ДОДАТНА НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ ЗА УЧЕНИКЕ ОСНОВНЕ ШКОЛЕ
8. РАЗРЕД

НЕЈЕДНАКОСТИ

У седмом разреду посматране су неједнакости облика $2^{2010} > 10^{602}$ или $x^2 + x + 1 > 0$.

У осмом разреду (а и раније) је било речи о формулама које имају облик $L * D$ (где су L и D алгебарски изрази, а * један од релацијских осимбола >, <, ≥, ≤) које се називају неједнакости.

Уколико у формули $L * D$, бар један од израза L и D садржи једну или више променљивих онда добијена неједнакост може бити испуњена за све вредности промењивих и тада се добијена формула назива једноставно неједнакост. Примери таквих неједнакости су: $x^4 + x + 1 > 0$, $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ или $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$.

Међутим, постоји могућност да формула $L * D$, где бар један од израза L и D садрже једну или више промењивих, за неке вредности променљивих буде тачна, а за неке вредности нетачна. Тада говоримо о неједначинама.

Циљ ове теме је да укаже на неке примере и методе доказивања нумеричких неједнакости и неједнакости уопште и прошири и продуби већ раније стечена знања у овој области.

<u>ПРИМЕР 1.</u> Докажи неједнакост: $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{100}} > 10.$

РЕШЕЊЕ: За сабираке на левој страни неједнакости важи $\dfrac{1}{\sqrt{1}} > \dfrac{1}{\sqrt{2}} > \ ... > \dfrac{1}{\sqrt{99}} > \dfrac{1}{\sqrt{100}} = \dfrac{1}{10}$. Како је сваки од сабирака већи или једнак од $\dfrac{1}{10}$ то је $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{100}} > 100 \cdot \dfrac{1}{10} = 10$

<u>ПРИМЕР 2.</u> Докажи да је $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + ... + \dfrac{1}{2010\cdot 2011} < 1$. *Да ли се дата неједнакост може уопштити?*

РЕШЕЊЕ: Сваки сабирак у датој неједнакости има облик $\dfrac{1}{k\cdot(k+1)}$. Како је $\dfrac{1}{k\cdot(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, то је $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ ... + \dfrac{1}{2010\cdot 2011} = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + ... + \dfrac{1}{2010} - \dfrac{1}{2011} = 1 - \dfrac{1}{2011} < 1$.

Уопштавање неједнакости подразумева разматрање случаја за било који природан број n. Разматрањем се добија $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1} < 1$.

<u>ПРИМЕР 3.</u> Ако су a и b реални бројеви, онда је:

а) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$; б) $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) \geq 8a^2b^2c^2$.

РЕШЕЊЕ: Познато је да је да за свака два реална броја a и b важи неје-днакост $(a - b)^2 \geq 0$. То значи да је $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$, па је $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Једнакост важи ако је $a - b = 0$, тј. ако је $a = b$.

a) Користећи претходну неједнакост добија се $a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$. Дељењем неједнакости са 2 добија се $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, што је требало доказати. У добијеној формули једнакост важи ако је $a = b$ и $b = c$, па према томе ако је $a = b = c$. .

b) Слично, $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) \geq 2ab \cdot 2bc \cdot 2ca = 8a^2b^2c^2$. И у овој неједнакости једнакост важи ако је, $a = b$ и $b = c$, тј. ако је $a = b = c$.

У претходним примерима тражене неједнакости су доказиване тако што се полазило од познатих неједнакости (најчешће $x^2 \geq 0$) и потом низом еквивалентних алгебарских трансформација добила неједнакост коју је требало доказати. Пример који следи подразумева супротан поступак, а то значи да се полази од неједнакости коју треба доказати, а онда системом еквивалентних трансформација добија нека од већ добро познатих неједнакости.

<u>*ПРИМЕР 4.*</u> *Ако је x реалан број, онда је* $3(1 + x^2 + x^4) \geq (1 + x + x^2)^2$. *Докажи.*

РЕШЕЊЕ: Ако се трансформише неједнакост $3(1 + x^2 + x^4) \geq (1 + x + x^2)^2$ добија еквивалентна неједнакост $3 + 3x^2 + 3x^4 \geq 1 + x^2 + x^4 + 2x + 2x^2 + 2x^3$. Следи да је $2 + 2x^4 - 2x - 2x^3 \geq 0$. Растављањем леве стране на чиниоце добија се $2((1 - x) + x^3(x - 1)) \geq 0$ или $2(x - 1)(x^3 - 1) \geq 0$. Последња неједнакост је тачна, јер су изрази $x - 1$ и $x^3 - 1$ увек истога знака.

У седмом разреду је било речи о аритметичкој средини два реална броја. Тако је за реалне бројеве a и b аритметичка средина дефинсана једнакошћу $\text{A} = \dfrac{a + b}{2}$. Поред аритметичке средине може се посматрати и геометријска, хармонијска и квадратна средина: $G = \sqrt{ab}$, $\text{H} = \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ и $\text{K} = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$. Важно је напоменути да се наведене средине посматрају за позитивне реалне бројеве, јер у супротном геометријска средина не би била дефинисана.

<u>*ПРИМЕР 5.*</u> Докажи да за позитивне реалне бројеве a и b важи неједнакост $\text{K} \geq \text{A} \geq \text{G} \geq \text{H}$.

РЕШЕЊЕ: Тражена неједнакости се најефикасније доказује свођењем на већ познате неједнакости. Из $\text{A} \geq \text{G}$, тј. $\dfrac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$ следи да је $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, тј $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$, што је очигледно тачно. Ако је $\text{K} \geq \text{A}$, тј. $\sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}} \geq \dfrac{a + b}{2}$, онда се после квадрирања добија $\dfrac{a^2 + b^2}{2} \geq \dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{4}$. Даљом трансформацијом се добија $2a^2 + 2b^2 \geq a^2 + 2ab + b^2$, односно $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 0$, што је такође тачно. Из $\text{G} \geq \text{H}$, тј. $\sqrt{ab} \geq \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ следи да је $\sqrt{ab} \geq \dfrac{2ab}{a + b}$ или $\dfrac{a + b}{2} \geq \dfrac{ab}{\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$. Добијена неједнакост је доказана неједнакост $\text{A} \geq \text{G}$.

ЗАДАЦИ

1. Шта је веће: $\sqrt{2010} + \sqrt{2012}$ ili $2\sqrt{2011}$?

2. Докажи неједнакост: $\frac{2^{2010}+1}{2^{2011}+1} > \frac{2^{2011}+1}{2^{2012}+1}$. Може ли се дата неједнакост уопштити?

3. Шта је веће: $n!$ или 2^n ?

4. Докажи неједнакост: $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<1.$

5. Да ли важи неједнакост: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}...\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$?

6. Ако је $x > 0$, онда је $x+\frac{1}{x} \geq 2$. Докажи.

7. Ако је $0 < x \leq a \leq 1$, онда је $x+\frac{1}{x} \geq a+\frac{1}{a}$. Докажи.

8. Ако је x реалан број, онда је $\frac{x^2}{x^4+1} \leq \frac{1}{2}$. Докажи..

9. Ако је $x^2+y^2 \leq 2$, onda je $|x+y| \leq 2$. Докажи.

10. Докажи да је $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$ за свако реално x .

11. Ако је $x + \frac{2}{x} = 3$, онда је $x^{2011} + \frac{2}{x^{2011}} \geq 3$. Докажи.

12. Нека су a, b, c и d позитивни реални бројеви. Докажи неједнакости:
а) $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$; б) $a^4+b^4+2 \geq 4ab$; в) $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$; г) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 3$.

13. Ако су x, y и z позитивни реални бројеви и ако је $xyz = 1$, онда је $(x + 1)(y + 1)(z + 1) \geq 8$. Докажи.

14. Нека су $a_1, a_2, ... , a_n$ позитивни реални бројеви такви да је $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = 1$. Докажи неједнакост: $(1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_n) \geq 2^n$.

15. Нека су $a_1,a_2,...,a_n$ позитивни реални бројеви. Докажи да тада важи неједнакост:
$(a_1+a_2+ ... + a_n)(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}) \geq n^2$.

16. Докажи неједнакост $\frac{a_1^2+a_1+1}{a_1}\cdot\frac{a_2^2+a_2+1}{a_2}\cdot...\cdot\frac{a_n^2+a_n+1}{a_n} \geq 3^n$, ако су $a_1,a_2,...,a_n$ позитивни реални бројеви.

17. Докажи неједнакост: $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ $(n \in N)$.

18. Нека су a и b катете, c хипотенуза, h хипотенузина висина, r полупречник уписаног, а R полупречник описаног круга и P површина правоуглог троугла. Докажи неједнакости:
а) $a^3 + b^3 < c^3$; б) $a + b < c + h$; в) $c \geq 2\sqrt{P}$; г) $c < a+b \leq c\sqrt{2}$; д) $r + R \geq \sqrt{2P}$.

19. Ако су a, $б$ и c мерни бројеви катета правоуглог троугла, односно хипотенузе правоуглог троугла, онда за сваки природан број n $(n > 2)$ важи неједнакост $a^n + b^n < c^n$. Докажи.

20. Ако су a, b , c , позитивни реални бројеви такви да је $a + b + c + d = 1$, докажи да важи неједнакост: $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}+\sqrt{4d+1} < 6$.