$[x_1(y_2-y_k)+x_2(y_n-y_1)+x_n(y_{n-1}-y_2)+\ldots+x_{k+1}(y_k-y_{k+2})+x_k(y_1-y_{k+1})]=2P$

Овде се странице A_1A_2 и A_1A_k „дуплирају” и добијамо многоугаону линију $A_kA_1A_2A_3\cdots A_{k-1}A_kA_1A_2A_nA_{k+1}$.



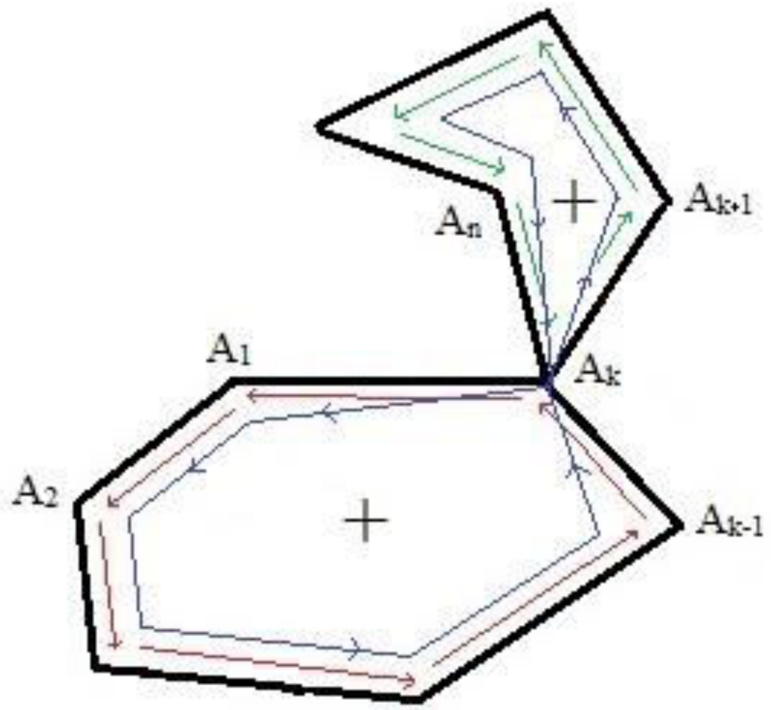
Слика 12а



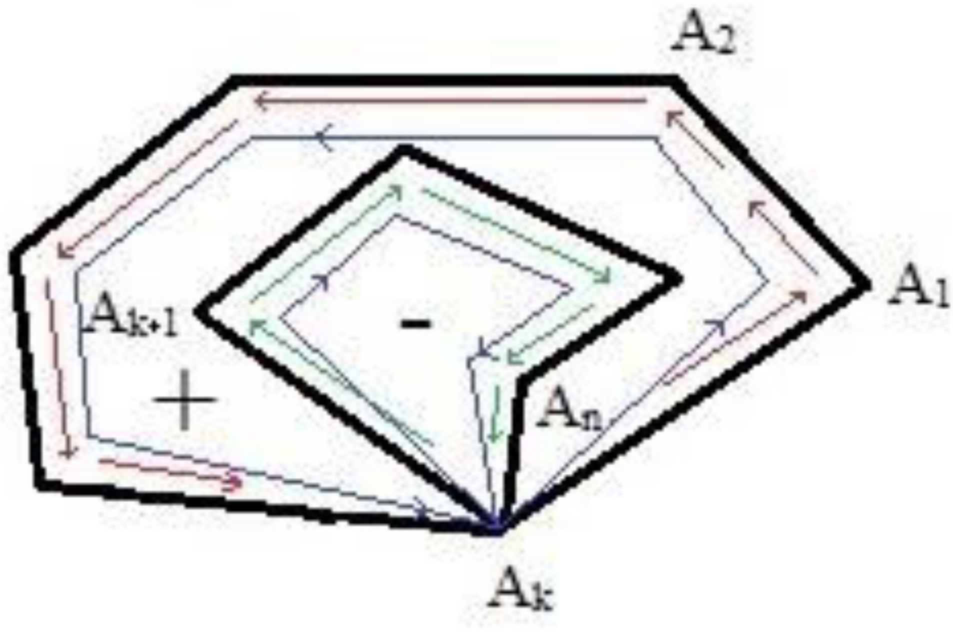
Слика 12б

На сличан начин примењујући наведене формуле на слике 13а и 13б долазимо до истог резултата.

$2P_1 + 2P_2 = [x_1(y_2-y_k)+x_2(y_3-y_1)+\ldots+x_{k-1}(y_k-y_{k-2})+x_k(y_1-y_{k-1})] + [x_k(y_{k+1}-y_n)+x_{k+1}(y_{k+2}-y_k)+\ldots+x_n(y_k-y_{n-1})] = x_1(y_2-y_k)+x_2(y_3-y_1)+\ldots+x_{k-1}(y_k-y_{k-2})+x_k(y_{k+1}-y_{k-1})+x_{k+1}(y_{k+2}-y_k)+\ldots+x_n(y_k-y_{n-1})+x_k(y_1-y_n) = 2P.$

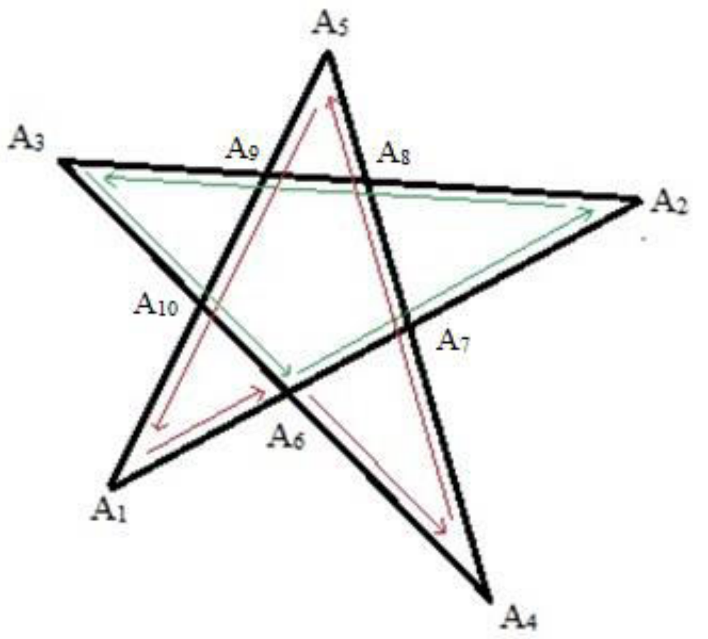


Слика 13а



Слика 13б

Нека је: $P_1 = P_{A1A6A4A5}$ и $P_2 = P_{A6A2A3}$ (Слика 14). Имамо да је:
$2P_1 + 2P_2 = [x_1(y_6-y_5)+x_6(y_4-y_1)+x_4(y_5-y_6) + x_5(y_1-y_4)] + [x_6(y_2-y_3)+ x_2(y_3-y_6) +x_3(y_6-y_2)]$
$= x_1(y_6-y_5) + x_6(y_4-y_1) + x_6(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_6) + x_3(y_6-y_2) + x_4(y_5-y_6) + x_5(y_1-y_4) =$
$= x_1(y_6-y_5) + x_6(y_2-y_1) + x_6(y_4-y_3) + x_2(y_3-y_6) + x_3(y_6-y_2) + x_4(y_5-y_6) + x_5(y_1-y_4) =$
$(x_1(y_6-y_5) + x_6(y_2-y_1) + x_2(y_3-y_6)) + (x_3(y_6-y_2) + x_6(y_4-y_3) + x_4(y_5-y_6)) + x_5(y_1-y_4) =$
(A_1, A_6, и A_2 су колинеарне тачке и A_4, A_6, и A_3 такође, па је) =
$x_1(y_2-y_5) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_4-y_2) + x_4(y_5-y_3) + x_5(y_1-y_4) = 2P$
Овде се многоугао$A_6A_7A_8A_9A_{10}$ „прекрива“ двоструко са $A_1A_6A_4A_5$ и$A_6A_2A_3$ па ће P представљати збир површина „петокраке” и петоугла унутар ње.

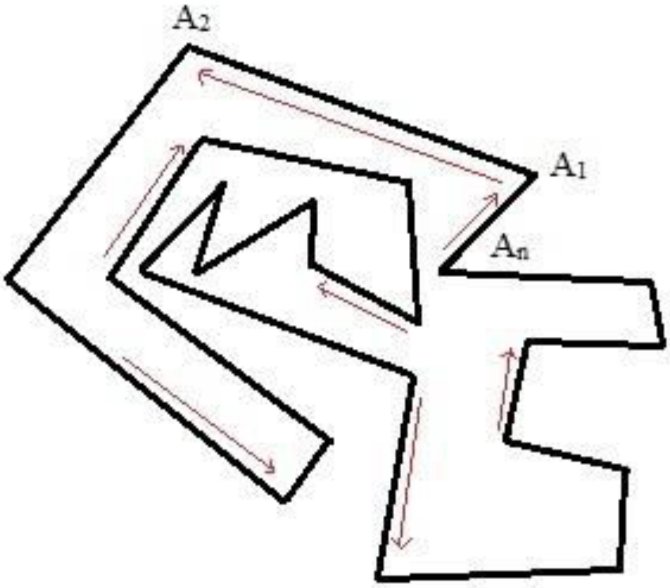


Слика 14

Дакле, увек важи **$P_1 + P_2 = P$**

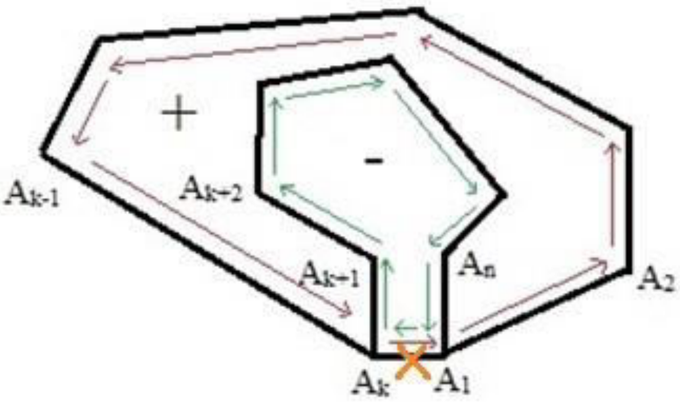
ЈОШ НЕКА РАЗМАТРАЊА ПОВРШИНЕ МНОГОУГЛА

Разматрана формула се може применити и на фигуру као што је на слици 15



Слика15

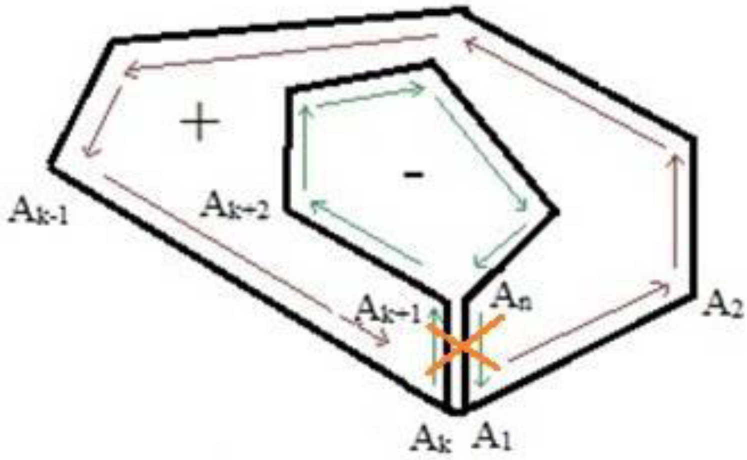
Слика 16а само варијанта слике 11б, па важе исти закључци тј. да је $2P = 2P_1 + 2P_2$, односно $2P = x_1(y_2-y_n)+x_2(y_3-y_1)+\cdots+x_k(y_{k+1}-y_{k-1})+x_{k+1}(y_{k+2}-y_k)+\ldots+x_n(y_1-y_{n-1}) = [x_1(y_2-y_k)+x_2(y_3-y_1)+\cdots+x_k(y_1-y_{k-1})]+[x_k(y_{k+1}-y_1)+x_{k+1}(y_{k+2}-y_k)+x_{k+2}(y_{k+3}-y_{k+1})+\ldots+x_n(y_1-y_{n-1})+x_1(y_k-y_n)] = 2P_1+2P_2$.



Слика 16а

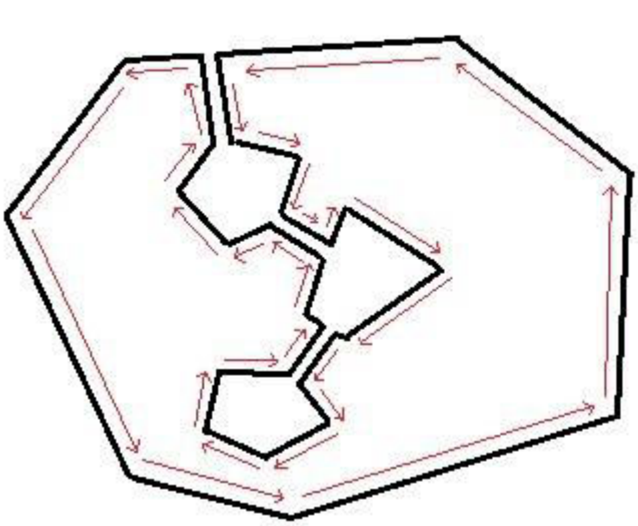
Ако,,канал $A_kA_1A_nA_{k+1}$ сузимо” (Слика 16б) тако да је $A_k=A_1$и $A_{k+1}= A_n$ тада је:

$2P= x_1(y_2-y_n)+x_2(y_3-y_1)+ \cdots + x_{k-1}(y_k-y_{k-2})+x_k(y_{k+1}-y_{k-1})+ x_{k+1}(y_{k+2}-y_k)+\ldots+x_n(y_1-y_{n-1})=$
$[x_1(y_2-y_k)+x_2(y_3-y_1)+ \cdots +x_{k-1}(y_k-y_{k-2})+ x_k(y_1-y_{k-1})]+$
$[x_k(y_{k+1}-y_1)+x_{k+1}(y_{k+2}-y_k)+ x_{k+2}(y_{k+3}-y_{k+1})+\ldots+ x_n(y_1-y_{n-1})+x_1(y_k-y_n)] =$
$[x_1(y_2-y_1)+x_2(y_3-y_1)+ \cdots +x_{k-1}(y_1-y_{k-1})+ x_1(y_1-y_{k-1})]+$
$[x_1(y_n-y_1)+x_n(y_{k+2}-y_1)+ x_{k+2}(y_{k+3}-y_n)+\ldots+ x_{n-1}(y_n-y_{k-2})+x_n(y_1-y_{n-1})+x_1(y_1-y_n)] =$
$=[x_1(y_2-y_{k-1})+x_2(y_3-y_1)+ \cdots +x_{k-1}(y_1-y_{k-1})]+$
$[x_n(y_{k+2}-y_{n-1})+ x_{k+2}(y_{k+3}-y_n)+\ldots+ x_{n-1}(y_n-y_{k-2})] =2P_1 + 2P_2$ Дакле ,,канал$A_kA_1A_nA_{k+1}$” је ишчезао и добили смо двоструко повезану област.



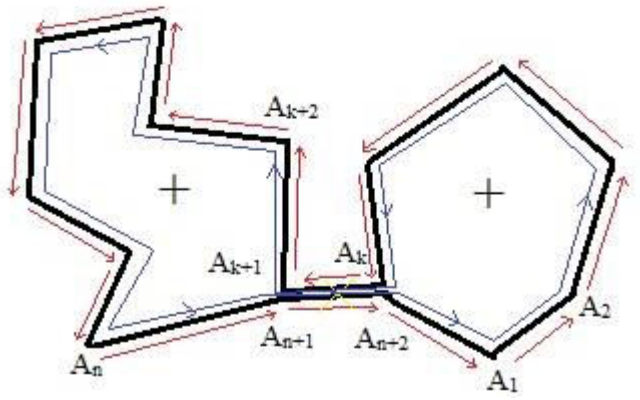
Слика 16б

Слика 17 показује примену формуле(1) на вишеструко повезану област.

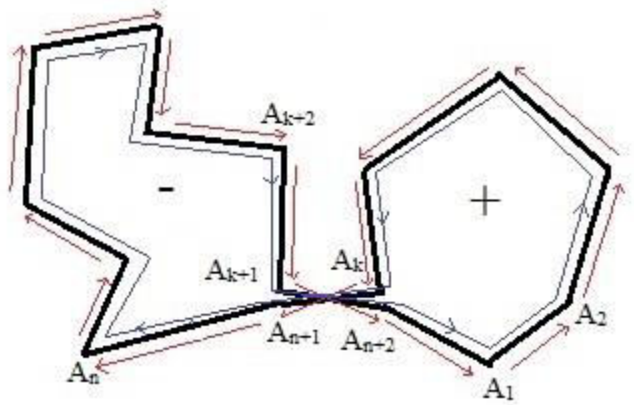


Слика17

На сликама 18а и18б долазимо до истих закључака, тј важи иста формула. „Канали$A_kA_{k+1}A_{n+1}A_{n+2}$”ишчезавају.

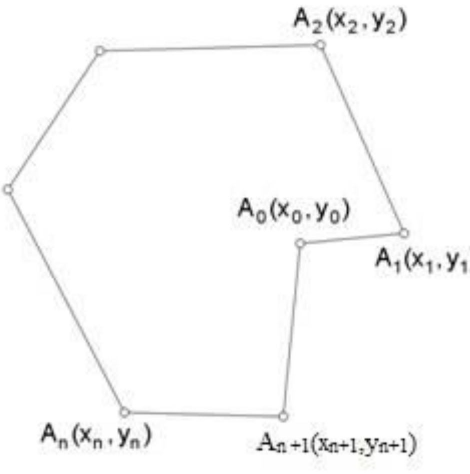


Слика 18а

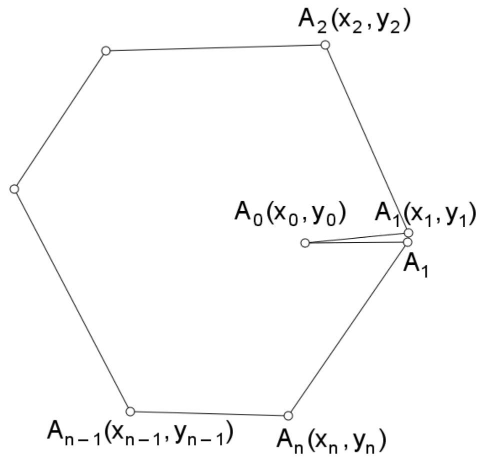


Слика 18б

Ако применимо формулу (1) на фигуру са слике 19а добићемо:
$2P=x_0(y_1-y_{n+1}) +x_1(y_2-y_0)+\ldots+x_n(y_{n+1}-y_{n-1})+x_{n+1}(y_0-y_n)$



Слика 19а



Слика 19б

Уколико приближавамо тачку A_{n+1} тачки A_1 (слика 19б) тако да дође до њиховог поклапања тачка A_0 ишчезава из формуле.Видети слику 19б.

$2P = x_0(y_1-y_1)+x_1(y_2-y_0)+x_2(y_3-y_1)+\cdots+x_{n-1}(y_n-y_{n-2})+x_n(y_1-y_{n-1})+x_1(y_0-y_n)$

$= x_1(y_2-y_0+y_0-y_n)+x_2(y_3-y_1)+\cdots+x_{n-1}(y_n-y_{n-2})+x_n(y_1-y_{n-1})$

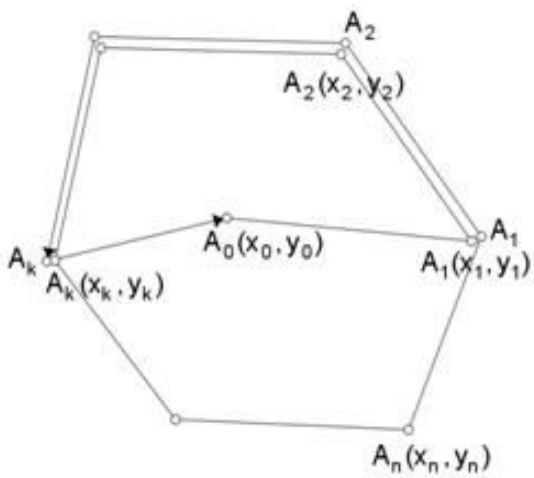
$= x_1(y_2-y_n)+x_2(y_3-y_1)+\cdots+x_{n-1}(y_n-y_{n-2})+x_n(y_1-y_{n-1})$.

Дакле $2P = x_1(y_2-y_n)+x_2(y_3-y_1)+\cdots+x_{n-1}(y_n-y_{n-2})+x_n(y_1-y_{n-1})$.

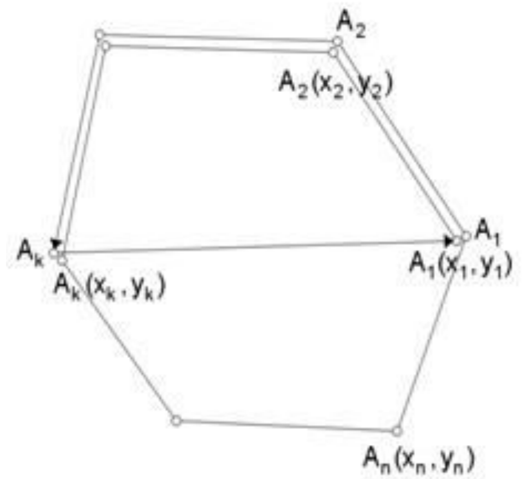
Ако применимо формулу (1) на фигуру са слике 20а добијамо:

$2P = x_0(y_1-y_к)+x_1(y_2-y_0)+x_2(y_3-y_1)+\cdots+x_n(y_1-y_{n-1})+$
$+x_1(y_2-y_n)+x_2(y_3-y_1)+\ldots+x_к(y_0-y_{к-1})$

$\mathbf{2P = [x_1(y_2-y_n)+ x_2(y_3-y_1)+\cdots+ x_n(y_1-y_{n-1})]+}$
$\mathbf{[x_0(y_1-y_k)++ x_1(y_2-y_0)+ x_2(y_3-y_1)+\ldots+x_к(y_0-y_{к-1})]}$



Слика 20а

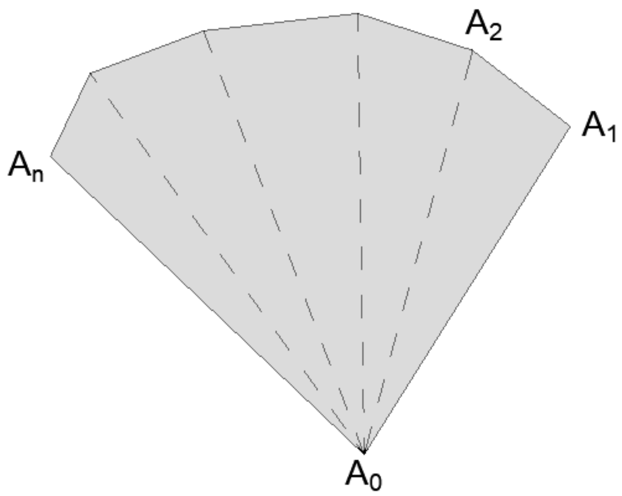


Слика 20б

Ако применимо исту формулу на фигуру са слике 20б и ако је$A_0(x_0,y_0)=A_1(x_1,y_1)$ тада имамо: $2P =[x_1(y_2-y_n)+x_2(y_3-y_1)+\cdots+x_n(y_1-y_{n-1})]+[x_1(y_1-y_k)+$ $+x_1(y_2-y_1)+x_2(y_3-y_1)+\ldots+x_к(y_1-y_{к-1})]$

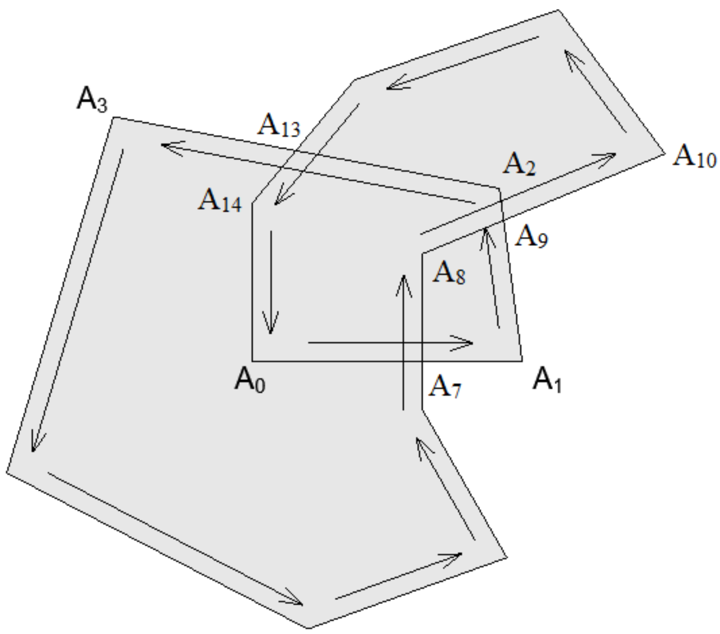
$$\mathbf{2}\boldsymbol{P}\mathbf{ = [x_1(y_2-y_n)+ x_2(y_3-y_1)+\cdots+ x_n(y_1-y_{n-1})]+ [x_1(y_2-y_k)+}$$
$$\mathbf{+ x_2(y_3-y_1)+\ldots+x_к(y_1-y_{к-1})]}$$

Формула (1) и (2) могу се применити и на слике 21 и 22. Наведени примери могу бити од помоћи да приближно израчунамо *P* неких равних фигура које су ограничене кривим линијама.



Слика 21

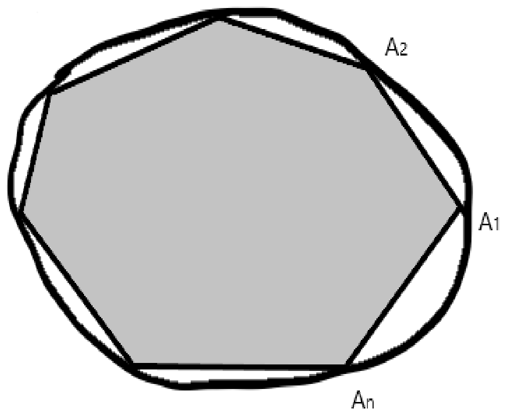
Шта је *P* за слику 22? То је површина осенчане фигуре плус површина многоугла $A_0A_7A_8A_9A_2A_{13}A_{14}$.



Слика 22

P ФИГУРЕ F И ЊЕНА ПРИБЛИЖНА ВРЕДНОСТ

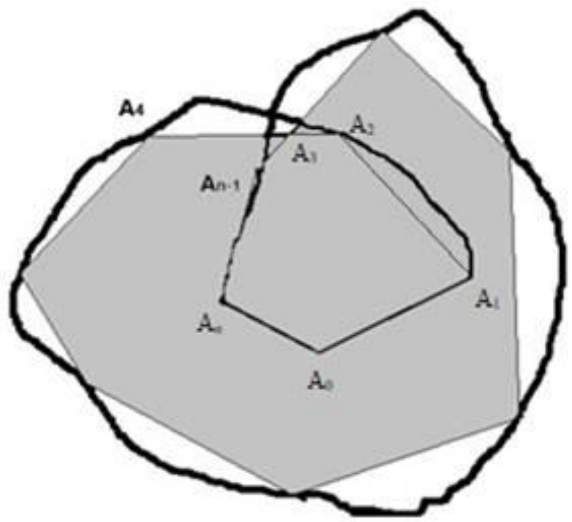
Ако у фигуру F ограничену кривом линијом (слика 23) упишемо многоугао $A_1A_2 \ldots A_n$, онда можемо узети површину наведеног многоугла која се рачуна по формули (1) или (2) за приближну вредност површине фигуре F.



Слика 23

Ако у круг или елипсу који су дати у правоуглом координатном систему уписујемо многоуглове и захтевамо да најдужа страница многоугла тежи нули тада ф-ле (1) и (2) дају за резултат површину круга односно елипсе.(види[5] страна 65 -66).Ово је идеја коју је користио Архимед у трећем веку пре нове ере.

Слика 24 показује како можемо израчунати приближно *P* фигуре ограничене дужима A_0A_1, A_0A_n и кривом линијом која садржи тачке A_1, A_2, $A_4, \ldots, A_{n-1}$, A_n. Овде *P* не представља површину осенчане фигуре јер је за многоугао $A_0A_1A_2A_3A_{n-1}A_n$ површина двапут рачуната.



Слика 24

Ако погледамо формуле:

$$P_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k(y_{k+1} - y_{k-1}), \quad y_0 = y_n,\ y_{n+1} = y_1,$$

$$P_n = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} y_k(x_{k+1} - x_{k-1}), \quad x_0 = x_n,\ x_{n+1} = x_1$$ уочићемо да постоји сличност са

неким формулама које смо сретали приликом изучавања одређеног интеграла ($P \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$)
па се намеће питање везе ових формула и одређеног интеграла. То би била посебна тема

Проблем се може још разрађивати и извести још неки изрази за рачунање површина разних равних фигура коришћењем граничне вредности и горе наведених формула и идеја.

ЛИТЕРАТУРА

[1]Др Кечкић Д. Јован, *МАТЕМАТИКА са збирком задатака за III разред средње школе*,Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2003.
[2]Др Војводић Градимир, др Пауновић Ђура, др Тошић Ратко, *МАТЕМАТИКА са збирком задатака за IIIразред средње школе*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1996.
[3]Природно-математички факултет,Универзитет у Нишу, Србија МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА 2(4)(2015), 49- 56