МАТЕМАТИЧКИ ЛИСТ

БРОЈ 5, 2019/20.

ЗА УЧЕНИКЕ ОСНОВНИХ ШКОЛА

LIV-5

Београд, 2020.

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
www.dms.org.rs e-mail: info@dms.org.rs

МАТЕМАТИЧКИ ЛИСТ
за ученике основних школа

Година LIV, број 5 (2020)
Излази пет пута годишње

ИЗДАЈЕ ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
Београд, Кнез Михаилова 35/IV, п.п. 355

Главни уредник: **др Ратко Тошић**
(ratosic@gmail.com)

Одговорни уредник: **Вера Јоцковић**

Чланови редакције:
Милош Ђорић, др Јелена Јоцковић, Татјана Гргуров, Сава Максимовић, Тања Мартић, др Татјана Стојановић, Невенка Угринов, Вељко Ћировић

Технички уредник: **Милица Мисојчић**

Илустрације и корице: **Срђан Стаменковић**

CIP-Каталогизација у публикацији Народна библиотека Србије, Београд

51

МАТЕМАТИЧКИ лист за ученике основних школа / главни уредник Ратко Тошић. Год. 1, бр. 1 (1967)-.-Београд (Кнез Михаилова 35): Друштво математичара Србије, 1967-(Крагујевац:Сквер).-20 cm

Двомесечно.
ISSN 0352/714X=Математички лист за ученике основне школе
COBISS.SR-ID 16493314

Штампа: СКВЕР, Крагујевац

2019/20. број 5

ОСНОВНА ТЕОРЕМА АРИТМЕТИКЕ И НЕКЕ ЊЕНЕ ПОСЛЕДИЦЕ

Ђорђе Дугошија, Београд

Природне бројеве који су већи од 1 и који су дељиви само са 1 и самим собом називамо **простим**, а бројеве који се могу представити као производ два природна броја већа од 1 називамо **сложеним**.

Следећа теорема је добро позната.

Основна теорема аритметике

*Сваки природан број већи од 1 је или прост или је производ простих бројева. При том је растављање на просте факторе **јединствено** до на редослед фактора.*

Теорема се готово нигде не доказује, јер је уврежено мишљење да је доказ тежак. Да ли је баш тако?

Доказ. Није тешко доказати да растављање сложеног броја на просте факторе увек постоји. Сваки сложен број је производ два мања природна броја. Ако су они прости, тврђење је доказано. У супротном сложени фактори се могу раставити и поступак се може понављати коначан број пута све док сви добијени фактори не буду прости.

Тежина теореме скривена је у доказу јединствености растављања.

Докажимо да је растављање до на редослед фактора јединствено, разлажући тај део доказа на неколико лема (помоћних тврђења) које су и понаособ интересантне.

Лема 1. Нека је a природан број који није дељив простим бројем p.Тада:

а) Ниједан од бројева $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ није дељив са p.

б) Скуп остатака тих бројева при деоби са p је $\{1,2,\dots,p-1\}$.

в) Постоји број a' такав да производ $a \cdot a'$ има остатак 1 при деоби са p.

Доказ. а) Ако би у скупу $A = \{a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a\}$ постојао елемент дељив са p, означимо са ka, $1 < k < p$, најмањи од таквих. Нека је $m \in N$ природан број такав да је $m < \frac{p}{k} < m+1$. Такво m постоји, јединствено је и задовољава неједнакост $1 \le p - km < k$. Због тога број $p - km$ припада скупу A и мањи је од ka. Он је и дељив са p, јер је $(p-km)a = pa - kma$. Контрадикција! Закључујемо да ниједан број из A није дељив са p.

б) Остаци бројева из A при деоби са p су међусобно различити, јер би у супротном, разлика два који имају исти остатак била елемент из A дељив са p, а такав не постоји. Како A има $p-1$ елемената, скуп свих остатака је $\{1,2,\dots,p-1\}$.

в) Скуп свих остатака бројева из A садржи 1, па постоји $a' \in \{1,2,\dots,p-1\}$ који задовољава тврђење.

Лема 2. Ако природни бројеви a и b дају остатак 1 при деоби природним бројем p, онда и ab даје остатак 1 при деоби са p.

Доказ. Сагласно датим условима $a = kp + 1, b = lp + 1$ за неке $k, l \in N \cup \{0\}$. Зато је $ab = (kp+1)(lp+1) = (klp + k + l)p + 1$, одакле следи тврђење.

Лема 3. Ако прост број дели производ ab два природна броја a и b, онда дели бар једног од њих.

Доказ. Претпоставимо да $p|ab$. Значи да је $ab = np$ за неко $n \in N$. Ако p не дели ни a ни b, према леми 1в, постоје природни бројеви a' и b' такви да $a'a$ и $b'b$ имају остатак 1 при деоби са p. Према леми 2 и остатак броја $aa'bb'$ при деоби са p једнак је 1, па једнакост

$$a'b'ab = a'b'np$$

даје контрадикцију, јер је при деоби са p остатак броја на левој страни 1, а на десној 0.

Докажимо сада је растављање јединствено до на редослед фактора. Претпоставимо супротно да неки природан број k има два различита растављања

$$k = p_1 p_2 \dots p_m = q_1 q_2 \dots q_n$$

за неке просте бројеве $p_1, p_2, \dots, p_m, q_1, q_2, \dots, q_n$. После скраћивања једнаких фактора на разним странама последње једнакости, добијамо или да је производ неких простих бројева једнак 1, што је немогуће, или једнакост истог облика али са дисјунктним скуповима фактора страна. Ни ово није могуће, јер би, према леми 3, прост фактор на једној страни једнакости морао да дели неки од њега различит прост фактор на другој страни. Тиме је основна теорема аритметике у потпуности доказана.

НЕКЕ ПОСЛЕДИЦЕ

Основну теорему аритметике можемо користити у решавању многих задатака. Приказаћемо неке.

Задатак 1. За који најмањи природан број n је $7007n$ потпун квадрат природног броја?

Решење. Из основне теореме аритметике лако закључујемо да је сложен број потпун квадрат ако и само ако се у његовом раставу на просте факторе сваки прост фактор појављује паран број пута. Како је $7007 = 7 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, најмање n за које је број $7007n$ потпун квадрат је $n = 11 \cdot 13$.

Задатак 2. Нека су p и q узајамно прости природни бројеви. Докажи да једначина $x^2 = \frac{p}{q}$ има решења у скупу рационалних бројева ако и само ако су p и q потпуни квадрати неких природних бројева.

Решење. Нека је $\frac{a}{b}, (a, b) = 1, a, b \in N$ решење једначине $x^2 = \frac{p}{q}$. Тада је

$$qa^2 = pb^2 \ .$$

Докажимо да је q потпун квадрат. Ако је r било који његов прост фактор, онда је q прост фактор од pb^2, па тиме и од b, јер је $(p, q) = 1$. Стога се r као фактор у растављању на просте факторе броја pb^2 појављује паран број пута. Следи да се и у растављању броја q на просте факторе r појављује паран број пута, јер се због $(a, b) = 1$ он не појављује у растављању броја a^2. Зато је q потпун квадрат.

Аналогно закључујемо да је и p потпун квадрат, чиме је „само ако“ тврђење доказано. „Ако“ тврђење је тривијално.

Задатак 3. Докажи да једначина $x^2 = 2020$ нема решења у скупу рационалних бројева.

Решење. Тврђење следи из претходног задатка ако докажемо да 2020 није потпун квадрат ниједног природног броја. Ово је тачно јер се 2020 налази између два суседна потпуна квадрата: $44^2 < 2020 < 45^2$.

Задатак 4. Докажи да рационалан број $\frac{p}{q}$, када су p и q узајамно прости природни бројеви има коначан децимални запис ако и само ако не постоји прост број различит од 2 и 5 који дели q.

Решење. Коначан децимални запис је заправо количник природног броја и степена броја 10. Зато је запис $\frac{p}{q}$ коначан ако и само ако се тај разломак може проширити тако да му именилац буде степен броја 10 тј. ако и само ако постоји $k \in N$ тако да је за неко $m \in N \cup \{0\}$

$$q \cdot k = 10^m.$$

Одавде следи да прости фактори броја q могу бити само 2 и 5, а ако то важи, број k очигледно постоји.

Задатак 5. Докажи да простих бројева облика $4k + 3$ има бесконачно много.

Решење. Прости бројеви већи од 2 могу бити само облика $4k + 1$ или $4k + 3$. Ако су првог облика и њихов производ је тог облика. Претпоставимо да су $p_1, p_2, \dots, p_n$ сви прости бројеви облика $4k + 3$. Нека је $m = 4p_1p_2 \dots p_n + 3$. Према основној теореми аритметике m је производ неких простих бројева. Бар један његов прост фактор мора бити облика $4k + 3$, јер би у супротном и m био облика $4k + 1$, што није.

Дакле p би био неки од $p_1, p_2, \dots, p_n$. Али тада би број m при деоби са p имао остатак 3 а не 0. Контрадикција!

ЗАДАЦИ ЗА САМОСТАЛАН РАД

1. Нека су $p, q \in N, (p, q) = 1$. Докажи да једначина $x^k = \frac{p}{q}$, $k \in N$ има решење у скупу рационалних бројева ако и само ако су p и q к-ти степени неких природних бројева.

2. Докажи да простих бројева облика $6k + 5$ има бесконачно много.
Упутство. Ако би $p_1, p_2, \dots, p_n$ били сви прости бројеви овог облика размотрите растав на просте факторе броја $6p_1p_2 \dots p_n + 5$.

3. Докажи да су сви бројеви: а) $\sqrt{n(n+1)}$; б) $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$, $n \in N$ ирационални.
Упутство. а) $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$;
б) Квадрат рационалног броја је рационалан број.

СПЕЦИЈАЛНИ ЗАДАТАК БРОЈ 102

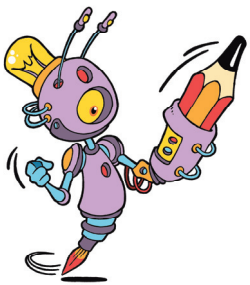
Десет најуспешнијих решавалаца овог задатка биће награђено. Упутство за слање решења је на страни 48.

Сваки од три човека је замислио број који је производ два различита проста броја. Испоставило се да су замишљени бројеви различити. Који је најмањи могући производ та три замишљена броја?

РАЧУНАРСТВО

РЕШЕЊЕ КОНКУРСНОГ ЗАДАТКА ИЗ РАЧУНАРСТВА БР. 216

```
n = int(input())
t = int(input())
i = 1
o = 'n'
pm = 0
pn = 0
while i <= n:
    r = int(input())
    if r <= t:
        t = t - 10
        i = i + 1
        if o == 'm':
            pm = pm + 1
        else:
            pn = pn + 1
```



```
    if o == 'm':
        o = 'n'
    else:
        o = 'm'
print(pm, pn)
```

На почетку се уноси број нивоа n које ће Мара и Нина играти и минимално време преласка првог нивоа t. Редни број нивоа који се игра се памти у променљивој i, а ко је на реду да игра у променљивој o. Такође, на почетку се поставља да и Мара и Нина имају по 0 успешно пређених нивоа. Након уноса времена за које су прешле ниво, проверава се да ли је то време мање или једнако од предвиђеног. Уколико јесте, то значи да за успешан прелазак наредног нивоа време треба умањити за 10, редни број нивоа се увећава за 1 и проверава се која од девојчица је играла тај ниво, па се њен број победа увећава за 1. Уколико је постигнуто време веће од предвиђеног мења се вредност променљиве o и игра се наставља све док редни број нивоа не премаши унету вредност n.

Теа Чебашек, V_2, ОШ „Младост“, Нови Београд

РЕШЕЊЕ КОНКУРСНОГ ЗАДАТКА ИЗ РАЧУНАРСТВА БР. 217

```
n = int(input())
m = int(input())
a = [[0 for i in range(m)] for j in range(n)]
k = int(input())
for i in range(k):
    r = int(input())
    c = int(input())
    a[r-1][c-1] = int(input())
b = 0
i = 0
while i < n:
    j = 0
    while j < m:
        t = int(input())
        if a[i][j] > 0:
            if t < a[i][j]:
                b = b + 10
            else:
                b = b + 5
                j = n
        else:
            b = b + 5
        j = j + 1
    i = i + 1
print(b)
```

На почетку програма се уноси од колико нивоа се састоји игрица и колико сваки ниво има поднивоа. Формира се матрица на основу унетих вредности којим се претпоставља да нема „тешких“ нивоа, тј. да је минимално време за прелазак сваког нивоа 0. Потом се уноси број „тешких“ нивоа, њихова позиција и минимално време преласка, па се на основу ових вредности мењају вредности у матрици минималних времена за прелазак сваког поднивоа. Док постоје наредни нивои и поднивои уносе се времена за које је Јован прешао тренутни ниво. Уколико за ниво постоји ограничено време преласка и унето време је мање, укупан број поена се увећава за 10. У супротном се број поена увећава за 5, а бројач поднивоа се поставља на максималну вредност, чиме се прелази на наредни ниво. Уколико унето време није време за „тежак“ ниво, број поена се увећава за 5. У сваком случају се редни број поднивоа увећава за 1. По преласку једног нивоа редни број нивоа се увећава за 1. На крају се исписују остварени поени.

Решење редакције

ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Задаци из ове рубрике имају за циљ помоћ како ученицима, тако и наставницима. Разврстани су у три групе у складу са стандардима знања из математике за крај обавезног образовања. Дати су предлози контролних и писмених задатака, при чему је у угластим заградама [ ] дата варијанта за другу групу. Неки задаци имају понуђене одговоре, па су погодни као припрема за такмичење *Кенгур без граница*.

Резултате и упутства у вези са задацима из ове рубрике можете пронаћи на сајту Друштва математичара Србије у секцији о Математичком листу.

III разред

СИСТЕМАТИЗАЦИЈА

1. Повежи дате изразе са одговарајућим решењима.

100+30 •	• 450
250+200 •	• 910
360+240 •	• 130
990-80 •	• 230
570-340 •	• 600
846-623 •	• 223

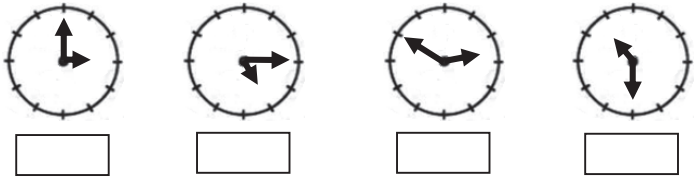
2. Израчунај:

а) $20 \cdot 3$, б) $14 \cdot 10$, в) $34 \cdot 2$, г) $47 \cdot 5$,
д) $60 : 3$, ђ) $70 : 10$, е) $500 : 100$, ж) $240 : 2$.

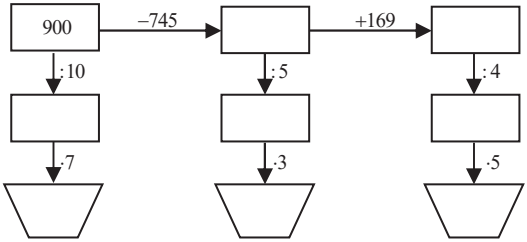
3. Реши једначине:

а) $x + 150 = 770$; б) $240 + x = 640$; в) $920 – x = 510$; г) $x – 200 = 160$;
д) $x \cdot 10 = 400$; ђ) $2 \cdot x = 280$; е) $x : 5 = 20$; ж) $960 : x = 10$.

4. У празно поље упиши тачно време које показују сатови:



5. Израчунај, па у празна поља упиши одговарајуће бројеве.



6. Попуни празна поља у следећој табели:

арапски број	14		129		637	
римски број		LVI		CDXL		CMIV

7. Реши једначине:
а) 438 + *x* = 901; б) 7 · *x* = 203; в) 840 : *x* = 5; г) 700 - *x* = 249.

8. Поређај по величини дате масе, почевши од најмање:

$200\ g \qquad 2\ kg \qquad 1\ t \qquad 1\ kg \qquad 33\ g \qquad 30\ kg$

9. Ширина правоугаоника је $3dm\ 6cm$, а дужина је за $1dm\ 7cm$ већа од ширине. Израчунај обим тог правоугаоника.

10. Породица Перић је кренула на море у $2h\ 30min$. Када је породица Перић стигла на море ако је путовала $11h\ 45min$?

11. а) Збир бројева 128 и 189 увећај 3 пута.
б) Разлику бројева 802 и 654 смањи 2 пута.
в) Производ бројева 136 и 4 увећај за 279.
г) Количник бројева 945 и 7 смањи за 58.

12. У једном разреду има 24 ученика. Једна трећина ученика је завршила разред са одличним успехом, а једна четвртина са врло добрим успехом. Колико ученика има одличан, а колико има врло добар успех?

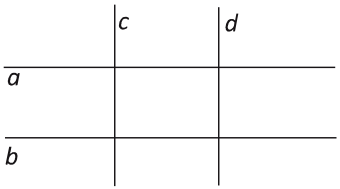
13. Израчунај вредност израза:
а) 250 – 25 : 5; б) (358 – 164) · 3; в) 245 : 5 – 5; г) 576 : (340 – 331).

14. Колико пута треба умањити број 800 да би добио количник бројева 70 и 7?

15. Нацртај дуж $AB = 3cm$. Нацртај две кружнице ако је дуж AB полупречник и једне и друге кружнице,при чему су им центри различити.

16. Ако је $a + b = 700$, одреди:
а) $(a + 130) + (b + 130)$; б) $(a + 130) + (b - 130)$;
в) $(a - 130) + (b - 130)$; г) $(a - 130) + (b + 130)$.

17. Запиши све парове међусобно нормалних правих и све парове међусобно паралелних правих.



18. Породица Васић је кренула на море у $2h\ 30min$. Када је породица Васић стигла на море ако је успут направила две паузе од по $45min$, а у вожњи је провела $13h\ 20min$?

19. Обим правоугаоника је $450cm$. Колико износи дужина правоугаоника ако је ширина $52cm$?

IV разред

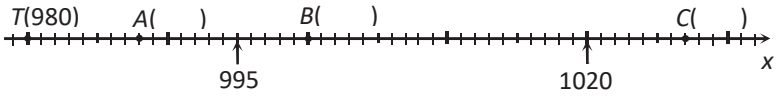
СИСТЕМАТИЗАЦИЈА

1. Запиши:
а) цифрама бројеве:
хиљаду пет_____;
тринаест хиљада осам_____.

б) речима бројеве:
3012_____;
107024 _____.

в) цифрама и речима број који има:
8 хиљада, 5 десетица_____;
12 хиљада, 11 десетица, 23 јединице_____.

2. Тачки *T* на бројевној прави одговара број 980.
а) Поред тачака *A*, *B* и *C* упиши бројеве који им одговарају.
б) На истој бројевној прави означи тачку *M* којој одговара број 1009 и тачку *N* којој одговара број 1022.



3. Напиши најмањи петоцифрен број чија је цифра стотина 6 и за 4 је већа од цифе јединица, 2 пута већа од цифре десетица и за 1 мања од цифре која је на месту десетице хиљада.

4. При сабирању неколико бројева Јован је направио грешке. У једном сабирку цифру јединица 2 је заменио цифром 9, цифру десетица 8 цифром 3, а цифру стотина 5 цифром 7. За колико је Јован променио тачан збир?

5. Израчунај: а) збир; б) разлику; в) производ; г) количник бројева 2020 и 101.

6. Радован је ђак – пешак. Његова кућа удаљена је од школе 8 километара. Колико километара Радован треба да пређе у току године која има 180 наставних дана, рачунајући пут од куће до школе и обратно?

7. Израчунај вредност израза:
а) 210 – 5 · 4 + 3; б) (210 – 5) · 4 + 3;
в) (210 – 5) · (4 + 3); г) 210 – (5 · 4 + 3).

8. Реши једначине:
(1) 4236 + x = 9000; (2) x – 7532 = 1256; (3) 1003 – x = 27;
(4) 17 · x = 1003; (5) x : 29 = 73; (6) 1073 : x = 29.

9. Бака је купила $2kg$ јабука. Прво су деца појела половину тих јабука. После тога је деда за ужину појео једну јабуку. Кад су деца увече појела још половину преосталих јабука, остале су само три јабуке. Колико комада јабука је купила бака?

10. За које природне бројеве x важи:
а) x – 19 < 23; б) 303 – x ≥ 298; в) x : 3 > 5; г) 4 · x + 35 ≤ 39?

11. Израчунај:
а) $\frac{3}{7}$ броја 21; б) $\frac{4}{9}$ од 36; в) број чија деветина износи 9;
г) број чије $\frac{3}{8}$ износе 48.

12. Никола је од свог џепарца уштедео 7200 динара. Шестину новца потрошио је да купи сестри поклон за рођендан, три осмине је дао за своје патике, а две деветине за дукс. Колико му је новца остало?

13. Цена мобилног телефона снижена је за једну десетину, а затим још за једну петину и сада износи 3600 динара. Колика је цена била пре првог снижења?

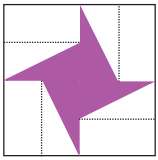
14. Одреди два броја чији је збир 2020, ако је $\frac{1}{6}$ већег броја једнака $\frac{1}{4}$ мањег броја.

15. Упиши одговарајуће бројеве тако да буду тачне једнакости:
(1) 1356*mm* = ____ *m*____ *dm* ____ *cm* ____ *mm*;
(2) 1356 *mm* = _____ *dm* _____*mm*;
(3) 22*m* 47*cm* = _____ *mm*;
(4) 749 *cm* = _____ *m* _____ *cm*;
(5) 378cm^2 = _____ dm^2 _____ cm^2;
(6) 2*a* 3m^2 = _____ m^2.

16. Израчунај: а) површину квадрата чији је обим 104*dm*;
б) обим правоугаоника чија је површина 437cm^2, а једна његова страница је 19*cm*.

17. За колико се смањи страница квадрата, ако се његов обим смањи за 100*cm*?

18. Квадрат странице 16*cm* подељен је на четири једнака квадрата. Сваки од тих квадрата подељен је на по два једнака правоугаоника. Некима од тих правоугаоника обојена је по једна половина. На тај начин је настала фигура на слици. Израчунај површину те фигуре.



19. Допуни табелу тачним подацима.

Ивица коцке	Збир свих ивица коцке	Површина једне стране коцке	Површина коцке
$3cm$			
	$12m$		
		$25cm^2$	
			$96dm^2$

20. Површине страна квадра су 35cm^2, 21cm^2 и 15cm^2. Израчунај површину тог квадра.

V разред

СИСТЕМАТИЗАЦИЈА

1. Попуни табелу одговарајућим записом броја.

Разломак	$\frac{17}{5}$			$\frac{12}{25}$
Мешовити број		$2\frac{3}{40}$		
Децимални број			10,15	

2. а) Кошаркаш Огњен Јарамаз је у актуелној сезони европског такмичења EUROCUP погодио 19 тројки, а укуно је шутнуо 61 тројку. Колико процената од укупно шутнутих тројки је он убацио? (Одговор заокружити на једну децималу.)
б) Исти играч је у истом такмичењу одиграо 15 утакмица и укупно направио 42 асистенције и постигао 135 поена. Колико је он просечно давао поена, а колико имао асистенција по утакмици?
(Подаци у овом задатку су стварни и односе се на све утакмице одигране до краја TOP16 фазе наведеног такмичења.)

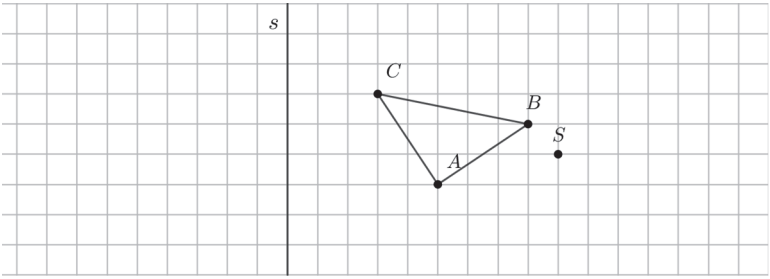
3. У свако празно поље табеле упиши најмањи троцифрени број чија је цифра стотина једнака реду у који се број уписује (нпр. цифра стотина броја који се уписује у трећи ред мора бити 3) тако да тврђења у сваком реду табеле буду тачна. (У редове се не рачуна заглавље табеле.)

Број	Дељив са 2	Дељив са 3	Дељив са 5
	Да	Да	Да
	Да	Да	Не
	Да	Не	Да
	Да	Не	Не
	Не	Да	Да
	Не	Да	Не
	Не	Не	Да
	Не	Не	Не

4. а) Ако је $a = 0{,}73 + 1{,}44;\ b + 1{,}6 = a;\ c = b \cdot 0{,}2$ и $c \cdot d = 0{,}0171$ израчунај d.

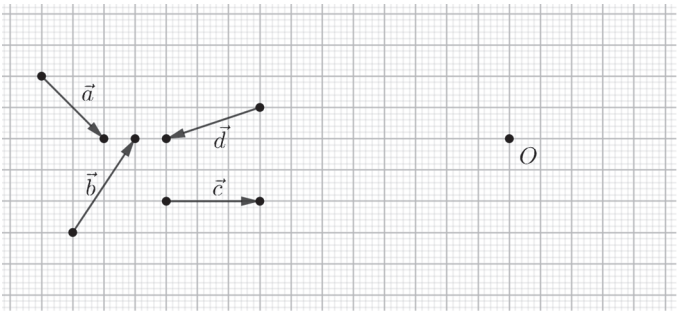
б) Ако је $a = \frac{3}{4} - \frac{1}{6};\ b - \frac{2}{3} = a;\ c = b : 12\frac{1}{2}$ и $d : c = 1\frac{3}{7}$ израчунај d.

5. У квадратној мрежи, пресликај троугао ABC централном симетријом у односу на тачку S као и осном симетријом у односу на праву s.



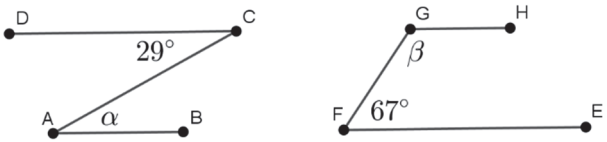
6. Нацртај троугао ABC такав да је угао ABC туп, а затим конструиши праву p која садржи тачку C и:
а) нормална је на праву AB; б) паралелна је са правом AB.

7. Одреди тачке A, B, C, D у квадратној мрежи на датој слици тако да важи $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ и $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$.

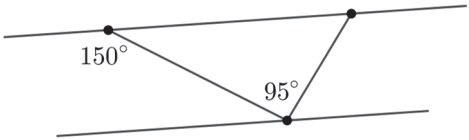


8. а) Одреди меру угла комплементног углу од $19°20'$.
б) Одреди мере суплементних углова који се разликују за $20°19'$.
в) Одреди мере комплементних углова ако је њихова размера $2:3$.

9. На датим сликама важи $AB \parallel CD$ и $EF \parallel GH$. Одреди мере углова α и β.



10. Две праве на датој слици су паралелне. Израчунај мере свих конвексних неопружених углова са слике.



11. Дат је четороугао $ABCD$ такав да важи $AB \parallel CD$, тачка D припада симетрали угла ABC и $\measuredangle BAD = 55°, \measuredangle BDC = 44°$. Одреди мере углова $\measuredangle BCD$ и $\measuredangle BDA$.

12. Нацртај троугао ABC, а затим конструиши заједничку тачку симетрале дужи AB и симетрале угла BCA. У ком случају ова тачка није јединствена?

13. Нацртај четвороугао $ABCD$, а затим конструиши тачку на правој CD која је једнако удаљена од тачака A и B.

14. Одреди цифре a, b (које не морају бити различите) такве да је број $\overline{5b20a19b}$ дељив са 9 и 2 и није дељив са 4 и 5.

15. а) Напиши све просте бројеве мање од 30;
б) За сваки од бројева 1, 2, 111, 121, 411, 493, 111115, 77776, 997 напиши да ли је прост или сложен;
в) Напиши најмањи сложен број који није дељив ни са једним бројем мањим од 50;
г) Растави број $a = 91 \cdot 108 \cdot 125 \cdot 143$ на просте чиниоце.

16. Одреди НЗС(a, b) и НЗД(a, b) ако је $a = 25 \cdot 56$ и $b = 30 \cdot 42$.

17. Израчунај $\frac{\frac{1}{4} \cdot 0{,}35 + 1\frac{1}{4} \cdot 0{,}25}{2 - 1{,}5} : \frac{1}{5}$.

VI разред

СИСТЕМАТИЗАЦИЈА

1. Ако би следеће бројеве поређели од најмањег до највећег који би био у средини?

А) $-\frac{1}{3}$; Б) $\frac{3}{10}$; В) 31%; Г) - 0,03; Д) -0,303.

Заокружи слово испред тачног одговора.

2. Који од разломака имају коначан децимални запис?

А) – $\frac{1}{3}$; Б) – $\frac{189}{4}$; В) $\frac{7}{27}$; Г) – $\frac{1}{22}$; Д) – $\frac{12}{15}$;

Заокружи слова испред тачних одговора.

3. Израчунај збир најмањег и највећег броја од датих бројева:

-3,2; $\frac{2}{3}$; $-\frac{3}{2}$; 0; 1,9; -1; $-\frac{29}{20}$.

4. Које једнакости

а) $\frac{1}{2} - 3 = -2{,}5$; б) $-\frac{2}{3} \cdot (-\frac{3}{4}) = -\frac{1}{2}$; в) 25 : (-2,5) = -10; г) -4,8 + 8 = - 4

су тачне? Заокружи слова испред тачних одговора.

5. Бројевна вредност израза $\left((1 \cdot 2 : (3 \cdot 4) - 5) \cdot 6 - 7\right) \cdot 8 : 9$ је:

А) – $\frac{1}{2}$; Б) – $\frac{189}{8}$; В) – $\frac{7}{24}$; Г) – $\frac{1}{72}$; Д) ни један од понуђених бројева.

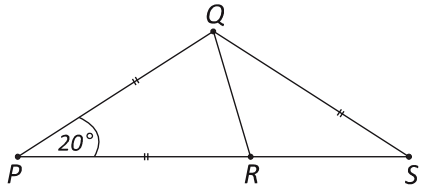
Заокружи слово испред тачног одговора.

6. а) Смањи број 150 за 14%; б) Повећај број 140 за 15%.

7. Један роман је 1974. године коштао 40 динара. Данас ново издање истог романа кошта 500 динара. За колико процената је овај роман поскупео?

8. Ако се први сабирак збира 160 + 200 повећа за 15% за колико процената треба да се смањи други сабирак да се збир не промени?

9. Ако у троуглу PQS важи да је $PQ = PR = QS$ и $\measuredangle QPR = 20°$ (слика), израчунај угао QRS.



10. Израчунај површину правоугаоника *ABCD* чији је обим 15*cm*, а једна страница 3,6*cm*.

11. Нека је *ABCD* квадрат странице 16*cm*. Нека је *M* било која тачка на страници *CD* и *O* пресек дијагонала. Израчунај површине троуглова: *ABO*, *ABM, BCO.*

12. Колико решења има неједначина $-2 \cdot x - 5 \leq 3$ у скупу целих бројева мањих од 5?

А) 0; Б) 4; В) 5; Г) 8; Д) 9.

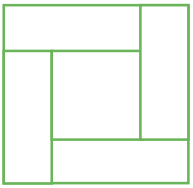
Заокружи слово испред тачног одговора.

13. Производ пет целих бројева је број 2020. Израчунај највећи збир тих бројева.

14. Реши једначину $|x| + 8 = 7 \cdot 6 - 5 : 4.$

15. Углови троугла *ABC* су по природан број степени. Одреди те бројеве ако су они квадрати неких бројева.

16. Квадрат странице 10*cm* је подељен на четири подударна правоугаоника и мали квадрат. Види слику!. Дужина мање и дужина веће странице једног од правоугаоника је у размери 1:3. Који део површине великог квадрата је површина малог квадрата?

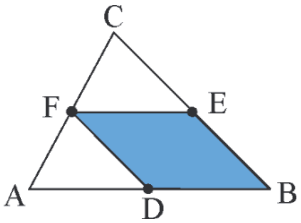


17. Две странице делтоида су 6*cm* и 8*cm* и секу се под углом од 150º. Израчунај површину тог делтоида.

18. Нека су *E*, *F* и *D* редом средишта страница *BC*, *AC* и *AB* троугла *ABC* на слици. Који део површине троугла је неосенчен?

А) $\frac{1}{4}$; Б) $\frac{1}{2}$; В) $\frac{1}{3}$; Г) $\frac{2}{3}$; Д) $\frac{3}{4}$.

Заокружи слово испред тачног одговора.



VII разред

СИСТЕМАТИЗАЦИЈА

У задацима 1 – 10. Заокружи један тачан одговор.

1. Вредност израза $(\sqrt{19} - 3)(\sqrt{19} + 3)(\sqrt{29} - 5)(\sqrt{29} + 5)$ је:

а) 4; б) $\sqrt{23}$; в) 40; г) 90; д) 100.

2. За природне бројеве a, b и c кажемо се да су Питагорина тројка бројева ако важи $a^2 + b^2 = c^2$. Која од наведених тројки бројева није Питагорина?

а) 5, 12, 13; б) 6, 8, 10; в) 8, 15, 17; г) 7, 24, 25; д) 10, 40, 41.

3. Унутрашњи угао правилног десетоугла једнак је:

а) 144°; б) 145°; в) 136°; г) 180°; д) 216°.

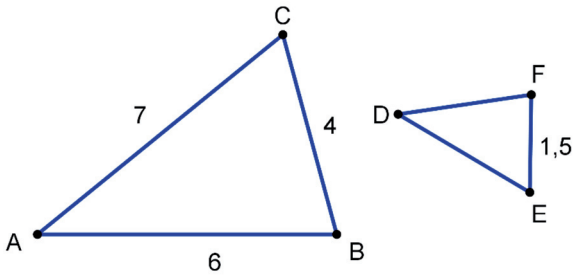
4. У правилнои шестоугао странице 6*cm* може се уписати круг полупречника:

а) $8\sqrt{2}\ cm$; б) $6\sqrt{3}\ cm$; в) $6\sqrt{2}\ cm$; г) 12 *cm;* д) $6\sqrt{6}\ cm$.

5. 40% од 25% броја 800 једнако је:

а) 200; б) 320; в) 520; г) 80; д) 8.

6. Троуглови *ABC* и *DEF* на слици су слични. Обим троугла *DEF* једнак је:



а) 13; б) $\frac{51}{12}$; в) $\frac{51}{8}$; г) 7; д) $\frac{32}{7}$.

7. У мењачници се за 14160 динара може купити 120 евра. Колико динара је потребно за куповину 730 евра?

а) 86140; б) 87000; в) 56800; г) 90120; д) 75300.

8. Полином $(2x-1)^2-(x+3)^2+(x+4)(x-1)$ једнак је полиному:

а) $x^2-2x-12$; б) $-3x^2-6x-22$; в) $3x$;
г) $4x^2-11x-12$; д) $4x^2+4x-12$.

9. Број $\frac{2\cdot 4^4\cdot 8^8\cdot 16^{16}}{32^{32}}$ је:

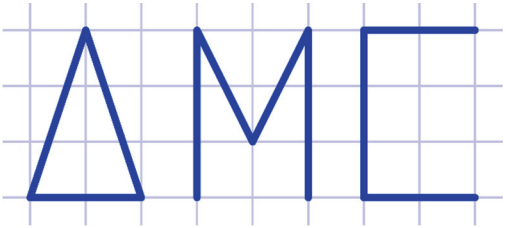
а) већи од 1; б) већи од $\frac{1}{2}$; в) мањи од $\frac{1}{4}$, а већи од $\frac{1}{8}$;
г) мањи од $\frac{1}{1000}$; д) већи од $\frac{1}{2000}$.

10. Обим круга једнак је $40\pi\ cm$. Његова површина је:

а) $200\pi\ cm^2$; б) $400\pi\ cm^2$; в) $800\pi\ cm^2$; г) $40\pi\ cm^2$ д) $500\pi\ cm^2$.

11. Нека је *ABCDEFGH* правилан осмоугао чија је површина *P*, а *BDFH* четвороугао површине P_1. Одреди однос $P:P_1$.

12. Израчунај дужину линија којима су написана слова ДМС у квадратној мрежи, ако је јединично растојање једнако 1*cm*.



13. Растави полиноме:

а) $25x^2 - 9(x-3)^2$; б) $4a^3b^2 - 8a^4b^2 + 6a^2b^3$; в) $a^3 + a^2 - 9a - 9$.

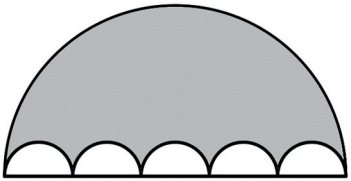
14. Упореди бројеве: а) 15^{20} и 2^{80}; б) $5\sqrt{7}$ и $6\sqrt{5}$.

15. Дате су тачке *A*(1,2), *B*(5,2), *C*(6,4), *D*(3,4) и *E*(2,4). Коју од њих треба одбацити, тако да преостале 4 су темена паралелограма?

16. Одреди координате темена троугла *KLM* централносиметричног троуглу *ABC* у односу на координатни почетак, ако је $A(-1,0)$, $B(3,1)$ и $C(0,5)$.

17. Аца, Бобан и Влада заједно имају 35 година. Ако Аца има 80% Бобанових година, а број Владиних година је за 70% већи од Бобанових, колико година има свако од њих?

18. Над пречником једног полукруга конструисано је још 5 полукругова, као на слици. Ако је пречник мањих полукругова једнак 10*cm*, израчунај површину осечене фигуре.



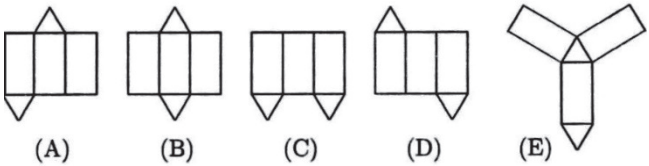
VIII разред

СИСТЕМАТИЗАЦИЈА

1. Реши једначине:

а) $\frac{2x+1}{5} - \frac{3x+2}{8} = 1 - \frac{x}{20}$; б) $(x+2020)^2 - (x-2020)^2 = 4$.

2. Која од следећих мрежа не може формирати правилну тространу призму?



3. Збир катета правоуглог троугла је $22cm$. Ако се једна катета смањи за $4cm$, а друга повећа за $2cm$, површина се не промени. Наћи обим и површину почетног троугла.

4. Површине три стране правоугле кутије су 12, 8, 6. Израчунај запремину те кутије.

5. Израчунај површину квадра чији је дијагонални пресек квадрат обима $40cm$, а чије се две ивице односе као 4:3.

6. Решење неједначине $x(x-3) < (x+3)^2$ је:

а) $x < 0$; б) $x > \frac{3}{2}$; в) $x > -1$; г) $x < 1$; д) $x < -\frac{3}{2}$.

Заокружи слово испред тачног одговора.

7. График линеарне функције $ax + by = c$ садржи тачку $P(-2, -1)$ и паралелан је са графиком функције $3x + 5y = 15$.
а) Одреди a, b, c.
б) Нађи нулу функције.
в) Нађи површину троугла којег график линеарне функције формира са координатим осама.

8. Цена зимовања је 290€, а може да се плати на следећи начин: 50€ одједном, а остатак у ратама по 30€, сваког месеца.
а) Изрази функцијом висину дуга (y) у зависности од броја отплаћених рата (x).
б) За колико месеци ће бити исплаћена цела сума?
в) Колико би била месечна рата ако зимовање треба исплатити за 5 месеци?

9. Ако се неки број подели другим бројем, добије се количник 2 и остатак 5. Ако се збир тих бројева подели њиховом разликом, добије се количник 2 и остатак 7. Колики је збир тих бројева?

10. Изводница купе $6\sqrt{2}cm$, нагнута је према равни основе под углом од $45°$. Израчунај запремину и површину купе.

11. На почетку школске године, 40% ученика једног одељења су биле девојчице. До полугодишта је дошло још 5 девојчица, па је број дечака и девојчица једнак. Колико је ученика у одељењу било на крају школске године?

12. Површина троугла чија су темена средине мимоилазних ивица коцке дужине a, једнака је:

а) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$; б) $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$; в) $\frac{3}{4}a^2$; г) $\frac{5}{6}a^2$; д) ни један од ових одговора.

Заокружи слово испред тачног одговора.

13. У једној чаши је сок од воде и сирупа у размери 2:1, а у другој чаши у размери 3:2. Сок из обе чаше пресут је у празан суд, при чему је добијена размера воде и сирупа 27:17. Колики је био однос количине сока у чашама?

а) 1:4; б) 2:7; в) 4:9; г) 9:35; д) 9:37.

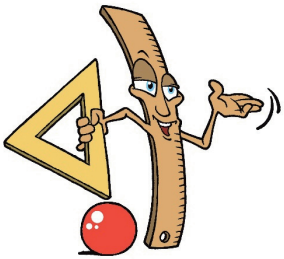
Заокружи слово испред тачног одговора.

14. У равни α дат је једнакостранични троугао ABC чија је страница једнака a. Пресек равни α и β је права AB, при чему је угао између α и β једнак $45°$. Одреди растојање тежишта троугла ABC од равни β.

15. Гвоздене куглице пречника $1{,}6cm$, треба претопити у једну куглу пречника $8cm$. Колико је потребно таквих куглица.

а) 1000; б) 125; в) 100; г) 25?

Заокружи слово испред тачног одговора.



16. Осни пресек купе је једнакостранични троугао, странице $6cm$. У ову купу је уписана лопта. Израчунај однос запремине лопте и запремине купе.

17. Над мањом страницом правоугаоника са спољашње стране конструисан је полукруг. Израчунај површину и запремину тела које настаје ако се правоугаоник и полукруг обрћу око заједничке осе симетрије. Дужине страница правоугаоника су $12cm$ и $8cm$.

18. Фигура ограничена y-осом, x-осом и графицима функција $y = 2$ и $y = x - 2$ ротира око x-осе. Ако је јединична дуж $1cm$, онда је запремина тако добијеног тела:

а) мања од $20cm^3$; б) између $20cm^3$ и $30cm^3$;
в) између $30cm^3$ и $50cm^3$; г) већа од $50cm^3$.

Заокружи слово испред тачног одговора.

19. Два круга полупречника $2cm$ и $6cm$ додирују се споља. Израчунај површину троугла чија су темена заједничка тачка датих кругова и тачке у којима ове кружнице додирује једна њихова заједничка спољашња тангента.

ТРЕЋИ ДРИНСКИ МАТЕМАТИЧКИ КУП КУП ОСНОВНИХ ШКОЛА

Милан Живановић, Митар Јосиповић, Бајина Башта

У основној школи „Свети Сава“ у Бајиној Башти 27. маја 2019. године одржан је Трећи Дрински математички куп основних школа. Учествовало је 9 школа из подрињских општина: Бајина Башта, Братунац, Вишеград, Зворник, Лозница, Љубовија и Сребреница. Манифестацију су подржали Општина Бајина Башта, ЈП Дринско-лимске хидроелектране, Друштво математичара Србије и Центар за промоцију науке.

Ученици четири завршна разреда решавали су по 6 задатака који су се бодовали за екипно и појединачно такмичење. Прва три места у појединачној конкуренцији по разредима дати су у табели:

5. разред	Ученик	Школа	Бодови
1.	Андреа Крњић	„Свети Сава“, Бајина Башта	70
2.	Емилија Танасић	„Вук Караџић“, Братунац	55
3.	Сања Тошић	„Петар Враголић“, Љубовија	32
6. разред	**Ученик**	**Школа**	**Бодови**
1.	Теодора Радека	„Рајак Павићевић“, Бајина Башта	90
2.	Ива Живановић	„Свети Сава“, Бајина Башта	75
3.	Лазар Петковић	„Свети Сава“, Зворник	65
7. разред	**Ученик**	**Школа**	**Бодови**
1.	Његош Видовић	„Свети Сава“, Зворник	98
2.	Милица Јовичић	„Кадињача“, Лозница	95
3.	Бојан Спајић	„Вук Караџић“, Братунац	85
8. разред	**Ученик**	Школа	Бодови
1.	Вељко Богдановић	„Петар Враголић“, Љубовија	100
2.	Тадија Матић	„Свети Сава“, Зворник	84
3.	Михаило Миличић	„Свети Сава“, Бајина Башта	58

У екипном пласману најуспешнија је била школа „Свети Сава“ из Зворника са освојених 266 бодова, друго место припало је школи домаћину такмичења са 218, а треће место и 208 бодова освојили су ученици школе „Кадињача“ из Лознице. У време решавања тестова за наставнике организован је кратак семинар на коме су предавачи били наши еминентни математичари: редовни професор др Милош Арсеновић са Математичког факултета у Београду, др Војислав Андрић председник ДМС, др Петар Мелентијевић са МФ у Београду и Бојана Матић професор Математичке гимназије у Београду. Иначе, Бојана и

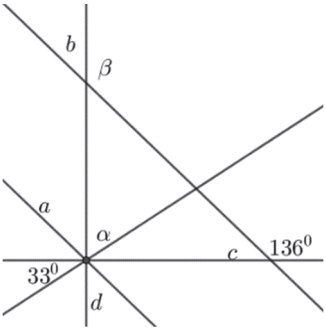
Петар су бивши ученици ОШ „Свети Сава“ из Бајине Баште. На слици су награђени ученици са својим наставницима и предавачима на семинару.

Задатке за такмичење из старих бројева „Математичког листа“ припремили су за 5. и 6. разред Митар Јосиповић, а за 7. и 8. разред др Милан Живановић.

Задаци

V разред

1. Одреди углове α и β. Види слику!



2. Први члан низа је 6,5 а сваки следећи је за $1\frac{1}{4}$ мањи од предходног. Колико има чланова низа који су већи од нуле? Одреди последњи члан низа који је већи од нуле.

3. Нацртај троугао ABC. Конструиши тачку D која припада дужи AB и важи $\angle ACD = \frac{1}{4}\angle ACB$, као и тачку E која припада правој CD и важи $CE = AE$.

4. Јелен, срна и лане имају заједно 99,2*kg*. Срна је 4 пута лакша од јелена, а маса ланета је $\frac{1}{3}$ масе срне. Колика је маса сваке од ових животиња?

5. Разлика два суплементна угла једнака је половини мањег угла. Израчунај те углове.

6. У ребусу $\dfrac{R \cdot A \cdot Z \cdot L \cdot O \cdot M \cdot A \cdot K}{B \cdot R \cdot O \cdot J}$, слова замени цифрама (различита слова различитим, а иста слова истим цифрама), тако да вредност разломка буде највећи природан број који се на тај начин може добити.

VI разред

1. Израчунај апсолутну вредност израза:

$$\frac{\left(-\frac{3}{2}+0{,}25\right):\left(\frac{5}{4}-0{,}125\right)-\frac{1}{9}}{\frac{3}{4}-0{,}25:\frac{5}{4}-\frac{21}{20}}.$$

2. У скупу целих бројева реши неједначину: $|3x| \leq \frac{2019}{673}$.

3. У трапезу *ABCD, AB*=12*cm, BC=CD=DA* и $\angle BCA = 90°$. Израчунај обим тог трапеза.

4. Мица је направила 2 литра 20% раствора соли у води. Колико процената соли ће бити у раствору ако Мица долије још 1 литар чисте воде?

5. Конструиши троугао ABC ако је: $BC = a = 5cm, \angle B = \beta = 45°$ и полупречник описане кружнице $3cm$.

6. Одреди цифре x и y различите од нуле ако је број $\overline{xyxyx}$ дељив са 3, а број $\overline{yxyxyxy}$ дељив са 18.

VII разред

1. Израчунај вредност израза:

А) $\dfrac{2^2}{3}-\dfrac{3}{2^2}-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$ Б) $\sqrt{1+\dfrac{9}{16}}-\sqrt{\dfrac{9}{16}}+\sqrt{1-\dfrac{16}{25}}+\sqrt{\dfrac{16}{25}}$

2. Број *x* је 1,25 пута већи од броја *y*. За колико процената је број *y* мањи од броја *x*?

3. Неки многоугао има 14 дијагонала. Израчунај колики је збир унутрашњих углова многоугла који има два пута више страница.

4. У правоуглом троуглу дужине тежишних дужи које одговарају катетама су $2\sqrt{13}$ и $\sqrt{73}$. Израчунај хипотенузу тог троугла.

5. Одсецањем једнакокрако-правоуглих троуглова од квадрата настаје правилан осмоугао страница 8*cm*. Израчунај површину квадрата и осмоугла.

6. Докажи да је $n^5 + 19n$ дељиво са 5 за сваки природан број n.

VIII разред

1. Одреди збир целобројних решења дате једначине на интервалу (-2019,2019]:

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}\left(x-\frac{5}{6}\right)$$

2. Површина правилне четворостране пирамиде је 384cm^2, а површина једне бочне стране је 60cm^2. Израчунај запремину пирамиде.

3. Површина троугла који график функције $y = 2x + n$ заклапа са координатним осама је 5. Израчунај обим тог троугла.

4. У равнострану купу пречника основе 6*cm* уписана је лопта. Израчунај однос запремине лопте и запремине купе.

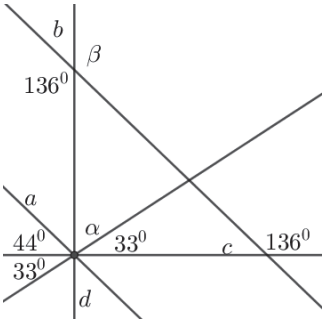
5. На екскурзији у Риму Петар је купио 9 разгледница за 11 евра и неколико центи, а Вера 13 истих разгледница за 15 евра и неколико центи. Колико кошта једна разгледница?

6. Одреди збир свих целобројних решења неједначине: $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \geq 3$.

Решења

V разред

1. Угао α је комплементан са унакрсним углом од 33^0. Углу од 136^0 суплементан је угао од 44^0, а њему угао унакрсан са β. Види слику!



Закључујемо да је $\alpha = 90° - 33° = 57°, \beta = 136°$.

2. Нека низ, поред првог члана 6,5, има још n чланова. Тада важи неједнакост: $6{,}5 - n \cdot 1\frac{1}{4} > 0$, где је n највеће целобројно решење ове неједначине. Решавањем неједначине добијамо: $n < 5\frac{1}{5}$, па је $n = 5$. Најмањи члан низа је: $6{,}5 - 5 \cdot 1\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

3. Конструисати четвртину угла *ACB*. Тачка *E* је у пресеку симетрале дужи *AC* и дужи *CD*.

4. Нека јелен има масу *J*, срна *s* и лане *l*. Тада је:

$$J = 4s \quad , \quad l = \frac{1}{3}s$$

$$J + s + l = 99{,}2$$

$$Из\ 4s + s + \frac{1}{3}s = \frac{992}{10}\ следи\ \frac{16}{3}s = \frac{992}{10}, односно\ \ s = \frac{992}{10} : \frac{16}{3} = \frac{992}{10} \cdot \frac{3}{16} = \frac{186}{10} = 18{,}6;$$

$$J = 4 \cdot 18{,}6 = 74{,}4\ \ и\ \ l = 18{,}6 : 3 = 6{,}2.$$

Дакле, јелен има масу 74,4*kg*, срна 18,6*kg* и лане 6,2*kg*.

5. Нека су α и β суплементни углови. Тада је према условима задатка:

$$\alpha + \beta = 180^0$$

$$\alpha - \beta = \frac{1}{2}\beta,\ \ па\ је\ \alpha = \frac{3}{2}\beta.\ Даље\ је$$

$$\frac{3}{2}\beta + \beta = 180^0,\ \ \frac{5}{2}\beta = 180^0,\ \ \beta = 180^0 : \frac{5}{2} = 72^0,\ \ \alpha = 180^0 - 72^0 = 108^0.$$

6. У ребусу има 9 различитих слова које треба заменити са 9 различитих цифара. После скраћивања се добија

$$\frac{R\cdot A\cdot Z\cdot L\cdot O\cdot M\cdot A\cdot K}{B\cdot R\cdot O\cdot J}=\frac{A\cdot Z\cdot L\cdot M\cdot A\cdot K}{B\cdot J}.$$

Овај разломак има највећу вредност када је именилац најмањи а бројилац највећи. У имениоцу не може бити 0 па је $B=1$ и $J=2$, а у бројиоцу су, да би број био највећи: $A=9, Z=8, L=7, M=6, K=5$.

$$\frac{A\cdot Z\cdot L\cdot M\cdot A\cdot K}{B\cdot J}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 9\cdot 5}{1\cdot 2}=9\cdot 4\cdot 7\cdot 6\cdot 9\cdot 5=68040\ .$$

VI разред

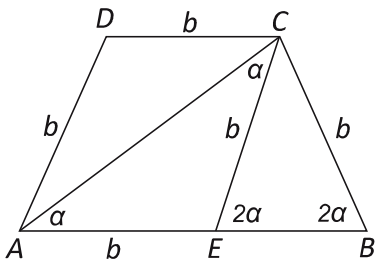
1.

$$\frac{\left(-\frac{3}{2}+0{,}25\right):\left(\frac{5}{4}-0{,}125\right)-\frac{1}{9}}{\frac{3}{4}-0{,}25:\frac{5}{4}-\frac{21}{20}}=\frac{\left(-\frac{6}{4}+\frac{1}{4}\right):\left(\frac{10}{8}-\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{9}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}-\frac{21}{20}}=\frac{\left(-\frac{5}{4}\right)\cdot\frac{8}{9}-\frac{1}{9}}{\frac{15}{20}-\frac{4}{20}-\frac{21}{20}}=\frac{\left(-\frac{10}{9}\right)-\frac{1}{9}}{-\frac{10}{20}}=$$

$$=\frac{-\frac{11}{9}}{-\frac{1}{2}}=\frac{22}{9}.\ \left|\frac{22}{9}\right|=\frac{22}{9}=2\frac{4}{9}$$

2. $|3x|\le\frac{2019}{673}=3,\ -3\le 3x\le 3:3,\ -1\le x\le 1,\ x\in\{-1,0,1\}.$

3. $AB=12\ cm,\ BC=CD=DA$ и $\angle BCA=90^0$.

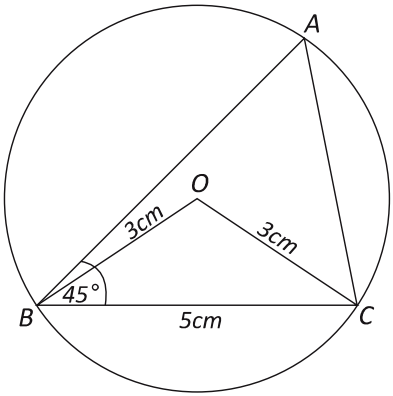


Нека је $CE||AD$ тада је четвороугао $AECD$ ромб, а троугао AEC једнакокраки. Закључујемо да је $< EAC =< ECA = \alpha$ и $< CEB = 2\alpha$ као спољашњи угао уоченог троугла. Троугао EBC је такође једнакокраки те је $< EBC = 2\alpha$. У правоуглом троуглу ABC оштри углови су α и 2α па је $3\alpha = 90^0$. Дакле $\alpha = 30^0$ и $2\alpha = 60^0$ па је троугао EBC једнакостраничан односно $AE = EB = b = 30\ cm$. Добијамо на крају да је обим трапеза $O = 5b = 30cm$.

4. У 2 литра раствора има $\frac{20}{100} \cdot 2 = 0{,}4$ литара соли. Када Мица долије 1 литар воде у раствору ће и даље бити 0,4 литара соли.

$\frac{p}{100} \cdot 3 = 0{,}4$ па добијемо да је $p = \frac{0.4 \cdot 100}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}\%$.

5. 1) Конструишемо троугао BCO.
2) Конструишемо кружницу $k(O, 3cm)$.
3) Конструишемо угао од $45°$, чије је теме тачка B, а један крак садржи страницу BC.
4) У пресеку другог крака угла и кружнице је теме A.



6. $\overline{xyxyx}$ дељив са 3: $3x + 2y = 3k$. Први сабирак и збир су дељиви са 3, па и други сабирак, односно y мора бити дељиво са 3, $y \in \{3,6,9\}$. Како је $\overline{yxyxyxy}$ дељиво са 2 $(18 = 9 \cdot 2)$, па y мора бити 6. Број $\overline{yxyxyxy} = \overline{6x6x6x6}$ мора бити дељив и са 9. $4y + 3x = 24 + 3x, x \in \{1,4,7\}$. Постоје 3 решења: 1) $x = 1, y = 6$, 2) $x = 4, y = 6$ и 3) $x = 7, y = 6$.

VII разред

1. а) $\frac{2^2}{3} - \frac{3}{2^2} - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{4}{3} - \frac{3}{4} - \frac{4}{9} - \frac{9}{4} = \frac{48 - 36 - 16 - 81}{36} = -\frac{85}{36}$

б) $\sqrt{1+\frac{9}{16}}-\sqrt{\frac{9}{16}}+\sqrt{1-\frac{16}{25}}+\sqrt{\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{25}{16}}-\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{9}{25}}+\frac{4}{5}=\frac{5}{4}-\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{7}{5}=\frac{19}{10}$.

2. $x=1{,}25y,\ \ y=\dfrac{x}{1{,}25},\ \ y=\dfrac{100x}{125},\ y=\dfrac{4x}{5},\ \ y=\dfrac{80x}{100}$.

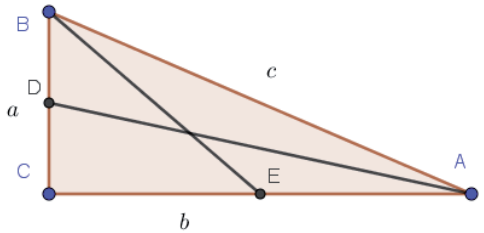
Број *y* је мањи од броја *x* за 20%.

3. Из формуле за број дијагонала: $D_n=\dfrac{n(n-3)}{2}$ добијамо:

$$\frac{n(n-3)}{2}=14,\ \text{ па је }\ n(n-3)=28.$$

Многоугао са дупло више страница има 14 страница, па је збир његових унутрашњих углова $S_{14}=(14-2)\cdot 180^0=2160^0$.

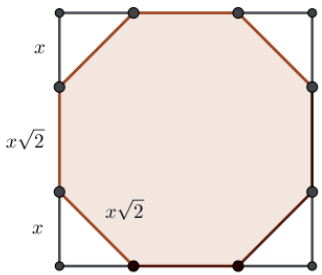
4. Посматрајмо правоугле троуглове *ADC* и *EBC* као на слици.



За први важи $\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+b^2=\left(\sqrt{73}\right)^2$, а други $a^2+\left(\dfrac{b}{2}\right)^2=\left(2\sqrt{13}\right)^2$.

После квадрирања саберемо ове једнакости и добијамо $\dfrac{5}{4}a^2+\dfrac{5}{4}b^2=73+52,\ \ \dfrac{5}{4}c^2=125,\ \ c^2=100$. Дакле, хипотенуза је $c=10$.

5. Означимо са x катете једнакокраких троуглова као на слици.



Тада је страница осмоугла $x\sqrt{2} = 8$, $x = 4\sqrt{2}$. Страница квадрата је $2x + x\sqrt{2} = 8\sqrt{2} + 8$, а његова површина $P_4 = 192 + 128\sqrt{2}$.

Површину осмоугла добијамо када од површине квадрата одузмемо површину 4 једнакокрака троугла са катетом x.

$$P_8 = P_4 - 4\cdot\frac{x^2}{2} = P_4 - 2x^2 = 192 + 128\sqrt{2} - 2\cdot 32 = 128 + 128\sqrt{2}\ .$$

6. Трансформација израза

$$n^5 + 19n = n^5 - n + 20n = n(n^2-1)(n^2+1) + 20n = n(n-1)(n+1)(n^2+1) + 20n$$

Други сабирак на крају је дељив са 5.

VIII разред

1. Средимо дату једначину

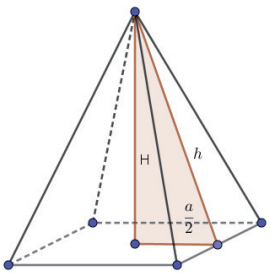
$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}\left(x-\frac{5}{6}\right),$$

па добијамо да је 0=0.

Пошто је сваки реалан број решење ове једначине, онда је збир целобројних решења из датог интервала:

$-2018 + (-2017) + (-2016) + \cdots + 2019 = 2019.$

2. Површина базе пирамиде је 384-240=144, па је основна ивица $a = 12cm$. Површина бочне стране према ознакама на слици је $\frac{ah}{2} = 60$ одакле добијамо $h = 10$. Сада применом Питагорине теореме на осенчени троугао са слике израчунавамо да је



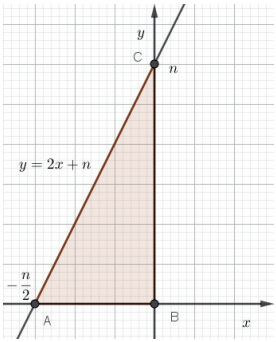
$$H = \sqrt{h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{100-36} = 8,\ H = 8cm.$$

Запремина пирамиде је $V = \frac{1}{3}a^2H = \frac{1}{3}\cdot 144\cdot 8 = 384$, $V = 384\ cm^3$.

3. На слици је троугао који график гради са координатним осама. Катете троугла су су дужи *BA* и *BC* чије су дужине редом $\frac{n}{2}$ и n, па је површина троугла једнака:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}\cdot n = 5,\quad n^2 = 20,\quad n = 2\sqrt{5}.$$

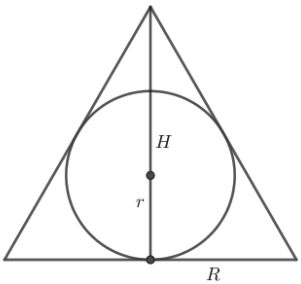
Странице троугла су $AB = \sqrt{5}, BC = 2\sqrt{5}, AC = 5$. Обим троугла је $O = 5 + 3\sqrt{5}$.



4. На слици је дат осни пресек купе и у њу уписане лопте. Основни елементи купе су $R = 3$ и $H = 3\sqrt{3}$, а лопте $r = \sqrt{3}$ као трећина висине. Запремине купе

$$V_k = \frac{1}{3}\cdot 3^2\pi\cdot 3\sqrt{3} = 9\pi\sqrt{3}$$ и лопте

$$V_l = \frac{4}{3}\left(\sqrt{3}\right)^3\pi = 4\pi\sqrt{3}$$



Однос запремина.

$$\frac{V_l}{V_k} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9\pi\sqrt{3}} = \frac{4}{9}.$$

5. Нека је x цена једне разгледнице. Тада важе неједнакости: $11 < 9x < 12$ и $15 < 13x < 16$. Заокруживањем на три децимале добија се $1{,}222 < x < 1{,}334$ и $1{,}154 < x < 1{,}231$ Пошто су центи стоти делови евра једини број који задовољава оба услова је 1,23. Дакле цена једне разгледнице је евро и 23 цента.

6. $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$. Неједначина се своди на $x - 3 \le -3$ или $x - 3 \ge 3$ односно $x \le 0$ или $x \ge 6$, тј $x \in \left((-\infty, 0] \cup [6, \infty)\right) \cap Z$.

Збир: $\ldots + (-7) + (-6) + (-5) + (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 6 + 7 + \cdots =$
$-5 - 4 - 3 - 2 - 1 = -15$.

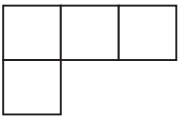
ОДАБРАНИ ЗАДАЦИ

Одабрани задаци служе за вежбу и припрему за такмичења. Препоручују се ученицима као корак који претходи решавању конкурсних задатака. Решења која следе искористити за проверу сопствених.

За ученике III разреда

3263. У биоскопу је било 750 ученика петог, шестог и седмог разреда. Половину ученика, који су били у биоскопу, чинили су ученици петих разреда, трећину ученици шестих разреда. Колико је ученика седмих разреда било у биоскопу?

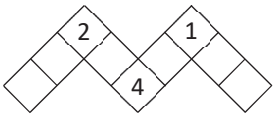
3264. Слика је добијена од четири једнака квадрата. Колико на слици има: а) дужи, б) правоугаоника који нису квадрати, в) правоугаоника рачунајући и квадрате? Обележи слику и наведи све дужи, правоугаонике и квадрате.



За ученике IV разреда

3265. Младен је исекао лист папира на 3 дела. Један од тих делова опет је исекао на 3 дела. Тај поступак је поновио укупно 7 пута. Колико је укупно делова папира добио?

3266. У празне квадратиће фигуре на цртежу упиши по један од бројева 3, 5, 6, 7, 8 или 9, тако да збирови свака три броја која су у једној „линији” буду међусобно једнаки.



За ученике V разреда

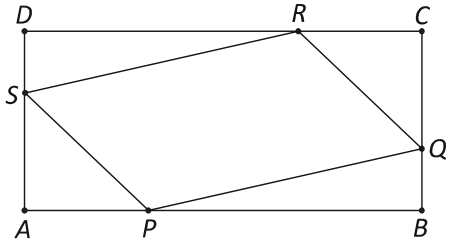
3267. Одреди све просте бројеве p и q такве да је $2p + 3q = 100$.

3268. Колико палиндрома показује дигитални часовник са четири цифре, две за сате и две за минуте? (Палиндроми су коначни низови симбола који се читају исто с лева на десно као и с десна на лево.)

За ученике VI разреда

3269. Разлика два броја је 9, а збир 99. За колико процената је: а) већи од тих бројева већи од мањег; б) мањи од тих бројева мањи од већег?

3270. Тачке *P*, *Q*, *R*, *S* деле странице правоугаоника *ABCD* у размери 1:2. Види слику! а) Докажи да је четвороугао *PQRS* паралелограм. б) У којој размери су површина паралелограма *PQRS* и површина правоугаоника *ABCD*?



За ученике VII разреда

3271. Одреди најмање природне бројеве a и b који су степени двојке, за које је $a\sqrt{a^3\sqrt{a^5\sqrt{a^7}}} = b$.

3272. Симетрале унутрашњих тупих углова код темена C и D трапеза $ABCD$ секу се у тачки E, која припада основици AB. Ако је и $CE = 13$ cm и $DE = 15\ cm$, а висина трапеза је $12\ cm$, одреди дужине страница тог трапеза.

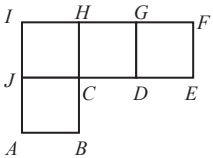
За ученике VIII разреда

3273. Одреди најмањи природан број n такав да једначина $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$ има тачно: (а) 2019; (б) 2020 решења у скупу природних бројева.

3274. Одреди број правоуглих троуглова чија су темена уједно и темена датог правилног 2019-оугла.

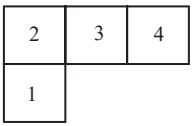
РЕШЕЊА ОДАБРАНИХ ЗАДАТАКА 3263 – 3274.

3263. Половина од 750 ученика износи $750 : 2 = 375$ ученика. Значи 375 ученика је било из петог разреда. $\frac{1}{3}$ од 750 ученика износи $750 : 3 = 250$. Значи 250 ученика је било из шестог разреда. Из седмог разреда је било $750 - 375 - 250 = 375 - 250 = 125$ ученика.



3264. а) Дужи има: 21
$AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HI, IJ, JA, JC,$
$CH, DG, AI, JD, CE, BH, IG, HF, IF, JE$

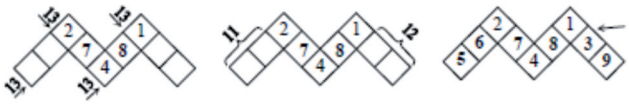
б) Правоугаоника који нису квадрати има: 4 то су: 12, 23, 34, 234



в) Правоугаоника рачунајући и квадрате има: 4+4=8, то су: 12, 23, 34, 234 и 1, 2, 3, 4.

3265. Након првог сечења Младен је имао 3 дела папира. У другом кораку један од тих делова је исечен на 3 дела, а друга два дела су остала непромењена, па је укупан број делова (3 – 1) + 3 = 5. После трећег сечења Младен је имао (5 – 1) + 3 = 7 делова, после четвртог сечења имао је 6 + 3 = 9 делова, после петог 8 + 3 = 11, после шестог 10 + 3 = 13, а после седмог сечења имао је укупно 12 + 3 = 15 делова папира.

3266. Збир сва четири збира бројева по „линијама” може се добити сабирањем свих уписаних бројева (од 1 до 9) и додавањем бројева 2, 4 и 1 који се налазе у две „линије”, па се два пута сабирају.
Како је 45 + 2 + 4 + 1 = 52, а 52 : 4 = 13, значи да је збир бројева у једној „линији” 13, па у квадратић између бројева 2 и 4 треба уписати број 7, а у квадратић између бројева 4 и 1 треба уписати број 8.
„Линију” у којој је број 2 треба допунити бројевима 5 и 6 (свеједно којим редом), а „линију” у којој је број 1 треба допунити бројевима 9 и 3 (свеједно којим редом). Задатак има четири решења.



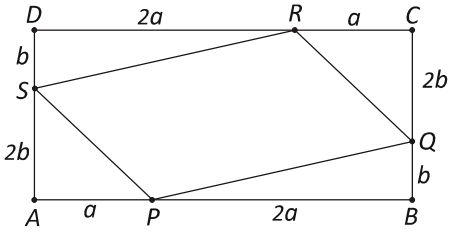
једно од могућих решења

3267. Како је дати збир паран и сабирак $2p$ паран то је и сабирак $3q$ паран, па је број q паран. Како је q прост број, добијамо да је $q = 2$. Сада имамо да је $2p + 6 = 100$, одакле се добија да је $p = 47$. Како је 47 прост број, добијамо да постоји тачно једно решење $p = 47$ и $q = 2$.

3268. Прва цифра на часовнику је прва цифра када се гледа с лева на десно. Слично дефинишемо шта је друга цифра, треће цифра и четврта цифра. Прва цифра може бити 0, 1 и 2. Ако је прва цифра 0 или 1, друга цифра може бити било која, док ако је прва цифра 2 друга цифра може бити било која од 0 до 3.
Трећа цифра може бити било која од 0 до 5, док четврта цифра може бити било која. Сада видимо, ако је прва цифра 0 или 1 постоји по 6 палиндрома, док ако је прва цифра 2 постоји 4 палиндрома. Дакле укупно постоји 6+6+4=16 палиндрома.

3269. Нека су *x* и *y* тражени бројеви. Тада важи *x* = 9 + *y* и *x* + *y* = 99, па је 9 + *y* + *y* = 99. Решење ове једначине је *y* = 45 и следи да је *x* = 54.
а) Број 54 је већи од броја 45 за 9, а то је за 20 %.
б) Број 45 је мањи од броја 54 за 9 ,а то је за $\frac{1}{6}$ односно $16\frac{2}{3}$ %.

3270. а) Обележимо $AP = a$ и $BQ = b$. Тада је $CR = a$, $DS = b$, $PB = RD = 2a$, $QC = SA = 2b$. Из подударности правоуглих троуглова BQP и DSR ($PB = RD = 2a$, $BQ = DS = b$) следи $PQ = RS$. На исти начин из подударности правоуглих троуглова APS и CRQ следи $QR = SP$. Из једнакости парова наспрамних страница следи да је четвороугао $PQRS$ паралелограм.



б) Површине подударних троуглова су једнаке, па је

$$P(BQP) = P(DSR) = \frac{2a \cdot b}{2} = a \cdot b \text{ и } P(APS) = P(CRQ) = \frac{a \cdot 2b}{2} = a \cdot b,$$

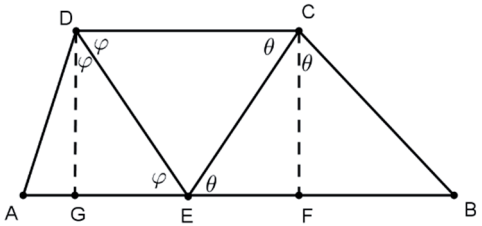
а површина правоугаоника је $P(ABCD) = 3a \cdot 3b = 9\,a \cdot b$. Следи да је $P(PQRS) = P(ABCD) - P(BQP) - P(DSR) - P(APS) - P(CRQ) = 9\,a \cdot b - 4\,a \cdot b = 5\,a \cdot b$.

Размера површина паралелограма $PQRS$ и правоугаоника $ABCD$ је $5 : 9$.

3271. Квадрирајући дату једнакост добијамо $a^2 \cdot a^3\sqrt{a^5\sqrt{a^7}} = b^2$. Понављајући поступак добијамо да је $a^{10} \cdot a^5\sqrt{a^7} = b^4$, одакле се још једним квадрирањем добија да је $a^{37} = b^8$. С обзиром да су бројеви 8 и 37 узајамно прости, следи да је $a = 2^8$ и $b = 2^{37}$.

3272. Како су основице трапеза паралелне, а праве CE и DE њихове трансверзале, следи да су једнаки углови CDE и AED, односно DCE и CEB. Одатле добијамо да су троуглови BCE и AED једнакокраки. Означимо $AD = AE = d$ и $BC = BE = c$, тада је: $EG^2 = 15^2 - 12^2, EG = 9cm$, односно $EF^2 = 13^2 - 12^2, EF = 5cm$.

Такође је $DE^2 - EG^2 = AD^2 - AG^2$, односно $15^2 - 9^2 = d^2 - (d-9)^2$. Одатле следи да је $d = 12{,}5cm$. Слично, важи и $CE^2 - EF^2 = BC^2 - BF^2$, тј. $13^2 - 5^2 = c^2 - (c-5)^2$, одакле је $c = 16{,}9$ cm. Дужине основица су $AB = 29{,}4cm$ и $CD = 14cm$.



3273. Дата једначина еквивалентна је једначини $(x-n)(y-n) = n^2$, коју такође решавамо у скупу N. Број њених решења једнак је броју делилаца броја n^2 (рачунајући 1 и n^2). Ако је $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ факторизација броја n на просте факторе, број n^2 има $(2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1) \dots (2\alpha_k + 1)$ делилаца, што је непаран број. Одговор у делу (а) је $n = 3 \cdot 2^{336}$ јер је то очигледно најмањи природан број чији квадрат има тачно $2019 = 3 \cdot 673$ делилаца, а у делу (б) такво n не постоји.

3274. Хипотенуза произвољног таквог троугла је уједно и пречник кружнице описане око датог правилног многоугла. Међутим, овај многоугао има непаран број темена, па не постоји пречник описане кружнице чије су обе крајње тачке темена многоугла. Дакле, не постоји ниједан правоугли троугао чија су темена уједно и темена датог правилног 2019-оугла.

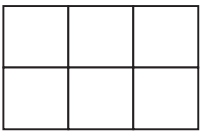
КОНКУРСНИ ЗАДАЦИ

Конкурсни задаци намењени су првенствено ученицима који се у већој мери интересују за математику. Истовремено то је својеврсно такмичење које Математички лист организује сваке школске године. Решења задатака са именима решавалаца објављују се у наредним бројевима часописа. Предност имају они решаваоци који у првих 20 дана по изласку броја из штампе пошаљу исправна решења. Имена решавалаца са бар шест тачних решења објављују се у првом броју следеће школске године. За најбоље решаваоце предвиђене су награде. Упутство за слање решења налази се на страни 48.

За ученике III разреда

2821. Славко је поклонио Маји четвртину својих сличица, а Маја је Славку поклонила десетину својих сличица. Колико сличица сада има Славко, а колико Маја, ако је Славко Маји дао 57 сличица, а Маја Славку 46?

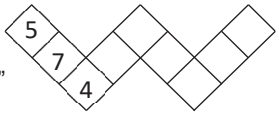
2822. Слика је добијена од шест једнаких квадрата. Колико на слици има: а) дужи, б) правоугаоника који нису квадрати, в) правоугаоника рачунајући и квадрате (обележи слику и објасни решење или наведи све дужи правоугаонике и квадрате)?



За ученике IV разреда

2823. Милан је имао 9 листова папира. Неколико тих листова је исекао на четири дела, па је на крају имао 24 комада папира. Колико листова је папира је исекао Милан?

2824. У празне квадратиће фигуре на цртежу упиши по један од бројева 1, 2, 3, 6, 8 или 9, тако да збирови свака три броја која су у једној „линији” буду међусобно једнаки.



За ученике V разреда

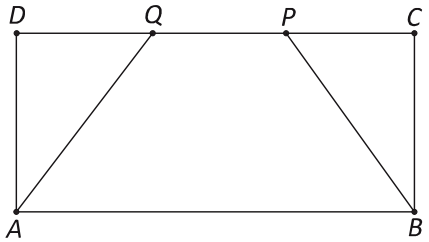
2825. Одреди све просте бројеве p, q и r такве да је $4p + 5q + 6r = 96$.

2826. Колико палиндрома показује дигитални часовник са шест цифара (две за сате, две за минуте и две за секунде)?

За ученике VI разреда

2827. Разлика два броја је 8, а збир 88. За колико процената је: а) већи од тих бројева већи ; б) мањи од тих бројева мањи од аритметичке средине тих бројева?

2828. Тачке P и Q и деле страницу правоугаоника $ABCD$ на три једнака дела. Види слику!



а) Докажи да је четвороугао $ABPQ$ једнакокраки трапез.
б) У којој размери су површина трапеза $ABPQ$ и површина правоугаоника $ABCD$?

За ученике VII разреда

2829. Ако су a и b најмањи приридни бројеви који су степени двојке, за које важи $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \sqrt{b^3\sqrt{b^2\sqrt{b}}}$, одреди цео број c такав да је $a = c \cdot b$.

2830. Дат је трапез $ABCD$ основица $AB = 5cm$ и $CD = 3cm$. Дијагонала AC је нормална на крак BC, а дијагонала BD дели угао на дужој основици на пола. Одреди висину тог трапеза..

За ученике VIII разреда

2831. Одреди најмањи природан број n такав да једначина $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$ има тачно: (а) 2019; (б) 2020 решења у скупу целих бројева.

2832. Одреди број правоуглих троуглова чија су темена уједно и темена датог правилног 2020-оугла.

РЕШЕЊА КОНКУРСНИХ ЗАДАТАКА 2809 – 2820.

2809. Доврши уписивање бројева у празна поља тако да производ свака три узастопна броја буде 750.

	75														**5**	

Решење. Пошто је $75 \cdot 10 = 750$ тада поља треба попуњавати са чиниоцима броја 10 а то су или 5 и 2 или 1 и 10. Када би попуњавали поља са бројевима 75, 10 и 1 не би нам се уклопио број 5 који се већ налази у пољу. Једина могућност је да попунимо поља са бројевима 75, 5, и 2 и то на овај начин:

5	**75**	2	5	75	2	5	75	2	5	75	2	5	75	2	**5**	75

Урош Љубомировић, III$_3$, ОШ „Бата Булић“, Петровац на Млави

2810. Милан је $\frac{1}{4}$ своје уштеђевине дао за чоколаду која је коштала 238 динара. Ако је Милан дао $\frac{1}{7}$ своје уштеђевине за свеску, колико је коштала свеска?

Решење. $\frac{1}{4}$ Миланове уштеђевине износи 238 динара, што значи да је уштеђевина износила $238 \cdot 4 = 952$. Свеска је коштала $\frac{1}{7}$ од Миланове уштеђевине од 952 динара, што износи $952 : 7 = 136$ динара.

Лана Цветковић, III$_3$, ОШ „Бошко Ђуричић“, Јагодина

2811. Колико се највише столњака облика правоугаоника чије су димензије 180*cm* и 140*cm* може обрубити украсном траком дужине 80*m*?

Решење. Ако се број столњака означи са x, тада је $x \cdot 2 \cdot (180 + 140) \leq 8000$, $x \cdot 640 \leq 8000$, $x \leq 8000 : 640$, $x < 13$. Може се обрубити највише 12 столњака.

Матеја Бабић, IV$_1$, ОШ „Посавски партизани", Обреновац

2812. Мајстор Радован уводи централно грејање, а наплаћује тако да за свој рад узме половину цене потрошеног материјала и за сваки дан рада дода још по 1700 динара. Колико је господин Јовић платио мајстора Радована, а колико материјал, ако је укупни рачун био 33480 динара, а посао је био завршен за 3 дана?

Решење. Нека мајстор Радован за свој рад наплаћује x динара. Тада је цена материјала $2x$ динара, па је $x + 2x + 3 \cdot 1700 = 33480$, $3x + 5100 = 33480$, $3x = 33480 - 5100$, $3x = 28380$, $x = 9460$. Дакле, мајстор Радован је за свој рад наплатио 9460 динара, за материјал два пута више, значи 18920 динара, а за дневнице 5100 динара. Господин Јовић је мајстору платио 14560 динара (јер је 9460 + 5100 = 14560), а за материјал је платио 18920 динара.

Ненад Марковић, IV$_1$, ОШ „Јован Стерија Поповић", Нови Београд

2813. Одреди природан број n такав да је аритметичка средина првих n природних бројева који при дељењу са 23 дају остатак 19 једнака 2020.

Решење. Првих n природних бројева који при дељењу са 23 дају остатак 19 су

$$19,\ \ 19+23,\ \ 19+2\cdot 23,\ \ \ldots\ \ ,\ 19+(n-1)\cdot 23\,.$$

Као и код одабраног задатка, њихова аритметичка средина је заправо аритметичка средина првог и последњег броја. Тиме добијамо једначину $(19+19+(n-1)\cdot 23):2=2020$. Решавајући ову једначину добија се $n=175$.

Теа Чебашек, V$_2$, ОШ „Младост“, Нови Београд

2814. Показати да сваки скуп који садржи 20 природних бројева има подскуп чији је збир елемената дељив са 19. Напомена: Збир елемената једночланог скупа је сам тај елемент.

Решење. Означимо датих 20 природних бројева са $n_1, n_2, \ldots, n_{20}$. Даље, посматрајмо бројеве

$$s_1=n_1, s_2=n_1+n_2, \ldots, s_{20}=n_1+n_2+\cdots+n_{20}\,.$$

Њих има 20 јер важи да је $s_1<s_2<\cdots<s_{20}$.

Резонујући као у одабраном задатку, добијамо да је разлика нека два од ових 20 природних бројева дељива са 19. Међутим, разлика свака два (већи – мањи) од бројева $s_1, s_2, \ldots, s_{20}$ је у ствари збир неких од бројева $n_1, n_2, \ldots, n_{20}$ (нпр. $s_{18}-s_5=n_6+n_7+\cdots+n_{18}$).

Дакле, постоји подскуп скупа $\{n_1, n_2, \ldots, n_{20}\}$ такав да му је збир елемената дељив са 19.

Уредништво

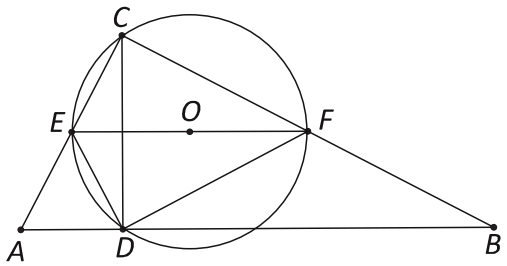
2815. Колико литара дестиловане воде треба помешати са 5 литра 4% раствора алкохола и 5 литара 2% раствора алкохола да би се добио 0,5% раствор?

Решење. Пет литара 4% раствора алкохола садржи 5 *l* ·4%=0,2 *l*, а 5 литара 2% раствора садржи 5 *l* · 2%=0,1 *l* алкохола. Дакле 0,3 *l* алкохола је у 10 *l* помешаних раствора . Вода чини 9,7 *l*. Да би нова мешавина била 0,5% раствор треба долити *x* литара дестиловане воде, односно (10+*x*)· 0,5%=0,3, па је (10+*x*)·0,5=30. Одавде је x=50. Дакле, треба 50 литара дестиловане воде помешати са датим растворима.

Милан Богдановић, VI$_2$, ОШ „Бата Булић“, Петровац на Млави

2816. Тачке *D*, *E* и *F* су редом подножје висине из темена правог угла *C* и средишта катета *AC* и *BC* троугла *ABC*. Докажи да тачке *C*, *D*, *E* и *F* припадају једној кружници.

Решење. У правоуглом троуглу *ADC* је *E* центар описане кружнце око тог троугла, па је *AE* = *EC* = *DE*. На исти начин из правоуглог троугла *DBC* је *BF* = *FC* = *DF* . Види слику! Из *DE* = *EC*, *DF* = *FC* и *EF* = *EF* следи да је $\triangle DEF \cong \triangle CEF$. Центар кружнице описане око правоуглог троугла CEF је средиште *O* хипотенузе EF. Иста кружница је описана и око подударног троугла DEF. Дакле, тачке *C*, *D*, *E* и *F* припадају једној кружници.



Јадранка Стаменковић, VI1, ОШ „Бата Булић“, Петровац на Млави

2817. Одреди све целе бројеве x и y такве да је $x^2 + y^2 = 2y - 2x - 1$.

Решење. Једначина $x^2 + y^2 = 2y - 2x - 1$ еквивалентна је са једначином $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 1$, односно $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$. То се постиже када је $(x+1)^2 = 1$ и $(y-1)^2 = 0$ или $(x+1)^2 = 0$ и $(y-1)^2 = 1$. У првом случају је $(x, y) = (0,1)$ или $(x, y) = (-2,1)$, док је у другом случају $(x, y) = (-1,2)$ или $(x, y) = (-1,0)$.

Лена Танасковић, VII3, ОШ „Краљ Александар I”, Горњи Милановац

2818. Дужине страница троугла су 13 *cm*, 40 *cm* и 45 *cm*. Одреди дужину најдуже висине у овом троуглу.

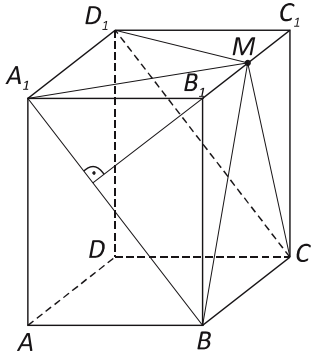
Решење. Површина троугла једнака је $\sqrt{49 \cdot (49-13)(49-40)(49-45)} = 252$, $P = 252cm^2$. Најдужа висина одговара најкраћој страници троугла и за њу важи $\frac{13 \cdot h}{2} = 252$. Одатле је $h = \frac{504}{13} = 38\frac{10}{13}$, тј. $h = 38\frac{10}{13}cm$.

Ирена Марковић, VII2, ОШ „Ратко Митровић”, Нови Београд

2819. Странице квадра $ABCDA_1B_1C_1D_1$ су $AB = 3$, $BC = 1$, $CC_1 = 2$. Нека је M средиште ивице B_1C_1. Одреди запремину четворостране пирамиде BCD_1A_1M, чија је основа BCD_1A_1 и врх M.

Решење. Четвороугао BCD_1A_1 је правоугаоник страница $BC = A_1D_1 = 1$ и $BA_1 = CD_1 = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$. Дужина висине ове пирамиде представља одстојање тачке M од равни BCD_1A_1. Како је права B_1C_1 паралелна овој равни, а тачка M припада овој правој, тражено одстојање је заправо одстојање било које тачке праве B_1C_1 од равни BCD_1A_1. Види слику! Висина пирамиде је самим тим једнака висини правоуглих троуглова BB_1A_1 и CC_1D_1 и износи $\frac{3 \cdot 2}{\sqrt{13}} = \frac{6\sqrt{13}}{13}$. Запремина пирамиде је

$$\frac{\sqrt{13}}{3} \cdot \frac{6\sqrt{13}}{13} = 2.$$

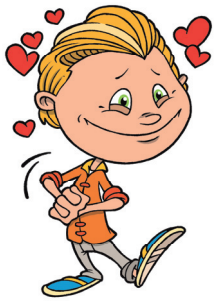


Милица Крстић, VIII5, ОШ „8. септембар“, Пирот

2820. У разреду има 20 дечака. Међу њима 14 има смеђе очи, 15 смеђу косу, 17 има више од 60*kg* и 18 има више од 165*cm*. Докажи да барем четворица дечака имају све наведене особине.

Решење. Према решењу Одабраног задатка 3262, постоји најмање 14+15-20=9 ученика који имају и смеђе очи и смеђу косу. Даље, постоји најмање 9+17-20=6 ученика који имају смеђе очи, смеђу косу и више од 60kg. На крају, постоји бар 6+18-20=4 ученика који имају смеђе очи, смеђу косу, више од 60kg и више од 165cm.

Исидора Перуничић, VIII1, Гимназија „Јован Јовановић Змај” , Нови Сад



НАГРАДНИ ЗАДАЦИ

Ова рубрика је, као и конкурсни задаци, позив свим нашим читаоцима за такмичење. У сваком броју нашег листа дајемо један задатак за сваки разред. Из сваког разреда, пет најуспешнијих решавалаца биће награђено. Упутство за слање решења налази се на страни 48.

Наградни задатак бр. 603 (за ученике III разреда)

Воћњак је облика правоугаоника чија је ширина $9m$ а дужина $24m$. У редовима паралелним ивицама воћњака, на сваких $1m\ 5dm$ засађена је по једна воћка. Најмање растојање редова од ивица воћњака је $75cm$. Колико највише воћака може бити засађено у том воћњаку?

Наградни задатак бр. 604 (за ученике IV разреда)

У радионици за израду намештаја направљено је 18 канцеларијских столова. Неки од њих имају једну фиоку, неки две, а неки три фиоке. Сви ти столови имају укупно 31 фиоку. Столова са једном фиоком има исто колико заједно има столова са две и са три фиоке. Колико има столова са три фиоке?

Наградни задатак бр. 605 (за ученике V разреда)
Колико има троцифрених бројева који су дељиви са 36, а којима су све цифре парне?

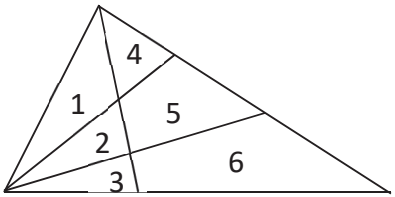
Наградни задатак бр. 606 (за ученике VI разреда)
Отац и син су дресери слонова у циркусу. Отац за 40 минута окупа слона, а син за 2 часа. За које време би отац и син окупали 3 слона радећи заједно?

Наградни задатак бр. 607 (за ученике VII разреда)
На колико начина је могуће изабрати три, не обавезно различита, броја x, y и z из скупа $\{1,2,3,\dots,15\}$ тако да је $x+5<y$ и $x+5<z$.

Наградни задатак бр. 608 (за ученике VIII разреда)
Одреди остатак при дељењу броја 1234567891011…201820192020 (број је написан тако што су исписани редом бројеви од 1 до 2020) са 360.

РЕЗУЛТАТИ КОНКУРСА ЗА НАГРАДНИ ЗАДАТАК БР. 597 (МЛ LIV-4)

Решење. Шест области је обележено бројевима од 1 до 6. Види слику! Различити троуглови су: 1, 2, 3, 4, 12, 23, 123, 45, 456, 14, 25, 36, 2356, 1425 и 142536. Има их 15.



Награђени

Никола Павловић, III$_1$, ОШ „Мома Станојловић“, Крагујевац
Алекса Јовановић, III$_5$, ОШ „Радоје Домановић“, Нови Београд

РЕЗУЛТАТИ КОНКУРСА ЗА НАГРАДНИ ЗАДАТАК БР. 598 (МЛ LIV-4)

Решење. Ако је број унука x, тада је $4x + 2 = 5x - 1$, $4x + 2 \underline{- 4x} = 5x - 1 \underline{- 4x}$ (метод теразија), $2 = x - 1$, $x = 3$.
Бака има 3 унука и 14 бомбона.

Награђени

Најдан Вељковић, IV$_2$, ОШ „Јован Дучић", Нови Београд
Хана Алимпић, IV$_1$, ОШ „Николај Велимировић", Шабац
Милица Тошић, IV$_3$, ОШ „Љуба Нешић", Зајечар

РЕЗУЛТАТИ КОНКУРСА ЗА НАГРАДНИ ЗАДАТАК БР. 599 (МЛ LIV-4)

Решење. Означимо производе у овим групама са p_1, p_2, p_3. Јасно је да важи $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 8 = 40320$. Ако би сваки од бројева p_1, p_2, p_3 био мањи или једнак 34 онда би

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \leq 34 \cdot 34 \cdot 34 = 39304,$$

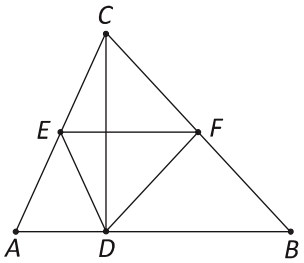
што је нетачно. Дакле, мора бар један од бројева p_1, p_2, p_3 бити већи од 34.

Награђени

Љубица Лазић, V_2, ОШ „Вера Радосављевић“, Неготин
Исидора Ковачевић, V_4, ОШ „Уједињене нације“, Београд
Теа Чебашек, V_2, ОШ „Младост“, Нови Београд
Ненад Марковић, IV_1, ОШ „Јован Стерија Поповић“, Нови Београд
Лима Андреев, V_2, ОШ „Светозар Марковић“, Београд

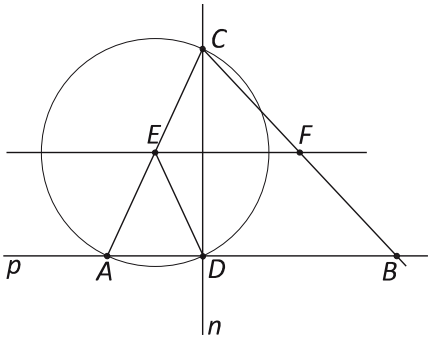
РЕЗУЛТАТИ КОНКУРСА ЗА НАГРАДНИ ЗАДАТАК БР. 600 (МЛ LIV-4)

Решење. Претпоставимо да смо решили задатак и да је *ABC* тражени троугао. Види слику!



Прво треба да нацртамо праву *EF* и конструишемо њој паралелну праву *p* кроз тачку *D*. (Дуж *EF* је средња линија траженог троугла *ABC*, па је паралелна са страницом *AB*). Затим конструишемо праву *n* кроз тачку *D* нормалну на праву *p*. (Тачка *D* је подножје висине из темена *C* траженог троугла, па ће теме *C* бити на нормали *n*.) Види слику! Тачка *E* је центар кружнице описане око правоуглог троугла *ADC*, па кружница са центром *E* и полупречником *ED* сече *p* у тачки *A* и праву *n* у тачки *C*.

Такође, кружница са центром *F* и полупречником *DF* сече *p* у тачки *B* и праву *n* у тачки *C*. Теме *B* смо могли да конструишемо и користећи чињеницу да је $2EF = AB$. Троугао *ABC* је тражени троугао.



Уредништво

РЕЗУЛТАТИ КОНКУРСА ЗА НАГРАДНИ ЗАДАТАК БР. 601 (МЛ LIV-4)

Решење. Користећи разлику квадрата, једначину можемо записати као

$$(x+y)(x-y)=2019.$$

Број 2019 има четири делиоца: 1, 3, 673 и 2019. Сада разликујемо случајеве:

1) $x+y=2019$ и $x-y=1$. Сабирањем те две једначине, добија се $2x=2020$, одакле је $x=1100$. Замењујући то у једну од две полазне једнакости добија се да је $y=1009$.

2) $x+y=673$ и $x-y=3$. Сабирањем тих једначина добија се $2x=676$, одакле следи да је $x=338, y=335$.

То су једина решења једначине $x^2-y^2=2019$ у скупу природних бројева, па смо тиме показали да једначина има решења у том скупу.

Награђени

Лена Танасковић, VII$_3$, ОШ „Краљ Александар I”, Горњи Милановац
Ирена Марковић, VII$_2$, ОШ „Ратко Митровић”, Нови Београд
Јован Томић, VII$_6$, ОШ „Јован Јовановић Змај”, Суботица

РЕЗУЛТАТИ КОНКУРСА ЗА НАГРАДНИ ЗАДАТАК БР. 602 (МЛ LIV-4)

Решење. Означимо темена квадрата са $ABCD$, а боје нека су црвена и плава. Посматрајмо боје тачака на граници квадрата. Супротна темена квадрата морају бити обојена различитим бојама (у супротном је доказ завршен).

Приметимо да су дужи одређене једним теменом квадрата и средиштем странице квадрата која не садржи то теме дужине баш $\frac{\sqrt{5}}{2}$, па и њихове крајње тачке морају бити обојене различитим бојама.

Нека су M и N средишта страница BC и CD, редом, и нека је теме A плаве боје, без умањења општости. На основу претходних разматрања, теме C мора бити црвене боје (због дијагонале AC), као и тачке M и N (због дужи AM и AN). Даље, теме B мора бити плаво (због дужи BN), па је теме D црвено (због дијагонале BD). Сада су оба краја дужи DM црвене боје. Контрадикција!

Награђени

Милица Крстић, VIII$_5$, ОШ „8. септембар“, Пирот
Исидора Перуничић, VIII$_1$, Гимназија „Јован Јовановић Змај” , Нови Сад
Лазар Сретеновић, VIII$_4$, ОШ „Књегиња Милица” , Нови Београд

ЛЕТЊИ НАГРАДНИ ЗАДАЦИ

Решења треба послати најкасније до 1. септембра 2020. године према условима на страни 48. По пет решавалаца у сваком разреду ће бити награђено. Решења наградних летњих задатака биће објављена у броју 2 следеће школске године.

Трећи разред

Једне године у јануару су била 4 петка и 4 понедељка. У који дан недеље је био први јануар??

Четврти разред

Колико има четвороцифрених бројева код којих је збир прве три цифре једнак 23, а збир последње три цифре једнак 17?

Пети разред

Из књиге је истргнут део чија је прва страна нумерисана бројем 213, а последња бројем који се записује истим ти цифрама, али у неком другом поретку. Колико страна има истргнути део?

Шести разред

Аца је написао четвороцифрен број чије су све цифре различите од нуле (али не обавезно међусобно различите). Марко је написао све четвороцифрене бројеве који се могу добити из Аациног броја премештањем цифара. Илија је узео најмањи и највећи број између оних које је написао Марко, сабрао их и добио збир 11990.
Које је бројеве сабрао Илија?

Седми разред

Ненад је написао 5 бројева. Вера је за свака два броја израчунала апсолутну вредност њихове разлике и добијене бројеве записала у растућем поретку. На тај начин добила је низ

$$2, 4, 5, 7, 8, k, 13, 15, 17, 19.$$

Одреди број k.

Осми разред

У равни су дате три неколинеарне тачке. Колико има једнакокраких трапеза чија су три темена у датим тачкама?

ЗАДАТАК СА НАСЛОВНЕ СТРАНЕ

Десет најуспешнијих решавалаца овог задатка биће награђено. Упутство за слање решења је на страни 48.

Између сваке две цифре у низу

9 8 7 6 5 4 3 2 1

уметни знак неке од четири основне рачунске операције и по потреби користи заграде тако да вредност добијеног израза буде 2020.

РЕШЕЊЕ ЗАДАТКА СА НАСЛОВНЕ СТРАНЕ ИЗ ПРОШЛОГ БРОЈА (МЛ LIV-4)

Нека од решења су:

$$1 + (2 + 3 \cdot 4 \cdot (5 + 6)) \cdot (7 + 8) + 9 = 2020,$$
$$1 + 2 \cdot 3 \cdot (4 - 5 + 6 \cdot 7 \cdot 8) + 9 = 2020,$$
$$1 + 2 - 3 - 4 \cdot (5 - 6 - 7 \cdot 8 \cdot 9) = 2020.$$

Награђени

Јован Томић, VII$_{Б}$, ОШ „Јован Јовановић Змај”, Суботица
Нина Кљајић, VII$_{2}$, ОШ „23 октобар”, Сремски Карловци
Најдан Вељковић, IV$_{2}$, ОШ „Јован Дучић'”, Нови Београд
Лима Андреев, V$_{2}$, ОШ „Светозар Марковић”, Београд
Милица Крстић, VIII$_{5}$, ОШ „ 8. септембар“, Пирот
Матеја Бабић, IV$_{1}$, ОШ „Посавски партизани”, Обреновац

РЕЗУЛТАТИ КОНКУРСА ЗА СПЕЦИЈАЛНИ ЗАДАТАК БРОЈ 101 (МЛ LIV-4)

Решење. Површине кружних исечака (торова) односе се као: $P_1 : P_2 : P_3 = 5:7:8$, па следи

$$\frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360°} : \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \beta}{360°} : \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \gamma}{360°} = 5:7:8$$

где смо са α, β, γ означили централне углове ових кружних исечака, а са r полупречник датог круга. После скраћивања је $\alpha:\beta:\gamma = 5:7:8$, односно $\alpha:\beta:\gamma = 5k:7k:8k,\ k \in N$.
Из $\alpha + \beta + \gamma = 360°$ и $5k + 7k + 8k = 20k$ следи $360° = 20k,\ k = 18$.
Дакле, тражени углови између полупречника су: $\alpha = 90°,\ \beta = 126°,\ \gamma = 144°$.

Награђени

Исидора Перуничић, VIII$_{1}$, Гимназија „Јован Јовановић Змај”, Нови Сад
Јован Томић, VII$_{Б}$, ОШ „Јован Јовановић Змај”, Суботица
Мина Симић, VII$_{1}$, Ваљевска гимназија, Ваљево

ЗАДАТАК ЗА РОДИТЕЉЕ

Најуспешнији решавалац овог задатка биће награђен. Упутство за слање решења налази се на страни 48.

P72. Драган, Павле, Синиша и Марко су учесници летње школе младих математичара. За време паузе они су се такмичили у надвлачењу конопца. Павле и Марко су лако победили Драгана и Синишу. Драган и Павле су само уз велики напор успели да победе Синишу и Марка, а кад су се Павле и Синиша борили против Драгана и Марка, ниједан пар није успео да повуче други. Одреди редослед ове четворице такмичара по снази.

РЕШЕЊЕ ЗАДАТКА ИЗ ПРОШЛОГ БРОЈА

Р71. Мотоциклист и бициклист кренули су истовремено из *А* у *В*. Прешавши трећину пута од *А* до *В*, бициклиста се зауставио и кренуо је даље у тренутку кад је мотоциклисти остало да пређе трећину пута до *В*. Мотоциклист, дошавши до *В*, без заустављања је кренуо назад према *А*. Ко ће стићи пре: мотоциклист у *А* или бициклист у *В*, ако даље није било заустављања?

Решење. Како је бициклист стајао док мотоциклисти није остала трећина пута до *В*, следи да је бициклист потрошио мање времена за трећину пута од *А* до *В*, него мотоциклист на трећину свог пута, од *А* до *В* и назад. Значи да ће и на цео пут од *А* до *В* бициклист потрошити мање времена, него мотоциклист на цео пут од *А* до *В* и назад.

За решење задатка награђена је ***Сања Костић***, Андре Ђорђевић 29, Врање.

Задатак су тачно решили и:

Шарлота Томић, Суботица; *Спасоје Перуничић*, Нови Сад; *Петар Ковачевић*, Београд; *Зоран Крстић,* Пирот.

ЗАДАТАК ЗА НАСТАВНИКЕ

Најуспешнији решавалац овог задатка биће награђен. Упутство за слање решења налази се на страни 48.

Н72. На шаховском турниру учествовала су два мајстора и неколико велемајстора. Два мајстора су заједно освојили 8 поена, а сви велемајстори су имали исти број поена. Колико је велемајстора учествовало на турниру? (По правилима шаховских турнира, сваки учесник игра са сваким по једну партију. За победу се добија 1 поен, за пораз 0 поена, а за нерешену игру 0,5 поена.)

РЕШЕЊЕ ЗАДАТАКА ИЗ ПРЕТХОДНОГ БРОЈА

Н71. Од 4 штапа дужине 1 састављен је правоугли троугао и при томе је само један штап преломљен на два дела. Одреди површину тога троугла.

Решење. Нека је један штап разломљен на делове дужине x и $1-x$. Не може бити $x=\frac{1}{2}$, јер бисмо у том случају добили једнакокраки троугао са страницама дужине $1,\frac{3}{2},\frac{3}{2}$, који није правоугли. Можемо узети да је $x<\frac{1}{2}$. Хипотенуза се не може састојати само из целих штапова (дужина 1 је премала, а дужина 2 превелика). Зато је дужина хипотенузе $2-x$, а дужине катета су 1, и $1+x$. По Питагориној теореми је

$$1+(1+x)^2=(2-x)^2,$$

одакле налазимо јединствено решење $x=\frac{1}{3}$. Дакле, дужине катета су 1 и $\frac{4}{3}$, па је површина троугла $\frac{2}{3}$.

За решење задатка награђена је ***Маја Николић***, ОШ „Херој Срба“, Осипаоница.

Задатак су тачно решили и:

Тот Габриела, ОШ „Јанош Хуњади“, Чантавир; *Славко Михајловић*, ОШ „Живко Томић“, Доња Шаторња; *Зоран Ковачевић*, Београд.

ЛОГИКА ЈЕ ЛОГИКА ЈЕ ЛОГИКА

У овој рубрици објављиваћемо задатке за чије решавање је у већој мери потребна досетљивост и логичко расуђивање, а у мањој мери познавање стандардног школског градива. Позивамо и читаоце да шаљу предлоге задатака за ову рубрику.

Задаци

59. Сто једнаких затворених кутија поређано је у низ. У једној кутији налази се дијамант. На свакој кутији стоји натпис: "Дијамант је у једној од мени суседних кутија." Аца зна да је само један од 100 натписа истинит, а сви остали су лажни. Колико најмање кутија Аца треба да отвори како би сазнао у којој кутији је дијамант?

60. На гомили се налазе лопте четири различите боје: црвене, наранџасте, жуте, зелене. Три човека - A, B и C су бројали лопте. Сваки од њих разликује две боје, а друге две не разликује; један не разликује црвену и наранџасту, други - наранџасту и жуту, трећи - жуту и зелену. Резултати њиховог бројања представљени су у таблици:

	црвених	плавих	жутих	зелених
A	2	5	7	9
B	2	4	9	8
C	4	2	8	9

Колико је било куглица сваке боје?

Решења задатака из претходног броја

57. У разговору Драган је саопштио Павлу: "Мој деда и ја смо недавно прославили рођендан истог дана, моје и његове године изражавају се бројевима са истим цифрама, а разлика та два броја једнака је нашем кућном броју." Затим је Драган саопштио Павлу свој кућни број, после чега је Павле брзо израчунао године старости и Драгана и његовог деде. Уз разумну претпоставку да Драган има мање од 100 година, одреди његов кућни број.

Решење. Број Драганових година се може написати у облику $10x + y$, где су x и y једноцифрени бројеви. Према томе, Драганов деда има $10y + x$ година. Јасно је да је $x < y < 10$. Из услова задатка следи да је Драганов кућни број $10y + x - (10x + y) = 9y - 9x = 9(y - x)$. На основу Драганових изјава Павле је сазнао кућни број, дакле, и разлику $y - x$. Како је на основу те разлике Павле могао да одреди бројеве x и y, то значи да су ти бројеви једнозначно одређени својом разликом. Та разлика може бити само један од бројева $1,2,3,4,5,6,7,8$. Само за $y - x = 8$ позитивни једноцифрени бројеви x и y су једнозначно одређени: $x = 1, y = 9$. Дакле, деда има 91 годину, а Драган 19 и њихов кућни број је 72.

58. Илија и Марко замислили су по један природан број и саопштили га Милошу. Милош је на једном листу папира записао збир тих бројева, а на другом њихов производ. Затим је један лист сакрио, а други, на коме је био број 2002, показао Илији и Марку. Кад је видео број, Илија је рекао да не зна који је број замислио Марко. Кад је то чуо, Марко је рекао да не зна број који је замислио Илија. Који је број замислио Марко?

Решење. 1001. Оба су замислили делитеље броја 2002 (иначе би неко од њих двојице закључио да је 2002 збир замишљених бројева и одредио би други сабирак). Међутим, чак и знајући да је Илија замислио делитељ броја 2002, Марко не може искључити могућност да је 2002 збир замишљених бројева. Међутим, збир делитеља једнак је 2002 само у случају 1001 + 1001 (други делитељи су 2002 или мањи од 1001). Значи да је Марко замислио број 1001 (а Илија 2 или 1001), и тада заиста ниједан са сигурношћу није могао знати који број је замислио онај други).

УПУТСТВО ЗА РЕШАВАОЦЕ

Решења можете слати на два начина:

Електронском поштом на адресу:

matematickilist@yahoo.com

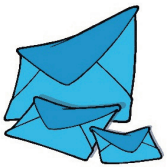
Откуцана решења (Word 2003 или LaTex) морају садржати образложење и прецизно нацртане слике. У поруци обавезно написати име, презиме, разред и одељење, назив школе, адресу школе и место, као и кућну адресу и место. Задатке из различитих рубрика слати у одвојеним порукама којима у Subject-у стоји назив рубрике (*на пример*: Задатак са насловне стране или Конкурсни задатак бр. 2143).

To: *matematickilist@yahoo.com*
Subject: Конкурсни задатак бр. 2143
Име и презиме, одељење, школа, адреса школе, место, кућна адреса, поштански број, место.

Као и до сада стандардном поштом.

Математички лист
Задатак са насловне стране
Кнез Михаилова 35/IV, п.п. 355
11000 Београд

Решења писати читко, сваки задатак на посебном листу уз обавезно образложење и прецизно нацртане слике. На сваком листу обавезно написати име и презиме, разред и одељење, назив школе, адресу школе и место, као и кућну адресу и место. Задатке из различитих рубрика стављати у засебне коверте на којима стоји назив рубрике (*на пример*: Задатак са насловне стране или Конкурсни задатак бр. 2143).



Решења која не испуњавају наведене услове неће се узимати у обзир.

Решења задатака из овог броја послати најкасније до 30.6.2020.

ВАЖНО ОБАВЕШТЕЊЕ ЗА ТАКМИЧАРЕ И ЊИХОВЕ НАСТАВНИКЕ

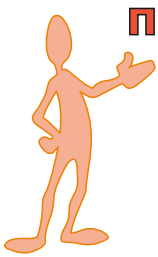
Друштво математичара Србије, односно Комисија за тамичење из математике ученика основних школа, у припреми задатака за такмичења користи задатке из **Математичког листа** текуће, као и две претходне школске године (у обзир долазе сви задаци, дакле из чланака, припремни, одабрани, конкурсни, наградни, као и задаци са такмичења), и то по принципу: најмање 3 задатка за школски, најмање 2 задатка за општински и најмање 1 задатак за окружни ниво такмичења. У тим задацима неки од података могу бити промењени.

РЕШЕЊЕ НАГРАДНОГ ЗАДАТКА БРОЈ 148: Tg1.

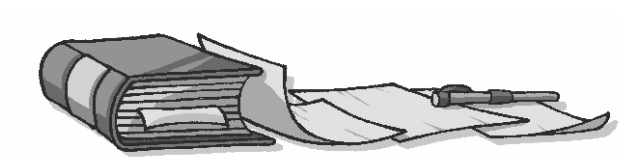
Награде су добили следећи ученици који су први послали тачно решење у предвиђеном року:

Ненад Марковић, IV1, ОШ " Јован Стерија Поповић ", Нови Београд
Бојан Милосављевић, V4, ОШ " Жарко Зрењанин ", Нови Сад
Лена Танасковић, VII3, ОШ " Краљ Александар I ", Горњи Милановац
Јован Томић, VII6, ОШ " Јован Јовановић Змај ", Суботица
Исидора Ковачевић, V4, ОШ " Уједињене нације ", Београд.

Нашим драгим читаоцима желимо успешан завршетак школске године и пријатан распуст



Уредништво



2019/20. број 5

ВАЖНА ОБАВЕШТЕЊА ПРЕТПЛАТНИЦИМА

1. Математички лист је, пре свега, намењен ученицима III-VIII разреда основне школе. Излази пет пута годишње и то оријентационо: 01.09, 10.11, 25.01,15.03. и 05.05.

2. Претплата на Математички лист се врши на рачун:

Друштво математичара Србије 250-1420000245060-64
Београд, Кнез Михаилова 35/IV.

3. О условима претплате, школе ће бити благовремено обавештене. Све информације могу се добити на телефон и mail Друштва математичара Србије.

011/30 36 818 факс: **011/30 36 819**
drustvomatematicara@yahoo.com

4. Осим Математичког листа могу се наручити и остала издања Друштва математичара Србије.

5. Позивамо наставнике, професоре математике, ученике, као и све остале читаоце, да шаљу своје прилоге (чланке, задатке, занимљивости итд.). **Напомињемо да се рукописи не враћају.**

САДРЖАЈ