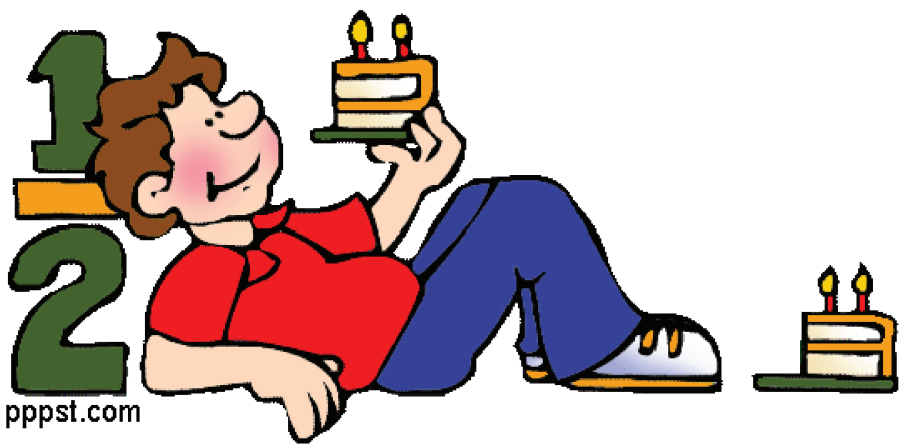
Разломци на математичким такмичењима

Владимир Балтић

baltic@matf.bg.ac.rs



1. *V, Мислиша 2008.*

Јасна има две јабуке, две половине јабуке и четири четвртине јабуке. Колико јабука има Јасна?

(А) 1 **(Б)** 2 **(Ц)** 3 **(Д)** 4 **(Е)** 5

1. *V, Мислиша 2008.*

Јасна има две јабуке, две половине јабуке и четири четвртине јабуке. Колико јабука има Јасна?

(А) 1 **(Б)** 2 **(Ц)** 3 **(Д)** 4 **(Е)** 5

$2 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} = 2 + 1 + 1 = 4.$

3. 5. разред, Мислиша 2008.

Који од следећих разломака има највећу вредност:

I $\dfrac{2+0+0+8}{2+0+0+8}$; II $\dfrac{2\cdot 0\cdot 0\cdot 8}{2+0+0+8}$;

III $\dfrac{2008}{2+0+0+8}$; IV $\dfrac{2+0+0+8}{2008}$?

(А) I разломак **(Б)** II разломак

(Ц) III разломак **(Д)** IV разломак

(Е) сви имају исту вредност

3. *5. разред, Мислиша 2008.*

Који од следећих разломака има највећу вредност:

1 I $\dfrac{2+0+0+8}{2+0+0+8}$; 0 II $\dfrac{2\cdot 0\cdot 0\cdot 8}{2+0+0+8}$;

$\frac{2008}{10}$ III $\dfrac{2008}{2+0+0+8}$; $\frac{10}{2008}$ IV $\dfrac{2+0+0+8}{2008}$?

(А) I разломак **(Б)** II разломак
(Ц) III разломак **(Д)** IV разломак
(Е) сви имају исту вредност

3. 5. разред, Мислиша 2008.

Који од следећих разломака има највећу вредност:

1 I $\dfrac{2+0+0+8}{2+0+0+8}$; 0 II $\dfrac{2\cdot 0\cdot 0\cdot 8}{2+0+0+8}$;

$\frac{2008}{10}$ III $\dfrac{2008}{2+0+0+8}$; $\frac{10}{2008}$ IV $\dfrac{2+0+0+8}{2008}$?

$$0 < \frac{10}{2008} < 1 < \frac{2008}{10}$$

(А) I разломак **(Б)** II разломак

(Ц) III разломак **(Д)** IV разломак

(Е) сви имају исту вредност

4. *VI, Мислиша 2008.*

Аца је у продавници купио хлеб и сир и потрошио половину укупне суме коју је имао. Затим је за 30 динара купио аутобуску карту и одвезао се до књижаре. У књижари је купио књигу за коју је потрошио половину преостале суме и још 10 динара. Пребројао је новац који му је остао, потрошио половину те суме за свеску, а затим је 40 динара дао за сладолед. После тога остало му је тачно 30 динара да купи аутобуску карту за повратак кући. Колико је новца имао Аца на почетку?

(А) 330 дин **(Б)** 360 дин **(Ц)** 600 дин
(Д) 660 дин **(Е)** 1320 дин

4. *VI, Мислиша 2008.*

Аца је у продавници купио хлеб и сир и потрошио половину укупне суме коју је имао. Затим је за 30 динара купио аутобуску карту и одвезао се до књижаре. У књижари је купио књигу за коју је потрошио половину преостале суме и још 10 динара. Пребројао је новац који му је остао, потрошио половину те суме за свеску, а затим је 40 динара дао за сладолед. После тога остало му је тачно 30 динара да купи аутобуску карту за повратак кући. Колико је новца имао Аца на почетку?

(А) 330 дин **(Б)** 360 дин **(Ц)** 600 дин
(Д) 660 дин **(Е)** 1320 дин

последњих 30дин – аутобуску карту $\boxed{30\text{дин}}$

$\boxed{0\text{дин}}$

40дин – дао за сладолед $\boxed{70\text{дин}}$

последњих 30дин – аутобуску карту $\boxed{30\text{дин}}$

$\boxed{0\text{дин}}$

за половину 70дин – узео свеску $\boxed{140\text{дин}}$

40дин – дао за сладолед $\boxed{70\text{дин}}$

последњих 30дин – аутобуску карту $\boxed{30\text{дин}}$

$\boxed{0\text{дин}}$

за половину+10дин, 160дин – књигу $\boxed{300\text{дин}}$

за половину, 70дин – свеску $\boxed{140\text{дин}}$

40дин – сладолед $\boxed{70\text{дин}}$

последњих 30дин – аутобуску карту $\boxed{30\text{дин}}$

$\boxed{0\text{дин}}$

30дин – аутобуску карту	$\boxed{330\text{дин}}$
за половину+10дин, 160дин – књигу	$\boxed{300\text{дин}}$
за половину, 70дин – свеску	$\boxed{140\text{дин}}$
40дин – сладолед	$\boxed{70\text{дин}}$
последњих 30дин – аутобуску карту	$\boxed{30\text{дин}}$
	$\boxed{0\text{дин}}$

за половину, 330дин – хлеб и сир $\boxed{660\text{дин}}$

30дин – аутобуску карту $\boxed{330\text{дин}}$

за половину+10дин, 160дин – књигу $\boxed{300\text{дин}}$

за половину, 70дин – свеску $\boxed{140\text{дин}}$

40дин – сладолед $\boxed{70\text{дин}}$

последњих 30дин – аутобуску карту $\boxed{30\text{дин}}$

$\boxed{0\text{дин}}$

5. *Забавникове логичке загонетке, 1. III 2013.*

Бака је за унучад припремила одређен број колача. Најпре је код баке дошао најстарији унук и појео половину свих колача и још пола колача, затим је дошла унука и појела половину осталих и још пола колача, те је на крају најмлађи унук појео половину остатка и још пола колача. На крају је на тањиру остао само један колач. Колико колача је бака припремила унучићима?

5. *Забавникове логичке загонетке, 1. III 2013.*

Бака је за унучад припремила одређен број колача. Најпре је код баке дошао најстарији унук и појео половину свих колача и још пола колача, затим је дошла унука и појела половину осталих и још пола колача, те је на крају најмлађи унук појео половину остатка и још пола колача. На крају је на тањиру остао само један колач. Колико колача је бака припремила унучићима?

Бака је укупно припремила 15 колача.

на крају

1

најмлађи унук

половину остатка $\boxed{3}$

пола колача $\boxed{1\ \frac{1}{2}}$

на крају $\boxed{1}$

унука

половину остатка $\boxed{7}$

пола колача $\boxed{3\ \frac{1}{2}}$

најмлађи унук

половину остатка $\boxed{3}$

пола колача $\boxed{1\ \frac{1}{2}}$

на крају $\boxed{1}$

најстарији унук

половину остатка $\boxed{15}$

пола колача $\boxed{7\,\frac{1}{2}}$

унука

половину остатка $\boxed{7}$

пола колача $\boxed{3\,\frac{1}{2}}$

најмлађи унук

половину остатка $\boxed{3}$

пола колача $\boxed{1\,\frac{1}{2}}$

на крају $\boxed{1}$

6. *Забавникове логичке загонетке, 1. III 2013.*

После очеве смрти синови су поделили наследство: најстарији син узео је 100 златника и 1/6 остатка,
други син 200 златника и 1/6 остатка,
трећи син 300 златника и 1/6 остатка, ...
На крају се испоставило да су сви синови добили исти број златника.
Колико је било синова, а колико златника?

6. *Забавникове логичке загонетке, 1. III 2013.*

После очеве смрти синови су поделили наследство: најстарији син узео је 100 златника и 1/6 остатка,
други син 200 златника и 1/6 остатка,
трећи син 300 златника и 1/6 остатка, ...
На крају се испоставило да су сви синови добили исти број златника.
Колико је било синова, а колико златника?

$$z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 200 + \frac{1}{6}O_2 = 300 + \frac{1}{6}O_3 = \dots$$

$$z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 200 + \frac{1}{6}O_2 = 300 + \frac{1}{6}O_3 = \ldots$$

$$O_2 = O_1 - \frac{1}{6}O_1 - 200$$

$$\Rightarrow z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 200 + \frac{1}{6}(O_1 - \frac{1}{6}O_1 - 200)$$

$$z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 200 + \frac{1}{6}O_2 = 300 + \frac{1}{6}O_3 = \ldots$$

$$O_2 = O_1 - \frac{1}{6}O_1 - 200$$

$$\Rightarrow \; z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 200 + \frac{1}{6}\left(O_1 - \frac{1}{6}O_1 - 200\right)$$

$$100 + \frac{1}{6}O_1 = 200 + \frac{1}{6}O_1 - \frac{1}{36}O_1 - \frac{200}{6}$$

$$z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 200 + \frac{1}{6}O_2 = 300 + \frac{1}{6}O_3 = \ldots$$

$$O_2 = O_1 - \frac{1}{6}O_1 - 200$$

$$\Rightarrow z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 200 + \frac{1}{6}(O_1 - \frac{1}{6}O_1 - 200)$$

$$100 + \frac{1}{6}O_1 = 200 + \frac{1}{6}O_1 - \frac{1}{36}O_1 - \frac{200}{6}$$

$$\frac{1}{36}O_1 = 200 - 100 - \frac{200}{6} = \frac{400}{6}$$

$$z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 200 + \frac{1}{6}O_2 = 300 + \frac{1}{6}O_3 = \dots$$

$$O_2 = O_1 - \frac{1}{6}O_1 - 200$$

$$\Rightarrow \; z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 200 + \frac{1}{6}\left(O_1 - \frac{1}{6}O_1 - 200\right)$$

$$100 + \frac{1}{6}O_1 = 200 + \frac{1}{6}O_1 - \frac{1}{36}O_1 - \frac{200}{6}$$

$$\frac{1}{36}O_1 = 200 - 100 - \frac{200}{6} = \frac{400}{6}$$

$$O_1 = \frac{400}{6} \cdot 36 = 2400.$$

$$z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 200 + \frac{1}{6}O_2 = 300 + \frac{1}{6}O_3 = \ldots$$

$$O_2 = O_1 - \frac{1}{6}O_1 - 200$$

$$\Rightarrow z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 200 + \frac{1}{6}\left(O_1 - \frac{1}{6}O_1 - 200\right)$$

$$100 + \frac{1}{6}O_1 = 200 + \frac{1}{6}O_1 - \frac{1}{36}O_1 - \frac{200}{6}$$

$$\frac{1}{36}O_1 = 200 - 100 - \frac{200}{6} = \frac{400}{6}$$

$$O_1 = \frac{400}{6} \cdot 36 = 2400.$$

Отац је оставио $100 + O_1 = 2500$ златника.

$$z = 100 + \tfrac{1}{6}O_1 = 200 + \tfrac{1}{6}O_2 = 300 + \tfrac{1}{6}O_3 = \dots$$

$$O_2 = O_1 - \tfrac{1}{6}O_1 - 200$$

$$\Rightarrow\ z = 100 + \tfrac{1}{6}O_1 = 200 + \tfrac{1}{6}(O_1 - \tfrac{1}{6}O_1 - 200)$$

$$100 + \tfrac{1}{6}O_1 = 200 + \tfrac{1}{6}O_1 - \tfrac{1}{36}O_1 - \tfrac{200}{6}$$

$$\tfrac{1}{36}O_1 = 200 - 100 - \tfrac{200}{6} = \tfrac{400}{6}$$

$$O_1 = \tfrac{400}{6} \cdot 36 = 2400.$$

Отац је оставио $100 + O_1 = 2500$ златника.

$z = 100 + \tfrac{1}{6}O_1 = 500$ златника.

$$z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 200 + \frac{1}{6}O_2 = 300 + \frac{1}{6}O_3 = \ldots$$

$$O_2 = O_1 - \frac{1}{6}O_1 - 200$$

$$\Rightarrow z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 200 + \frac{1}{6}\left(O_1 - \frac{1}{6}O_1 - 200\right)$$

$$100 + \frac{1}{6}O_1 = 200 + \frac{1}{6}O_1 - \frac{1}{36}O_1 - \frac{200}{6}$$

$$\frac{1}{36}O_1 = 200 - 100 - \frac{200}{6} = \frac{400}{6}$$

$$O_1 = \frac{400}{6} \cdot 36 = 2400.$$

Отац је оставио $100 + O_1 = 2500$ златника.

$z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 500$ златника.

$\Rightarrow$ било је $\dfrac{2500}{500} = 5$ синова.

$$z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 200 + \frac{1}{6}O_2 = 300 + \frac{1}{6}O_3 = \ldots$$

Отац је оставио $100 + O_1 = 2500$ златника.

Било је 5 синова и сваки је добио по $z = 500$ златника.

Проверимо да ли испуњава услове задатка!

$$z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 200 + \frac{1}{6}O_2 = 300 + \frac{1}{6}O_3 = \dots$$

Отац је оставио $100 + O_1 = 2500$ златника.

Било је 5 синова и сваки је добио по $z = 500$ златника.

остатак

$\boxed{2500}$

$$z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 200 + \frac{1}{6}O_2 = 300 + \frac{1}{6}O_3 = \dots$$

Отац је оставио $100 + O_1 = 2500$ златника.

Било је 5 синова и сваки је добио по $z = 500$ златника.

остатак

I син $z = 100$ $\boxed{2400}$

$$z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 200 + \frac{1}{6}O_2 = 300 + \frac{1}{6}O_3 = \ldots$$

Отац је оставио $100 + O_1 = 2500$ златника.

Било је 5 синова и сваки је добио по $z = 500$ златника.

остатак

I син $\quad z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 100 + 400 \qquad \boxed{2400}$

$\boxed{2000}$

$$z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 200 + \frac{1}{6}O_2 = 300 + \frac{1}{6}O_3 = \dots$$

Отац је оставио $100 + O_1 = 2500$ златника.

Било је 5 синова и сваки је добио по $z = 500$ златника.

		остатак
I син	$z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 100 + 400$	$\boxed{2400}$
II син	$z = 200$	$\boxed{1800}$

$$z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 200 + \frac{1}{6}O_2 = 300 + \frac{1}{6}O_3 = \ldots$$

Отац је оставио $100 + O_1 = 2500$ златника.

Било је 5 синова и сваки је добио по $z = 500$ златника.

		остатак
I син	$z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 100 + 400$	$\boxed{2400}$
II син	$z = 200 + \frac{1}{6}O_2 = 200 + 300$	$\boxed{1800}$
		$\boxed{1500}$

$$z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 200 + \frac{1}{6}O_2 = 300 + \frac{1}{6}O_3 = \ldots$$

Отац је оставио $100 + O_1 = 2500$ златника.

Било је 5 синова и сваки је добио по $z = 500$ златника.

		остатак
I син	$z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 100 + 400$	$\boxed{2400}$
II син	$z = 200 + \frac{1}{6}O_2 = 200 + 300$	$\boxed{1800}$
III син	$z = 300$	$\boxed{1200}$

$$z = 100 + \tfrac{1}{6}O_1 = 200 + \tfrac{1}{6}O_2 = 300 + \tfrac{1}{6}O_3 = \ldots$$

Отац је оставио $100 + O_1 = 2500$ златника.

Било је 5 синова и сваки је добио по $z = 500$ златника.

		остатак
I син	$z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 100 + 400$	$\boxed{2400}$
II син	$z = 200 + \frac{1}{6}O_2 = 200 + 300$	$\boxed{1800}$
III син	$z = 300 + \frac{1}{6}O_3 = 300 + 200$	$\boxed{1200}$
		$\boxed{1000}$

$$z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 200 + \frac{1}{6}O_2 = 300 + \frac{1}{6}O_3 = \ldots$$

Отац је оставио $100 + O_1 = 2500$ златника.

Било је 5 синова и сваки је добио по $z = 500$ златника.

		остатак
I син	$z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 100 + 400$	$\boxed{2400}$
II син	$z = 200 + \frac{1}{6}O_2 = 200 + 300$	$\boxed{1800}$
III син	$z = 300 + \frac{1}{6}O_3 = 300 + 200$	$\boxed{1200}$
IV син	$z = 400$	$\boxed{600}$

$$z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 200 + \frac{1}{6}O_2 = 300 + \frac{1}{6}O_3 = \dots$$

Отац је оставио $100 + O_1 = 2500$ златника.

Било је 5 синова и сваки је добио по $z = 500$ златника.

		остатак
I син	$z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 100 + 400$	$\boxed{2400}$
II син	$z = 200 + \frac{1}{6}O_2 = 200 + 300$	$\boxed{1800}$
III син	$z = 300 + \frac{1}{6}O_3 = 300 + 200$	$\boxed{1200}$
IV син	$z = 400 + \frac{1}{6}O_4 = 400 + 100$	$\boxed{600}$
		$\boxed{500}$

$$z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 200 + \frac{1}{6}O_2 = 300 + \frac{1}{6}O_3 = \dots$$

Отац је оставио $100 + O_1 = 2500$ златника.

Било је 5 синова и сваки је добио по $z = 500$ златника.

		остатак
I син	$z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 100 + 400$	$\boxed{2400}$
II син	$z = 200 + \frac{1}{6}O_2 = 200 + 300$	$\boxed{1800}$
III син	$z = 300 + \frac{1}{6}O_3 = 300 + 200$	$\boxed{1200}$
IV син	$z = 400 + \frac{1}{6}O_4 = 400 + 100$	$\boxed{600}$
V син	$z = 500$	$\boxed{0}$

$$z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 200 + \frac{1}{6}O_2 = 300 + \frac{1}{6}O_3 = \ldots$$

Отац је оставио $100 + O_1 = 2500$ златника.

Било је 5 синова и сваки је добио по $z = 500$ златника.

		остатак
I син	$z = 100 + \frac{1}{6}O_1 = 100 + 400$	$\boxed{2400}$
II син	$z = 200 + \frac{1}{6}O_2 = 200 + 300$	$\boxed{1800}$
III син	$z = 300 + \frac{1}{6}O_3 = 300 + 200$	$\boxed{1200}$
IV син	$z = 400 + \frac{1}{6}O_4 = 400 + 100$	$\boxed{600}$
V син	$z = 500 + \frac{1}{6}O_5 = 500 + 0$	$\boxed{0}$

$\checkmark$

7. *VIII, Мислиша 2008.*

Наставник математике је у 3 одељења А,Б,В, постављао задатке у вези са истим бројем a. У А рекао је да ученици најпре a смање за 20%, а онда резултат увећају за 20%.
У Б рекао је да ученици прво број a увећају за 10%, а онда резултат смање за 10%.
Ученици у В нису мењали дати број a.
Којим редом можемо поређати (од већег ка мањем) бројеве које су на крају имали ученици у сваком одељењу?

(А) А,Б,В **(Б)** А,В,Б **(Ц)** Б,В,А
(Д) В,Б,А **(Е)** В,А,Б

7. *VIII, Мислиша 2008.*

Наставник математике је у 3 одељења А,Б,В, постављао задатке у вези са истим бројем a.
У А рекао је да ученици најпре a смање за 20%, а онда резултат увећају за 20%.
У Б рекао је да ученици прво број a увећају за 10%, а онда резултат смање за 10%.
Ученици у В нису мењали дати број a.
Којим редом можемо поређати (од већег ка мањем) бројеве које су на крају имали ученици у сваком одељењу?

(А) А,Б,В **(Б)** А,В,Б **(Ц)** Б,В,А
(Д) В,Б,А **(Е)** В,А,Б

У А рекао је да ученици најпре a смање за 20%, а онда резултат увећају за 20%.

$$А = a \cdot (1 - \frac{20}{100}) \cdot (1 + \frac{20}{100}) = 0,96\,a$$

У Б рекао је да ученици прво број a увећају за 10%, а онда резултат смање за 10%.

$$Б = a \cdot (1 - \frac{10}{100}) \cdot (1 + \frac{10}{100}) = 0,99\,a$$

Ученици у В нису мењали дати број a.

$$В = a$$

Којим редом можемо поређати (од већег ка мањем) бројеве у сваком одељењу?

(А) А,Б,В **(Б)** А,В,Б **(Ц)** Б,В,А

(Д) В,Б,А **(Е)** В,А,Б

8. *VI, Архимедесова дописна олимпијада 2006.*

У шуми у којој расту само храстови и јеле, шумарско газдинство посекло је једну трећину свих храстова и једну шестину свих јела. Еколошка „Зелена патрола“ је, после тога, изјавила да је шумско газдинство посекло пола шуме. Да ли је еколошка патрола у праву? Не заборави да образложиш одговор!

8. *VI, Архимедесова дописна олимпијада 2006.*

У шуми у којој расту само храстови и јеле, шумарско газдинство посекло је једну трећину свих храстова и једну шестину свих јела. Еколошка „Зелена патрола“ је, после тога, изјавила да је шумско газдинство посекло пола шуме. Да ли је еколошка патрола у праву? Не заборави да образложиш одговор!

$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \quad ↯$$

$\frac{1}{3}$ се не односи на целу шуму (храстови)

$\frac{1}{6}$ се односи само на јеле.

$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ $\lightning$

$\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ се односи само на храстове

$\frac{1}{6} < \frac{1}{2}$ се односи само на јеле.

Посечено је мање од половине свих храстова и мање од половине свих јела, значи посечено је мање од половине свих стабала.

9. *VII, III савезно такмичење, Београд 1972.*

Приликом писменог рада из математике 12% ученика у разреду није решило задатак, 32% ученика је делимично решило, а остатак од 14 ученика задатак је тачно решило. Колико је ученика било у разреду?

9. *VII, III савезно такмичење, Београд 1972.*

Приликом писменог рада из математике 12% ученика у разреду није решило задатак, 32% ученика је делимично решило, а остатак од 14 ученика задатак је тачно решило. Колико је ученика било у разреду?

Преосталих 14 ученика чини

$$100\% - 12\% - 32\% = 56\%$$

укупног броја ученика у разреду.

9. *VII, III савезно такмичење, Београд 1972.*

Приликом писменог рада из математике 12% ученика у разреду није решило задатак, 32% ученика је делимично решило, а остатак од 14 ученика задатак је тачно решило. Колико је ученика било у разреду?

Преосталих 14 ученика чини

$$100\% - 12\% - 32\% = 56\%$$

укупног броја ученика у разреду.

Укупан број ученика у разреду је једнак

$14 : 0,56 = 1400 : 56 = 25$.

15. *VI, Општинско 2006.*

Одреди 2006-у цифру иза децималне запете у децималном запису броја $\dfrac{21}{37}$.

15. *VI, Општинско 2006.*

Одреди 2006-у цифру иза децималне запете у децималном запису броја $\dfrac{21}{37}$.

$21 \quad : \quad 37$

15. *VI, Општинско 2006.*

Одреди 2006-у цифру иза децималне запете у децималном запису броја $\dfrac{21}{37}$.

$$210 \quad : \quad 37 \; = \; 0,$$

15. *VI, Општинско 2006.*

Одреди 2006-у цифру иза децималне запете у децималном запису броја $\dfrac{21}{37}$.

$$
\begin{array}{r}
210 \quad : \quad 37 \; = \; 0,5 \\
\underline{-185} \\
25
\end{array}
$$

15. *VI, Општинско 2006.*

Одреди 2006-у цифру иза децималне запете у децималном запису броја $\dfrac{21}{37}$.

$$\begin{array}{rcccl} 210 & : & 37 & = & 0,5{\color{red}6} \\ \underline{-185} & & & & \\ 25{\color{blue}0} & & & & \\ \underline{{\color{red}-222}} & & & & \\ 28 & & & & \end{array}$$

15. *VI, Општинско 2006.*

Одреди 2006-у цифру иза децималне запетe у децималном запису броја $\dfrac{21}{37}$.

$$
\begin{array}{r}
210 \quad : \quad 37 \;=\; 0,567 \\
\underline{-185} \\
250 \\
\underline{-222} \\
280 \\
\underline{-259} \\
21
\end{array}
$$

15. *VI, Општинско 2006.*

Одреди 2006-у цифру иза децималне запете у децималном запису броја $\dfrac{21}{37}$.

$$\begin{array}{l}
210 \quad : \quad 37 \;=\; 0,567 \\
\underline{-185} \\
250 \\
\underline{-222} \\
280 \\
\underline{-259} \\
21\textcolor{blue}{0}
\end{array}$$

15. *VI, Општинско 2006.*

Одреди 2006-у цифру иза децималне запете у децималном запису броја $\dfrac{21}{37}$.

$$\boxed{210} : 37 = 0,567\,567\,567\,567\ldots = 0,(567)$$

$$\begin{array}{l} \underline{-185} \\ \quad 250 \\ \quad \underline{-222} \\ \qquad 280 \\ \qquad \underline{-259} \\ \qquad\quad \boxed{210} \end{array}$$

15. *VI, Општинско 2006.*

Одреди 2006-у цифру иза децималне запете у децималном запису броја $\dfrac{21}{37}$.

$$\begin{array}{l} \boxed{210} \quad : \quad 37 = 0,567\,567\,567\,567... = 0,(567) \\ \underline{-185} \\ \quad 250 \\ \quad \underline{-222} \\ \qquad 280 \\ \quad\ \ \underline{-259} \\ \qquad \boxed{210} \end{array}$$

разломак $\frac{21}{37}$ има периодичан запис са периодом 3

15. *VI, Општинско 2006.*

Одреди 2006-у цифру иза децималне запете у децималном запису броја $\dfrac{21}{37}$.

разломак $\frac{21}{37} = \ 0,567\,567\,567\,567... = 0,(567)$

има периодичан запис са периодом $\quad 3,$

$2006 = 3 \cdot 668 + 2$

15. *VI, Општинско 2006.*

Одреди 2006-у цифру иза децималне запете у децималном запису броја $\dfrac{21}{37}$.

разломак $\frac{21}{37} = \ 0,567\,567\,567\,567... = 0,(567)$

има периодичан запис са периодом $\quad 3,$

$$2006 = 3 \cdot 668 + 2$$

$$\Downarrow$$

на 2006. месту налази цифра 6.

16. *VI, Општинско 2006.*

При сабирању два децимална броја ученик је непажњом код једног од бројева померио децималну запету за два места удесно. Услед тога је уместо резултата 62,5876 добио 295. Које бројеве је ученик требало да сабере?

16. *VI, Општинско 2006.*

При сабирању два децимална броја ученик је непажњом код једног од бројева померио децималну запету за два места удесно. Услед тога је уместо резултата 62,5876 добио 295. Које бројеве је ученик требало да сабере?

Уместо да сабере број x, ученик је сабрао $100x$ и добио за $99x$ већи збир.

16. *VI, Општинско 2006.*

При сабирању два децимална броја ученик је непажњом код једног од бројева померио децималну запету за два места удесно. Услед тога је уместо резултата 62,5876 добио 295. Које бројеве је ученик требало да сабере?

Уместо да сабере број x, ученик је сабрао $100x$ и добио за $99x$ већи збир.

$$99x = 295 - 62,5876 \ \Rightarrow x = 2,3476.$$

16. *VI, Општинско 2006.*

При сабирању два децимална броја ученик је непажњом код једног од бројева померио децималну запету за два места удесно. Услед тога је уместо резултата 62,5876 добио 295. Које бројеве је ученик требало да сабере?

Уместо да сабере број x, ученик је сабрао $100x$ и добио за $99x$ већи збир.

$99x = 295 - 62,5876 \;\Rightarrow x = 2,3476.$

II сабирак је $62,5876 - 2,3476 = 60,24.$

16. *VI, Општинско 2006.*

При сабирању два децимална броја ученик је непажњом код једног од бројева померио децималну запету за два места удесно. Услед тога је уместо резултата 62,5876 добио 295. Које бројеве је ученик требало да сабере?

Уместо да сабере број x, ученик је сабрао $100x$ и добио за $99x$ већи збир.

$99x = 295 - 62,5876 \;\Rightarrow x = 2,3476.$

II сабирак је $62,5876 - 2,3476 = 60,24.$

Ученик је требало да сабере 2,3476 и 60,24.

18. *VI, Републичко 2011.*

Спољашњи углови троугла су
20%, 35% и 45% збира спољашњих углова. Одреди угао између симетрале најмањег угла и најкраће странице.

18. *VI, Републичко 2011.*

Спољашњи углови троугла су 20%, 35% и 45% збира спољашњих углова. Одреди угао између симетрале најмањег угла и најкраће странице.

63°

18. *VI, Републичко 2011.*

Спољашњи углови троугла су
20%, 35% и 45% збира спољашњих углова.
Одреди угао између симетрале најмањег угла
и најкраће странице.

Сп.уг. су 20%, 35% и 45% збира сп.уг, што је $360°$

$72°$, $126°$ и $162°$

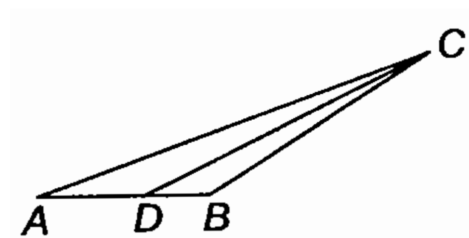
ун.уг. $\sphericalangle ABC = 180° - 72° = 108°$, $\sphericalangle BAC = 180° - 126° = 54°$ и $\sphericalangle ACB = 180° - 162° = 18°$.

Сп.уг. су 20%, 35% и 45% збира сп.уг, што је 360° — 72°, 126° и 162°

ун.уг. $\sphericalangle ABC = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$, $\sphericalangle BAC = 180^\circ - 126^\circ = 54^\circ$ и $\sphericalangle ACB = 180^\circ - 162^\circ = 18^\circ$.

CD симетрала најмањег угла $\sphericalangle ACB = 18^\circ$.

Угао $\sphericalangle CDB$ између симетрале најмањег угла и најкраће странице износи



$$\sphericalangle CDB = 180^\circ - (\sphericalangle CBD + \sphericalangle BCD)$$
$$= 180^\circ - (108^\circ + 9^\circ) = 63^\circ.$$

19. *VII, регионално Република Српска 2006.*

Одреди производ

$$\left(1+\frac{2}{5}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{7}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{2}{99}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{101}\right).$$

19. *VII, регионално Република Српска 2006.*

Одреди производ

$$\left(1+\frac{2}{5}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{7}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{2}{99}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{101}\right)$$

$$=\frac{7}{5}\cdot\frac{9}{7}\cdot\frac{11}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{101}{99}\cdot\frac{103}{101}=\frac{103}{5}.$$

20. *VII, регионално Република Српска 2006.*

Докажи да је

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{100} > \frac{1}{5}.$$

20. *VII, регионално Република Српска 2006.*

Докажи да је

$$S=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{98}-\frac{1}{99}+\frac{1}{100}>\frac{1}{5}.$$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{30-20+15-12}{60}=\frac{13}{60}>\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$

20. *VII, регионално Република Српска 2006.*

Докажи да је

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{100} > \frac{1}{5}.$$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{30-20+15-12}{60} = \frac{13}{60} > \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$

$\frac{1}{6} - \frac{1}{7} > 0,\ \frac{1}{8} - \frac{1}{9} > 0,\ \ldots,\ \frac{1}{98} - \frac{1}{99} > 0$

20. *VII, регионално Република Српска 2006.*

Докажи да је

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{100} > \frac{1}{5}.$$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{30-20+15-12}{60} = \frac{13}{60} > \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$

$\frac{1}{6} - \frac{1}{7} > 0,\ \frac{1}{8} - \frac{1}{9} > 0,\ \ldots,\ \frac{1}{98} - \frac{1}{99} > 0$

$\frac{1}{100} > 0$

20. *VII, регионално Република Српска 2006.*

Докажи да је

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{100} > \frac{1}{5}.$$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{30-20+15-12}{60} = \frac{13}{60} > \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$

$\frac{1}{6} - \frac{1}{7} > 0,\ \frac{1}{8} - \frac{1}{9} > 0,\ \ldots,\ \frac{1}{98} - \frac{1}{99} > 0$

$\frac{1}{100} > 0$

$\Rightarrow \quad S > \frac{1}{5}.$

21. *5. разред, Фестивал Ум+ Бугарска 2006.*

Упореди бројеве

$$A = \frac{2001}{2002} \cdot \left(\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \ldots + \frac{1}{2000\cdot 2003}\right) \quad \text{и}$$

$$B = \frac{2003}{2004} \cdot \left(\frac{5}{4\cdot 9} + \frac{5}{9\cdot 14} + \ldots + \frac{5}{1999\cdot 2004}\right).$$

21. 5. разред, Фестивал Ум+ Бугарска 2006.

Упореди бројеве

$$A = \frac{2001}{2002}\cdot\Big(\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\ldots+\frac{1}{2000\cdot2003}\Big) \qquad \text{и}$$

$$B = \frac{2003}{2004}\cdot\Big(\frac{5}{4\cdot9}+\frac{5}{9\cdot14}+\ldots+\frac{5}{1999\cdot2004}\Big).$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{2001}{2002}\cdot\Big(\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\ldots+\frac{1}{2000\cdot2003}\Big) \\ &= \frac{667}{2002}\cdot\Big(\frac{3}{2\cdot5}+\frac{3}{5\cdot8}+\ldots+\frac{3}{2000\cdot2003}\Big) \end{aligned}$$

21. *5. разред, Фестивал Ум+ Бугарска 2006.*

Упореди бројеве

$$A = \frac{2001}{2002}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\ldots+\frac{1}{2000\cdot 2003}\right) \quad \text{и}$$

$$B = \frac{2003}{2004}\cdot\left(\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{5}{9\cdot 14}+\ldots+\frac{5}{1999\cdot 2004}\right).$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{2001}{2002}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\ldots+\frac{1}{2000\cdot 2003}\right)\\ &= \frac{667}{2002}\cdot\left(\frac{3}{2\cdot 5}+\frac{3}{5\cdot 8}+\ldots+\frac{3}{2000\cdot 2003}\right)\\ &= \frac{667}{2002}\cdot\left(\frac{5-2}{2\cdot 5}+\frac{8-5}{5\cdot 8}+\ldots+\frac{2003-2000}{2000\cdot 2003}\right) \end{aligned}$$

21. *5. разред, Фестивал Ум+ Бугарска 2006.*

Упореди бројеве

$$A = \frac{2001}{2002}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\ldots+\frac{1}{2000\cdot 2003}\right) \quad \text{и}$$

$$B = \frac{2003}{2004}\cdot\left(\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{5}{9\cdot 14}+\ldots+\frac{5}{1999\cdot 2004}\right).$$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{2001}{2002}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\ldots+\frac{1}{2000\cdot 2003}\right)\\
&= \frac{667}{2002}\cdot\left(\frac{3}{2\cdot 5}+\frac{3}{5\cdot 8}+\ldots+\frac{3}{2000\cdot 2003}\right)\\
&= \frac{667}{2002}\cdot\left(\frac{5-2}{2\cdot 5}+\frac{8-5}{5\cdot 8}+\ldots+\frac{2003-2000}{2000\cdot 2003}\right)\\
&= \frac{667}{2002}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2000}-\frac{1}{2003}\right)
\end{aligned}$$

21. *5. разред, Фестивал Ум+ Бугарска 2006.*

Упореди бројеве

$$A = \frac{2001}{2002} \cdot \left(\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \ldots + \frac{1}{2000\cdot 2003}\right) \quad \text{и}$$

$$B = \frac{2003}{2004} \cdot \left(\frac{5}{4\cdot 9} + \frac{5}{9\cdot 14} + \ldots + \frac{5}{1999\cdot 2004}\right).$$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{2001}{2002} \cdot \left(\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \ldots + \frac{1}{2000\cdot 2003}\right)\\
&= \frac{667}{2002} \cdot \left(\frac{3}{2\cdot 5} + \frac{3}{5\cdot 8} + \ldots + \frac{3}{2000\cdot 2003}\right)\\
&= \frac{667}{2002} \cdot \left(\frac{5-2}{2\cdot 5} + \frac{8-5}{5\cdot 8} + \ldots + \frac{2003-2000}{2000\cdot 2003}\right)\\
&= \frac{667}{2002} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2000} - \frac{1}{2003}\right)\\
&= \frac{667}{2002}\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2003}\right) < \frac{667}{2002}\cdot\frac{1}{2} < \frac{667}{2001}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

$$A < \frac{1}{6}.$$

$$B = \frac{2003}{2004} \cdot \left(\frac{5}{4\cdot 9} + \frac{5}{9\cdot 14} + \ldots + \frac{5}{1999\cdot 2004}\right)$$

$A < \frac{1}{6}$.

$$\begin{aligned} B &= \frac{2003}{2004} \cdot \left(\frac{5}{4 \cdot 9} + \frac{5}{9 \cdot 14} + \ldots + \frac{5}{1999 \cdot 2004} \right) \\ &= \frac{2003}{2004} \cdot \left(\frac{9-4}{4 \cdot 9} + \frac{14-9}{9 \cdot 14} + \ldots + \frac{2004-1999}{1999 \cdot 2004} \right) \end{aligned}$$

$A < \frac{1}{6}$.

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{2003}{2004} \cdot \left(\frac{5}{4 \cdot 9} + \frac{5}{9 \cdot 14} + \ldots + \frac{5}{1999 \cdot 2004}\right) \\
&= \frac{2003}{2004} \cdot \left(\frac{9-4}{4 \cdot 9} + \frac{14-9}{9 \cdot 14} + \ldots + \frac{2004-1999}{1999 \cdot 2004}\right) \\
&= \frac{2003}{2004} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{14} + \ldots + \frac{1}{1999} - \frac{1}{2004}\right)
\end{aligned}
$$

$A < \frac{1}{6}.$

$$\begin{aligned}
B &= \frac{2003}{2004} \cdot \left(\frac{5}{4\cdot 9} + \frac{5}{9\cdot 14} + \ldots + \frac{5}{1999\cdot 2004}\right) \\
&= \frac{2003}{2004} \cdot \left(\frac{9-4}{4\cdot 9} + \frac{14-9}{9\cdot 14} + \ldots + \frac{2004-1999}{1999\cdot 2004}\right) \\
&= \frac{2003}{2004} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{14} + \ldots + \frac{1}{1999} - \frac{1}{2004}\right) \\
&= \frac{2003}{2004} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2004}\right) \approx 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$A < \frac{1}{6}$.

$$\begin{aligned} B &= \frac{2003}{2004} \cdot \left(\frac{5}{4\cdot 9} + \frac{5}{9\cdot 14} + \ldots + \frac{5}{1999\cdot 2004}\right) \\ &= \frac{2003}{2004} \cdot \left(\frac{9-4}{4\cdot 9} + \frac{14-9}{9\cdot 14} + \ldots + \frac{2004-1999}{1999\cdot 2004}\right) \\ &= \frac{2003}{2004} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{14} + \ldots + \frac{1}{1999} - \frac{1}{2004}\right) \\ &= \frac{2003}{2004} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2004}\right) \approx 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$A < \frac{1}{6} \text{ и } B \approx \frac{1}{4} \quad \Rightarrow A < B.$$

22. 7. разред, Државно натјецање - Хрв. 2006.

Базен се пуни водом са три цеви. Ако га пуне само прва и друга цев, базен се напуни за 20 минута, ако га пуне друга и трећа цев, напуни се за 15 минута, а ако га пуне трећа и прва цев, базен се напуни за 12 минута. За колико се времена напуни базен ако се пуни са све три цеви?

22. *7. разред, Државно натјецање - Хрв. 2006.*
Базен се пуни водом са три цеви. Ако га пуне само прва и друга цев, базен се напуни за 20 минута, ако га пуне друга и трећа цев, напуни се за 15 минута, а ако га пуне трећа и прва цев, базен се напуни за 12 минута. За колико се времена напуни базен ако се пуни са све три цеви?

Ако се базен једном цеви напуни за a минута, тада се за 1 минут том цеви напуни $\frac{1}{a}$-ти део базена!

22. 7. разред, Државно натјецање - Хрв. 2006.
Базен се пуни водом са три цеви. Ако га пуне само прва и друга цев, базен се напуни за 20 минута, ако га пуне друга и трећа цев, напуни се за 15 минута, а ако га пуне трећа и прва цев, базен се напуни за 12 минута. За колико се времена напуни базен ако се пуни са све три цеви?

Ако се базен једном цеви напуни за a минута, тада се за 1 минут том цеви напуни $\frac{1}{a}$-ти део базена!

I цев – x минута

Ако се базен 1 цеви напуни за a минута, тада се за $1min$ том цеви напуни $\frac{1}{a}$-ти део базена!

I цев – x минута

II цев – y минута

III цев – z минута

Ако се базен 1 цеви напуни за a минута, тада се за $1min$ том цеви напуни $\frac{1}{a}$-ти део базена!

I цев – x минута

II цев – y минута

III цев – z минута

услови задатка:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{20}, \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{15}, \quad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{12}.$$

Ако се базен 1 цеви напуни за a минута, тада се за $1min$ том цеви напуни $\frac{1}{a}$-ти део базена!

I цев – x минута

II цев – y минута

III цев – z минута

услови задатка:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{20}, \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{15}, \quad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{12}.$$

Можемо да решимо систем по $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$, али нећемо тако да радимо!

Ако се базен 1 цеви напуни за a минута, тада се за $1min$ том цеви напуни $\frac{1}{a}$-ти део базена!

I цев – x минута

II цев – y минута

III цев – z минута

услови задатка:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{20}, \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{15}, \quad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{12}.$$

саберимо претходне 3 једначине:

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{20}+\frac{1}{15}+\frac{1}{12}=\frac{3+4+5}{60}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}.$$

Ако се базен 1 цеви напуни за a минута, тада се за $1min$ том цеви напуни $\frac{1}{a}$-ти део базена!

I цев – x минута

II цев – y минута

III цев – z минута

услови задатка:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{20}, \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{15}, \quad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{12}.$$

саберимо претходне 3 једначине:

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{20}+\frac{1}{15}+\frac{1}{12}=\frac{3+4+5}{60}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{10}.$$

Базен се са све 3 цеви напуни за $10min$.

23. VIII, Државно натјецање - Хрватска 2006.

Који је већи од два разломка:

$$\frac{10^{2005}+1}{10^{2006}+1} \qquad \text{или} \qquad \frac{10^{2006}+1}{10^{2007}+1}\,?$$

23. *VIII, Државно натјецање - Хрватска 2006.*

Који је већи од два разломка:

$$a = \frac{10^{2005}+1}{10^{2006}+1} \qquad \text{или} \qquad b = \frac{10^{2006}+1}{10^{2007}+1}\,?$$

Решење 1:

$$a-b=\frac{10^{2005}+1}{10^{2006}+1}-\frac{10^{2006}+1}{10^{2007}+1}=$$

Решење 1: $a-b=\frac{10^{2005}+1}{10^{2006}+1}-\frac{10^{2006}+1}{10^{2007}+1}=$

$$\frac{10^{4012}+10^{2007}+10^{2005}+1-10^{4012}-2\cdot10^{2006}-1}{(10^{2006}+1)(10^{2007}+1)}=$$

Решење 1: $a-b=\frac{10^{2005}+1}{10^{2006}+1}-\frac{10^{2006}+1}{10^{2007}+1}=$

$$\frac{10^{4012}+10^{2007}+10^{2005}+1-10^{4012}-2\cdot10^{2006}-1}{(10^{2006}+1)(10^{2007}+1)}=$$

$$\frac{10^{2005}(10^2-2\cdot10+1)}{(10^{2006}+1)(10^{2007}+1)}=\frac{10^{2005}(10-1)^2}{(10^{2006}+1)(10^{2007}+1)}>0$$

Решење 1: $a-b=\frac{10^{2005}+1}{10^{2006}+1}-\frac{10^{2006}+1}{10^{2007}+1}=$

$$\frac{10^{4012}+10^{2007}+10^{2005}+1-10^{4012}-2\cdot10^{2006}-1}{(10^{2006}+1)(10^{2007}+1)}=$$

$$\frac{10^{2005}(10^{2}-2\cdot10+1)}{(10^{2006}+1)(10^{2007}+1)}=\frac{10^{2005}(10-1)^{2}}{(10^{2006}+1)(10^{2007}+1)}>0$$

$\Rightarrow \quad a>b.$

Решење 2:

$$10a = \frac{10^{2006}+10}{10^{2006}+1} = 1 + \frac{9}{10^{2006}+1}$$

$$10b = \frac{10^{2007}+10}{10^{2007}+1} = 1 + \frac{9}{10^{2007}+1}$$

Решење 2:

$$10a = \frac{10^{2006} + 10}{10^{2006} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2006} + 1}$$

$$10b = \frac{10^{2007} + 10}{10^{2007} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2007} + 1}$$

$$\Rightarrow \quad 10a > 10b \quad \Rightarrow \quad a > b.$$

29. *I, републичко у БиХ 1976.*

Наћи збир

$$S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{1974\cdot 1975}+\frac{1}{1975\cdot 1976}\,.$$

29. *I, републичко у БиХ 1976.*

Наћи збир

$$S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{1974\cdot 1975} + \frac{1}{1975\cdot 1976}$$

$$S = \frac{2-1}{1\cdot 2} + \frac{3-2}{2\cdot 3} + \frac{4-3}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1975-1974}{1974\cdot 1975} + \frac{1976-1975}{1975\cdot 1976} =$$

29. *I, републичко у БиХ 1976.*

Наћи збир

$$S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{1974\cdot 1975} + \frac{1}{1975\cdot 1976}$$

$$S = \frac{2-1}{1\cdot 2} + \frac{3-2}{2\cdot 3} + \frac{4-3}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1975-1974}{1974\cdot 1975} + \frac{1976-1975}{1975\cdot 1976} =$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1974} - \frac{1}{1975} + \frac{1}{1975} - \frac{1}{1976} =$$

29. *I, републичко у БиХ 1976.*

Наћи збир

$$S = \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \ldots + \frac{1}{1974\cdot1975} + \frac{1}{1975\cdot1976}$$

$$S = \frac{2-1}{1\cdot2} + \frac{3-2}{2\cdot3} + \frac{4-3}{3\cdot4} + \ldots + \frac{1975-1974}{1974\cdot1975} + \frac{1976-1975}{1975\cdot1976} =$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1974} - \frac{1}{1975} + \frac{1}{1975} - \frac{1}{1976} =$$

$$1 - \frac{1}{1976} = \frac{1975}{1976}\,.$$

34. *IV, Б категорија, Општинско 2004.*

Израчунати

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n+1)\cdot(4n+5)}\right).$$

34. *IV, Б категорија, Општинско 2004.*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n+1)\cdot(4n+5)}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{5-1}{1\cdot 5}+\frac{9-5}{5\cdot 9}+\frac{13-9}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{(4n+5)-(4n+1)}{(4n+1)\cdot(4n+5)}\right)=$$

34. *IV, Б категорија, Општинско 2004.*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n+1)\cdot(4n+5)}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{5-1}{1\cdot 5}+\frac{9-5}{5\cdot 9}+\frac{13-9}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{(4n+5)-(4n+1)}{(4n+1)\cdot(4n+5)}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+5}\right)=$$

34. *IV, Б категорија, Општинско 2004.*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n+1)\cdot(4n+5)}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{5-1}{1\cdot 5}+\frac{9-5}{5\cdot 9}+\frac{13-9}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{(4n+5)-(4n+1)}{(4n+1)\cdot(4n+5)}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+5}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4n+5}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n+5}=\frac{1}{4}.$$

30. *IV, Б категорија, Окружно 2004.*

Доказати да за свако природно n, $n \geqslant 2$ важи неједнакост:
$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n^2}>1.$$

30. *IV, Б категорија, Окружно 2004.*

Доказати да за свако природно n, $n \geqslant 2$ важи неједнакост: $$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n^2} > 1.$$

За $n+1 \leqslant k \leqslant n^2-1$, $k \in \mathbb{N}$ важи $\frac{1}{k} > \frac{1}{n^2}$

30. *IV, Б категорија, Окружно 2004.*

Доказати да за свако природно n, $n \geqslant 2$ важи неједнакост:
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n^2} > 1.$$

За $n+1 \leqslant k \leqslant n^2 - 1$, $k \in \mathbb{N}$ важи $\frac{1}{k} > \frac{1}{n^2}$:

$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n^2} > \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} =$

$\frac{1}{n} + \frac{n^2 - n}{n^2} = 1.$

35. *1. разред, А категорија, Општинско 2008.*

Познато је да би 60 крава појело сву траву са ливаде за 24 дана, а 30 крава за 60 дана.

а) Колико крава би појело сву траву са ливаде за 100 дана?

б) За колико дана би 10 крава појело сву траву са ливаде?

35. *1. разред, А категорија, Општинско 2008.*

Познато је да би 60 крава појело сву траву са ливаде за 24 дана, а 30 крава за 60 дана.

??? $60 : 30 \neq \frac{1}{24} : \frac{1}{60}$, тј. $60 : 30 \neq 60 : 24$???

а) Колико крава би појело сву траву са ливаде за 100 дана?

б) За колико дана би 10 крава појело сву траву са ливаде?

35. *1. разред, А категорија, Општинско 2008.*

Познато је да би 60 крава појело сву траву са ливаде за 24 дана, а 30 крава за 60 дана.

??? $60 : 30 \neq \frac{1}{24} : \frac{1}{60}$, тј. $60 : 30 \neq 60 : 24$???

Трава расте!!!

а) Колико крава би појело сву траву са ливаде за 100 дана?

б) За колико дана би 10 крава појело сву траву са ливаде?

35. *1. разред, А категорија, Општинско 2008.*

Познато је да би 60 крава појело сву траву са ливаде за 24 дана, а 30 крава за 60 дана.

??? $60 : 30 \neq \frac{1}{24} : \frac{1}{60}$, тj. $60 : 30 \neq 60 : 24$???

Трава расте!!!

а) Колико крава би појело сву траву са ливаде за 100 дана? 22 краве.

б) За колико дана би 10 крава појело сву траву са ливаде? никад!

37. старији узраст (X и XI), јесење коло, XXVII Турнир градова 2005-6.

За које n можемо наћи различите природне бројеве $a_1, a_2, \ldots, a_n$, такве да збир $\dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{a_2}{a_3} + \ldots + \dfrac{a_n}{a_1}$ буде цео број?

37. старији узраст (X и XI), јесење коло, XXVII Турнир градова 2005-6.

За које n можемо наћи различите природне бројеве $a_1, a_2, \ldots, a_n$, такве да збир $\dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{a_2}{a_3} + \ldots + \dfrac{a_n}{a_1}$ буде цео број?

Могуће је за све $n \neq 2$.

За које n можемо наћи различите природне бројеве $a_1, a_2, \ldots, a_n$, такве да збир $\dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{a_2}{a_3} + \ldots + \dfrac{a_n}{a_1}$ буде цео број?

Размотримо 3 случаја:

$1^\circ\ n = 1$, $2^\circ\ n = 2$ и $3^\circ\ n > 2$.

За које n можемо наћи различите природне бројеве $a_1, a_2, \ldots, a_n$, такве да збир $\dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{a_2}{a_3} + \ldots + \dfrac{a_n}{a_1}$ буде цео број?

1° $n = 1$ разломак $\dfrac{a_1}{a_1} = 1 \in \mathbb{Z}$ за свако $a_1 \in \mathbb{N}$.

$\checkmark$

2° $n = 2$ претпоставимо да $\exists\, a_1, a_2 \in \mathbb{N}$, такви да је $\dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{a_2}{a_1} \in \mathbb{Z}$. Нека је $k = \text{НЗД}(a_1, a_2)$ тада је $a_1 = k \cdot p$ и $a_2 = k \cdot q$, где је $\text{НЗД}(p, q) = 1$.

$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} = \frac{p}{q} + \frac{q}{p} = \frac{p^2+q^2}{pq} \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; pq \mid (p^2 + q^2) \;\Rightarrow$
$p \mid (p^2 + q^2) \;\Rightarrow\; p \mid q^2 \;\Rightarrow\; p = 1.$

Аналогно $q = 1$, али онда је $a_1 = a_2 = k$ $\lightning$

3° $n > 2$ узмимо да су $a_1 = 1$, $a_2 = n-1$, $a_3 = (n-1)^2$, ..., $a_n = (n-1)^{n-1}$:

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \\
&= \frac{1}{n-1} + \frac{n-1}{(n-1)^2} + \frac{(n-1)^2}{(n-1)^3} + \ldots + \frac{(n-1)^{n-2}}{(n-1)^{n-1}} + \frac{(n-1)^{n-1}}{1} \\
&= \underbrace{\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{n-1}}_{n-1} + (n-1)^{n-1} \\
&= (n-1) \cdot \frac{1}{n-1} + (n-1)^{n-1} = 1 + (n-1)^{n-1} \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

✓

38. *млађи и старији узраст (8.–11. разред), јесење коло, Турнир градова 2006-7.*

Нека је $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\frac{a_n}{b_n}$, где је $\frac{a_n}{b_n}$ нескратив разломак. Докажите да постоји бесконачно много природних бројева n, за које важи $b_{n+1}<b_n$.

38. млађи и старији узраст (8.–11. разред), јесење коло, Турнир градова 2006-7.

Нека је $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} = \dfrac{a_n}{b_n}$, где је $\dfrac{a_n}{b_n}$ нескратив разломак. Докажите да постоји бесконачно много природних бројева n, за које важи $b_{n+1} < b_n$.

Може се показати да $b_{n+1} < b_n$ важи за све индексе облика $n = 2 \cdot 3^k - 1$.

39. *млађи узраст (8. и 9. разред), пролећно коло, Турнир градова 2007-8.*

Постоје ли природни бројеви a, b, c, d, такви да је $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = 1$ и $\dfrac{a}{d} + \dfrac{c}{d} = 2008$?

39. *млађи узраст (8. и 9. разред), пролећно коло, Турнир градова 2007-8.*

Постоје ли природни бројеви a, b, c, d, такви да је $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=1$ и $\dfrac{a}{d}+\dfrac{c}{d}=2008$?

Постоје.

39. *млађи узраст (8. и 9. разред), пролећно коло, Турнир градова 2007-8.*

Постоје ли природни бројеви a, b, c, d, такви да је $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = 1$ и $\dfrac{a}{d} + \dfrac{c}{d} = 2008$?

смене $x = \frac{1}{b}$ и $y = \frac{1}{d}$ $\Rightarrow$ систем (по x и y): $ax + cy = 1,\ cx + ay = 2008.$

смене $x = \frac{1}{b}$ и $y = \frac{1}{d}$ $\Rightarrow$ систем (по x и y)

лин.јед: $ax + cy = 1,\ cx + ay = 2008.$

Из I: $ax = 1 - cy \Rightarrow x = \frac{1-cy}{a}$

то у II: $\frac{c-c^2y}{a} + ay = 2008$

смене $x = \frac{1}{b}$ и $y = \frac{1}{d}$ $\Rightarrow$ систем (по x и y)

лин.јед: $ax + cy = 1,\ cx + ay = 2008.$

Из I: $ax = 1 - cy \ \Rightarrow x = \frac{1-cy}{a}$

то у II: $\frac{c-c^2y}{a} + ay = 2008$

$$y\left(a - \frac{c^2}{a}\right) = 2008 - \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2008 - \frac{c}{a}}{a - \frac{c^2}{a}} = \frac{2008a - c}{a^2 - c^2}.$$

смене $x = \frac{1}{b}$ и $y = \frac{1}{d}$ $\Rightarrow$ систем (по x и y)

лин.јед: $ax + cy = 1,\ cx + ay = 2008.$

Из I: $ax = 1 - cy \Rightarrow x = \frac{1-cy}{a}$

то у II: $y(a - \frac{c^2}{a}) = 2008 - \frac{c}{a}$

$$\Rightarrow y = \frac{2008 - \frac{c}{a}}{a - \frac{c^2}{a}} = \frac{2008a - c}{a^2 - c^2}.$$

$$x = \frac{1 - cy}{a} = \frac{1 - c\frac{2008a-c}{a^2-c^2}}{a}$$

$$= \frac{a^2 - c^2 - 2008ac + c^2}{a(a^2 - c^2)} = \frac{a - 2008c}{a^2 - c^2}.$$

$$y = \frac{2008 - \frac{c}{a}}{a - \frac{c^2}{a}} = \frac{2008a - c}{a^2 - c^2}\,.$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 - cy}{a} = \frac{1 - c\frac{2008a-c}{a^2-c^2}}{a} \\ &= \frac{a^2 - c^2 - 2008ac + c^2}{a(a^2 - c^2)} = \frac{a - 2008c}{a^2 - c^2}\,. \end{aligned}$$

Из услова задатка и b и d, тј. $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$ морају бити природни бројеви.

$$x = \frac{a - 2008c}{a^2 - c^2}\,, \quad y = \frac{2008a - c}{a^2 - c^2}\,.$$

Из услова задатка и b и d, тј. $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$ морају бити природни бројеви.

Узмимо $a = 2009$ и $c = 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} = 2009^2 - 1 \in \mathbb{N}$.

$$x = \frac{a - 2008c}{a^2 - c^2}\,, \quad y = \frac{2008a - c}{a^2 - c^2}\,.$$

Из услова задатка и b и d, тј. $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$ морају бити природни бројеви.

Узмимо $a = 2009$ и $c = 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} = 2009^2 - 1 \in \mathbb{N}$.

Ако a и c увећамо k пута $\Rightarrow$ x и y се смање k пута, па су задовољене обе једначине система!

$$x = \frac{a - 2008c}{a^2 - c^2}\,, \quad y = \frac{2008a - c}{a^2 - c^2}\,.$$

Из услова задатка и $b, d \in \mathbb{N}$, тј. $\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \in \mathbb{N}$.

Узмимо $a = 2009$ и $c = 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} = 2009^2 - 1 \in \mathbb{N}$.

Ако a и c увећамо k пута $\Rightarrow$ x и y се смање k пута, па су задовољене обе једначине система!

$k = 2008 \cdot 2009 - 1 \Rightarrow \frac{1}{y}$ постаје природан број (а и $\frac{1}{x}$ остаје природан):

$a = 2009 \cdot (2008 \cdot 2009 - 1)$,

$b = 2008 \cdot 2010 \cdot (2008 \cdot 2009 - 1)$,

$c = 2008 \cdot 2009 - 1$, $\qquad d = 2008 \cdot 2010$.

40. *млађи узраст (8. и 9. разред), јесење коло, сложена варијанта, Турнир градова 2013-4.*

Број $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$ приказали су у облику нескративог разломка. Докажите, ако је $3n+1$ прост број, онда је бројилац добијеног разломка дељив са $3n+1$.

40. *млађи узраст (8. и 9. разред), јесење коло, сложена варијанта, Турнир градова 2013-4.*

Број $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$ приказали су у облику нескративог разломка. Докажите, ако је $3n+1$ прост број, онда је бројилац добијеног разломка дељив са $3n+1$.

$3n+1$ прост $\Rightarrow$ n паран

40. *млађи узраст (8. и 9. разред), јесење коло, сложена варијанта, Турнир градова 2013-4.*

Број $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$ приказали су у облику нескративог разломка. Докажите, ако је $3n+1$ прост број, онда је бројилац добијеног разломка дељив са $3n+1$.

$3n+1$ прост $\Rightarrow$ n паран

(иначе, ако би n био непаран, онда би $3n+1$ био паран број >2, па не би био прост!)

40. млађи узраст (8. и 9. разред), јесење коло, сложена варијанта, Турнир градова 2013-4.

Број $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$ приказали су у облику нескративог разломка. Докажите, ако је $3n+1$ прост број, онда је бројилац добијеног разломка дељив са $3n+1$.

$3n+1$ прост $\Rightarrow$ n паран

(иначе, ако би n био непаран, онда би $3n+1$ био паран број >2, па не би био прост!)

$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$

40\. *млађи узраст (8. и 9. разред), јесење коло, сложена варијанта, Турнир градова 2013-4.*

Број $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$ приказали су у облику нескративог разломка. Докажите, ако је $3n+1$ прост број, онда је бројилац добијеног разломка дељив са $3n+1$.

$3n+1$ прост $\Rightarrow$ n паран

$$\begin{aligned} S &= 1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\ldots+\tfrac{1}{2n-1}-\tfrac{1}{2n} \\ &= 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\ldots+\tfrac{1}{2n-1}+\tfrac{1}{2n} \\ &\quad -2\cdot\left(\tfrac{1}{2}+\qquad\tfrac{1}{4}+\ldots+\qquad\qquad\tfrac{1}{2n}\right) \end{aligned}$$

$3n + 1$ прост $\Rightarrow$ n паран

$$
\begin{aligned}
S &= 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots + \tfrac{1}{2n-1} - \tfrac{1}{2n} \\
&= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \tfrac{1}{2n-1} + \tfrac{1}{2n} \\
&\quad - 2 \cdot \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \tfrac{1}{2n}\right) \\
&= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \tfrac{1}{2n-1} + \tfrac{1}{2n} \\
&\quad - \left(1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{n}\right) = \tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{n+2} + \ldots + \tfrac{1}{2n}
\end{aligned}
$$

$3n+1$ прост $\Rightarrow$ n паран

$$S = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots + \tfrac{1}{2n-1} - \tfrac{1}{2n}$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \tfrac{1}{2n-1} + \tfrac{1}{2n}$$
$$- 2 \cdot \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \tfrac{1}{2n}\right)$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \tfrac{1}{2n-1} + \tfrac{1}{2n}$$
$$- \left(1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{n}\right) = \tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{n+2} + \ldots + \tfrac{1}{2n}$$

ових n (паран) сабирака поделимо у парове:

$3n+1$ прост $\Rightarrow$ n паран

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

$$- 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

$$- \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

ових n (паран) сабирака поделимо у парове:

$$S = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2n-1}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{\frac{3}{2}n} + \frac{1}{\frac{3}{2}n+1}\right)$$

$3n+1$ прост $\Rightarrow$ n паран

$$S = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

ових n (паран) сабирака поделимо у парове:

$$S = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2n-1}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{\frac{3}{2}n} + \frac{1}{\frac{3}{2}n+1}\right)$$

$$= \frac{3n+1}{(n+1)2n} + \frac{3n+1}{(n+2)(2n-1)} + \ldots + \frac{3n+1}{\frac{3}{2}n(\frac{3}{2}n+1)}$$

$3n+1$ прост $\Rightarrow$ n паран

$$S = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

ових n (паран) сабирака поделимо у парове:

$$S = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2n-1}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{\frac{3}{2}n} + \frac{1}{\frac{3}{2}n+1}\right)$$

$$= \frac{3n+1}{(n+1)2n} + \frac{3n+1}{(n+2)(2n-1)} + \ldots + \frac{3n+1}{\frac{3}{2}n(\frac{3}{2}n+1)}$$

$$= \frac{(3n+1)p}{q}$$

где је $\frac{p}{q} = \frac{1}{(n+1)2n} + \frac{1}{(n+2)(2n-1)} + \ldots + \frac{1}{\frac{3}{2}n(\frac{3}{2}n+1)}$

$3n+1$ прост $\Rightarrow$ n паран

$S = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$

ових n (паран) сабирака поделимо у парове:

$$S = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2n-1}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{\frac{3}{2}n} + \frac{1}{\frac{3}{2}n+1}\right)$$

$$= \frac{3n+1}{(n+1)2n} + \frac{3n+1}{(n+2)(2n-1)} + \ldots + \frac{3n+1}{\frac{3}{2}n(\frac{3}{2}n+1)}$$

$$= \frac{(3n+1)p}{q}$$

где je $\frac{p}{q} = \frac{1}{(n+1)2n} + \frac{1}{(n+2)(2n-1)} + \ldots + \frac{1}{\frac{3}{2}n(\frac{3}{2}n+1)}$

сви прости фактори од q су $< 2n < 3n+1$

$3n+1$ прост $\Rightarrow$ n паран

$$S = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

ових n (паран) сабирака поделимо у парове:

$$S = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2n-1}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{\frac{3}{2}n} + \frac{1}{\frac{3}{2}n+1}\right)$$

$$= \frac{3n+1}{(n+1)2n} + \frac{3n+1}{(n+2)(2n-1)} + \ldots + \frac{3n+1}{\frac{3}{2}n(\frac{3}{2}n+1)}$$

$$= \frac{(3n+1)p}{q}$$

где је $\frac{p}{q} = \frac{1}{(n+1)2n} + \frac{1}{(n+2)(2n-1)} + \ldots + \frac{1}{\frac{3}{2}n(\frac{3}{2}n+1)}$

сви прости фактори од q су $< 2n < 3n+1$

и $3n+1$ прост $\Rightarrow$ q и $3n+1$ узајамно прости

$3n+1$ прост $\Rightarrow$ n паран

$S = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$

ових n (паран) сабирака поделимо у парове:

$S = \frac{(3n+1)p}{q}$

где је $\frac{p}{q} = \frac{1}{(n+1)2n} + \frac{1}{(n+2)(2n-1)} + \ldots + \frac{1}{\frac{3}{2}n(\frac{3}{2}n+1)}$

сви прости фактори од q су $< 2n < 3n+1$

и $3n+1$ прост $\Rightarrow$ q и $3n+1$ узајамно прости

$\Rightarrow S = \frac{(3n+1)p}{q}$ је нескратив разломак, чији је бројилац дељив са $3n+1$.

КРАЈ