број: 100/4 година: 2019/20

Тангента

ЧАСОПИС ЗА МАТЕМАТИКУ И РАЧУНАРСТВО ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

100

Београд 2020.

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
„ТАНГЕНТА”- часопис за математику и рачунарство
за ученике средњих школа.
Излази у четири броја током школске године.
Адреса: „Тангента”, Друштво математичара Србије,
Поштански фах 355, 11000 Београд
Телефон: (011)3036-818

Уплате на жиро рачун:
Друштво математичара Србије – број 340-13536-62.
На уплатници као сврху уплате назначити „За Тангенту”.

Главни и одговорни уредник: Војислав Петровић, Нови Сад
e-mail: vojpet@gmail.com
Технички уредник: Зоран Стојаковић, Нови Сад
e-mail: stojakov@sbb.rs

Чланови редакције:

Александар Миленковић, Крагујевац
Марко Савић, Нови Сад
Ненад Стојановић, Крагујевац
Срђан Огњановић, Београд

Сва права умножавања, прештампавања и превођења задржава Друштво математичара Србије

Штампа: **„Сквер”**, Цара Константина 36, Крагујевац
На основу члана 23. став 2, тачка 9. Закона о порезу на додатну вредност („Регистар прописа”, број 11 – новембар 2004.) часопис се сматра серијском публикацијом од посебног интереса за науку и опорезије се по стопи од 8%. Корице freepik.

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

51
ТАНГЕНТА : часопис за математику и рачунарство Друштва математичара Србије /
главни и одговорни уредник Војислав Петровић. – Год. 1, бр. 1 (1995) – . – Београд (Кнез Михајлова 35) : Друштво математичара Србије, 1995– (Крагујевац : Сквер). –24 cm

Тромесечно.
ISSN 0354 – 656*X* = Тангента
COBISS.SR–ID 103642375

ЈУБИЛЕЈ

Драги читаоци,

Као што видите ваша и наша ТАНГЕНТА стигла је до 100-тог броја. Истина, данашње време није баш наклоњено прославама и јубилејима. Но, упркост великој здравственој кризи која је угрозила читаву планету, редакција наставља да дела као и раније. Надамо се да је тако и с вама читаоцима.

Све је почело пре 25 година, далеке 1995. Ни то време није било баш срећно. Санкције, економска криза, катастрофална инфлација, општа оскудица и сиромаштво. На подручју тадашње Савезне Републике Југославије (СРЈ) недостајало је много шта, па и математичка литература. Посебно је недостајала периодика из математике и рачунарства. Математичари већине наших универзитета, заједно с Друштвом математичара Југославије, схватили су да нешто мора да се учини не би ли се тадашња ситуација, бар делимично, поправила. Тако је никла идеја о покретању часописа из математике и рачунарства. На предлог групе из Новог Сада, прихваћено је да се зове ТАНГЕНТА.

Од самог почетка, ТАНГЕНТА је као своје узоре, имала угледне и увелико афирмисане светске часописе попут руског Кванта, канадског Crux Mathematicorum, америчког Mathematics Magazine и сличних. Временом је формирала свој сопствени профил и стил.

Први главни уредник био је професор Ратко Тошић из Новог Сада, а бројну редакцију сачињавали су математичари из скоро свих универзитетских и значајнијих школских центара СРЈ. Касније су се мењали и уредници и редакције, али основна концепција часописа остала је готово иста као на почетку.

Сваки број ТАНГЕНТЕ почињао је с два или три чланка из математике и рачунарства чији су аутори били еминентни домаћи и инострани математичари. Садржаји и нивои чланака из математике су варирали. Највећи број био је намењен и доступан просечним ученицима средњих и напреднијим ученицима старијих разреда основних школа. Међутим, било је садржаја, а има их сад, који су захтевали шире знање и већу математичку зрелост да би се пратили и разумели. Њихов читалачки круг чинили су талентовани ученици и широк круг љубитеља математике и математичких сладокусаца.

Слично је било с чланцима из рачунарства. Аутори, такође зналци своје струке, презентовали су како стандардне теме и садржаје тако и најсавременије. С обзиром на то коликом се брзином рачунарство развијало, била је то прилика за читаоце да се на време упознају с најновијим достигнућима из те модерне научне и примењене дисциплине.

Стална и репрезентативна, била је и остала рубрика ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ. Истина, данас се зове НАГРАДНИ ЗАДАЦИ, али садржај је остао непромењен. У сваком броју доносила је одређен број задатака из скоро свих области математике. Тежине задатака биле су у распону од обичних, школских, па све до нестандардних и врло тешких. Многи су били прави изазови за решаваче. То је уједно било и својеврсно такмичење које је имало запажен одзив. Међу учесницима били су и многи врсни такмичари. На крају школске године, најуспешнији су били награђивани математичком литературом.

Рубрика ЗАДАЦИ ИЗ ПРОГРАМИРАЊА била је пандан претходној. Презентовала је по неколико задатака из програмирања различитих садржаја и тежина. Такође је била такмичарског карактера и најуспешнији ученици били су награђивани.

С времена на време, као помоћ и упутство за наставнике средњих школа, појављивала се рубрика ИЗАБРАНИ ШКОЛСКИ ЗАДАЦИ. Од 2002. године прерасла је у сталну рубрику ПИСМЕНИ ЗАДАЦИ коју од онда, па све данашњих дана, веома успешно води Срђан Огњановић. Рубрика садржи предлоге писмених задатака за редовне гимназије и средње школе као и за математичке гимназије.

ТАНГЕНТА је увек поклањала посебну пажњу математичким и информатичким такмичењима свих нивоа. Извештаји, задаци и решења са домаћих такмичења, балканских и међународних олимпијада, како из математике тако и из информатике, обавезно су налазили своја места у одговарајућим бројевима ТАНГЕНТЕ.

Читалачка публика је правовремено обавештавана о новим публикацијама, посебно од стране Друштва математичара, о зимским и летњим школама, о семинарима и сличним манифестацијама.

ТАНГЕНТА има дугогодишњу и успешну сарадњу с угледном и светски познатом издавачком кућом „Шаховски информатор“ из Београда. Годинама је она покровитељ сталне рубрике ШАХОВСКА СТРАНА која доноси чланке намењене широком кругу љубитеља шаха и математике. Најуспешнији решавачи наградних задатака бивају награђивани вредним производима „Шаховског информатора“.

С обзиром на општу ситуацију, будућност нимало неће бити наклоњена класичном издаваштву. То неће заобићи ни ТАНГЕНТУ. Због тога је потребно да све више и све озбиљније размишља о што бржем преласку на елекронско издање часописа.

Први корак у том правцу већ је направљен. Сви бројеви ТАНГЕНТЕ од 1995. до 2018. године су дигитализовани и постављени на сајт Друштва математичара Србије. Тиме су постали доступни најширим читалачким круговима.

А ви драги читаоци, читајте, уживајте и пишите нам.

Редакција

САВРШЕНИ БРОЈЕВИ

Ратко Тошић, Нови Сад

Бог је створио свет за 6 *дана, јер је* 6 *савршен број,*
али би он био савршен и да стварање није трајало толико.
Свети Августин

ДЕФИНИЦИЈА

За природан број n кажемо да је *савршен* ако је збир свих његових правих делилаца једнак n. Прави делиоци природног броја n су сви делиоци од n који су мањи од n. На пример, број 6 је савршен, јер су сви његови прави делиоци 1, 2 и 3, а њихов збир је 6. Чешће се савршен број дефинише као природан број n такав да је збир свих његових делилаца (укључујући и сам број n) једнак $2n$.

Лако се проверава, на пример, да су 28, 496, 8128 и 33550336 савршени бројеви.

ФУНКЦИЈА $\sigma(x)$

Видимо да у дефиницији савршених бројева фигурише појам *збир делилаца*. Збир делилаца је једна од функција са којом се често срећемо у теорији бројева. Уобичајена ознака за функцију „збир делилаца“ је $\sigma(n)$.

Дакле, за сваки природан број n дефинишемо $\sigma(n)$ као збир свих позитивних делилаца броја n.

Збир делилаца је једна од важних аритметичких функција теорије бројева.

Аритметичка функција је функција целобројних променљивих која узима само целобројне вредности за све вредности својих променљивих за које је дефинисана. На пример, полином са целобројним коефицијентима је аритметичка функција.

Аритметичка функција од једне променљиве $f(x)$ је *мултипликативна* ако су задовољена следећа два услова:

(1) $f(n)$ није идентички једнака нули;

(2) $f(mn) = f(m)f(n)$, ако је $NZD(m,n) = 1$.

На пример, функција $f(n) = n^k$ је мултипликативна.

Лако се види да је, за мултипликативну функцију $f(n)$, $f(1) = 1$. Наиме, ако је за неко n_0, $f(n_0) \neq 0$, онда је $f(n_0) = f(n_0 \cdot 1) = f(n_0)f(1)$, одакле следи да је $f(1) = 1$.

Јасно је да је $\sigma(p) = p + 1$, ако је p прост број. Даље, ако је p прост број, онда је

$$\sigma(p^k) = 1 + p + p^2 + p^3 + \cdots + p^k = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}.$$

Теорема 1. Ако је $= p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, онда је

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$

Доказ. Следи на основу чињенице да се после множења заграда

$$\left(1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{\alpha_1}\right)\left(1 + p_2 + p_2^2 + \cdots + p_2^{\alpha_2}\right) \dots \left(1 + p_k + p_k^2 + \cdots + p_k^{\alpha_k}\right),$$

сваки делитељ броја n појављује тачно једанпут као сабирак.

□

Теорема 2. Функција $\sigma(n)$ је мултипликативна.

Доказ. Нека су x и y узајамно прости бројеви и нека су њихове факторизације на просте чиниоце (канонска представљања) дате са

$$x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \text{ и } y = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_r^{\beta_r}.$$

Како бројеви x и y немају заједничких простих делилаца, канонски облик њиховог производа је

$$xy = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_r^{\beta_r},$$

па је према теореми 1

$$\sigma(xy) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1} \cdot \frac{q_1^{\beta_1+1} - 1}{q_1 - 1} \cdot \frac{q_2^{\beta_2+1} - 1}{q_2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{q_r^{\beta_r+1} - 1}{q_r - 1}$$

$$= \sigma(x)\sigma(y).$$

□

ТЕОРЕМЕ ЕУКЛИДА И ОЈЛЕРА

Није познато да ли постоје непарни савршени бројеви.

Еуклидова и Ојлерова теорема, узете заједно, дају потребан и довољан услов да би неки паран природан број био савршен.

Теорема 3. (Еуклид) Ако је $2^n - 1$ прост број, онда је $2^{n-1}(2^n - 1)$ савршен број.

Доказ. Користећи чињеницу да је $\sigma(p) = p + 1$, ако је p прост број и мултипликативност функције $\sigma(x)$, имамо да је за $m = 2^{n-1}(2^n - 1)$ и $2^n - 1 = p$

$$\sigma(m) = \sigma(2^{n-1} \cdot p) = (2^n - 1)(p + 1) = (2^n - 1) \cdot 2^n = 2m.$$

□

Теорема 4. (Ојлер) Ако је паран природан број савршен, онда он има облик $2^{n-1}(2^n - 1)$, где је $2^n - 1$ прост број.

Доказ. Нека је $m = 2^{n-1} \cdot q$, где је q непаран број, $n > 1$ и $\sigma(m) = 2m$. Следи да је

$$\sigma(m) = \sigma(2^{n-1})\sigma(q) = (2^n - 1)\sigma(q) = 2m = 2^n q.$$

Одатле је $\sigma(q) = 2^n \frac{q}{2^n - 1}$. Како је $\sigma(q)$ природан и q непаран број, следи да је $q = (2^n - 1)k$, где је k непаран број и да је $\sigma(q) = 2^n \cdot k$. Како су k и $(2^n - 1)k$ делиоци броја q и како је њихов збир једнак $2^n \cdot k = \sigma(q)$, следи да q нема других делилаца. Дакле, $q = (2^n - 1)k$ је прост број, па је $k = 1$, тј. $2^n - 1$ је прост број.

□

ОБИЛНИ И ОСКУДНИ БРОЈЕВИ

Старогрчки математичари су сматрали важним да уз сваки број изучавају и све његове делиоце. Зато су поред савршених бројева посматрали *обилне* и *оскудне* бројеве. Број n је обилан, ако је $\sigma(n) > 2n$, а оскудан ако је $\sigma(n) < 2n$. У том смислу, „најоскуднији“ су прости бројеви, за које је $\sigma(n) = n + 1$. Оскудни су, такође, и степени двојке, али је код њих „оскудација“ најслабије изражена: $\sigma(2^k) = 2^{k+1} - 1$. С друге стране, обилност може бити веома изражена.

Теорема 5. Ако је n савршен или обилан број, онда је mn обилан број, за сваки природан број $m > 1$.

Доказ. Нека су $d_1 = 1$, d_2, ... , $d_k = n$ сви делиоци броја n. Тада су md_1, md_2, ... , md_k делиоци броја mn. Како је $m > 1$, делилац 1 није укључен у ову листу делилаца од mn. И без осталих делилаца броја mn, то је довољно да закључимо да је

$$\sigma(mn) \geq 1 + md_1 + \cdots + md_k > md_1 + \cdots + md_k = m\sigma(n).$$

Како је n савршен или обилан, то је $\sigma(n) \geq 2n$, па је

$$\sigma(mn) > m\sigma(n) \geq m \cdot 2n = 2mn,$$

што значи да је број mn обилан.

□

Обилни бројеви мањи од 50 су 12, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42 и 48. Обилност бројева 20 и 40 може се директно проверити, а за остале наведене бројеве следи на основу претходне теореме или се, такође, може директно проверити.

Теорема 6. Сваки паран број већи од 46 може се представити као збир два обилна броја.

Доказ. Остатак при дељењу парног броја са 6 је 0, 2 или 4, тј. сваки паран цео број је облика $6k$, $6k+2$ или $6k+4$.

Ако је $n = 6k$ и $k \geq 4$, важи $n = 6k = 6 \cdot 2 + 6(k-2)$, а према теореми 5, оба броја на десној страни су обилна.

Ако је $n = 6k+2$ и $k \geq 5$, важи

$$n = 6k + 2 = 6 \cdot 3 + 6(k-3) + 2 = 20 + 6(k-3);$$

20 је обилан број, као и други сабирак (теорема 5).

Ако је $n = 6k+4$ и $k \geq 8$, важи

$$n = 6k + 4 = 6 \cdot 6 + 6(k-6) + 4 = 40 + 6(k-6);$$

а 40 и $6(k-6)$ су обилни бројеви, за $k \geq 8$.

□

Теорема 7. Сваки цео број већи од 83160 може се представити као збир два
обилна броја.

Доказ. За парне бројеве тврђење следи на основу претходног задатка. Зато ћемо се ограничити на посматрање непарних бројева већих од 83160, мада доказ који ћемо дати обухвата и парне бројеве.

Као и у претходним тврђењима, обилност сабирака произилази из чињенице да су они дељиви познатим обилним бројевима.

Јасно је да из непарности збира $a + b$ призилази да су a и b различите парности. Зато нам је за доказ потребно да пронађемо неки непаран обилан број. Испоставља се да су непарни обилни бројеви ретки; најмањи је 945 (следећи је 1575).

Сада ћемо се позвати на један добро познати резултат из теорије линеарних диофантских једначина који гласи:

Ако су a и b узајамно прости природни бројеви, онда једначина

$$ax + by = c$$

има решење у скупу природних бројева, за сваки природан број $c > ab$.

Најмањи паран обилан број узајамно прост са $945 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7$ је $88 = 2^3 \cdot 11$. Зато једначина

$$88x + 945y = c$$

има решење (x, y) у скупу природних бројева, за сваки природан број $c > 88 \cdot 945 = 83160$. Како су 88 и 945 обилни бројеви, $88x$ и $945y$ су обилни бројеви за произвољне природне бројеве x и y. Тиме је тврђење доказано.

□

КОЛИКО ИМА САВРШЕНИХ БРОЈЕВА?

Савршени бројеви, као и савршени људи, врло су ретки.
Рене Декарт

Није познато да ли има бесконачно много савршених бројева. Није познато, такође, да ли уопште постоје непарни савршени бројеви. Зато би било коректније поставити питање: „Колико има природних бројева за које знамо (тј. за које је доказано) да су савршени?“ Сви до сада познати савршени бројеви су облика $2^{n-1}(2^n - 1)$, где је $2^n - 1$ прост број.

Међутим, ми не знамо колико има простих бројева облика $2^n - 1$, нити да ли је њихов број коначан или бесконачан. Природни бројеви облика $2^n - 1$ називају се *Мерсенови бројеви* и за њих користимо посебну ознаку: $M_n = 2^n - 1$.

Следећа теорема даје један потребан али не и довољан услов да би Мерсенов број M_n био прост.

Теорема 8. Ако је n природан број и $2^n - 1$ прост, онда је и n прост број.

Доказ. Доказаћемо еквивалентно тврђење, тј. да је $2^n - 1$ сложен број, ако је n сложен број. Нека је $n = rs$, $r > 1$, $s > 1$. Тада је

$$\begin{aligned} 2^n - 1 &= 2^{rs} - 1 \\ &= (2^r)^s - 1 \\ &= (2^r - 1)((2^r)^{s-1} + (2^r)^{s-2} + \cdots + 1). \end{aligned}$$

□

Према претходној теореми, број облика$2^n - 1$ не може бити прост ако n није прост. Зато се користи следећа нотација. Пишемо $M_p = 2^p - 1$, где се подразумева да је p прост број. Бројеви M_p називају се *Мерсенови прости бројеви* по француском математичару из 17. века који их је изучавао у вези са савршеним бројевима. Мерсенови прости бројеви су од посебног значаја. Разлози за то су делом историјски, а делом се заснивају

на чињеници да такви прости бројеви налазе примену у другим областима математике.

M_p је прост број за прва четири проста броја: $p = 2, 3, 5, 7$ ($M_2 = 3$, $M_3 = 7$, $M_5 = 31$, $M_7 = 127$). Међутим, следећи Мерсенов број је сложен: $M_{11} = 2047 = 23 \cdot 89$.

Мерсен је тврдио да су 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 и 257 једини прости бројеви, не већи од 257, за које је број $2^p - 12$ прост. Међутим, ова листа садржи грешке, које су откривене много времена после смрти М. Мерсена. Наиме, два броја за које је Мерсен тврдио да су прости, уствари су сложени, а испуштена су три проста броја. Первушин $(1827 - 1900)$ је, 1883. године, доказао да је M_{61} прост. За бројеве M_{89} и M_{107} је, такође, утврђено да су прости. С друге стране, за бројеве M_{67} и M_{257}показано је да су сложени.

Утврдити да ли је неки велики број (рецимо од неколико стотина цифара у декадном запису) прост, није нимало лак посао, чак ни данас кад располажемо моћним суперрачунарима. Мерсенови бројеви, међутим, спадају у класу природних бројева за које су развијене ефикасније методе тестирања.

До данас је за 50 Мерсенових бројева утврђено да су прости, али то нису првих 50 Мерсенових бројева. Тренутни рекордер је број $M_{77232917} = 2^{77232917} - 1$, који је откривен (доказано да је прост) 26. децембра 2017. године. То је и највећи досад познат прост број уопште. Декадни запис тога броја садржи 23249425 цифара. Људска машта није довољна да се стекне представа о величини тако великих бројева. Упоредимо га са бројем елементарних честица у целој видљивој васиони. Физичари су дошли до закључка да запис тога броја садржи око 80 цифара, дакле, могао би се записати у једном реду.

Толстојев "Рат и мир", прилично дебела књига, садржи приближно 3,1 милиона графичких знакова (слова и знакова интерпункције). Дакле, књига у којој би био наштампан само декадни запис досад највећег познатог простог броја била би скоро осам пута дебља од Толстојевог најпознатијег романа.

Из Еуклидове теореме следи да на основу сваког простог Мерсеновог броја добијамо један паран савршен број.

Како нам нису познати други бројеви, осим оних које добијамо на основу Еуклидове теореме, следи да нам је данас познато свега 50 савршених бројева. Највећи од њих је онај који добијамо на основу највећег до сада познатог простог Мерсеновог броја, тј. број

$$M_{77232917} = 2^{77232916}(2^{77232917} - 1).$$

ЗАДАЦИ

1. Доказати да степен простог броја не може бити савршен број.

Решење. Ако је

$$\sigma(p^k) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1} = 2p^k,$$

тада је $(p - 1) \cdot 2p^k = p^{k+1} - 1$, одакле је $2p^k = p^{k+1} + 1$, тј. $2 > p$, што је контрадикција.

2. Ако је n савршен број, онда је збир реципрочних вредности његових делилаца једнак 2. Доказати.

Решење. Нека су $d_1 = 1, d_2, \dots, d_k = n$ сви делиоци савршеног броја n. Тада је

$$\frac{n}{d_1} + \frac{n}{d_2} + \cdots + \frac{n}{d_k} = 2n,$$

одакле после дељења са n следи тврђење.

3. Доказати да се декадни запис сваког парног савршеног броја завршава цифром 6 или 8.

Решење. Паран савршен број m је облика $2^{n-1}(2^n - 1)$, где је $2^n - 1$ прост број. Према теореми 8, тада је и n прост број. Дакле, $n = 2$ или је n облика $4k + 1$ или $4k + 3$.
Ако је $n = 2$, тада је $m = 6$ и тврђење важи.
Ако је $n = 4k + 1$, тада је

$$m = 2^{4k}\left(2^{4k+1} - 1\right) = 16^k\left(2 \cdot 16^k - 1\right).$$

Како се 16^k завршава цифром 6, $2 \cdot 16^k - 1$ се завршава цифром 1, па се m завршава цифром 6.
Ако је $n = 4k + 3$, тада је

$$m = 2^{4k+2}\left(2^{4k+3} - 1\right) = 4 \cdot 16^k\left(8 \cdot 16^k - 1\right).$$

Како се 16^k завршава цифром 6, $4 \cdot 16^k$ се завршава цифром 4, $8 \cdot 16^k - 1$ се завршава цифром 7, па се m завршава цифром 8.

4. Наћи све савршене бројеве n такве да су $n - 1$ и $n + 1$ оба прости бројеви.

Решење. Очигледно је да се најмањи савршен број 6 налази између два проста броја 5 и 7. Доказаћемо да нема других савршених бројева са том особином.

Нека су $n-1$ и $n+1$ прости бројеви за неки природан број $n>6$. Тада је за неки цео број $k>1$, $n-1=6k-1$ и $n+1=6k+1$. (Сваки прост број већи од 3 даје при дељењу са 6 остатак 1 или 5.) Тада је $n=6k$, па су бројеви n, $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{3}$, $\frac{n}{6}$ различити делиоци броја n, већи од 1. Како је

$$n+\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{6}+1=2n+1>2n,$$

следи да број n не може бити савршен.

5. Наћи све савршене бројеве *n* за које је и број $\sigma\big(\sigma(n)\big)$ савршен.

Решење. Претпоставимо да је n паран савршен број. Тада је, према Ојлеровој теореми, $n=2^{p-1}(2^p-1)$, где је 2^p-1 прост број. Како су 2 и 2^p-1 различити прости бројеви, то је

$$\begin{aligned}\sigma\big(\sigma(n)\big)&=\sigma(2n)=\sigma\big(2^p(2^p-1)\big)=\sigma(2^p)\cdot\sigma(2^p-1)\\&=(2^{p+1}-1)\big((2^p-1)+1\big)=2^p(2^{p+1}-1).\end{aligned}$$

Јасно је да је овај број паран, па ако је и савршен, он је већ написан у Ојлеровом облику за савршене парне бројеве. У том случају је $2^{p+1}-1$ прост број, па је и $p+1$ прост број. Следи да су и p и $p+1$ прости бројеви, па како су то узастопни природни бројеви, то је $p=2$. Тада је $n=2(2^2-1)=6$ и

$$\sigma\big(\sigma(n)\big)=\sigma\big(\sigma(6)\big)=\sigma(12)=28.$$

Дакле, $n=6$ је једино решење.

Није познато да ли постоје непарни савршени бројеви, али није доказано ни да не постоје. Зато морамо размотрити и тај случај. Ако је n непаран савршен број, тада је $\sigma(n)=2n$, при чему су 2 и n узајамно прости бројеви, па је

$$\sigma\big(\sigma(n)\big)=\sigma(2n)=\sigma(2)\cdot\sigma(n)=3\cdot 2n=6n.$$

Јасно је да је $6n$ паран број, па ако је и савршен, онда је

$$6n=2^{p-1}(2^p-1),$$

где је p прост број. Међутим, како је p непаран број, број $6n$ садржи прост чинилац 2, али не и било који степен 2^k, за $k>1$. То значи да је $2^{p-1}=2^1$, одакле је $p=2$. Следи да је $6n=2(2^2-1)=6$, одакле је $n=1$. Како 1 није савршен број, дошли смо до контрадикције. Дакле не постоји непаран савршен број n за који је $\sigma\big(\sigma(n)\big)$ савршен број.

О ЈЕДНОМ НЕОДРЕЂЕНОМ ИНТЕГРАЛУ И ОЈЛЕРОВОЈ ФОРМУЛИ

Милан Митрески, Београд

У трећем разреду гимназије обрађује се формула за тригонометријски облик комплексног броја

$$z = \rho(\cos x + i \sin x),$$

где су ρ и x редом тзв. модуо и аргумент комплексног броја z. При представљању у комплексној равни, ρ је растојање одговарајуће тачке z од координатног почетка O, док је x угао који који вектор $\overrightarrow{Oz}$ образује с позитивним смером Re-осе.

За тригонометријски облик комплексног броја везан је следећи експоненцијални облик

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

познат као Ојлерова формула.

Извођењем Ојлерове формуле нећемо се бавити јер она није предвиђена планом и програмом за средње школе. Разлог је што то захтева познавање и коришћење Тејлорове формуле за развој функције у степени ред.

Једна од примена Ојлерове формуле односи се на решавање појединих неодређених интеграла. Њеном употребом се поступак решавања скраћује или поједностављује. Карактеристичан пример је следећи интеграл:

$$\int e^x \cos x \, dx.$$

Као што је познато, овај интеграл се једноставно решава двоструком парцијалном интеграцијом. Међутим, уз помоћ Ојлерове формуле, једноставно се решава само методом смене променљиве. Штавише, „успут“ добијамо и решење интеграла $\int e^x \sin x \, dx$.

Нека је $I_1 = \int e^x \cos x \, dx$ и $I_2 = \int e^x \sin x \, dx$. Тада за збир $I_1 + iI_2$ имамо

$$I_1 + iI_2 = \int e^x \cos x \, dx + i \int e^x \sin x \, dx$$

$$= \int e^x (\cos x + i \sin x) dx$$

Како је, на основу Ојлерове формуле, $\cos x + i \sin x = e^{ix}$, следи

$$I_1 + iI_2 = \int e^x \, e^{ix} dx = \int e^{(1+i)x} dx.$$

Након смене $(1+i)x = t$, $dt = (1+i)dx$, добијамо

$$\int e^{(1+i)x}dx = \frac{1}{1+i}\int e^t dt = \frac{1}{1+i}e^t + C,$$

где је $C = C_1 + iC_2$; $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ комплексна константа. Враћајући се на променљиву x добијамо

$$I_1 + iI_2 = \frac{e^{(1+i)x}}{1+i} = \frac{1}{1+i}e^{ix}e^x + C_1 + iC_2\ .$$

Како је $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1-i}{2}$ и $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, добијамо даље

$$I_1 + iI_2 = \frac{e^x}{2}(1-i)(\cos x + i\sin x) + C_1 + iC_2$$

$$= \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + i\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C_1 + iC_2$$

$$= \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + C_1 + i\left(\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C_2\right).$$

Изједначавајући реалне делове, добијамо да је

$$I_1 = \int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + C_1.$$

Слично, изједначавањем имагинарних делова, добијамо решење и другог интеграла

$$I_2 = \int e^x \sin x\, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C_2.$$

Лако је проверити да се методом парцијалне интеграције добијају идентични резултати.

ЗАДАТАК

Употребом Ојлерове формуле, одредити вредност неодређених интеграла:

(а) $\int e^{ax}\cos bx\, dx$; (б) $\int e^{ax}\sin bx\, dx$

ако $a, b \in \mathbb{R}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] YouTube снимак са канала
blackpenredpen: https://www.youtube.com/watch?v=E_ecLWj_rcM

НАГРАДНИ ЗАДАЦИ

Александар Миленковић, Ненад Стојановић

У рубрици „Наградни задаци” у сваком броју дајемо 20 задатака који су подељени у две групе. Задаци из прве групе су подељени по разредима и намењени су пре свега ученицима који се такмиче у Б категорији, док су задаци из друге групе намењени ученицима А категорије и нису подељени по разредима.

Позивамо све читаоце да шаљу предлоге задатака које сматрају посебно интересантним, као и сугестије које ће нам помоћи при састављању рубрике. Такође, позивамо све ученике да на адресу редакције шаљу откуцана или читко исписана решења постављених задатака; сваки задатак на засебном листу. Исто важи и за предлоге задатака. У наредним бројевима часописа публикују се комплетна решења раније постављених задатака, а на крају циклуса најуспешнији решавачи се награђују.

Предлоге и решења задатака слати на адресу:

„Тангента” – за рубрику „Наградни задаци”
Природно-математички факултет
Радоја Домановића 12
34000 Крагујевац

или **електронском поштом** (искључиво **pdf** формат) на адресу

tg_nagradnizadaci@yahoo.com

најкасније до 10. 09. 2020.

Прва група

Први разред

M1714. Одредити минималну вредност реалне функције

$$y = |4x - 8| - |x| + |2x + 2|.$$

M1715. Десет особа је распоређено укруг са једнаким растојањима између суседних. Свака особа познаје тачно три особе, две поред себе и особу која стоји тачно наспрам ње. На колико се начина датих десет особа може разбити у пет парова тако да се у сваком пару особе међусобно познају?

M1716. Кружнице $k_1(O_1, 2)$ и $k_2(O_2, 4)$ се додирују споља. Праве p и q су заједничке тангенте тих кружница. Права p додирује кружнице k_1 и k_2 у тачкама A и D, респективно, док права q додирује кружнице k_1 и k_2 у тачкама B и C, респективно. Одредити површину неконвексног шестоугла AO_1BCO_2D.

Други разред

M1717. Дијагонале тетивног четвороугла $ABCD$ секу се у тачки O. Доказати да је тачка O средиште дијагонале BD ако је $AB: AD = CD: CB$.

M1718. Нека су p и q позитивни бројеви за које важи $\log_9 p = \log_{12} q = \log_{16}(p + q)$. Одредити $\frac{p}{q}$.

M1719. Нека су a, b и c дужине страница троугла ABC и нека су α, β и γ мере одговарајућих унутрашњих углова троугла. Ако је $a^2 + b^2 = 9c^2$, одредити $\frac{\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$.

Трећи разред

M1720. Права s, чија је једначина $3x - 5y + 10 = 0$, ротира око тачке $(10, 8)$ за 45^0 у смеру супротном од кретања казаљке на часовнику. Одредити пресеке праве s', добијене ротацијом праве s, са координатним осама.

M1721. Дат је растући геометријски низ чији су сви чланови степени броја 3 и чији су изложиоци цели бројеви. Ако је $\sum_{n=0}^{7} \log_3(x_n) = 308$ и $56 \leq \log_3(\sum_{n=0}^{7} x_n) \leq 57$, одредити $\log_3(x_{14})$.

M1722. Израчунати $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5 + 2^n}{5^{n+2}}$.

Четврти разред

M1723. Одредити минималну вредност функције $f(x) = \frac{9(x \sin x)^2 + 4}{x \sin x}$ за $x \in (0, \pi)$.

M1724. Одредити функцију $f(x)$ ако је $f''(x) = 24x^2 - 48x + 2$ и ако график функције $f(x)$ пролази кроз тачке $(1, -9)$ и $(-2, -4)$.

M1725. За колико природних бројева $n \geq 2$ важи да за комплексне бројеве $z_1, z_2, \dots, z_n$ који испуњавају услове:

(а) $|z_1| = |z_2| = \cdots = |z_n| = 1$;

(б) $z_1 + z_1 + \cdots + z_n = 0$,

следи да су ти комплексни бројеви распоређени равномерно на кружници полупречника 1 у комплексној равни?

Друга група

M1726. У скупу реалних бројева решити једначину

$$(x^{2006} + 1)(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2004}) = 2006x^{2005}.$$

M1727. Нека су a, b и c позитивни реални бројеви такви да је $abc = 1$. Доказати да за сваки природан број $k > 1$ важи неједнакост

$$\frac{a^k}{a+b} + \frac{b^k}{b+c} + \frac{c^k}{c+a} \geq \frac{3}{2}.$$

M1728. Доказати да се број $2^{1992} - 1$ може записати као производ шест природних бројева већих од 2^{248}.

M1729. Одредити све ненегативне целе бројеве a, b, c, d и n који задовољавају једнакост

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 7 \cdot 4^n.$$

M1730. Нека су $x, y, z > 0$. Доказати да важи неједнакост

$$\frac{x}{2x + y + z} + \frac{y}{x + 2y + z} + \frac{z}{x + y + 2z} \leq \frac{3}{4}.$$

M1731. Одредити кодомен реалне функције

$$f(x) = \sin^4 x - \sin x \cos x + \cos^4 x.$$

M1732. Нека је $n > 1$ природан број и нека су $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0,1)$. Одредити максималну вредност збира

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt[6]{a_i(1 - a_{i+1})}.$$

ако је $a_{i+1} = a_1$.

M1733. Нека је $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Одредити број непразних подскупова A скупа T тако да $3 \mid S(A)$ и $5 \nmid S(A)$, где је број $S(A)$ збир свих елемената скупа A.

Решења задатака из прошлог броја

M1694. Две праве чији су коефицијенти правца 3 и $\frac{1}{3}$ секу се у тачки $(3, 3)$. Одредити површину троугла одређеног тим двема правама и x – осом.

Решење. На основу коефицијената праваца правих и тачке која им припада можемо, за обе праве, одредити пресеке са y-осом. Решавањем једначина

$$3 = 3 \cdot 3 + n_1$$

$$3 = \frac{1}{3} \cdot 3 + n_2,$$

добијамо да је $n_1 = -6$ и $n_2 = 2$. Једначине правих су $p: y = 3x - 6$ и $q: y = \frac{1}{3}x + 2$. Права p сече x –осу у тачки $(2, 0)$, а права q у тачки $(-6, 0)$. Дакле, троугао одређен правама p, q и x-осом има темена у тачкама $(-6, 0)$, $(2, 0)$ и $(3, 3)$. Страница која припада апсциси има дужину $6 + 2 = 8$, док је висина која одговара тој страници једнака растојању тачке $(3, 3)$ од x-осе, а то је 3. Следи да је површина траженог троугла једнака $\frac{8 \cdot 3}{2} = 12$.

M1695. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$x + 3y = 3$$

$$\big||x| - |y|\big| = 1 .$$

Решење. Из прве једначине следи да је $x = 3 - 3y$, па када то уврстимо у другу једначину добијамо $\big||3 - 3y| - |y|\big| = 1$. Разликоваћемо два случаја.

1° $y \geq 1$. Тада је $3 - 3y \leq 0$ и $y > 0$, па је $|3 - 3y| = 3y - 3$ и $|y| = y$. Стога је једначина $\big||3 - 3y| - |y|\big| = 1$ еквивалентна са $|3y - 3 - y| = 1$, односно $|2y - 3| = 1$. Овде имамо два подслучаја:

(1) $y \geq \frac{3}{2}$. Тада је $2y - 3 \geq 0$ и једначина $|2y - 3| = 1$ прелази у $2y - 3 = 1$, одакле је $y = 2$. Замењујући то у прву једначину добијамо да је $x = -3$. Према томе, решење је $(x, y) = (-3, 2)$.

(2) $1 \leq y < \frac{3}{2}$. Тада је $2y - 3 < 0$, па из $|2y - 3| = 1$ добијамо да је $3 - 2y = 1$, одакле је $y = 1$. Након замене у прву једначину добијамо да је $x = 0$. Решење је $(x, y) = (0, 1)$.

Оба решења су валидна јер испуњавају потребне услове.

2°. $y < 1$. Тада је $3 - 3y > 0$, па је $|3 - 3y| = 3 - 3y$. Једначина $\big||3 - 3y| - |y|\big| = 1$ је еквивалентна са $\big|3 - 3y - |y|\big| = 1$. Такође имамо два подслучаја.

(1) $0 \leq y < 1$. Тада је $y > 0$ и $|y| = y$, па је једначина $\big|3 - 3y - |y|\big| = 1$ еквивалентна са $|3 - 3y - y| = 1$, односно $|3 - 4y| = 1$. Сад имамо још два подслучаја.

- $0 \leq y \leq \frac{3}{4}$. Следи да је $3 - 4y \geq 0$ и $|3 - 4y| = 3 - 4y$. Тако добијамо једначину $3 - 4y = 1$, одакле је $y = \frac{1}{2}$. Заменом у прву једначину система, добијамо да је $x = \frac{3}{2}$. Решење је $(x, y) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
- $\frac{3}{4} < y < 1$. Тада је $3 - 4y < 0$ и $|3 - 4y| = 4y - 3$. Једначина $|3 - 4y| = 1$ је еквивалентна са $4y - 3 = 1$ чије је решење $y = 1$. Међутим, оно отпада због ограничења за y.

(2) $y < 0$. Тада је $|y| = -y$ и добијамо једначину $|3 - 3y + y| = 1$, односно $|3 - 2y| = 1$. Пошто је $y < 0$, израз $3 - 2y$ је позитиван, па добијамо једначину $3 - 2y = 1$, одакле је $y = 1$. Но, та могућност отпада јер је $y < 0$.

На основу свега горе наведеног закључујемо да систем једначина има три решења, $(x, y) \in \left\{(-3,2), (0,1), \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

M1696. На колико начина се слова из табеле (сл.1.) могу повезати у реч КВИЗ ако се кретање започиње од поља у коме се налази слово К и притом се, приликом кретања, може прећи на само неко од суседних поља? За дато поље суседна су поље изнад, поље испод, поље лево и поље десно од њега.

	З	И	З	
З	И	В	И	З
И	В	К	В	И
З	И	В	И	З
	З	И	З	

Сл.1.

Решење. Поље у коме се налази слово К има четири суседна поља у којима се налази слово В. Стога је број избора прва два слова у речи КВИЗ једнак 4. Даље, сваком слову В су суседна тачно по 3 слова И, док су сваком слову И суседна тачно по 2 слова З. На основу принципа производа, до речи КВИЗ се може стићи на $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ различитих начина.

M1697. Одредити природан број n такав да је $(n+1)! + (n+2)! = 399n!$. ($n!$ представља производ првих n природних бројева, тј. $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.)

Решење. На основу дефиниције факторијела дату једначину можемо представити у облику $(n+1)n! + (n+2)(n+1)n! = 399n!$. Пошто је $n!$ позитиван број, следи да је $(n+1) + (n+2)(n+1) = 399$, односно $n^2 + 4n - 396 = 0$. Решења су $n_1 = 18$ и $n_2 = -22$. Како је број n природан, решење задатка је $n = 18$.

M1698. Одредити број неподударних троуглова чије су дужине страница $\log_2 x$, $\log_4 x$ и 3, за цео број x.

Решење. Да би логаритам био дефинисан мора да $x > 0$. Како је $\log_2 1 = \log_4 1 = 0$, следи да је и $x \neq 1$. Према томе, x је цео број већи од 1. С друге стране, да би постојао троугао чије су дужине страница $\log_2 x$, $\log_4 x$ и 3 морају бити испуњене следеће три неједнакости:

$$\log_2 x + \log_4 x > 3$$

$$\log_2 x + 3 > \log_4 x$$

$$\log_4 x + 3 > \log_2 x\,.$$

Из прве неједнакости $\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x > 3$, односно $\log_2 x > 2$, одакле је $x > 4$. Из друге имамо $\log_2 x + \log_2 8 > \frac{1}{2}\log_2 x$, односно $\log_2 8x > \log_2 \sqrt{x}$. Следи $8x > \sqrt{x}$, што је испуњено за $x > \frac{1}{64}$. На крају, из треће добијамо $\log_4 64x > \log_4 x^2$, одакле је $64x > x^2$ и $0 < x < 64$.

Узимајући у обзир сва три ограничења, добијамо да је $4 < x < 64$. Дакле, постоје 59 неподударних троуглова чије су дужине страница $\log_2 x$, $\log_4 x$ и 3, за цео број x.

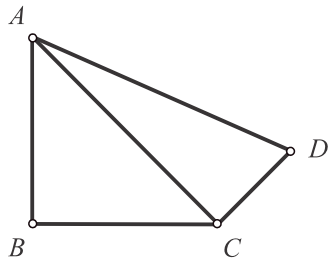
M1699. Троугао ACD, са правим углом код темена C, конструисан је над хипотенузом AC једнакокрако-правоуглог троугла ABC тако да су тачке D и B са различитих страна праве AC. Ако су дужине страница AB и BC једнаке $1\,cm$ и ако троуглови ACD и ABC имају једнаке обиме, одредити $\sin(2\measuredangle BAD)$.

Решење. Како је троугао ABC једнакокрако-правоугли и како су дужине страница AB и BC једнаке $1\,cm$ следи да је $AC = \sqrt{2}\,cm$ (сл.2.). Даље, на основу услова о једнакости обима два троугла следи да је $AD + CD = 2$ cm. Применом Питагорине теореме на троугао ACD добијамо да је $AD^2 - CD^2 = 2\,cm^2$, односно $(AD + CD)(AD - CD) = 2\text{cm}^2$. Из система једначина

$$AD + CD = 2\ cm$$

$$AD - CD = 1\ cm$$

следи да је $AD = \frac{3}{2}\ cm$ и $CD = \frac{1}{2}\ cm$.



Сл.2.

Како је $\sin(2\measuredangle BAD) = 2\sin(\measuredangle BAD)\cos(\measuredangle BAD)$, одредићемо $\sin(\measuredangle BAD)$ и $\cos(\measuredangle BAD)$. Пошто је $\measuredangle BAD = \measuredangle BAC + \measuredangle CAD$, то је

$$\begin{aligned}\sin(\measuredangle BAD) &= \sin(\measuredangle BAC + \measuredangle CAD)\\ &= \sin(\measuredangle BAC)\cos(\measuredangle CAD) + \cos(\measuredangle BAC)\sin(\measuredangle CAD)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{3}\\ &= \frac{4+\sqrt{2}}{6}.\end{aligned} \tag{1}$$

Слично је

$$\begin{aligned}\cos(\measuredangle BAD) &= \cos(\measuredangle BAC + \measuredangle CAD)\\ &= \cos(\measuredangle BAC)\cos(\measuredangle CAD) - \sin(\measuredangle BAC)\sin(\measuredangle CAD)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{3}\\ &= \frac{4-\sqrt{2}}{6}.\end{aligned} \tag{2}$$

Коначно, из (1) и (2) је

$$\begin{aligned}\sin(2\measuredangle BAD) = 2\sin(\measuredangle BAD)\cos(\measuredangle BAD) &= 2\cdot\frac{4+\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{4-\sqrt{2}}{6}\\ &= \frac{7}{9}\end{aligned}$$

што је уједно и решење задатка.

M1700. Једначином $x^2(x+y+2)=y^2(x+y+2)$ су одређене:

(а) две паралелне праве;
(б) две праве које се секу;
(в) три различите праве које се секу у једној тачки;
(г) три различите праве које немају заједничку тачку;
(д) права и парабола.

Образложити одговор и одредити једначине одговарајућих скупова тачака.

Решење. Дата једначина је еквивалентна са $(x^2-y^2)(x+y+2)=0$, односно са $(x-y)(x+y)(x+y+2)=0$. Одатле је $x-y=0$ или $x+y=0$ или $x+y+2=0$, односно $y=x$ или $y=-x$ или $y=-x-2$.

Према томе, у питању су три праве. Како друга и трећа имају коефицијенте правца -1, оне су паралелне. Закључујемо да је тачан одговор под (г) односно да су датом једначином одређене три различите праве које немају заједничку тачку.

M1701. Скуп S чине сви низови од 19 елемената који задовољавају следеће услове:

(а) сваки елемент је 0 или 1;
(б) први и последњи елементи сваког низа су нуле;
(в) ни у једном низу не постоје два суседне нуле;
(г) ни у једном низу не постоје три суседне јединице.

Одредити број низова у скупу S.

Решење. По услову задатка, први и последњи елементи низа су нуле. На основу услова да у низу не постоје две суседне нуле и не постоје три суседне јединице, то практично значи да ће се после прве нуле у низу, свака следећа нула налазити два или три места удаљена од претходне нуле. Између њих ће бити блокови од једне или две јединице. Тако свака нула и блок јединица који следи образују подниз дужине 2 или 3. Како је последњи елемент низа 0, треба да установимо на колико начина се број 18 може представити као збир двојки и тројки при чему је редослед сабирака битан. Разликоваћемо неколико случајева сходно томе колико има сабирака који су тројке. Приметимо да, с обзиром да је збир 18, број тројки мора бити паран.

(а) *Ниједна тројка.* Тада су сви сабирци двојке, тј. $18=9\cdot 2$, те таквих низова има тачно један.

(б) *Две тројке*. Тада имамо 8 сабирака, две тројке и шест двојки. Места за тројке можемо изабрати на $\binom{8}{2}=28$ начина, на осталим су двојке. Толико има тражених низова овог типа.

(в) *Четири тројке*. Сад имамо 7 сабирака, четири тројке и три двојке. Као у (б) закључујемо да таквих збирова, односно таквих низова, има $\binom{7}{3} = 35$.

(г) *Шест тројки*. Тада су сви сабирци тројке, па је тачно један такав збир и тачно један такав низ.

На основу принципа збира, из (а), (б), (в) и (г) закључујемо да скуп S чини укупно $1 + 28 + 35 + 1 = 65$ различитих низова.

M1702. Ако $S(n)$ означава збир цифара природног броја n, одредити све природне бројеве n за које важи $n + S(n) + S(S(n)) = 2019$.

Решење. За $n < 2019$, највећа вредност израза $n + S(n) + S(S(n))$, очигледно се достиже за $n = 1999$. Пошто је $S(1999) = 28$ и $S(S(1999)) = S(28) = 10$, следи да је $2019 = n + S(n) + S(S(n)) < n + 38$, односно $n + 38 > 2019$, тј. $n > 1981$. Разликоваћемо четири случаја.

1° $n = \overline{198x}$, $0 \le x \le 9$. Тада је $n = 1980 + x$ и $S(n) = 18 + x$. Вредност $S(S(n))$ зависи од x и имамо два подслучаја

(а) $x \le 1$. Тада је $S\big(S(n)\big) = S(18 + x) = 9 + x$, па је

$$n + S(n) + S(S(n)) = (1980 + x) + (18 + x) + (9 + x) = 2019,$$

односно $3x + 2007 = 2019$. Следи $x = 4$, што је у контрадикцији са $x \le 1$. Тако овај случај није могућ

(б) $2 \le x \le 9$. Тада је $18 + x = \overline{2y}$, где је $0 \le y \le 7$, па је $S(18 + x) = 2 + y = x - 2$. Одатле је

$$n + S(n) + S(S(n)) = (1980 + x) + (18 + x) + (x - 2) = 2019,$$

односно $3x + 1998 = 2019$, одакле је $x = 7$.

Дакле, једно решење је $n = 1987$.

2° $n = \overline{199x}$, $0 \le x \le 9$. Тада је $n = 1990 + x$ и $S(n) = 19 + x$. Вредност $S(S(n))$ поново зависи од x, па имамо следеће подслучајеве.

(а) $x = 0$. Тада је $S\big(S(n)\big) = S(19 + x) = 10$, па је

$$n + S(n) + S(S(n)) = 1990 + 19 + 10 = 2019,$$

односно $n = 1990$, што је такође решење.

(б) $1 \le x \le 9$. Тада је $19 + x = \overline{2y}$, где је $0 \le y \le 8$, па је $S(19 + x) = 2 + y = x - 1$. Следи

$$n + S(n) + S(S(n)) = (1990 + x) + (19 + x) + (x - 1) = 2019,$$

односно $3x + 2010 = 2019$, одакле је $x = 3$. Решење је $n = 1993$.

3° $n = \overline{200x}$, $0 \leq x \leq 9$. Тада је $n = 2000 + x$ и $S(n) = 2 + x$. За $S(S(n))$ имамо два подслучаја.

(а) $0 \leq x \leq 7$. Тада је $S\big(S(n)\big) = S(2 + x) = 2 + x$, па је

$$n + S(n) + S(\,S(n)) = (2000 + x) + (2 + x) + (2 + x) = 2019,$$

односно $3x + 2004 = 2019$, одакле је $x = 5$. Тако је $n = 2005$ још једно решење.

(б) $8 \leq x \leq 9$. Лако се проверава да је

$$2008 + S(2008) + S\big(S(2008)\big) = 2008 + 10 + S(10) = 2008 + 10 + 1$$
$$= 2019,$$

па је $n = 2008$ такође решење.

С друге стране је

$$2009 + S(2009) + S\big(S(2009)\big) = 2009 + 11 + S(11) = 2009 + 11 + 2$$
$$> 2019,$$

па $n = 2009$ није решење.

4° $n = \overline{201x}$, $0 \leq x \leq 9$. Сад је $n = 2010 + x$ и $S(n) = 3 + x$. За $S(S(n))$ имамо следеће подслучајеве.

(а) $0 \leq x \leq 6$. Тада је $S\big(S(n)\big) = S(3 + x) = 3 + x$. па је

$$n + S(n) + S(\,S(n)) = (2010 + x) + (3 + x) + (3 + x) = 2019,$$

односно $3x + 2016 = 2019$, одакле је $x = 1$. Решење је $n = 2011$.

(б) $7 \leq x \leq 9$. Тада је $3 + x = \overline{1y}$, где је $0 \leq y \leq 2$, па је $S(3 + x) = 1 + y = x - 6$. Следи

$$n + S(n) + S(\,S(n)) = (2010 + x) + (3 + x) + (x - 6) = 2019,$$

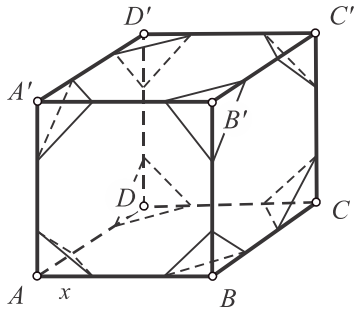
односно $3x + 2007 = 2019$, одакле је $x = 4$. Међутим, то отпада јер је $7 \leq x \leq 9$.

На основу свих анализираних случајева следи да

$$n \in \{1987, 1990, 1993, 2005, 2008, 2011\}.$$

M1703. Од свих „ћошкова“ јединичне коцке одсечене су подударне пирамиде тако да је на свакој страни коцке остао правилан осмоугао. Одредити запремину тако насталог тела.

Решење. Ако је x бочна ивица једне одсечене пирамиде, тада су три бочне стране те пирамиде једнакокрако-правоугли троуглови са страницама x, x и $x\sqrt{2}$, док је основа једнакостраничан троугао странице $x\sqrt{2}$ (сл. 3).



Сл.3.

Пошто је на свакој страни коцке остао правилан осмоугао, његова страница је $x\sqrt{2}$. Одатле следи да је $x + x\sqrt{2} + x = 1$ јер је коцка јединична. Отуда је $x = \frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

За одређивање запремине одсеченог „ћошка“ згодно је да се тај део посматра као тространа пирамида чија је основа једнакокрако-правоугли троугао с катетама x; као „ћошак“ при темену A на сл. 3. Висина тако посматране тростране пирамиде је такође x, па је њена запремина једнака $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} x^2 \cdot x = \frac{x^3}{6}$. Како коцка има осам „ћошака“, њихова укупна запремина једнака је $\frac{8x^3}{6} = \frac{4x^3}{3} = \frac{4\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^3}{3} = \frac{4 \cdot \frac{20-14\sqrt{2}}{8}}{3} = \frac{10-7\sqrt{2}}{3}$.

Следи да је запремина насталог тела једнака $1 - \frac{10-7\sqrt{2}}{3} = \frac{7\sqrt{2}-7}{3}$.

M1704. Скуп природних бројева се назива „разуђен скуп“ ако за сваку тројку узастопних природних бројева садржи највише један број из те тројке. На пример, за тројку 1, 2, 3 разуђен скуп може да садржи или ниједан од тих бројева или само 1 или само 2 или само 3. Колико има „разуђених подскупова“ скупа $\{1, 2, \dots, 10\}$.

Решење. Нека је $\{a_1, a_2, \dots, a_i\}$ „разуђен подскуп“ скупа $\{1, 2, \dots, 10\}$, где је $a_1 < a_2 < \dots < a_i$. Тада је, због услова задатка,

$$a_2 - a_1 \geq 3,\ a_3 - a_2 \geq 3, \dots, a_i - a_{i-1} \geq 3. \qquad (1)$$

Одавде је $a_2 \geq a_1 + 3$, $a_3 \geq a_1 + 6$, … , $a_i \geq a_1 + (i-1) \cdot 3$. Како је $a_i \leq 10$ и $a_1 \geq 1$, следи да је $i \leq 4$. Дакле кардиналност „разуђених подскупова“ скупа $\{1, 2, \dots, 10\}$ је највише 4. Тако имамо пет могућности, где i означава кардиналност „разуђеног подскупа“; $i = 0$ одговара празном подскупу.

Пре него што се упустимо у разматрање тих случајева, приметимо следеће.

Нека $\{a_1, a_2, \dots, a_i\}$ „разуђен подскуп“ скупа $\{1, 2, \dots, 10\}$. Тада му, с обзиром на (1), одговара подскуп $\{a_1, a_2 - 2, \dots, a_i - (i-1)\cdot 2\}$ скупа $\{1, 2, \dots, 10 - (i-1)\cdot 2\}$. Међутим, важи и обратно. Наиме, ако је $\{b_1, b_2, \dots, b_i\}$ подскуп скупа $\{1, 2, \dots, 10 - (i-1)\cdot 2\}$, тада се лако види да је $\{b_1, b_2 + 2, \dots, b_i + (i-1)\cdot 2\}$ „разуђен подскуп“ скупа $\{1, 2, \dots, 10\}$. Како је у питању бијекција, број „разуђених i-чланих подскупова“ скупа $\{1, 2, \dots, 10\}$ једнак је броју i-чланих подскупова скупа $\{1, 2, \dots, 10 - (i-1)\cdot 2\}$. А он је једнак $\binom{10-2(i-1)}{i} = \binom{12-2i}{i}$.

Размотримо сад поменуте случајеве.

1° $i = 4$. На основу напред реченог број тражених четворочланих „разуђених подскупова“ једнак је

$$\binom{12-2\cdot 4}{4} = \binom{4}{4} = 1.$$

Тај број је једнак броју четворочланих подскупова скупа $\{1, 2, 3, 4\}$, а то је очигледно један; сам тај скуп. Иначе, одговарајући „разуђени подскуп“ је

$$\{1, 2+2, 3+2\cdot 2, 4+3\cdot 2\} = \{1, 4, 7, 10\}.$$

2° $i = 3$. Број тражених трочланих подскупова једнак је

$$\binom{12-2\cdot 3}{3} = \binom{6}{3} = 20.$$

3° $i = 2$. Број тражених двочланих подскупова једнак је

$$\binom{12-2\cdot 2}{2} = \binom{8}{2} = 28.$$

4° $i = 1$. Број тражених једночланих подскупова једнак је

$$\binom{12-2\cdot 1}{1} = \binom{10}{1} = 10.$$

5° $i = 0$. Број тражених празних подскупова једнак је

$$\binom{12-2\cdot 0}{0} = \binom{12}{0} = 1.$$

На основу принципа збира, укупан број тражених „разуђених подскупова“ једнак је $1 + 20 + 28 + 10 + 1 = 60$.

M1705. Нека су a, b и c позитивни реални бројеви такви да је $a^2 + b^2 + c^2 = 5$. Доказати да је тада

$$\frac{a^3}{2b+3c} + \frac{b^3}{2c+3a} + \frac{c^3}{2a+3b} \geq 1.$$

Решење. Применом познате неједнакости између геометријске и аритметичке средине добијамо да је

$$\frac{25a^3}{2b+3c} + a(2b+3c) \geq 2\sqrt{\frac{25a^3}{2b+3c}\cdot a(2b+3c)} = 10a^2.$$

Аналогно је

$$\frac{25b^3}{2c+3a}+b(2c+3a)\geq 2\sqrt{\frac{25b^3}{2c+3a}\cdot b(2c+3a)}=10b^2$$

$$\frac{25c^3}{2a+3b}+c(2a+3b)\geq 2\sqrt{\frac{25c^3}{2a+3b}\cdot c(2a+3b)}=10c^2.$$

Сабирањем три неједнакости добијамо да је

$$25\left(\frac{a^3}{2b+3c}+\frac{b^3}{2c+3a}+\frac{c^3}{2a+3b}\right)+5(bc\ +\ ca\ +\ ab)\geq 10(a^2+b^2+c^2),$$

односно

$$\frac{a^3}{2b+3c}+\frac{b^3}{2c+3a}+\frac{c^3}{2a+3b}\geq\frac{1}{25}(10(a^2+b^2+c^2)-5(bc\ +\ ca\ +\ ab)).$$

На основу познате неједнакости $a^2+b^2+c^2\geq bc\ +\ ca\ +\ ab$ следи да је

$$(10(a^2+b^2+c^2)-5(bc\ +\ ca\ +\ ab))\geq 5(a^2+b^2+c^2).$$

Из последње две неједнакости добијамо

$$\frac{a^3}{2b+3c}+\frac{b^3}{2c+3a}+\frac{c^3}{2a+3b}\geq\frac{1}{25}\cdot 5(a^2+b^2+c^2)=\frac{1}{25}\cdot 5\cdot 5=1,$$

што је и требало да се докаже.

M1706. Доказати да је

$$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Решење. Посматрајмо комплексни број $z=\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$, чији је реални део $x=\cos\frac{\pi}{5}$. Користећи Муаврову формула лако налазимо да је $z^5=-1$, што је еквивалентно са

$$(z+1)(z^4-z^3+z^2-z+1)=0.$$

Како је $z\neq -1$, следи да је $z^4-z^3+z^2-z+1=0$. Дељењем са $z^2\neq 0$, ову једначина може трансформисати у облик $z^2+\frac{1}{z^2}-\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=0$. Пошто је $x=\cos\frac{\pi}{5}>0$ реални део комплексног броја z, лако се добија да је $z+\frac{1}{z}=2x$ и $z^2+\frac{1}{z^2}=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2=4x^2-2$. Дакле реални део x комплексног броја z задовољава једначину

$$4x^2-2x-1=0.$$

Како је $x > 0$, налазимо да је $x = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, тј. $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

M1707. Ако су a, b, c, d, e позитивни реални бројеви, доказати да важи неједнакост

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+a} + \frac{e}{a+b} \geq \frac{5}{2}.$$

Решење. Ако први разломак проширимо са a, други са b, … , последњи са e, добијамо једнакост

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+a} + \frac{e}{a+b} =$$
$$\frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{bc+bd} + \frac{c^2}{cd+ce} + \frac{d^2}{de+da} + \frac{e^2}{ea+eb}.$$

Даље ћемо користи следећу лему чији доказ остављамо читаоцима за вежбу.

Лема. Ако су a, b, c, d, e, x, y, z, u, v реални бројеви такви да су x, y, z, u, v позитивни, тада важи неједнакост

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} + \frac{d^2}{u} + \frac{e^2}{v} \geq \frac{(a+b+c+d+e)^2}{x+y+z+u+v}.$$

□

Примењујући лему на последњи израз добијамо да је

$$\frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{bc+bd} + \frac{c^2}{cd+ce} + \frac{d^2}{de+da} + \frac{e^2}{ea+eb} \geq$$
$$\frac{(a+b+c+d+e)^2}{ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de}.$$

Како је

$$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (a-e)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 +$$
$$(b-e)^2 + (c-d)^2 + (c-e)^2 + (d-e)^2 \geq 0,$$

квадрирањем и једноставним трансформацијама добијамо да је

$$2(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2) \geq$$
$$ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de,$$

односно

$(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)+$

$2(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de)\geq$

$\frac{5}{2}(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de).$

Како је

$(a+b+c+d+e)^2=$

$(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)+$

$2(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de),$

из последње неједнакости следи

$(a+b+c+d+e)^2\geq$

$\frac{5}{2}(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de).$

Узимајући све у обзир, добијамо

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+a}+\frac{e}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+bd}+\frac{c^2}{cd+ce}+\frac{d^2}{de+da}+\frac{e^2}{ea+eb}$$

$$\geq\frac{(a+b+c+d+e)^2}{ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de}$$

$$\geq\frac{\frac{5}{2}(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de)}{(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de)}$$

$$=\frac{5}{2}.$$

M1708. Одредити све парове целих бројева (x,y) и природан број m за које важи да је $x^2(x^2+y)=y^{m+1}$.

Решење. Једначину $x^2(x^2+y)=y^{m+1}$ множећи са 4 можемо записати у облику$(2x^2+y)^2=y^2+4y^{m+1}$ или

$$(2x^2+y)^2=y^2(1+4y^{m-1}).$$

Како је десна страна потпун квадрат, потпун квадрат је и лева. Из тога следи да је $1+4y^{m-1}$ потпун квадрат. Како је то непаран број, он је квадрат непарног броја. Отуда је $1+4y^{m-1}=(2a+1)^2$.

Из последње једнакости је $y^{m-1}=a(a+1)$. Како су a и $a+1$ узајамно прости бројеви, сваки од њих мора бити $(m-1)$–ви степен неког броја. А то је могуће само за $m-1=1$, тј. $m=2$, па је $y=a(a+1)$.

Дакле, имамо да је $2x^2 + a(a+1) = a(a+1)(2a+1)$, па је

$$x^2 = a^2(a+1).$$

Закључујемо да је $a+1$ потпун квадрат неког броја. Стављајући да је $a+1 = t^2$, па добијамо да је $x = t^3 - t$ и $y = t^4 - t^2$.

M1709. Све нуле полинома $p(x) = x^{100} - 100x^{99} + \cdots + 1$ су реалне и позитивне. Уколико је могуће, одредити те нуле.

Решење. Како је $p(x)$ полином стотог степена, он има 100 нула (рачунајући вешеструкости). Нека су то $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$. На основу Виетових формула је

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{100} = 100 \qquad (1)$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_{100} = 1. \qquad (2)$$

Како су нуле $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ реалне и позитивне, користећи неједнакост аритеметичке и геометријске средине налазимо да је

$$\sqrt[100]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_{100}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{100}}{100},$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $x_1 = x_2 = \cdots = x_{100}$. Међутим, због (1) и (2), и лева и десна страна су једнаке 1, тј. важи једнакост.

Дакле, имамо да је $x_1 = x_2 = \cdots = x_{100}$, па из једнакости (1) добијамо да је $x_1 = x_2 = \cdots = x_{100} = 1$.

M1710. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned} a + b &= 8 \\ ab + c + d &= 23 \\ ad + bc &= 28 \\ cd &= 12\,. \end{aligned}$$

Решење. Згодно ћемо изабрати два квадратна тринома, помножити их и искористити дате вредности у добијеном полиному четвртог степена.

То су квадратни триноми $x^2 + ax + c$ и $x^2 + bx + d$. Након множења добијамо

$$(x^2 + ax + c)(x^2 + bx + d) = \qquad (1)$$

$$x^4 + (a+b)x^3 + (ab + c + d)x^2 + (ad + bc)x + cd.$$

С обзиром на дате вредности, резултујући полином $p(x)$ гласи

$$p(x) = x^4 + 8x^3 + 23x^2 + 28x + 12.$$

А он се може записати у облику

$$p(x) = (x+1)(x+2)^2(x+3).$$

Како је полином $p(x)$ једнак производу два квадратна тринома, имамо две могућности

$$p(x) = \big((x+1)(x+2)\big)\big((x+2)(x+3)\big) = (x^2+3x+2)(x^2+5x+6).$$

и

$$p(x) = \big((x+1)(x+3)\big)(x+2)^2 = (x^2+4x+3)(x^2+4x+4).$$

Због (1) и симетрије из првог израза за $p(x)$добијамо решења

$$(a,b,c,d) \in \{(3,5,2,6),(5,3,6,2)\},$$

а из другог

$$(a,b,c,d) \in \{(4,4,3,4),(4,4,4,3)\}.$$

Заједно, чине скуп свих решења датог система једначина.

M1711. Ако за чланове низа $a_1, a_2, \dots, a_n$ важе следећи услови

$$a_1 = 0, |a_2| = |a_1+1|, \dots, |a_n| = |a_{n-1}+1|,$$

доказати да је $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq -\frac{1}{2}$.

Решење. Дефинишимо $|a_{n+1}|$ са $|a_{n+1}| = |a_n+1|$. Како је $|x| = |y|$ ако и само ако је $x^2 = y^2$, имамо да је

$$\begin{aligned} a_2^2 &= a_1^2 + 2a_1 + 1 \\ a_3^2 &= a_2^2 + 2a_2 + 1 \\ &\dots \\ a_n^2 &= a_{n-1}^2 + 2a_{n-1} + 1 \\ a_{n+1}^2 &= a_n^2 + 2a_n + 1. \end{aligned}$$

Сабирајући леве и десне стране и имајући у виду да су ненегативне, добијамо

$$a_{n+1}^2 = 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + n \geq 0.$$

Одатле је $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq -\frac{1}{2}$, што је тражена неједнакост.

M1712. Доказати да за свака два реална броја a и b важи неједнакост

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

Решење. Ако су a и b истог знака, тада важи једнакост $|a+b| = |a| + |b|$, па добијамо да је

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} = \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

Ако су a и b супротног знака, без губљења општости претпоставимо да је $|a| \geq |b|$. Тада је $|a+b| \leq |a|$ па је

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

То је и требало доказати.

M1713. Одредити остатак при дељењу броја $3^{2^n} - 1$ бројем 2^{n+3}, $n \in \mathbb{N}$.

Решење. Број $3^{2^n} - 1$ можемо записати у облику

$$3^{2^n} - 1 = \left(3^{2^{n-1}} - 1\right)\left(3^{2^{n-1}} + 1\right), \qquad (1)$$

а број $3^{2^{n-1}} - 1$ у облику

$$3^{2^{n-1}} - 1 = \left(3^{2^{n-2}} - 1\right)\left(3^{2^{n-2}} + 1\right).$$

Замењујући то у (1), добијамо

$$3^{2^n} - 1 = \left(3^{2^{n-2}} - 1\right)\left(3^{2^{n-2}} + 1\right)\left(3^{2^{n-1}} + 1\right).$$

Примењујући исту трансформацију на $3^{2^{n-2}} - 1$ итд. добијамо да је

$$3^{2^n} - 1 = (3-1)(3+1)(3^2+1)\left(3^{2^2}+1\right)\cdots\left(3^{2^{n-2}}+1\right)\left(3^{2^{n-1}}+1\right).$$

Очигледно, сваки од бројева $3^2+1, 3^{2^2}+1, \ldots, 3^{2^{n-2}}+1, 3^{2^{n-1}}+1$ је дељив са 2. Тврдимо да ниједан није дељив са 4.

Заиста, како је $3 \equiv -1\ (mod\ 4)$, следи $3^{2^k} \equiv 1\ (mod\ 4)$. Отуда је $3^{2^k} + 1 \equiv 2\ (mod\ 4)$, па је

$$(3^2+1)\left(3^{2^2}+1\right)\cdots\left(3^{2^{n-2}}+1\right)\left(3^{2^{n-1}}+1\right) = 2^{n-1}(2m+1).$$

Тако имамо да је

$$3^{2^n} - 1 = 2 \cdot 4 \cdot 2^{n-1}(2m+1) = m \cdot 2^{n+3} + 2^{n+2},$$

одакле закључујемо да је тражени остатак једнак 2^{n+2}.

Задатке су решили (Тангента број 98):

Митрески Милан, IV разред, Београд: M1675, M1677, M1678, M1679, M1680, M1692, M1693; ***Тешић Оїњен***, I разред, Суботица: M1675, M1676, M1680.

Задатке су решили (Тангента број 99):

Митрески Милан, IV разред, Београд: M1705, M1706, M1707, M1709, M1710, M17012, M1713; ***Тешић Оїњен***, I разред, Суботица: M1694, M1695, M1696, M1697, M1698, M1699, M1700, M1706, M1708, M1710, M17012; ***Петровић Лука***, IV разред, Горњи Милановац: M1706, M1707, M1709, M1711, M17012, M1713; ***Цуклевски Алекса***: M1713.

Hello, World!

УПАРИВАЊЕ У БИПАРТИТНИМ ГРАФОВИМА

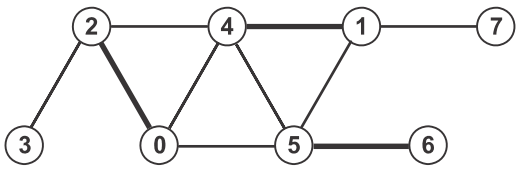
Павле Мартиновић, Београд

Увод и дефиниције

У графовима се можемо срести са разним интересантним проблемима од којих је велик број тежак и није нам познато како да их брзо решимо. У ту категорију спадају проблеми најдужег пута, највеће клике, хроматског броја итд. У овом чланку ће бити представљен један од најпознатијих графовских проблема: проблем максималног упаривања у графу.

Две гране графа су *независне* ако немају заједничких чворова. *Упаривање* је скуп грана такав да су сваке две независне. У формалном запису, то је скуп $M = \{e_1, e_2, \cdots, e_k\} \subset E$ такав да је $e_i \cap e_j = \emptyset$ за све $i \neq j$.

Нека је G граф са скупом чворова $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ и скупом грана $E = \{\{0, 2\}, \{0, 4\}, \{0, 5\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$ (сл. 1). Тада је $M = \{\{0,2\}, \{1,4\}, \{5,6\}\}$ (подебљане гране) једно упаривање у G.



Сл. 1.

За дати граф G и дато упаривање M у њему, уводимо неколико нових појмова које ћемо касније користити.

Чвор v је *упарен* у M уколико је крај неке гране из M. У противном, v је *неупарен* у M. На пример, у горњем графу чвор 5 је упарен у наведеном упаривању M, док чвор 3 није.

Упаривање M је *максимално* уколико је $|M| \geq |M'|$, за свако друго упаривање M'. ($|M|$ означава број грана у упаривању M.) *Савршено* или *перфектно упаривање* је упаривање у којем је сваки чвор графа G упарен. На пример, у графу горе, упаривање M није максимално, док је упаривање $M' = \{\{0,4\}, \{1,7\}, \{2,3\}, \{5,6\}\}$ савршено. Очигледно, свако савршено упаривање је максимално, а обратно не мора да важи.

Нека је M упаривање у графу G. За пут $P = v_1 v_2 \ldots v_k$ графа G кажемо да *наизменични* или *алтернирајући* с обзиром на M ако за његове гране

важи: $v_1v_2 \in M$, $v_2v_3 \notin M$, $v_3v_4 \in M$, $v_4v_5 \notin M$, … или $v_1v_2 \notin M$, $v_2v_3 \in M$, $v_3v_4 \notin M$, $v_4v_5 \in M$, … . Такав пут још зовемо M-*наизменични* или M-*алтернирајући*. Пут $2-0-4-1-7$ је један M-*наизменични* пут у графу на сл. 1.

Повећавајући пут с обзиром на упаривање M или M-повећавајући пут је M-*наизменични* пут чији крајњи чворови нису упарени M. Очигледно, сваки повећавајући пут је непарне дужине. У графу на сл. 1, пут $3-2-0-4-1-7$ је M-повећавајући.

Проблем максималног упаривања је проблем налажења максималног упаривања у датом графу. Проблем је решен за општи случај. Едмондсов алгоритам, чија је сложеност $O(|E||V|^2)$, налази максимално упаривање за произвољан граф. Међутим, алгоритам је преопширан за овај чланак. Ми ћемо се искључиво бавити овим проблемом у тзв. бипартитим графовима.

Граф G је *бипартитан* ако се његов скуп чворова може поделити на два непразна дисјунктна подскупа (црни и бели чворови) тако да свака грана графа G спаја један црни и један бели чвор.

Можемо видети да се у великом броју практичних проблема у којима се јавља проблем упаривања, појављују управо бипартитни графови. На пример, проблем расподеле послова (job assignment), проблем формирања брачних парова (marriage problem) итд.

Испоставља се да се у бипартитним графовима, проблем максималног упаривања знатно лакше и брже решава.

Бержова теорема

Ово тврђење које потиче од француског граф-теоретичара Бержа је клучно за испитивања максималних упаривања.

Теорема. (Берж 1957) *Упаривање A је максимално у графу G ако и само ако у G не постоји A-повећавајући пут.*

Доказ. ($\Leftarrow$) Прво ћемо доказати да уколико не постоји A-повећавајући пут, тада је упаривање A максимално. Нека је кардиналност упаривања A једнака k, тј. $|A| = k$

Претпоставимо супротно. Тада постоји максимално упаривање B такво да је $|B| = m > k$. Посматрајмо сада подграф G' графа G индукован скупом грана које су у тачно једном од упаривања A и B. Како упаривање чине независне гране, из сваког чвора графа G' излази тачно једна грана (из A или из B) или тачно две гране (једна из A и једна из B). Дакле, степен сваког чвора у G' је 1 или 2. За такве графове важи следеће тврђење чији доказ остављамо читаоцима за вежбу.

Лема. *Ако је степен сваког чвора графа* G 1 *или* 2*, тада је свака компонента повезаности графа* G *пут или циклус.*

□

Из ове леме следи да су компоненте графа G' наизменични путеви или наизменични циклус. Наизменични циклуси су, очигледно, парних дужина, па садрже једнак број грана из упаривања A и B. Исто важи за путеве парне дужине. Остају путеви непарних дужина. Сваки од њих почиње и завршава се гранама из истог упаривања, A или B. Како је $m > k$, постоји бар један пут који почиње и завршава се гранама из B. Међутим, тај пут је A-повећавајући, што је супротно претпоставци.

($\Rightarrow$) Докажимо сад да ако је упаривање A максимално у G, тада G не садржи A-повећавајући пут.

Претпоставимо да G садржи A-повећавајући пут

$$P = v_1 v_2 v_3 v_4 \dots v_{2k-1} v_{2k}.$$

Ако са e_i, $i = 1, 2, \dots, 2k-1$, означимо грану $\{v_i, v_{i+1}\}$, тада $e_1 \notin A$, $e_2 \in A$, $e_3 \notin A$, ... , $e_{2k-2} \in A$, $e_{2k-1} \notin A$. Посматрајмо скуп грана

$$C = A \setminus \{e_2, e_4, \dots, e_{2k-2}\} \cup \{e_1, e_3, \dots, e_{2k-1}\}.$$

Очигледно је $|C| = |A| + 1$. С друге стране, лако се види да су сваке две гране из C независне. Према томе, C је упаривање у G које има једну грану више од A, што је у контрадикцији са максималношћу A.

□

Бержову теорему ћемо користити у конструкцији првог полиномног алгоритма за налажење највећег упаривања у бипартитном графу.

Упаривање у бипартитном графу

Нека је A упаривање у бипартитном графу G. Приказаћемо алгоритам који у сложености $O(|E|)$ проверава да ли у G постоји A-повећавајући пут.

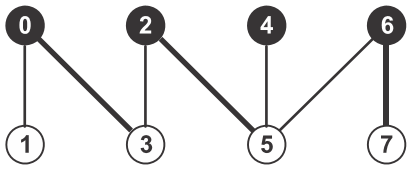
Нека је S скуп свих неупарених чворова једне боје (нпр. беле). Сада из њих колективно можемо да пустимо алгоритам DFS (претрага графа по дубини). Граф G претражујемо на следећи начин:

– ако смо у црном чвору, онда наш следећи корак у претрази мора да буде ка белом чвору кроз грану из упаривања A;

– ако смо у белом чвору, можемо ићи у дубину по било којој грани која није из упаривања A.

Ако у неком тренутку стигнемо до било ког неупареног црног чвора, то значи да смо нашли A-повећавајући пут. На овај начин ћемо сваку грану обићи највише једном (код претрага графа у дубину никад не улазимо у чворове у којима смо већ раније били), па је сложеност оваквог процеса једнака $O(|E| + |V|)$.

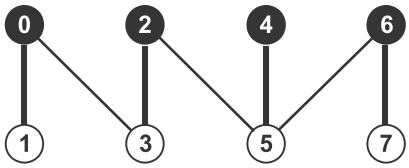
Ево једног конкретног примера. Нека је G бипартитан граф са сл. 2 и нека је $A = \{\{0,3\}, \{2,5\}, \{6,7\}\}$ (подебљане гране) једно упаривање у G.



Сл. 2.

Пошто је чвор 1 једини неупарени бели чвор, претрагу у дубину почињемо само из њега. Идемо гранама $\{1,0\}$, $\{0,3\}$, $\{3,2\}$, $\{2,5\}$ до белог чвора 5. Одатле можемо наставити било којом од грана $\{5,4\}$ и $\{5,6\}$. Ако наставимо граном $\{5,6\}$, и потом граном $\{6,7\}$, не наилазимо ни на један неупарен чвор. Међутим, претрагом кроз грану $\{5,4\}$ наилазимо на неупарени црни чвор 4. То смо смо нашли A-повећавајући пут $1 - 0 - 3 - 2 - 5 - 4$.

Сходно Бержовој теореми, добијамо веће упаривање $B = \{\{0,1\}, \{2,3\}, \{5,4\}, \{6,7\}\}$ (сл. 3).



Сл. 3.

Примењујући исти алгоритам на упаривање B констатујемо да не постоји B-повећавајући пут у G. На основу Бержове теореме, B је максимално упаривање.

У општем случају, наведени алгоритам се понавља док год постоји повећавајући пут и док год повећавајући пут постоји, овај алгоритам ће га наћи. Тако добијамо нови алгоритам који ради у сложености $O(VelicinaUparivanja * |E|)$, што је $O(|V| \cdot (|E| + |V|))$.

ПИТАЊЕ. Зашто овај алгоритам не ради за небипартитне графове?

Алгоритам Хопкрофта и Карпа

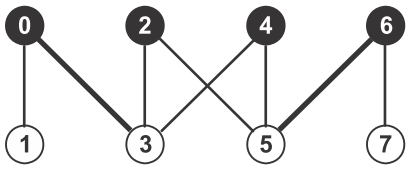
Сада ћемо представити алгоритам који ради у бољој сложености од претходног. Представља надоградњу претходног, као и доказа Бержове теореме.

Процес рада самог алгоритма је јако сличан претходном. Разликује се у томе што се користи BFS (претрага по ширини), уместо DFS (претрага по дубини). То значи да ће сви неупарени бели чворови бити на дубини 0. Сви њихови суседи су на дубини 1. Сви суседи тих чворова у које води грана из упаривања су на дубини 2 и тако даље. Процес претраге по дубини се прекида кад на некој дубини нађемо неупарени црни чвор. Нека је то дубина k.

Сада посматрамо све неупарене црне чворове на дубини k. Ово значи да постоји повећавајући пут дужине тачно k. Сада ћемо из неупарених белих чворова пуштати претрагу по дубини и узимати дијскунтне повећавајуће путеве дужине k докле можемо. То значи да ћемо пуштати претрагу у дубину из сваког неупареног белог чвора, при чему ћемо увек повећавати дубину и нећемо улазити ни у један чвор више од једном. Кад нађемо те путеве, у сваком од њих ћемо извршити промену грана као у Бержовој теореми. Тако ћемо величину упаривања повећавати за по 1.

Како ниједан чвор нисмо прошли двапут, временска сложеност је $O(|E| + |V|)$, како за прву претрагу по ширину тако и за даљу по дубини. Овај процес ћемо понављати све док год налазимо повећавајуће путеве.

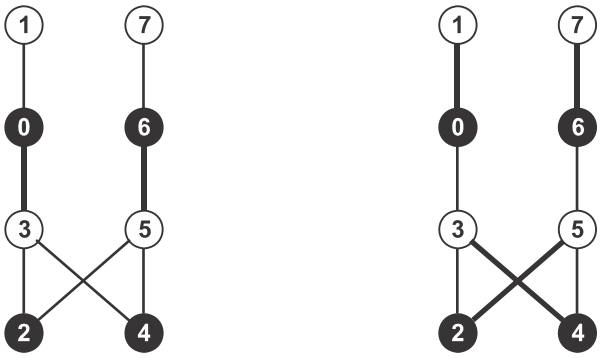
Ево илустрације овог алгоритма. Нека је G бипартитан граф на сл. 4 и нека је $A = \{\{0,3\},\{6,5\}\}$ (подебљане гране) једно упаривање у G.



Сл. 4.

Видимо да су на дубини 0 неупарени бели чворови 1 и 7. По алгоритму, на дубини 1 су црни чворови 0 и 6, на дубини 2 бели чворови 3 и 5 и на дубини 3 црни чворови 2 и 4 (сл. 5(а)). Како смо нашли неупарене црне чворове на дубини 3, престајемо са са претрагом у ширину. У овом случају смо обишли цео граф, али то не мора увек да се деси. Сада из сваког чвора на дубини нула радимо претрагу у дубину, слично претходном алгоритму, и налазимо повећавајуће путеве $1 - 0 - 3 - 4$ и $7 - 6 - 5 - 2$.

Више не постоји могућности даље претраге јер смо истражили све гране. Стога у два добијена повећавајућа пута извршимо замену грана (сл. 5(б)) и тако повећамо укупну кардиналност упаривања за 2.



(а) (б)

Сл. 5.

Видимо да у свакој итерацији повећавамо величину упаривања за бар 1. Ако овај алгоритам понављамо докле год постоји повећавајући пут, временска сложеност ће бити боља од претходне или ће јој бити једнака. Међутим, испоставља се да је знатно боља. То се дешава јер у свакој итерацији која ради у сложености $O(|E| + |V|)$ можемо да нађемо велик број повећавајућих путева. Приметимо још, да у свакој итерацији овог алгоритма не повећавамо само величину упаривања, већ и *дужину најкраћег повећавајућег пута***.** Наиме, у једној итерацији узимамо путеве дужине k докле год постоје, да би у следећој итерацији сваки повећавајући пут био дужине бар $k + 1$. Из тога следи да ће после $\sqrt{|V|}$ корака сваки повећавајући пут бити дужине бар $\sqrt{|V|}$. У том тренутку посматрамо, као и у доказу Бержове теореме, скуп грана који се појављује у тачно једном од упаривања, нашег и максималног упаривања. Наше упаривање треба да поправимо за онолико колико у том скупу постоји путева који имају непарнан број грана, са више грана из максималног упаривања (скупа B из доказа Бержове теореме). Лако се види да је сваки од тих путева увећавајући пут и да су они сви међусобно дисјунктни. Како је сваки повећавајући пут дужине барем $\sqrt{|V|}$, њихов укупан број је највише $\frac{|V|}{\sqrt{|V|}} = \sqrt{|V|}$. То значи да наше упаривање треба да поправимо за највише $\sqrt{|V|}$. То даље повлачи да ако поновимо итерације овог алгоритма још $\sqrt{|V|}$ пута, наћи ћемо највеће упаривање. Све у свему, алгоритам смо итерирали највише $\sqrt{|V|} + \sqrt{|V|} = 2\sqrt{|V|}$ пута што значи да цео алгоритам ради у временској сложености $O((|E| + |V|)\sqrt{|V|})$.

Ова оцена није увек оштра и за многе фамилије графова алгоритам ради знатно боље. На пример, за тзв. ретке графове (у којима је број грана близак броју чворова) очекивана сложеност је $O(|E|log|V|)$.

Поплочавање доминама

За крај ћемо представити један проблем који може ефикасно да се реши путем упаривања.

Дата је правоугаона табла $m \times n$ (*сл.* 6(*а*)) *у којој су нека поља забрањена* (*означена са* $\times$). *Циљ је да се на таблу постави највећи могући број непреклапајућих домина, при чему свака домина заузима два незабрањена поља која имају заједничку страницу.*

(а) (б)

Сл. 6.

Ако таблу обојимо као шаховску (сл. 6(б)), можемо јој придружити бипартитан граф G на следећи начин. Чворови су незабрањена поља, а два чвора су суседна ако одговајућа поља имају заједничку страницу. Белим пољима одговарају бели чворови, а црним црни чворови. Граф G је очигледно бипартитан јер су суседи белих чворова искључиво црни и обратно. Тако бипартитан граф који одговара табли са сл. 6(б) има 7 белих и 6 црних чворова.

Свака домина покрива једно бело и једно црно поље, што одговара грани графа G. Како су домине непреклапајуће, одговарајуће гране су једно упаривање у G. Стога, највећи могући број непреклапајућих домина одговара максималном упаривању у G, па можемо применити алгоритам Хопкрофт-Карпа.

Додајмо да граф G има највише mn чворова и да је степен сваког чвора највише 4. Ако са V означимо број чворова, тада је број грана највише $2V$, те граф G спада у ретке. Из тога следи да ће Хопкрофт-Карпов алгоритам радити у очекиваној сложености $O(mn * log(mn))$.

ПРЕДЛОЗИ ЗА ЧЕТВРТИ ПИСМЕНИ ЗАДАТАК

Срђан Оїњановић

ГИМНАЗИЈЕ, СРЕДЊЕ ШКОЛЕ

I РАЗРЕД

Линеарне једначине и неједначине; сличност; тригонометрија правоуглог троугла

1. Решити једначину $\left(\frac{x+a}{x^2+ax+a^2}+\frac{1}{a-x}-\frac{2a^2+(x+a)^2}{a^3-x^3}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{a}$ ако $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Решити неједначину: (а) $(2-x)(x^2-2x-3) \geq 0$;

(б) $|2x-1|-|x-1|-x \leq x$.

3. Решити систем једначина

$$\begin{aligned} a^2x+y&=a \\ ax+y&=1. \end{aligned}$$

4. Ако је S тачка кружнице описане око квадрата $ABCD$ странице a, одредити збир $AS^2+BS^2+CS^2+DS^2$.

5. Светионик се налази на стени која је 180 m изнад мора. Из чамца на пучини, подножје светионика се види под углом од 48^0, а сам светионик (од подножја до врха) под углом од 6^0. Колика је висина светионика? (Узети да је $\operatorname{tg} 48^0 \approx 1{,}106$ и .$\operatorname{tg} 54^0 \approx 1{,}3764$)

II РАЗРЕД

Тригонометријске функције

1. Ако су α и β оштри углови, такви да је $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{7}$ и $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$, израчунати вредност $\alpha+2\beta$.

2. Ако је $\frac{\cos x-\cos\alpha}{\cos x-\cos\beta}=\frac{\sin^2\alpha\cos\beta}{\sin^2\beta\cos\alpha}$, доказати да тада важи $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$.

3. Решити једначину $\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{16}{\operatorname{tg} x}$.

4. Одредити све вредности x, $x \in (0, 2\pi)$, за које важи неједнакост

$$4\sin^2 x - 2\left(1+\sqrt{3}\right)\sin x + \sqrt{3} > 0.$$

5. Израчунати површину троугла ABC ако је: $BC = \sqrt{6}$, $\measuredangle BAC = 60^0$ и $AB + AC = 3 + \sqrt{3}$.

.

III РАЗРЕД

Низови; комплексни бројеви; полиноми

1. За чланове аритметичког низа $a_1, a_2, a_3, \ldots$ важи $a_2 \cdot a_6 = 12$ и $a_3 \cdot a_7 = 12$. Одредити n тако да је $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 55$.

2. Одредити бројеве a, b, c, d тако да важи следеће. Бројеви a, b, c образују аритметички низ, а бројеви b, c, d геометријски. Притом је $a + d = 20$ и $b + c = 15$.

3. Израчунати: (а) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n^2 - \frac{1}{2}\log_2 n}{\log_2 n^3 + \frac{1}{2}\log_2 n}$;

(б) $\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 5 + 17 + 53 + \ldots + \left(2\cdot 3^{n-1} - 1\right) - 3^n + 5n}{n+3}$.

4. Ако је $w = 8\left(\cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6}\right)$, одредити све комплексне бројеве z такве да је $z^3 = w^4$.

5. Ако полином $p(x)$ при дељењу са $x - 1 - i$ даје остатак $2 + i$, а при дељењу са $x - 1 + i$ остатак $-2 + i$, који остатак даје $p(x)$ при при дељењу са $x^2 - 2x + 2$?

IV РАЗРЕД

Комбинаторика; вероватноћа и статистика

1. Одредити све природне бројеве n за које важи:

(а) $\binom{n+3}{n} - \binom{n+2}{n-1} = 15(n+1)$; (б) $\binom{10}{n} > 2\binom{10}{n+1}$.

2. Наћи коефицијент уз x^3 у развоју:

(а) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$; (б) $(1 - x + x^2)^3$.

3. У фудбалском првенству учествује 18 клубова од којих су 2 значајно квалитетнија од осталих. Случајним избором се формирају две групе од по 9 клубова. Колика је вероватноћа да ће се два поменута клуба наћи:
(а) у различитим групама; (б) у истој групи?

4. У кутији се налазе 10 куглица, 6 обојених и 4 необојене. Јелена случајно и без враћања извлачи 4 куглице. Одредити вероватноћу да су све извучене куглице обојене.

5. Три стрелца гађају мету. Вероватноће да ће погодити циљ редом су једнаке $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{5}$. Показало се да је при истовременом гађању сва три стрелца забележен тачно један погодак. Одредити вероватноћу да је циљ погодио: (а) први стрелац; (б) други стрелац; (в) трећи стрелац.

МАТЕМАТИЧКЕ ГИМНАЗИЈЕ

АНАЛИЗА С АЛГЕБРОМ

По наставном плану и програму четврти писмени задатак из анализе с алгебром ради се четири часа (180 минута). У Математичкој гимназији у Београду задаци обухватају читаво градиво одговарајуће године.

Одлуком Стручног већа за математику школе, писмени задатак за четврти разред састоји се из два дела – класичног дела са два задатка и теста са вишеструким избором од 10 задатака. Остали разреди раде само тест са 20 задатака. Овде су изложени задаци са четвртог писменог задатка школске 2018-19. године.

I РАЗРЕД

Тест има 20 задатака на 2 странице. Сваки задатак вреди 5 поена. Погрешан одговор доноси -1 поен. Заокруживање одговора (N) не доноси ни позитивне ни негативне поене. За заокруживање више од једног одговора или незаокруживање ниједног одговора добија се -2 поена. Време за рад је 180 минута.

1. Број решења неједначине $\frac{6-x}{x-1} \geq \frac{6-x}{2x+3}$ у скупу целих бројева једнак је:

(A) 7; **(B)** 8; **(C)** 9; **(D)** 10; **(E)** бесконачно много; **(N)**.

2. Вредност израза $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}+\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}$ припада интервалу:

(A) $\left(\frac{21}{10},\frac{25}{10}\right)$; **(B)** $\left(\frac{25}{10},\frac{29}{10}\right)$; **(C)** $\left(\frac{29}{10},\frac{33}{10}\right)$; **(D)** $\left(\frac{33}{10},\frac{37}{10}\right)$; **(E)** $\left(\frac{37}{10},\frac{43}{10}\right)$; **(N)**.

3. Нека је $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Дата је формула

$$(\exists x)(\exists y)(x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x \neq y \wedge f(x) = 0 \wedge f(y) = 0).$$

Која од следећих реченица одговара датој формули?

(A) функција f има бар две нуле у скупу $\mathbb{R}$;

(B) функција f има највише две нуле у скупу $\mathbb{R}$;

(C) функција f има тачно две нуле у скупу $\mathbb{R}$;

(D) функција f има више од две нуле у скупу $\mathbb{R}$;

(E) функција f има бесконачно нула у скупу $\mathbb{R}$; **(N).**

4. Ако је полином $P(x) = x^3 + ax^2 - 3x + b$ дељив полиномом $x^2 + 6x + 5$, тада је $a + b$ једнако:

(A) 8; **(B)** 28; **(C)** -12; **(D)** -8; **(E)** -2; **(N)**.

5. Колико има целих бројева n за које разломак $\frac{n^2 + n + 138}{n - 2}$ има целобројне вредности?

(A) 8; **(B)** 15; **(C)** 16; **(D)** 24; **(E)** 30; **(N)**.

6. Скупови A и B задовољавају следеће услове: $A, B \neq \emptyset$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$, $A \cap B = \emptyset$. Број скупова $\{A, B\}$ једнак је:

(A) 31; **(B)** 30; **(C)** 64; **(D)** 63; **(E)** 62; **(N)**.

7. Дата је функција $f(x) = \frac{ax + 2}{3x - \frac{1}{a}}$. Производ свих вредности реалног параметра a за које је функција f добро дефинисана бијекција и једнака својој инверзној функцији, једнак је:

(A) -2; **(B)** -1; **(C)** 0; **(D)** $\frac{1}{2}$; **(E)** 1; **(N)**.

8. На скупу $\mathbb{R}$ дефинисана је бинарна операција $*$ са: $x * y = [x - y]$, где је $[\alpha]$ цео део реалног броја α. Међу наредним тврђењима

1) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x * y = y)$ 2) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x * y = -y * x)$

3) $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})(x * y = y)$ 4) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x * y = 2019)$

тачно је тврђење под редним бројем:

(A) 1); **(B)** 2); **(C)** 3); **(D)** 4); **(E)** више тврђења је тачно; **(N)**.

9. Колико има уређених парова (x, y) природних бројева чији је збир једнак 720, а чији је највећи заједнички делилац

(A) 6; **(B)** 8; **(C)** 10; **(D)** 12; **(E)** 14; **(N)**.

10. На столу се налазе 10 различитих карата из стандардног шпила за игру, међу којима је дама херц. Девет од ових 10 карата треба поделити Александри, Бранки и Весни тако да Александра добије 3, Бранка 4 и Весна 2 карте. Различитих подела карата у којима Весна добије даму херц има:

(A) 2800; **(B)** 2520; **(C)** 15120; **(D)** 16800; **(E)** 5040; **(N)**.

11. Број тачних међу следећим исказима је:

1) Постоји релација на скупу $\mathbb{Z}$ која није ни симетрична ни антисиметрична.

2) Постоји релација на скупу $\mathbb{R}$ која јесте антисиметрична, а није симетрична.

3) Укупан број бинарних релација на скупу $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ једнак је 1024.

4) Свака релација на скупу ирационалних бројева је рефлексивна.

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3; **(E)** 4; **(N)**.

12. Полином $p(x)$ дељив је полиномом $q(x)$, а полином $q(x)$ при дељењу са $x^2 + x + 2$ даје остатак $2x + 2$. Ако је количник при дељењу полинома $p(x)$ полиномом $q(x)$ једнак $x^4 + x^3 + x + 1$, тада је остатак при дељењу полинома $p(x)$ са $x^2 + x + 2$ једнак:

(A) $10x - 2$; **(B)** $4x + 6$; **(C)** $4x - 8$; **(D)** $x + 1$; **(E)** $2x + 2$; **(N)**.

13. Нека је n најмањи природан број који је дељив са 13, а при дељењу са 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и 12 даје остатак 1. Тада је збир прве и последње цифре броја n једнак:

(A) 2; **(B)** 3; **(C)** 6; **(D)** 8; **(E)** 9; **(N)**.

14. Скуп вредности реалног броја a за које је функција $f(x) = \frac{a^2 - 5a + 6}{a^3 - 8}x + 2019$ опадајућа, а график функције $g(x) = 2019x + 5a - 11$ одсеца на y-оси одсечак дужине веће од 19, је:

(A) $(6, +\infty)$; **(B)** $(-\infty, 2)$; **(C)** $\left(-\infty, -1\frac{3}{5}\right)$; **(D)** $(-\infty, 2) \cup (2, 3)$;

(E) $\left(-\infty, -\frac{8}{5}\right) \setminus \{2\}$; **(N)**.

15. Број решења система једначина

$$|x - y| = 2$$
$$|x| + |y| = 4$$

у скупу $\mathbb{R}$ једнак је:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3; **(E)** 4; **(N)**.

16. Највећа вредност израза $2019 - 2x^2 - 2y^2 - 2yz - z^2 + 4x - 10y$, где $x, y, z \in \mathbb{R}$, једнака је:

(A) 2052; **(B)** 2046; **(C)** 2019; **(D)** 2017; **(E)** 1992; **(N)**.

17. Збир свих вредности реалног параметра a за које једначина $(a^3 - 3a^2 - a + 1)x = a^2 - a - 6 - 2x$ нема решења, једнак је :

(A) -1; **(B)** 0; **(C)** 1; **(D)** 2; **(E)** 3; **(N)**.

18. Нека је $A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Број функција $f: A \to A$, таквих да је $f(x) \leq |x| - 4$ за све $x \in A$, једнак је:

(A) $\frac{(7!)^2}{2}$; **(B)** $\frac{7!}{2}$; **(C)** $\frac{(8!)^2}{2}$; **(D)** $\frac{(7!)^2}{4}$; **(E)** $\frac{8!}{2}$; **(N)**.

19. Збир најмање и највеће вредности израза $(x - y)^2 + xy$, за реалне бројеве x и y који задовољавају услов $x^2 + y^2 = 4$, једнак је:

(A) 2; **(B)** 4; **(C)** 6; **(D)** 8; **(E)** 10; **(N)**.

20. Скуп вредности реалног параметра a за које неједначина $\left|3 - |x - 4|\right| < a$ има скуп решења облика $(\alpha, \beta) \cup (\gamma, \delta)$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ и $\alpha < \beta < \gamma < \delta$, је

(A) $(0, 3]$; **(B)** $(3, +\infty)$; **(C)** $(0,3)$; **(D)** $[3,+\infty)$; **(E)** $\{3\}$; **(N)**.

II РАЗРЕД

Тест има 20 задатака на 2 странице. Сваки задатак вреди 5 поена. Погрешан одговор доноси -1 поен. Заокруживање одговора (N) не доноси ни позитивне ни негативне поене. За заокруживање више од једног одговора или незаокруживање ниједног одговора добија се -2 поена. Време за рад је 180 минута.

1. Ако $z \in \mathbb{C}$ и задовољава једнакост $z + 2\bar{z} + |z + 3i| = 16 - 3i$, тада је вредност $|z|$ једнака:

(A) 3; **(B)** $2\sqrt{3}$ **(C)** 4; **(D)** $3\sqrt{3}$; **(E)** 5; **(N)**.

2. Реалан број a, за који функција $f(x) = ax^2 + (a^2 - a - 42)x + 2a + 1$ достиже максимум за $x = 1$, припада интервалу

(A) $\left(-\frac{7}{2}, -1\right)$; **(B)** $\left(-8, -\frac{11}{2}\right)$; **(C)** $\left(\frac{7}{2}, 5\right)$; **(D)** $\left(\frac{11}{2}, 14\right)$; **(E)** $(14,16)$; **(N)**.

3. Колико целих бројева задовољава неједначину $\sqrt{3x^2 + 11x - 4} < x + 1$?

(A) више од 3; **(B)** 3; **(C)** 2; **(D)** 1; **(E)** 0; **(N)**.

4. Производ свих вредности реалног параметра a, таквих да за решења квадратне једначине $x^2 + 2x + 2 = a(x - 1)$ важи $x_1^2 + x_2^3 = 8$, једнак је:

(A) -4; **(B)** -8; **(C)** 6; **(D)** 4; **(E)** 8; **(N)**.

5. Најмање решење једначине $\sqrt{4+3|x|\sqrt{x^2-6}}=4$ припада интервалу:

(A) $(-\infty,-3]$; **(B)** $(-3,-1]$; **(C)** $(-1,3]$; **(D)** $(3,5]$; **(E)** $(5,+\infty)$; **(N)**.

6. Сва реална решења једначине $\log_{2019} 2018x=\log_{2018} 2019x$ припадају интервалу:

(A) $(0,\frac{1}{2019}]$; **(B)** $(\frac{1}{2019},\frac{1}{2018}]$; **(C)** $(\frac{1}{2018},1]$; **(D)** $(1,\frac{2019}{2018}]$; **(E)** $(\frac{2019}{2018},+\infty)$; **(N)**.

7. Колико има природних бројева n таквих да је $\varphi(n)=96$ и $\tau(n)=12$?
(Број $\varphi(n)$ је број природних бројева мањих од n који су узајамно прости са n, а $\tau(n)$ је укупан број позитивних делилаца природног броја n.)

(A) 0; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** више од 4; **(E)** 4; **(N)**.

8. Збир свих реалних решења једначине $\left(\sqrt{2}+1\right)^{x^2+3x-2}+\left(\sqrt{2}-1\right)^{x^2+3x-2}=6$ једнак је:

(A) -3; **(B)** -6; **(C)** -2; **(D)** 0; **(E)** 3; **(N)**.

9. Колико има четворочланих скупова $A=\{a,b,c,d\}$ таквих да је $a+b=c+d=2018$ и $A\subset\{1,2,\dots,2018\}$?

(A) $\binom{1008}{2}$; **(B)** $2018\cdot 2017$; **(C)** $1009\cdot 1008$; **(D)** $\binom{2018}{4}$; **(E)** $\binom{1009}{2}$; **(N)**.

10. Број решења једначине $2019^{-|x|}=x^3+\frac{1}{2019}$ у скупу реалних бројева једнак је:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3 ; **(E)** више од 3; **(N)**.

11. Колико има вредности природног броја n за које развој бинома $\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}\right)^n$ садржи члан облика ax^7, где $a\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$?

(A) 4; **(B)** 6; **(C)** 7; **(D)** 8; **(E)** 11; **(N)**.

12. Дата је фамилија функција $f_m\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_m(x)=-x^2+2mx+6m+9$, где $m\in\mathbb{R}\setminus\{-3\}$. Нека су A_m и B_m тачке пресека графика функције f_m са x-осом, а C_m тачка пресека графика f_m са y-осом. Колико има вредности параметра m за које је површина троугла $A_mB_mC_m$ једнака 3?

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** више од 3; **(E)** не постоји такве вредности; **(N)**.

13. Остатак при дељењу броја $1 + 7^1 + 7^2 + \cdots + 7^{2019}$ бројем 19 је:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** -2; **(E)** -1; **(N)**.

14. Ако за $z \in \mathbb{C}$ важи $\frac{|z-1+i|}{|z-2+2i|} = 1$ и $\frac{|z|}{|z-1-i|} = 1$, тада је $\mathrm{Im}(i \cdot \bar{z})$ једнак:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** -2; **(E)** -1; **(N)**.

15. За колико парова (p, q), где је p прост, а q цео број, важи $p - q^4 = 4$?

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3; **(E)** више од 3; **(N)**.

16. Скуп свих решења неједначине $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x+3} \leq \left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{2}{x}}$ је:

(A) $[-2, -1]$; **(B)** $(-\infty, -2] \cup [-1, 0)$; **(C)** $[-2, -1] \cup (0, +\infty)$;

(D) $(-\infty, -2] \cup [-1, +\infty)$; **(E)**$(-\infty, -2] \cup [0, 1] \cup (2, +\infty)$; **(N)**.

17. Нека је $S = \sum_{k=0}^{n} \left((4^k - 2)\binom{n}{k}\right)$, где је n прост број већи од 10. Тада је остатак при дељењу броја S бројем n једнак:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3; **(E)** већи од 3; **(N)**.

18. Колико има природних делилаца броја 70^{70} таквих да сваки од њих има тачно 70 делилаца?

(A) 27; **(B)** 24; **(C)** 72; **(D)** 36; **(E)** 144; **(N)**.

19. На колико начина се за округли сто могу сместити Бане, Лаза, Пера, Васа, Ана, Маша, Каћа, Фића и Саша тако да је испуњено следеће. Бане и Фића, а исто тако Пера и Васа, не смеју седети један поред другог, док Каћа и Маша морају седети једна поред друге?

(A) 7440; **(B)** 6480; **(C)** 5280; **(D)** 2640; **(E)** 3720; **(N)**.

20. Вредност израза $\frac{\log_2 72}{\log_{54} 2} - \log_2^2 18 - \frac{\log_{\sqrt{2}} 18}{\log_{24} 4}$ једнака је

(A) $-\log_2 3$; **(B)** 0; **(C)** 3; **(D)** $\log_2 9$; **(E)** -1; **(N)**.

III РАЗРЕД

Тест има 20 задатака на 2 странице. Сваки задатак вреди 5 поена. Погрешан одговор доноси -1 поен. Заокруживање одговора (N) не доноси ни позитивне ни негативне поене. За заокруживање више од једног одговора или незаокруживање ниједног одговора добија се -2 поена. Време за рад је 180 минута.

1. Дати су скупови

$A = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$,

$B = \left\{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid n \in \mathbb{N}, a_j \in \mathbb{Q}, j \in \{1,2, \dots, n\}\right\}$

$C = \left\{(a_n)_{n=1}^{+\infty} \mid a_n \in \{0,1, \dots, 9\}\right\}$,

$D = \left\{p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \mid n \in \mathbb{N}, a_j \in \mathbb{Z}, j \in \{0,1, \dots, n\}\right\}$.

Колико међу њима има пребројивих скупова?

(A) 3; **(B)** 4; **(C)** 1; **(D)** 2; **(E)** 0; **(N)**.

2. Нека су a и b најмања и највећа вредност домена функције

$f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(2 + 2\sin x)}$ на интервалу $[0, 2\pi]$. Колико износи $a^2 + b^2$?

(A) $\frac{9}{4}\pi^2$; **(B)** $\frac{122}{36}\pi^2$; **(C)** $\frac{50}{36}\pi^2$; **(D)** $\frac{170}{36}\pi^2$; **(E)** π^2; **(N)**.

3. Нека је $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{5/2} - 2(n-1)^{3/2} + \sqrt{n-2}}{n^s} = a \in (0, +\infty)$. Колико је $a + s$?

(A) $\frac{7}{2}$; **(B)** $-\frac{1}{2}$; **(C)** $\frac{3}{2}$; **(D)** $\frac{5}{2}$; **(E)** $\frac{9}{2}$; **(N)**.

4. Низ (x_n) је задат са $x_0 = 3$, $x_1 = 2$ и $x_{n+1} = 4x_n - 4x_{n-1}$ за $n \geq 1$. Тада је $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n + x_{n+1}|}$ једнак:

(A) $2\sqrt{2}$; **(B)** $+\infty$; **(C)** 1; **(D)** 6; **(E)** 2; **(N)**.

5. Скуп свих природних бројева који при дељењу са 4 дају остатак 1 разбијен је на подскупове на следећи начин:

$$\{1\}, \{5, 9\}, \{13, 17, 21\}, \{25, 29, 33, 37\}, \{41, 45, 49, 53, 57\}, \dots .$$

Збир елемената у 29. подскупу једнак је:

(A) 48749; **(B)** 49039; **(C)** 48807; **(D)** 51057; **(E)** 45357; **(N)**.

6. Гранична вредност низа чији је општи члан $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{4}{5}} + \sqrt{\frac{7}{10}} + \dots + \sqrt{\frac{3n-2}{n^2+1}}}$ је:

(A) $+\infty$; **(B)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **(C)** $\sqrt{3}$; **(D)** $\frac{\sqrt{3}}{6}$; **(E)** $2\sqrt{3}$; **(N)**.

7. Нека су a и b реални бројеви такви да је $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+bn-2}-\sqrt{n^2+2}\right)=3$. Тада је $a-b$ једнако:

(A) a и b нису одређени; **(B)** -5; **(C)** -3; **(D)** 5; **(E)** 1; **(N)**.

8. Збир обима пет квадрата износи 200, а дужине њихових страница представљају пет првих чланова једног аритметичког низа. Ако је збир површина првог и четвртог квадрата минималан, тада је дужина странице највећег квадрата једнака:

(A) 13; **(B)** 15; **(C)** 11; **(D)** 12; **(E)** 14; **(N)**.

9. Ако су x_1, x_2 и x_3 нуле полинома x^3+3x^2+2x-5, тада је вредност израза $\frac{1}{x_1+3}+\frac{1}{x_2+3}+\frac{1}{x_3+3}$ једнака:

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** -1; **(D)** -2; **(E)** 0; **(N)**.

10. Нека је функција $f\colon(-\infty,-1]\cup(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ задата са $f(x)=ax+b\sqrt{\frac{x^3+1}{x-1}}$, где су a и b реални бројеви. Нека је $y=x-1$ коса асимптота графика функције $f(x)$ кад $x\to-\infty$ и нека је $y=mx+n$ коса асимптота графика исте функције кад $x\to+\infty$. Тада је $m-n$ једнако:

(A) 4; **(B)** -1; **(C)** 2; **(D)** -3; **(E)** 0; **(N)**.

11. Дати су скупови $A=\left\{\frac{2m}{n}\mid m,n\in\mathbb{N},m^2<n\right\}$ и $B=\left\{\frac{m}{n}\mid m,n\in\mathbb{N},m^2<2n^2\right\}$. Колико је $\sup A+\sup B$?

(A) 3; **(B)** $1+\sqrt{2}$; **(C)** $\sqrt{2}$; **(D)** $2+\sqrt{2}$; **(E)** 2; **(N)**.

12. Збир геометријског реда $\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots$ једнак је:

(A) $2+\sqrt{2}$; **(B)** $7\sqrt{2}-5$; **(C)** $6+4\sqrt{2}$; **(D)** $5\sqrt{2}-2$; **(E)** ред не конвергира; **(N)**.

13. Дат је полином $P(x)=x^{2019}-x^{2018}+x^{2016}-x^{2015}+\cdots+x^3-x^2-673$. Колики је остатак при дељењу полинома $P(x)$ полиномом x^2+x+1?

(A) $673x+673$; **(B)** $2019x-2019$; **(C)** $1346x-1346$; **(D)** $1346x+1346$; **(E)** $2019x+2019$; **(N)**.

14. Дати су искази:

(1) Сваки ограничен низ је конвергентан;

(2) Сваки монотон и ограничен низ је конвергентан;

(3) Сваки конвергентан низ је ограничен;

(4) Сваки конвергентан низ је монотон.

(A) сви; **(B)** (2) и (3); **(C)** ниједан; **(D)** (1), (2) и (3); **(E)** само (3); **(N)**.

15. Нека је

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{4^x + 2\cdot 6^x + 4\cdot 9^x}{(3\cdot 2^x + 2\cdot 3^x)^2},\ b = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2 + 7x - 1)}{\ln(x^4 + x^2 - 1)},\ c = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3} - 2 + \sqrt[6]{x^3+1}}{x^3}.$$

Тада је $a + 4b - 6c$ једнако:

(A) бар један од a, b, c не постоји или није реалан број; **(B)** 0; **(C)** -6; **(D)** -4; **(E)** 10; **(N)**.

16. Нека је $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{100} + i\sin\frac{\pi}{100}$. Тада је $\mathrm{Im}(1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 + \cdots + 200\varepsilon^{199})$ једнако:

(A) 0; **(B)** $-100\ \mathrm{ctg}\ \frac{\pi}{200}$; **(C)** 100; **(D)** -100; **(E)** $100\ \mathrm{ctg}\ \frac{\pi}{200}$; **(N)**.

17. Нека је $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функција дефинисана на целом скупу реалних бројева. Ако је функција парна, периодична са периодом 7 и $f(3) = 6$, тада је $f(-3) + f(4) - f(18)$ једнако:

(A) 6; **(B)** -12; **(C)** немогуће је јединствено одредити; **(D)** 12; **(E)** -6; **(N)**.

18. Нека S_n означава суму првих n чланова неког реалног аритметичког низа (a_n), $n \geq 1$ са разликом d. Ако су бројеви S_1, S_5 и S_6 три узастопна члана неког геометријског низа, онда је a_1/d једнако:

(A) $-2 + i\sqrt{6}$; **(B)** такав низ не постоји; **(C)** $-2 + \sqrt{6}$; **(D)** 1;
(E) $-2 - i\sqrt{6}$; **(N)**.

19. Нека је функција $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дата са $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{nx} + \sin^2 x}{x^2 + e^{nx}}$ и нека је $A \subset \mathbb{R}$ скуп тачака у којима функција $f(x)$ има прекид. Број елемената скупа A једнак:

(A) 2; **(B)** 0; **(C)** бесконачно много; **(D)** 1; **(E)** 3 или више, али коначно много; **(N)**.

20. Нека је $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Тада је израз $\frac{z^{2n} - 1}{2iz^n}$ једнак изразу:

(A) $\mathrm{Im}(z^n)$; **(B)** $\mathrm{Re}(z^{2n})$; **(C)** $\mathrm{Re}(z^n)$; **(D)** $\mathrm{Im}(z^{2n})$; **(E)** $\mathrm{Re}(z^{2n}) + \mathrm{Im}(z^{2n})$; **(N)**.

МАТУРСКИ ПИСМЕНИ ЗАДАТАК ИЗ АНАЛИЗЕ С АЛГЕБРОМ

Састоји се од два дела и садржи 12 задатака на 2 странице.
Први део је тест од 10 задатака на које се одговара закруживањем једног од понуђених одговора. Сваки задатак вреди 5 поена. Погрешан одговор доноси -1 поен. Заокруживање одговора (N) не доноси ни позитивне ни негативне поене. За заокруживање више од једног одговора или незаокруживање ниједног одговора добија се -2 поена.
Други део чине 2 класична задатка који се раде у вежбанки. Задаци вреде по 25 поена. Време за рад је 180 минута.
Задатке из првог дела треба радити на једној страни вежбанке, а задатке из другог дела на другој страни.

ТЕСТ

1. Гранична вредност $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[2019]{\frac{1}{k^{2018}}}$ једнака је:

(A) 0; **(B)** $+\infty$; **(C)** $\frac{2019}{2018}$; **(D)** $\frac{2019}{2018}$; **(E)** 1; **(N)**.

2. Ако је $a=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}$ и $b=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$, онда је $3a+b$ једнако

(A) 0; **(B)** $\frac{1}{12}$; **(C)** $\frac{1}{6}$; **(D)** $\frac{1}{4}$; **(E)** $\frac{1}{3}$; **(N)**.

3. Број решења једначине $2019^{-|x|}=x^4+\frac{1}{2019}$ је:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3; **(E)** више од 3; **(N)**.

4. Нека је $f(x)=e^x(3x^2-2)$. Тада је $f^{(20)}(0)$ једнако:

(A) $1030e$; **(B)** 1022; **(C)** $1259e$; **(D)** 914; **(E)** 1136; **(N)**.

5. Вредност глобалног минимума функције

$$f(x)=x^4-4x^3+2+\log_3(x+5)\log_{x+5}3$$

једнака је:

(A) 3; **(B)** нема глобални минимум; **(C)** -31; **(D)** -13; **(E)** -24; **(N)**.

6. Низ (a_n) је задат са $a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{2n-k}{2n+k}$, $n\geq1$. Тада је $\lim_{n\to\infty}a_n$ једнак:

(A) $\ln\frac{4}{3\sqrt{3}}$; **(B)** $\ln\frac{16}{27}+2$; **(C)** $\ln\frac{27}{16}-2$; **(D)** $\ln\frac{16}{27}$; **(E)** $\ln\frac{4}{3\sqrt{3}}-1$; **(N)**.

7. Нека је $I_1 = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x}{\sin^2 x} dx$ и $I_2 = \int_0^{1/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$. Тада је $6I_1 - \sqrt{2}\, I_2$ једнако:

(A) $3\ln 3 - 4\sqrt{2} + 4 + \frac{2}{3}\pi\sqrt{3}$; **(B)** $-3\ln 3 + 4\sqrt{2} + 4 - \frac{2}{3}\pi\sqrt{3}$;
(C) $3\ln 3 + 4\sqrt{2} - 4$; **(D)** $3\ln 3 - 2\sqrt{2} + 2 + \frac{1}{3}\pi\sqrt{3}$; **(E)** $3\ln 3 - 4\sqrt{2} + 8$; **(N)**.

8. Запремина тела насталог ротацијом око y-осе конвексне фигуре ограничене линијама $x^2 + y^2 = -2x$ и $x^2 + y^2 = 2x$ једнака је:

(A) $\frac{\pi^2}{2} - \pi$; **(B)** $\frac{\pi^2}{2}$; **(C)** $\frac{\pi^2}{2} + \pi$; **(D)** $\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi}{2}$; **(E)** $\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi}{2}$; **(N)**.

9. Дужина лука криве $y = \ln(1 + \cos x)$ за $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ износи:

(A) $\frac{1}{2}\ln 3$; **(B)** $2\ln 3 + 1$; **(C)** $\ln 3 + 1$; **(D)** $\ln 3$; **(E)** $2\ \ln 3$; **(N)**.

10. Вредност интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx$ је:

(A) $\frac{\pi}{2}$; **(B)** $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$; **(C)** $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$; **(D)** $\ln 2$; **(E)** $+\infty$; **(N)**.

ЗАДАЦИ

11. Детаљно испитати ток и нацртати график функције

$$f(x) = x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2}.$$

12. Израчунати $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(1 + 3\cos^2 x)(1 + \sin^2 x)}$.

ГЕОМЕТРИЈА

I РАЗРЕД

Сличности

1. У круг са центром O уписан је правоугли троугао ABC ($\measuredangle C = 90^0$). Нека је K средиште лука BC који не садржи тачку A, N – средиште странице AC и M – пресечна тачка праве KN и круга различита од K. У тачкама A и C конструисане су тангенте на круг које се секу у тачки E. Доказати да су троуглови MNE и ONK слични.

2. Око једнакостраничног троугла ACD описан је круг са центром O. Нека је B тачка круга таква да је $BC = 2AB$. Ако је E пресек дужи AC и BD, доказати да је $EO \parallel AD$.

3. Основице трапеза су a и b. Одредити дужину дужи која је паралелна са основицама и која дели трапез на два дела једнаких површина.

4. Нека су A', B' и C' редом средишта страница BC, CA и AB троугла ABC и нека је S центар круга уписаног у тај троугао. Ако је $SA \cap B'C' = \{A_1\}$, $SB \cap C'A' = \{B_1\}$ и $SC \cap A'B' = \{C_1\}$, доказати да се праве $A'A_1$, $B'B_1$ и $C'C_1$ секу у једној тачки.

5. Дата су два концентрична круга. Доказати да збир квадрата растојања тачке која припада једном од кругова од крајева пречника другог круга не зависи ни од избора тачке ни од избора пречника.

II РАЗРЕД

Обртна тела; нацртна геометрија

1. Дата је правилна тространа пирамида $SABC$ (S – врх) чија је основна ивица a и чије су бочне ивице b ($b > a$). Сфера додирује раван основе у тачки A и бочну ивицу SB. Наћи полупречник те сфере.

2. Унутар праве купе смештене су две сфере. Већа сфера додирује основу и омотач купе, док мања сфера додирује већу сферу и омотач купе. Израчунати запремину купе ако су полупречници сфера 2 cm и 1 cm.

3. Дата је n-тострана пирамида у којој може да се упише сфера. Свака од бочних страна пирамиде заротира се око одговарајуће бочне ивице тако да се поклопи са равни основе. Притом, нови положаји бочних страница имају заједничких тачака са унутрашношћу основе. На овај начин добијено је n слика врха пирамиде у равни основе. Доказати да оне припадају једном кругу.

4. Дате су тачке $A[A'(2)]$, $B[B'(-1)]$ и $C[C'(-2)]$, где је јединица мере 1 cm.

(а) Градуирати праве AB, BC и CA.

(б) Одредити траг и нагибни угао равни α која је одређена тачкама A, B и C.

5. Дате су пројекције a', a'' и b', b'' правих a и b које се секу у тачки C. Права c, која је садржи тачку C и паралелна је равни π_1, сече праве a и c. Одредити обе пројекције праве c.

РЕШЕЊА

ГИМНАЗИЈЕ, СРЕДЊЕ ШКОЛЕ

I разред. **1.** За $a \neq 1$ – решење $x = 1$; за $a = 1$ – нема решења.
2. (а) $x \in (-\infty, -1] \cup [2, 3]$; (б) $x \in \left[-\frac{2}{3}, 0\right] \cup [2, +\infty)$. **3.** За $a = 1$: бесконачно решења $(\alpha, 1-\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$; за $a = 0$: нема решења; за $a \neq 1$ и $a \neq 0$: решење $\left(\frac{1}{a}, 0\right)$. **4.** $4a^2$. **5.** $h \approx 43{,}1\ m$.

II разред. **1.** $\frac{\pi}{4}$. **3.** $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$, $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **4.** $0 < x < \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$. **5.** $P = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

III разред. **1.** $n = 10$. **2.** 0, 5, 10, 20 или $\frac{75}{4}, \frac{45}{4}, \frac{15}{4}, \frac{5}{4}$. **3.** (а) $\frac{3}{7}$; (б) 4.
4. $z_{1,2,3,4} = 16\left(\cos\frac{3\pi + 8k\pi}{12} + i\sin\frac{3\pi + 8k\pi}{12}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$.
5. $r(x) = i(3 - 2x)$.

IV разред. **1.** (а) $n = 28$; (б) $n \in \{7, 8, 9\}$. **2.** (а) $\binom{16}{6}$; (б) -7; **3.** (а) $\frac{9}{17}$; (б) $\frac{8}{17}$.
4. $\frac{1}{14}$. **5.** (а) $\frac{3}{29}$; (б) $\frac{8}{29}$; (в) $\frac{18}{29}$.

МАТЕМАТИЧКЕ ГИМНАЗИЈЕ

Анализа с алгебром

I разред. 1. **B**; 2. **C**; 3. **A**; 4. **E**; 5. **E**; 6. **A**; 7. **B**; 8. **D**; 9. **B**; 10. **B**; 11. **C**; 12. **A**; 13. **E**; 14. **C**; 15. **E**; 16. **B**; 17. **B**; 18. **A**; 19. **D**; 20. **C**.

II разред. 1. **E**; 2. **B**; 3. **E**; 4. **D**; 5. **B**; 6. **A**; 7. **B**; 8. **B**; 9. **A**; 10. **B**; 11. **D**; 12. **D**; 13. **B**; 14. **C**; 15. **C**; 16. **B**; 17. **B**; 18. **A**; 19. **C**; 20. **E**.

III разред. 1. **A**; 2. **D**; 3. **A**; 4. **E**; 5. **A**; 6. **D**; 7. **B**; 8. **E**; 9. **A**; 10. **A**; 11. **B**; 12. **C**; 13. **A**; 14. **B**; 15. **D**; 16. **B**; 17. **A**; 18. **B**; 19. **B**; 20. **A**.

IV разред. Тест. 1. **B**; 2. **B**; 3. **C**; 4. **E**; 5. **E**; 6. **D**; 7. **C**; 8. **A**; 9. **D**; 10. **B**.

Задаци

12. $\frac{\pi}{7}\left(3+\sqrt{2}\right)$.

Геометрија

I разред. **1.** Упутство. Тачке A и C припадају кругу над пречником OE.

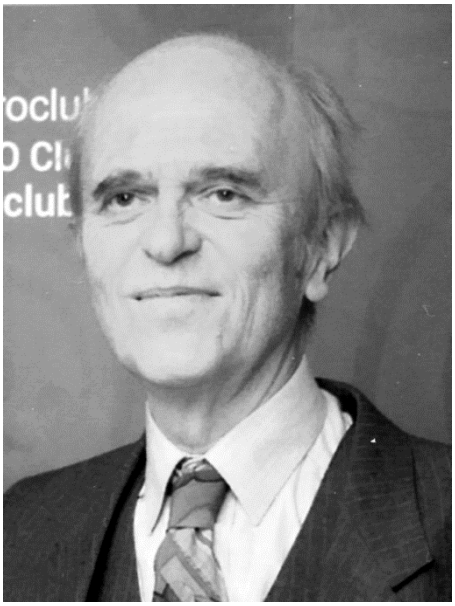
3. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. **4.** Упутство. Применити Чевину теорему.

II разред. **1.** $r=\frac{a(2b-a)\sqrt{3}}{2\sqrt{3b^2-a^2}}$. **2.** $V=\frac{64\pi}{3}\ cm^3$.

НАШ ГОСТ

АЛФА И ОМЕГА

Ако вам кажу да је неко освајач медаља на Међународним математичким олимпијадама, да је врстан математичар-истраживач, да је аутор бројних математичких публикација, да је као изузетан организатор био на највишим функцијама на Математичком факултету и у Друштву математичара Србије, да је … , вероватно ћете сумњичаво завртети главом и помислити да је у питању претеривање. Али није, поготово ако се тај неко зове Зоран Каделбург.



Зоран Каделбург

Зоран Каделбург је рођен у Вршцу 1950. године. У Београду је завршио Математичку гимназију и Природно-математички факултет. По дипломирању, радио је на Математичком факултету у Београду и тамо прошао сва звања од асистента до редовног професора. Након пензионисања изабран је у звање професор-емеритус.

Током читавог радног века ангажован је у раду Друштва математичара Србије (раније Југославије): председник републичке и савезне комисије за такмичења из математике, руководилац југословенске екипе на девет Међународних математичких олимпијада, председник Жирија на неко-

лико Балканских олимпијада, уредник више издања и часописа, председник Друштва у четири мандата итд. Права каријатида Друштва.

Као што се из наведеног види, богата и успешна каријера. Међутим, то није све. О другим детаљима, најбоље из прве руке – од самог Зорана.

Врло рано сте се окренули математици. Кажите нам кад и како је све почело. Да ли је неко имао посебан утицај?

Колико памтим, математика је (тачније, рачун) одувек било нешто што се код мене подразумева, нешто што ми „иде“ без проблема. На то је додатно утицао мој наставник у основној школи, звао се Боривоје Половина. Био је прави посвећеник и јако се нервирао кад неко није могао да схвати нешто што је њему изгледало једноставно. Један од принципа му је био: „За мене двојкаш и петичар морају исто да знају; разликујем их само по брзини рада“. Нисам сигуран да је то одговарало осталим ђацима, али мени је свакако помогло да увежбам брзо математичко размишљање.

Наравно, велики утицај је имала и Математичка гимназија која је, на моју срећу, отворена баш кад сам полазио у други разред. То ме је дефинитивно учврстило у оријентацији ка математици. Свакако, томе су допринели и одлични професори, поменуо бих Војина и Милицу Дајовић, као и Владимира Мићића.

Били сте веома успешни на такмичењима из математике, а и из физике. Које су Вам награде посебно драге? Како су такмичења изгледала тада?

Јако је тешко поредити тадашња такмичења и ова сада. То је отприлике као кад се упоређују, у атлетици, Џеси Овенс и Јусеин Болт или, у пливању, Џони Вајсмилер и Мајкл Фелпс. На пример, Вајсмилер је слављен као први који је препливао 100 метара за мање од минута, а данас неком омладинцу који то не уради до 18-те године кажу: „Иди, дете, па тренирај нешто друго!“ Уз то треба узети у обзир интензитет тренинга онда и сада, начин исхране и још много тога другог.

На неки начин, слично је са такмичењима из математике. Неки задаци који су у оно време кад сам се такмичио сматрани тешким, данас делују скоро смешно (понеки се дају и у основној школи). Али, треба узети у обзир количину информација које смо могли да добијемо из тада доступне литературе (интернет је, наравно, био научна фантастика), а свакако и време које смо посвећивали припремама. Можда ми нећете веровати, али за појам конгруенције први пут сам чуо тек у четвртом разреду гимназије!

Свакако, драге су ми све награде, из математике, као и из физике (такмичења из програмирања тада још није било), домаће и међународне. Наравно, највише ценим две треће награде (сад би се то звало бронзане медаље) на Међународним математичким олимпијадама. Можда ће звучати претенциозно, али мислим да треба рећи да је, на неки начин, данас много

лакше добити високу награду него тада. Наиме, сада се такмиче представници преко 100 земаља, а тада их је било само десетак, и то у просеку много јачих него што је то просек поменутих 100. Ефекат је да су, рецимо, мојих 27 поена (од 40 могућих) на 10. олимпијади у Москви били једва довољни за бронзану медаљу, а данас је често граница за „злато“ испод 30 (и то од 42 могућа). Ипак, да поновим, уз много теже задатке.

Специјализација на Државном универзитету у Москви. Потом докторат. Како је изгледао математички живот у Москви у то време? Да ли је имао утицај на избор теме за докторат и даљи научни рад?

Ка функционалној анализи сам се усмерио захваљујући професору Браниславу Мирковићу који је на Математичком факултету био скоро једини спреман да се посвети раду с последипломцима. Неуморно је организовао специјалне курсеве и водио семинаре. Радио је то с великим ентузијазмом, па је врло брзо окупио око себе групу нас младих, спремних да се упустимо у авантуру „бављења науком“. Уз све то, био је изузетно скроман. Тако памтим реченицу коју је упутио једном колеги кад му је, као и мени, дао савет да настави усавршавање у Москви: „Уз мене ћеш можда докторирати, а уз њих ћеш постати математичар.“

У оно време, ретко се одлазило на специјализацију на запад, још мање „преко баре“. Тадашњи Совјетски Савез, посебно Москва, био је релативно приступачно место, па нас је било доста који смо се тамо усавршавали. Мислим да московска математичка школа, у то време, ни у чему није уступала онима на западу, чак их је у неком погледу и превазилазила. Ипак, оно што ме је највише импресионирало за време боравка тамо, били су велика посвећеност раду на научном усавршавању и интензитет којим су том послу прилазили скоро сви са којима сам имао контакт. Посебно када се упореди с углавном слабим ентузијазмом с којим су свом послу приступали просечни становници Москве.

Од познатих научника с којима сам имао прилике да се сретнем, поменуо бих Андреја Колмогорова, који је тада већ био у годинама и није учествовао у настави. На једној конференцији, на којој сам учествовао, био је почасни председник од кога су сви учесници добили, као поклон, по једну математичку књигу с његовом посветом. Иначе, мој тадашњи ментор, Виктор Садовничиј, сада је већ 27 година ректор Московског универзитета.

Као наставник, радили сте на Математичком факултету, а исто тако и у Математичкој гимназији у Београду. Који Вам се посао више допадао? Како су Вас прихватали студенти и ђаци?

Тешко би ми било да дам предност једном или другом послу. С једне стране, проценат пажљивих слушалаца је сигурно већи међу ђацима у Математичкој гимназији, поготово што сам у последње време углавном држао наставу у тзв. менторском одељењу. С друге стране, настава на факултету ипак пружа могућности за излагања неких озбиљнијих садржаја. У

сваком случају, увек сам волео да држим часове и никад ми није падало тешко да их имам и прилично преко норме. Можда ће звучати нескромно, али мислим да су ме и ђаци и студенти увек добро прихватали.

Били сте декан Математичког факултета у Београду у три мандата. Како сте се сналазили у тој улози? У којој мери таква функција „лежи“ једном математичару?

Не знам да ли ћете ми веровати, али мислим да сам биран на руководеће функције на Факултету највише због тога што су колеге осетиле да ја то у ствари не желим – никад нису волели оне који су се „гурали“ на такве функције. Било је, наравно, и лепих али и тешких момената. У мом случају, свакако је најтежи био период Студентског протеста 1996/97 године, када је мој факултет међу првима стао на страну студената. Било је великих притисака од стране тадашње власти, али подршка колега с Факултета је била скоро једнодушна тако да смо заједно одолели свему томе.

Има се утисак да сте у Друштву математичара Србије одвајкада. Били сте на готово свим функцијама. Реците нам нешто о самом почетку и првом ангажману. Како видите улогу Друштва у популаризацији и развоју математике код нас?

И мени се чини да сам „одувек“ у Друштву математичара. Почело је то још у студентским данима, кад је неколицина нас ангажована за дежурство на Савезном такмичењу. Одмах по дипломирању, професор Мићић ми је понудио да будем „педагошки руководилац“ олимпијске екипе (данас би се то звало „deputy leader“), што сам наравно прихватио као велику част. Одмах наредне године, постао сам и „leader“. Након тога, некако природно, једна ствар је иницирала другу, да не набрајам.

Мислим да је улога Друштва математичара врло значајна, али да тај значај није у довољној мери шире познат. На пример, Друштво обавља заиста огроман посао организације математичких и програмерских такмичења на свим нивоима у којем је ангажован изузетно велики број наставника. Притом је одлазак на највиша међународна такмичења само врх леденог брега. А кад се олимпијци врате с медаљама, ни медији, па чак ни наше колеге-математичари, скоро да не помињу Друштво математичара, без чијег ангажовања не би било ни олимпијске екипе ни резултата. Некако се „подразумева“ да је то „тамо неко“ организовао. Наравно, добрим делом смо сами за то криви јер нам саморекламирање никад није било јача страна.

У име редакције Тангенте, захваљујем се на љубазном интервјуу и желим Вам пуно среће, здравља у сваког добра у даљем животу у раду.

В. Петровић

С А З Н А Ј Е М О

- Домаћин 9. Европске математичке олимпијаде за девојке (EGMO) била је Холандија. Због пандемије корона вируса, такмичење је одржано тако што су девојке радиле задатке од куће. Наша екипа у саставу: Јелена Иванчић, Ирина Ђанковић, Милица Вугделић и Миља Јовановић постигла је изванредан успех. Заузела је 2. место, одмах иза екипе Руске федерације. Јелена, Ирина и Милица су освојиле златне медаље, а Миља сребрну.

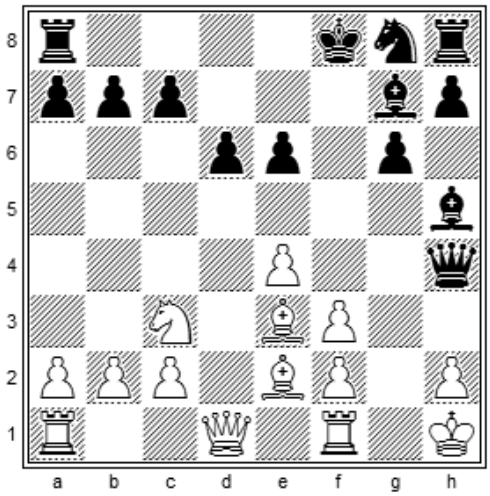
- Први пут ове године, 14. априла, одржано је Ревијално такмичење из математике за ученике основних школа. Задаци су били типа теста са пет понуђених одговора за сваки задатак. Ученици су задатке радили од куће у периоду од 2 сата. По речима организатора, одзив је био изванредан. Задаци и решења могу се видети на адреси: https://dms-takmicenje.vmdevbox.com/

- У уторак 21. априла одржано је online Ревијално такмичење ученика основних школа из информатике. На такмичењу је учествовало 109 обдарених ученика од 5. до 8. разреда. Више информација на адреси: https://takprog.petlja.org/osnovnaskola.

- У уторак 12. маја од 14 до 20 часова одржано је online Ревијално такмичење ученика средњих школа из математике. Такмичење је било на 8 нивоа, за сваки разред А и Б категорија. Учествовало је 629 ученика. Решења свих задатака била су доступна на сајту Друштва математичара Србије у 22 часа истог дана.

  Задаци, решења и друге информације могу се наћи на адреси https://dms-takmicenje.vmdevbox.com/srednje-skole/.

НАГРАДНИ ШАХОВСКИ ЗАДАТАК
Тангента 99 - решење



Црни вуче и матира у 5 потеза

1. ... Lf3+! 2. Lf3

2. Kg1 Dg4 мат

2. ... Le5 3. Lf4 Lf4 4. h3 Dh3+ 5. Kg1 Dh2 мат.

НАГРАЂЕНИ

Александар Стакић, 4. разр. Гимназија „Исидора Секулић“, Нови Сад; Радничка 41, 21000 Нови Сад

Сара Анђелковић, 1. разр. Гимназија Младеновац; Саве Шумановића 5, 11400 Младеновац

ШАХОВСКА СТРАНА

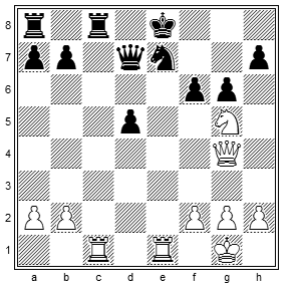
ПРВИ ШАМПИОН

Први званични првак света у шаху био је Аустријанац Вилхелм Штајниц. Рођен је 1833. у јеврејском гету у Прагу у тадашњој Аустроугарској монархији. Преминуо је 1900. године у Њујорку.

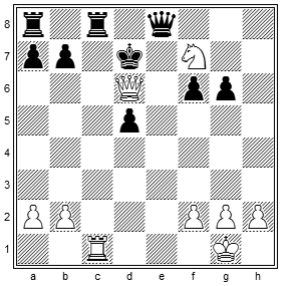
Првак света је постао 1886. године после победе у мечу са Јоханом Цукертортом једним од најјачих играча тог времена. Титулу је држао до 1894. када је изгубио од изазивача Емануела Ласкера.

„Шаховска мода“ већег дела 19. века била је „напад по сваку цену“. И Штајниц је то следио све до 1873. А онда је, по први пут, увео у праксу тзв. позиционо игру. Многи савременици су му приговарали за „кукаквички приступ“ не схватајући да је Штајниц тиме положио камен темељац модерног шаха.

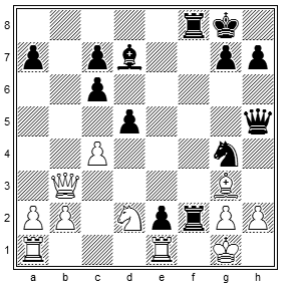
Из романтичарског периода, Штајниц је оставио низ бриљантних остварења. Комбинација из партије с Барделебеном из 1885, којој је претходила позиционa жртва пешака, спада у бисере шаховског стваралаштва.



Штајниц (бели) почиње дугу комбинацију у којој му је главни проблем слаб први ред. **1. Te7+!! Kf8**. Јасно, не иде 1. ... De7 због 2. Tc8+ итд. Али, зашто не 1. ... Ke7? Тада бели игра 2. Db4+ Kd8 (На 2. … Dd6 3. Db7+ Dd7 4. Te1 Kd6 5. Sf7+ и пада црна дама. А на 2. ... Ke8 3. Te1+ Kd8 4. Se6+ и опет пада дама јер не иде 4. ... De6 5. Te6 Tc1+ 6. Te1) 2. Df8+ De8 3. Sf7+ Kd7 4. Dd6 тзв. еполетни мат који ће се видети и на крају. **2. Tf7+ Kg8 3. Tg7+! Kh8.** Топ је недодирљив, а не иде 3. ... Kf8 због 4. Sh7+ и пада црна дама са шахом. **4. Th7+! Kg8.** Шетња белог топа по 7. реду подсећа на плес пеливана по разапетој жици изнад провалије. **5. Tg7+! Kh8 6. Dh4+ Kg7 7. Dh7+ Kf8 8. Dh8+ Ke7 9. Dg7+ Ke8 10. Dg8+ Ke7 11. Df7+ Kd8** (Не вреди 11. ... Kd6 12. Df6+ De6 13. De6 мат.) **12. Df8+ De8 13. Sf7+ Kd6 14. Dd6 мат.** Најављени еполетни мат који заслужује дијаграм.

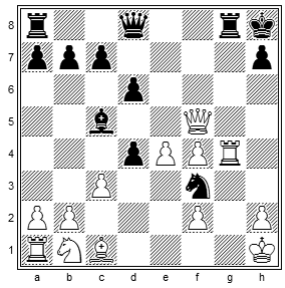


Ево још једне Штајницове (црни) бравуре.



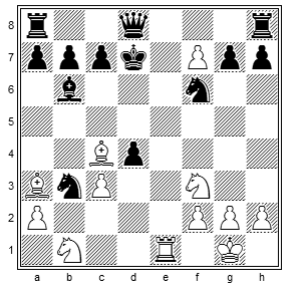
Црни води опасан напад, али се тренутно не види како да га настави. Штајниц налази **1. ... Tg2+!** после чега почиње прави ватромет. **2. Kg2.** Не вреди 2. Kh1 Th2+ уз брзо матирање.. **2. ... Dh3+!! 3. Kh3.** Не спасава 3. Kh1 због 3. … Tf2! и мат на g2 или h2 не може да се спречи. На 4. Db8+ Kf7. **3. ... Se3+ 4. Kh4 Sg2+ 5. Kg5(h5).** Краљ мора у неугодну шетњу. **5. ... Tf5+ 6. Kg4 h5+ 7. Kh3.** Покушај бекства, али **7. ... Tf2! мат.**

Црни (Штајниц) је на потезу у овој позицији.



Пада у очи изразита неразвијеност белог. Све три фигуре даминог крила су на почетним положајима, што не слути на добро. Али, упркос томе, ништа не наговештава да ће све бити готово у пар потеза. Ево како је Штајниц је извео прави „Blitzkrieg“. **1. ... Dh4! 2. Tg2.** Наравно, не иде 2. Th4 због 2. ... Tg1 мат, а после 2. Tg8+ Tg8 све је исто, па и горе, за белог. **2. ... Dh2+! 3. Th2 Tg1 мат**.

НАГРАДНИ ЗАДАТАК



Бели вуче и матира у 5 потеза

Решења слати на адресу:
vojpet@gmail.com
Најуспешнији решавачи биће награђивани шаховском литературом издавачке куће "Шаховски информатор".

Војислав Петровић

1 *Војислав Петровић,* Јубилеј

3 *Ратко Тошић*, Савршени бројеви

11 *Милан Митрески,* О једном неодређеном интегралу и Ојлеровој формули

13 *Александар Миленковић, Ненад Стојановић*, Наградни задаци

32 *Павле Мартиновић,* Упаривање у бипартитним графовима

39 *Срђан Опићановић,* Предлози за четврти писмени задатак

55 *Војислав Петровић,* Наш гост - Алфа и омега

59 Сазнајемо

60 Наградни шаховски задатак

61 Шаховска страна, *Војиалав Петровић,* Први шампион

YU ISSN 0354-656X