ПОЛИНОМИ

Полиноми су тема којој је посвећено доста пажње и у редовној настави. О квадрату збира и разлике и разлици квадрата говорили смо и на почетку ове књиге. Ова тема зато представља обнављање и рекапитулацију наученог и мали излет у нека нова сазнања о полиномима, а у суштини је то само проширивање и продубљивање до сада упознатих садржаја о полиномима.

<u>*ПРИМЕР 1.*</u> Дат је полином $P(x) = (x + 4)^{2019} + (x - 1)^{2020}$. Колики је збир коефицијената датог полинома?

РЕШЕЊЕ: Ако је полином $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_o,$ онда је збир његових коефицијената $S = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_o$. Ако израчунамо вредност полинома за $x = 1$, онда је за сваки природан број к број $x^к = 1^к = 1$, па је $P(1) = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_o = S$. Дакле, збир коефицијената полинома $P(x) = (x + 4)^{2019} + (x - 1)^{2020}$ је вредност полинома за $x = 1$, а то је 5^{2019}.

Следећа једнакост је једна од (за елементарну математику) најважнијих и најпримењљивијих једнакости.

<u>*ПРИМЕР 2.*</u> Ако су a и b различити реални бројеви, а n природан број, онда је $(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n - b^n$. Докажи.

РЕШЕЊЕ: Множењем полинома на левој страни једнакости добија се да је $(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n + a^{n-1}b + \dots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} - a^{n-1}b - - a^{n-2}b^2 - \dots - a^2b^{n-2} - ab^{n-1} - b^{n-1} = a^n - b^n$.

Ако у претходно доказаној једнакости број b заменимо са 1, добија се једнакост $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^2 + a + 1)$ чија примена је скоро универзална. Наредни примери показују неке од могућих примера примене добијених једнакости.

<u>*ПРИМЕР 3.*</u> *Одреди реална решења једначине* $32x^5 - 243 = 0$

РЕШЕЊЕ: Дата једначина се може написати у облику $(2x)^5 - 3^5 = 0$. Ако дату једначину, тј. њену леву страну, користећи доказану једнакост, напишемо у облику $(2x - 3)(16x^4 + 24x^3 + 36x^2 + 54x + 81) = 0$, следи да је $2x - 3 = 0$, тј. $x = \dfrac{3}{2}$. За сваки реалан број x, $16x^4 + 24x^3 + 36x^2 + 54x + 81 = (4x^2 + 3x)^2 + 18x^2 + (3x + 9)^2 > 0$, па једначина нема више реалних решења.

<u>*ПРИМЕР 4.*</u> Докажи да је за сваки природан број n бројевна вредност израза $7^{2n} - 4^{2n}$ дељива са 33.

РЕШЕЊЕ: Како је $7^{2n} - 4^{2n} = 49^n - 16^n = (49 - 16)(49^{n-1} + 49^{n-2} \cdot 16 + ... + 49 \cdot 16^{n-2} + 16^{n-1})$, то је $7^{2n} - 4^{2n} = 33 \cdot A$, па је вредност израза дељива са 33.

<u>*ПРИМЕР 5.*</u> Нека је $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_o$ полином са целобројним коефицијентима. Ако је $P(a) = 0$, онда је полином $P(x)$ дељив изразом $x - a$. Докажи.

РЕШЕЊЕ: Како је $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_o$ и како је за $x = a$, $P(a) = a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + ... + a_2 a^2 + a_1 a + a_o = 0$, то је $P(x) - P(a) = a_n x^n - a_n a^n + a_{n-1} x^{n-1} - a_{n-1} a^{n-1} + ... + a_2 x^2 - a_2 a^2 + a_1 x - a_1 a + a_o - a_o = a_n (x^n - a^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - a^{n-1}) + ... + a_2 (x^2 - a^2) + a_1(x - a)$. Сваки од израза $x^к - a^к$ је на основу доказане једнакости (пример 106.), дељив са $(x - a)$, па је $P(x) - P(a) = P(x) = (x - a)Q(x)$, што значи и да је $P(x)$ дељив са $x - a$.

Из преходног тврђења следи да је $P(x) - P(a) = (x - a)Q(x)$, па је $P(x) = (x - a)Q(x) + P(a)$, што значи да је остатак при дељењу полинома $P(x)$ са $(x - a)$ једнак $P(a)$. Ово тврђење је познато као *Безуов став* и има велику примену у елементарној математици.

Све доказано је и могућност да се многи полиноми за које до сада нисмо знали како да их раставимо на чиниоце, раставе релативно лако.

<u>*ПРИМЕР 6.*</u> *Раставити на чиниоце полином* $x^3 - 7x^2 + 4x + 12$.

РЕШЕЊЕ: Како је $P(x) = x^3 - 7x^2 + 4x + 12$, то је $P(2) = 8 - 28 + 8 + 12 = 0$, па је дати полином дељив са $(x - 2)$. Међутим, и $P(-1) = -1 - 7 - 4 + 12 = 0$, па је полином дељив и са $(x + 1)$. Коначно и $P(6) = 216 - 252 + 24 + 12 = 0$, па се дати полином може написати у облику $(x - 2)(x + 1)(x - 6)$.

Може се учинити да је овај метод факторизације полинома – метод случајног погађања нула полинома. Можда, то тако изгледа, али је важно одредити једну нулу, после тога је све лакше, јер се методом једнаких коефицијената или неким другим поступцима ствари брзо одмотавају.

Метод једнаких коефиицијената почива на познатој теореми о идентичним полиномима која говори о једнакости полинома. Наиме, два полинома, $P = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_o$ и $Q = b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_o$, једнаки су ако имају идентичне канонске облике, тј. ако имају једнаке степене и све одговарајуће коефицијенте јединаке међу собом: $a_n = b_n$, $\ldots$ $a_1 = b_1$, $a_o = b_o$.

ПРИМЕР 7. *Решити једначину* $2x^3 - x^2 - 29x + 28 = 0$.

РЕШЕЊЕ: Како је $P(1) = 2 - 1 - 29 + 28 = 0$, то је дата једначина еквивалентна са једначином $(x - 1)(ax^2 + bx + c) = 2x^3 - x^2 - 29x + 28 = 0$ или после множења $ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c = 2x^3 - x^2 - 29x + 28 = 0$.

Изједначавањем коефицијената уз исте степене полинома добија се: $a = 2$, $b - a = -1$, $c - b = -29$ и $-c = 28$, односно $a = 2$, $b = 1$, $c = -28$. Следи да је $ax^2 + bx + c = 2x^2 + x - 28 = 2x^2 + 8x - 7x + 28 = 2x(x + 4) - 7(x + 4)$, па је коначно $ax^2 + bx + c = (x + 4)(2x - 7)$ и решења су: 1, – 4 и 7/2.

Можда је краће, и елегантније (знајући да је полином дељив са $x - 1$), „паковање" сабирака, па је $2x^3 - x^2 - 29x + 28 = 2x^3 - 2x^2 + x^2 - x - 28x + 28 = 2x^2(x - 1) + x(x - 1) - 28(x - 1) = (x - 1)(2x^2 + x - 28)$.

ЗАДАЦИ

1. Упрости израз: $x(x(x(x - 1) - 1) - 1) - 1$.

2. Докажи да је $(a - 3)(a^2 + 3a + 9) = a^3 - 27$

3. Упрости израз: $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

4. Колико је y^7, ако је $(5 - y)(y + 5) = 24$?

5. Израчунај a^9, ако је $(a + 3)(a^2 - 3a + 9) = 28$.

6. Упрости полиноме: а) $(x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$;
б) $(y + 1)(y^6 - y^5 + y^4 - y^3 + y^2 - y + 1)$.

7. Израчунај збир коефицијената полинома $(x + 2)(2x^3 + 3x^2 + 4x + 5)$.

8. Дат је полином $P(x) = (x + 1)^{11} + (x - 1)^{12} + a$. Одреди број a тако да је збир коефицијената полинима $P(x)$ једнак 2020.

9. Докажи да вредност израза $(2x - 1)(16x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 2x + 1) - 32x^5$ не зависи од променљиве x.

10. Користећи Безуов став раставити на чиниоце полиноме: а) $x^3 - 8x + 7$; б) $3x^3 + 4x^2 - 1$; в) $x^4 - 3x^2 - 4$.

11. Ако је n цео број, онда израз $n^3 - 7n^2 + 11n - 6$ представља производ три узастопна цела броја. Докажи.

12. Реши по y једначину: $y^4 - 17y^2 + 16 = 0$.

13. Дужине страница два квадрата разликују се за 10 cm, а њихове површине се разликују за 220 cm^2. Израчунај дужине страница тих квадрата.

14. Ако је $(x + 2y)^2 - (x - 2y)^2 = 0$, онда је бар један од бројева x или y једнак нули. Докажи.

15. Дата је једнакост $\frac{a^{2020} + b^{10} + c^6 + 1}{2} = a^{1010} + b^5 - c^3 - 1$. За које вредности реалних бројева a, b и c важи дата једнакост?

16. Странице троугла имају дужину: $a = 8x$, $b = x^2 - 16$ и $c = x^2 + 16$ (x је позитиван реалан број). Докажи да је дати троугао правоугли.

17. Дужине ивица квадра су три узастопна парна природна броја $2x - 2$, $2x$ и $2x + 2$, а дужина ивице коцке је $2x$. Да ли је већа површина квадра или коцке? А запремине?

18. Странице правоуглог троугла су $13y + 7$, $5y + 11$ и $12y$ ($y > 0$). Колика је површина тог троугла?

19. Ако су m и n природни бројеви, онда израз $m^2 + 2mn + n^2 + 3m + 3n + 2$ представља производ два узастопна природна броја. Докажи.

20. Нека су a, b и c реални бројеви такви да је $a + b + c = ab + bc + ca = a^2 + b^2 + c^2 = m$. Одреди број m. Постоје ли цели бројеви a, b и c који испуњавају дате услове?

21. Збир коефицијената полинома $P(x) = (x + 1)^7 + (x^2 - 5x + 4)^8$ је дељив са 64. Докажи.

22. Природан број n је већи од 2. Колики је остатак при дељењу полинома $n^3 + 2019$ са $n + 1$?

23. Растави на чиниоце израз $a^{128} - b^{128}$.

24. Докажи да је 111...111 – 222...222, где је јединица два пута више него двојки, потпун квадрат неког природног броја.

25. Између сваке две узастопне цифаре броја 121 уписано је k нула (k је природан број). Докажи да је добијени број 100...00200...001 потпун квадрат.

26. Постоје ли природни бројеви m и n такви да су бројеви $m^2 + n$ и $n^2 + m$ потпуни квадрати природних бројева?