Дељивост

др Владимир Балтић

baltic@np.ac.rs

Математичка гимназија, ВИШЕР, Београд

$$1 \times 8 + 1 = 9$$
$$12 \times 8 + 2 = 98$$
$$123 \times 8 + 3 = 987$$
$$1234 \times 8 + 4 = 9876$$
$$12345 \times 8 + 5 = 98765$$
$$123456 \times 8 + 6 = 987654$$
$$1234567 \times 8 + 7 = 9876543$$
$$12345678 \times 8 + 8 = 98765432$$
$$123456789 \times 8 + 9 = 987654321$$

Теоријски увод

Дефиниција 1.

Цео број a је *дељив* целим бројем $b \neq 0$, ако постоји цео број q такав да је $a = bq$.

ознаке:

b дели a: $\quad b \mid a$

a је дељив бројем b (Руси): $\quad a \,\vdots\, b$

b не дели a: $\quad b \nmid a$.

Дефиниција 1. Цео број a је дељив целим бројем $b \neq 0$, ако постоји цео број q такав да је $a = bq$.

означе:

b дели a: $\quad b \mid a$

a је дељив бројем b (Руси): $\quad a \vdots b$

b не дели a: $\quad b \nmid a$.

Пример 1. Важи $3 \mid 15$, тј. $15 \vdots 3$, али $6 \nmid 15$, јер је

$$15 = 3 \cdot 5 \quad \text{и} \quad 15 = 6 \cdot 2 + 3.$$

■

Критеријуми дељивости

2: Број n је дељив са 2 (n је паран) $\Leftrightarrow$ n се завршава парном цифром, тј. 0, 2, 4, 6 или 8.

Критеријуми дељивости

2: Број n је дељив са 2 (n је паран) $\Leftrightarrow$ n се завршава парном цифром, тј. 0, 2, 4, 6 или 8.
3: Број n је дељив са 3 $\Leftrightarrow$ збир цифара броја n је дељив са 3.

Критеријуми дељивости

2: Број n је дељив са 2 (n је парaн) $\Leftrightarrow$ n се завршава парном цифром, тј. 0, 2, 4, 6 или 8.

3: Број n је дељив са 3 $\Leftrightarrow$ збир цифара броја n је дељив са 3.

4: Број n је дељив са 4 $\Leftrightarrow$ n се завршава двоцифреним бројем који је дељив са 4.

Критеријуми дељивости

2: Број n је дељив са 2 (n је парaн) $\Leftrightarrow$ n се завршава парном цифром, тј. 0, 2, 4, 6 или 8.

3: Број n је дељив са 3 $\Leftrightarrow$ збир цифара броја n је дељив са 3.

4: Број n је дељив са 4 $\Leftrightarrow$ n се завршава двоцифреним бројем који је дељив са 4.

5: Број n је дељив са 5 $\Leftrightarrow$ n се завршава са 0 или 5.

Критеријуми дељивости

2: Број n је дељив са 2 (n је паран) $\Leftrightarrow$ n се завршава парном цифром, тј. 0, 2, 4, 6 или 8.

3: Број n је дељив са 3 $\Leftrightarrow$ збир цифара броја n је дељив са 3.

4: Број n је дељив са 4 $\Leftrightarrow$ n се завршава двоцифреним бројем који је дељив са 4.

5: Број n је дељив са 5 $\Leftrightarrow$ n се завршава са 0 или 5.

6: Број n је дељив са 6 $\Leftrightarrow$ n је дељив и са 2 и са 3.

Критеријуми дељивости

2: Број n је дељив са 2 (n је паран) $\Leftrightarrow$ n се завршава парном цифром, тј. 0, 2, 4, 6 или 8.

3: Број n је дељив са 3 $\Leftrightarrow$ збир цифара броја n је дељив са 3.

4: Број n је дељив са 4 $\Leftrightarrow$ n се завршава двоцифреним бројем који је дељив са 4.

5: Број n је дељив са 5 $\Leftrightarrow$ n се завршава са 0 или 5.

6: Број n је дељив са 6 $\Leftrightarrow$ n је дељив и са 2 и са 3.

7: Број $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_3 a_2 a_1}$ је дељив са 7 $\Leftrightarrow$ $m = \overline{a_3 a_2 a_1} - \overline{a_6 a_5 a_4} + \overline{a_9 a_8 a_7} - \ldots$ дељив са 7.

Критеријуми дељивости

4: Број n је дељив са 4 $\Leftrightarrow$ n се завршава двоцифреним бројем који је дељив са 4.

5: Број n је дељив са 5 $\Leftrightarrow$ n се завршава са 0 или 5.

6: Број n је дељив са 6 $\Leftrightarrow$ n је дељив и са 2 и са 3.

7: Број $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_3 a_2 a_1}$ је дељив са 7 $\Leftrightarrow$ $m = \overline{a_3 a_2 a_1} - \overline{a_6 a_5 a_4} + \overline{a_9 a_8 a_7} - \dots$ дељив са 7.

7: Број n је дељив са 7 $\Leftrightarrow$ број s који се добија тако што у n избришемо цифру јединица и од тог броја одузмемо двоструку цифру јединица броја n је дељив са 7.

Критеријуми дељивости

2: $n \vdots 2$ (n је паран) $\Leftrightarrow$ n се заврш. са 0,2,4,6,8.

3: $n \vdots 3 \Leftrightarrow$ збир цифара броја n је дељив са 3.

4: $n \vdots 4 \Leftrightarrow n$ се завршава двоцифреним бројем који је дељив са 4.

5: $n \vdots 5 \Leftrightarrow n$ се завршава са 0 или 5.

6: $n \vdots 6 \Leftrightarrow n \vdots 2$ и $n \vdots 3$.

7: $n \vdots 7 \Leftrightarrow m = \overline{a_3a_2a_1} - \overline{a_6a_5a_4} + \overline{a_9a_8a_7} - \ldots \vdots 7$.

8: $n \vdots 8 \Leftrightarrow n$ се завршава троцифреним бројем који је дељив са 8.

Критеријуми дељивости

2: $n \vdots 2$ (n је паран) $\Leftrightarrow$ n се заврш. са 0,2,4,6,8.

3: $n \vdots 3 \Leftrightarrow$ збир цифара броја n је дељив са 3.

4: $n \vdots 4 \Leftrightarrow n$ се завршава двоцифреним бројем који је дељив са 4.

5: $n \vdots 5 \Leftrightarrow n$ се завршава са 0 или 5.

6: $n \vdots 6 \Leftrightarrow n \vdots 2$ и $n \vdots 3$.

7: $n \vdots 7 \Leftrightarrow m = \overline{a_3a_2a_1} - \overline{a_6a_5a_4} + \overline{a_9a_8a_7} - \ldots \vdots 7$.

8: $n \vdots 8 \Leftrightarrow n$ се завршава троцифреним бројем који је дељив са 8.

9: $n \vdots 9 \Leftrightarrow$ збир цифара броја n је дељив са 9.

Критеријуми дељивости

2: $n \vdots 2$ (n је паран) $\Leftrightarrow$ n се заврш. са 0,2,4,6,8.
3: $n \vdots 3 \Leftrightarrow$ збир цифара броја n је дељив са 3.
4: $n \vdots 4 \Leftrightarrow$ n се завршава двоцифреним бројем који је дељив са 4.
5: $n \vdots 5 \Leftrightarrow$ n се завршава са 0 или 5.
6: $n \vdots 6 \Leftrightarrow n \vdots 2$ и $n \vdots 3$.
7: $n \vdots 7 \Leftrightarrow m = \overline{a_3a_2a_1} - \overline{a_6a_5a_4} + \overline{a_9a_8a_7} - \ldots \vdots 7$.
8: $n \vdots 8 \Leftrightarrow$ n се завршава троцифреним бројем који је дељив са 8.
9: $n \vdots 9 \Leftrightarrow$ збир цифара броја n је дељив са 9.
10: $n \vdots 10 \Leftrightarrow n \vdots 2$ и $n \vdots 5$.

Критеријуми дељивости

2: $n \vdots 2$ (n је паран) $\Leftrightarrow$ n се заврш. са 0,2,4,6,8.

3: $n \vdots 3 \Leftrightarrow$ збир цифара броја n је дељив са 3.

4: $n \vdots 4 \Leftrightarrow n$ се завршава двоцифреним бројем који је дељив са 4.

5: $n \vdots 5 \Leftrightarrow n$ се завршава са 0 или 5.

6: $n \vdots 6 \Leftrightarrow n \vdots 2$ и $n \vdots 3$.

7: $n \vdots 7 \Leftrightarrow m = \overline{a_3a_2a_1} - \overline{a_6a_5a_4} + \overline{a_9a_8a_7} - \ldots \vdots 7$.

8: $n \vdots 8 \Leftrightarrow n$ се завршава троцифреним бројем који је дељив са 8.

9: $n \vdots 9 \Leftrightarrow$ збир цифара броја n је дељив са 9.

10: $n \vdots 10 \Leftrightarrow n \vdots 2$ и $n \vdots 5$.

11: $n \vdots 11 \Leftrightarrow m = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots \vdots 11$.

2: $n \vdots 2$ (n je паран) $\Leftrightarrow$ n се заврш. са 0,2,4,6,8.
3: $n \vdots 3 \Leftrightarrow$ збир цифара броја n је дељив са 3.
4: $n \vdots 4 \Leftrightarrow n$ се заврш. двоциф.бр $\vdots 4$.
5: $n \vdots 5 \Leftrightarrow n$ се завршава са 0 или 5.
6: $n \vdots 6 \Leftrightarrow n \vdots 2$ и $n \vdots 3$.
7: $n \vdots 7 \Leftrightarrow m = \overline{a_3a_2a_1} - \overline{a_6a_5a_4} + \overline{a_9a_8a_7} - \ldots \vdots 7$.
8: $n \vdots 8 \Leftrightarrow n$ се заврш. троциф.бр $\vdots 8$.
9: $n \vdots 9 \Leftrightarrow$ збир цифара броја n је дељив са 9.
10: $n \vdots 10 \Leftrightarrow n \vdots 2$ и $n \vdots 5$.
11: $n \vdots 11 \Leftrightarrow m = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots \vdots 11$.
12: $n \vdots 12 \Leftrightarrow n \vdots 3$ и $n \vdots 4$.
13: $n \vdots 13 \Leftrightarrow m = \overline{a_3a_2a_1} - \overline{a_6a_5a_4} + \overline{a_9a_8a_7} - \ldots \vdots 13$.
13: Број n је дељив са 13 $\Leftrightarrow$ број s, који се добија тако што избришемо цифру јединица броја n и том броју додамо четвороструку цифру јединица броја n, дељив са 13.

2: $n \vdots 2$ (n је паран) $\Leftrightarrow$ n се заврш. са 0,2,4,6,8.

3: $n \vdots 3 \Leftrightarrow$ збир цифара броја n је дељив са 3.

4: $n \vdots 4 \Leftrightarrow n$ се заврш. двоциф.бр $\vdots 4$.

5: $n \vdots 5 \Leftrightarrow n$ се завршава са 0 или 5.

6: $n \vdots 6 \Leftrightarrow n \vdots 2$ и $n \vdots 3$.

7: $n \vdots 7 \Leftrightarrow m = \overline{a_3a_2a_1} - \overline{a_6a_5a_4} + \overline{a_9a_8a_7} - \ldots \vdots 7$.

8: $n \vdots 8 \Leftrightarrow n$ се заврш. троциф.бр $\vdots 8$.

9: $n \vdots 9 \Leftrightarrow$ збир цифара броја n је дељив са 9.

10: $n \vdots 10 \Leftrightarrow n \vdots 2$ и $n \vdots 5$.

11: $n \vdots 11 \Leftrightarrow m = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots \vdots 11$.

12: $n \vdots 12 \Leftrightarrow n \vdots 3$ и $n \vdots 4$.

13: $n \vdots 13 \Leftrightarrow m = \overline{a_3a_2a_1} - \overline{a_6a_5a_4} + \overline{a_9a_8a_7} - \ldots \vdots 13$.

14: $n \vdots 14 \Leftrightarrow n \vdots 2$ и $n \vdots 7$.

15: $n \vdots 15 \Leftrightarrow n \vdots 3$ и $n \vdots 5$.

16: $n \vdots 16 \Leftrightarrow n$ се заврш. 4-циф.бр $\vdots 16$.

Напомена. Битно својство свих критеријума (сем оних где се брише цифра јединица) је да они дају и исти остатак као и n при дељењу са датим бројем!

9: Број n је дељив са 9 $\Leftrightarrow$ збир цифара броја n је дељив са 9

(n и збир цифара броја n дају исти остатак при дељењу са 9).

Пример 2. Број $n = 123\,456\,789 = 9 \cdot 3\,607 \cdot 3\,803$.

$m = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45 = 9 \cdot 5$. ✓

Број $n = 1\,234\,567 = 9 \cdot 137\,174 + 1$.

$m = 1+2+3+4+5+6+7 = 28 = 9 \cdot 3 + 1$. ↯

■

11: Број $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_3 a_2 a_1}$ је дељив са 11 $\Leftrightarrow$ број $m = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ је дељив са 11.

(n и m дају исти остатак при дељењу са 11).

Пример 3.

Број $n = 4\,976\,761\,801 = 11 \cdot 452\,432\,891$.

$$m = 1-0+8-1+6-7+6-7+9-4 = 11 = 11 \cdot 1. \checkmark$$

Број $n = 25945 = 11 \cdot 2358 + 7$.

$$m = 5 - 4 + 9 - 5 + 2 = 7. \lightning$$

$\blacksquare$

11: Број $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_3 a_2 a_1}$ је дељив са 11 $\Leftrightarrow$ број $m = \overline{a_2 a_1} + \overline{a_4 a_3} + \overline{a_6 a_5} + \ldots$ дељив са 11.

(n и m дају исти остатак при дељењу са 11).

Пример 4.

Број $n = 49\,76\,76\,18\,01 = 11 \cdot 452\,432\,891$.

$$m = 01 + 18 + 76 + 76 + 49 = 220 = 11 \cdot 20. \checkmark$$

Број $n = 25945 = 11 \cdot 2358 + 7$.

$$m = 45 + 59 + 2 = 106 = 11 \cdot 9 + 7. \lightning$$

$\blacksquare$

13: Број $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_3 a_2 a_1}$ је дељив са 13 $\Leftrightarrow$ $m = \overline{a_3 a_2 a_1} - \overline{a_6 a_5 a_4} + \overline{a_9 a_8 a_7} - \ldots$ дељив са 13. (n и m дају исти остатак при дељењу са 13).

Пример 5.

Број $n = 1\,123\,477\,641 = 13 \cdot 86\,421\,357$.

$$m = 641 - 477 + 123 - 1 = 286 = 13 \cdot 22. \checkmark$$

Број $n = 865\,366 = 13 \cdot 66\,566 + 8$.

$$m = 366 - 865 = -499 = 13 \cdot (-39) + 8. \lightning$$

$\blacksquare$

13: Број n је дељив са 13 $\Leftrightarrow$ број m, који се добија тако што избришемо цифру јединица броја n и том броју додамо четвороструку цифру јединица броја n, дељив са 13.

Пример 6.

Број $n = 1118 = 13 \cdot 86.$

$$n = 1118 \ \Rightarrow \ m = 111 + 4 \cdot 8 = 143$$

$$n = 143 \ \Rightarrow \ m = 14 + 4 \cdot 3 = 26 = 13 \cdot 2. \ \checkmark$$

$\blacksquare$

13: Број n је дељив са 13 $\Leftrightarrow$ број m, који се добија тако што избришемо цифру јединица броја n и том броју додамо четвороструку цифру јединица броја n, дељив са 13.

Пример 7. Број $n = 865\,366 = 13 \cdot 66\,566 + 8$.

$$n = 865366 \;\Rightarrow\; m = 86536 + 4 \cdot 6 = 86560$$

$$n = 86560 \;\Rightarrow\; m = 8656 + 4 \cdot 0 = 8656$$

$$n = 8656 \;\Rightarrow\; m = 865 + 4 \cdot 6 = 889$$

$$n = 889 \;\Rightarrow\; m = 88 + 4 \cdot 9 = 124$$

$$n = 124 \;\Rightarrow\; m = 12 + 4 \cdot 4 = 28 = 13 \cdot 2 + 2.$$

■

Теорема 1. **(Алгоритам дељења).**

Ако је $a \in \mathbb{Z}$ и $b \in \mathbb{N}$, онда a може на јединствен начин да се представи као

$$a = bq + r, \qquad (q, r \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant r < b).$$

Теорема 1. **(Алгоритам дељења).**
Ако је $a \in \mathbb{Z}$ и $b \in \mathbb{N}$, онда a може на јединствен начин да се представи као

$$a = bq + r, \qquad (q, r \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant r < b).$$

Пример 8. Поделимо 35 са 11 и -51 са -7.
$35 = 11 \cdot 3 + 2, \qquad -51 = (-7) \cdot 8 + 5.$ ■

Дефиниција 2. Цео број d за који важи $d \mid a$ и $d \mid b$ назива се *заједнички делилац* бројева a и b. Цео број s за који важи $a \mid s$ и $b \mid s$ назива се *заједнички садржалац* бројева a и b.

Дефиниција 3.
Највећи заједнички делилац бројева a и b обележавамо $\text{НЗД}(a, b)$ или (a, b).
Најмањи (позитиван) број у скупу садржалаца бројева a и b је *најмањи заједнички садржалац* a и b и обележава се са $\text{НЗС}(a, b)$ или $[a, b]$.

Пример 9.
Заједнички делиоци бројева 12 и 18 су бројеви: 1, 2, 3 и 6. Највећи од њих је 6, па важи $\text{НЗД}(12, 18) = 6$.

Заједнички садржоци бројева 12 и 18 су бројеви: 36, 72, 108,... тј. бројеви облика $36k$, $k \in \mathbb{N}$. Најмањи од њих је 36, па важи $\text{НЗС}(12, 18) = 36$. ■

Ако су два броја *узајамно проста*, тј.
ако немају заједничких фактора, онда им је највећи заједнички делилац 1, тј. $(a, b) = 1$.

Последица Еуклидовог алгоритма:

Теорема 2.
Постоје цели бројеви x_0 и y_0 тако да је

$$(a, b) = ax_0 + by_0.$$

Напомена. (a, b) најмања позитивна вредност функције $ax + by$ за $x, y \in \mathbb{Z}$.

Дефиниција 4.
Природни бројеви $p \in \mathbb{N}$ који имају тачно два делиоца називају се *прости бројеви*.
Природни бројеви $(\neq 1)$ који нису прости су *сложени бројеви*.

Та два делиоца су 1 и p.
Број 1 није прост број!

Низ простих бројева:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, \ldots$$

Пример 10. Помоћу Ератостеновог сита одредити све просте бројеве < 100.
Примењујемо за просте бројеве мање од $\sqrt{100}$.
На почетку:

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	

Пример 10. Помоћу Ератостеновог сита одредити све просте бројеве < 100.
Примењујемо за просте бројеве мање од $\sqrt{100}$.
Након I корака:

	$\boxed{2}$	3	×	5	×	7	×	9	×
11	×	13	×	15	×	17	×	19	×
21	×	23	×	25	×	27	×	29	×
31	×	33	×	35	×	37	×	39	×
41	×	43	×	45	×	47	×	49	×
51	×	53	×	55	×	57	×	59	×
61	×	63	×	65	×	67	×	69	×
71	×	73	×	75	×	77	×	79	×
81	×	83	×	85	×	87	×	89	×
91	×	93	×	95	×	97	×	99	

Пример 10. Помоћу Ератостеновог сита одредити све просте бројеве < 100.
Примењујемо за просте бројеве мање од $\sqrt{100}$.
Након II корака:

	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\times$	5	$\times$	7	$\times$	$\times$	$\times$
11	$\times$	13	$\times$	$\times$	$\times$	17	$\times$	19	$\times$
$\times$	$\times$	23	$\times$	25	$\times$	$\times$	$\times$	29	$\times$
31	$\times$	$\times$	$\times$	35	$\times$	37	$\times$	$\times$	$\times$
41	$\times$	43	$\times$	$\times$	$\times$	47	$\times$	49	$\times$
$\times$	$\times$	53	$\times$	55	$\times$	$\times$	$\times$	59	$\times$
61	$\times$	$\times$	$\times$	65	$\times$	67	$\times$	$\times$	$\times$
71	$\times$	73	$\times$	$\times$	$\times$	77	$\times$	79	$\times$
$\times$	$\times$	83	$\times$	85	$\times$	$\times$	$\times$	89	$\times$
91	$\times$	$\times$	$\times$	95	$\times$	97	$\times$	$\times$	

Пример 10. Помоћу Ератостеновог сита одредити све просте бројеве < 100.
Примењујемо за просте бројеве мање од $\sqrt{100}$.
Након III корака:

	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\times$	$\boxed{5}$	$\times$	7	$\times$	$\times$	$\times$
11	$\times$	13	$\times$	$\times$	$\times$	17	$\times$	19	$\times$
$\times$	$\times$	23	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	29	$\times$
31	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	37	$\times$	$\times$	$\times$
41	$\times$	43	$\times$	$\times$	$\times$	47	$\times$	49	$\times$
$\times$	$\times$	53	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	59	$\times$
61	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	67	$\times$	$\times$	$\times$
71	$\times$	73	$\times$	$\times$	$\times$	77	$\times$	79	$\times$
$\times$	$\times$	83	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	89	$\times$
91	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	97	$\times$	$\times$	

Пример 10. Помоћу Ератостеновог сита одредити све просте бројеве < 100.

Примењујемо за просте бројеве мање од $\sqrt{100}$.

На крају:

	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	×	$\boxed{5}$	×	$\boxed{7}$	×	×	×
11	×	13	×	×	×	17	×	19	×
×	×	23	×	×	×	×	×	29	×
31	×	×	×	×	×	37	×	×	×
41	×	43	×	×	×	47	×	×	×
×	×	53	×	×	×	×	×	59	×
61	×	×	×	×	×	67	×	×	×
71	×	73	×	×	×	×	×	79	×
×	×	83	×	×	×	×	×	89	×
×	×	×	×	×	×	97	×	×	

2 је једини паран прост број.

3 је једини дељив са 3.

Прости бројеви $p \geqslant 5$ су облика $p = 6k \pm 1$.

Теорема 3. Сваки природан број $n > 1$ је или прост или је производ простих бројева.

Теорема 4. Прост $p \nmid a \Rightarrow (a, p) = 1$.

Теорема 5. $p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ или $p \mid b$.
$p \mid a_1 a_2 \ldots a_n \Rightarrow p$ дели бар један од $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Теорема 6. **(Основни став аритметике)**. Сваки $n > 1$ може се представити као производ простих бројева на јединствен начин.

Теорема 6. **(Основни став аритметике).** Сваки $n > 1$ може се представити као производ простих бројева на јединствен начин.

канонска репрезентација природног броја n:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

Пример 11. $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$

$$m = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \in \mathbb{N}_0$.

$$\text{НЗД}(n,m) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)},$$

$$\text{НЗС}(n,m) = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}.$$

$n \mid m \Leftrightarrow 0 \leqslant \alpha_i \leqslant \beta_i$, за $i = 1, 2, \ldots, k$. ■

Пример 12. Одредити НЗД$(180, 168)$ и НЗС$(180, 168)$. Да ли 168 дели 180?

Решење 1.

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 168 & 2 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow n = 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \quad \text{и} \quad m = 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7.$$

$$n = 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \quad \text{и} \quad m = 168 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^1.$$

$$n = 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \quad \text{и} \quad m = 168 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^1.$$

$$\begin{aligned}
\text{НЗД}(n,m) &= 2^{\min(2,3)} \cdot 3^{\min(2,1)} \cdot 5^{\min(1,0)} \cdot 7^{\min(0,1)} \\
&= 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 12, \\
\text{НЗС}(n,m) &= 2^{\max(2,3)} \cdot 3^{\max(2,1)} \cdot 5^{\max(1,0)} \cdot 7^{\max(0,1)} \\
&= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 2\,520.
\end{aligned}$$

$$12 \cdot 2\,520 = 180 \cdot 168$$

Степен двојке у m $>$ степена двојке у n, тј. $3 > 2 \Rightarrow m \nmid n$. $\blacksquare$

Решење 2.

$$\begin{array}{rr|l} 180, & 168 & 2 \\ 90, & 84 & 2 \\ 45, & 42 & 3 \\ 15, & 14 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rr|l} 180, & 168 & 2 \\ 90, & 84 & 2 \\ 45, & 42 & 2 \\ 45, & 21 & 3 \\ 15, & 7 & 3 \\ 5, & 7 & 5 \\ \color{red}{1}, & 7 & 7 \\ & \color{red}{1} & \end{array}$$

$$\text{НЗД}(180, 168) = 2^2 \cdot 3^1 = 12$$

$$\text{НЗС}(180, 168) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2\,520.$$

$\blacksquare$

Пример 13. $$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

$$d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k},$$

$d \mid n \Leftrightarrow 0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$, за $i = 1, 2, \ldots, k$.

Број делилаца броја n је:

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1).$$

Ојлерова функција је број природних бројева $\leqslant n$ и узајамно простих са n:

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

$24 = 2^3 \cdot 3$ има $\tau(24) = (3+1)\cdot(1+1) = 8$ делилаца:

1, 2, 4, 8, 3, 6, 12 и 24.

Природни бројеви < 24 и уз. прости са 24 су:

1, 5, 7, 11, 13, 17, 19 и 23

и њих има $\varphi(24) = 24 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 8$.

$\tau(8) = (3+1) = 4$ (делиоци су 1,2,4,8),

$\tau(3) = (1+1) = 2$ (делиоци су 1,3)

$\Rightarrow \tau(24) = \tau(8) \cdot \tau(3) = 4 \cdot 2 = 8$.

$\varphi(8) = \varphi(2^3) = 2^3 - 2^2 = 4$ (уз.прости су 1,3,5,7),

$\varphi(3) = \varphi(3^1) = 3^1 - 3^0 = 2$ (уз.прости су 1,2),

$\Rightarrow \varphi(24) = \varphi(8) \cdot \varphi(3) = 4 \cdot 2 = 8$. $\blacksquare$

Дефиниција 5. За целе бројеве a и b који при дељењу са $m \neq 0$ дају исте остатке (тј. m дели $a - b$) каже се да су *конгруентни по модулу* m и пишемо $a \equiv b \pmod{m}$. Ако m не дели $a - b$, каже се да a *није конгруентно* b *по модулу* m и пишемо $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Дефиниција 5. За целе бројеве a и b који при дељењу са $m \neq 0$ дају исте остатке (тј. m дели $a - b$) каже се да су *конгруентни по модулу m* и пишемо $a \equiv b \pmod{m}$. Ако m не дели $a - b$, каже се да a *није конгруентно b по модулу m* и пишемо $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Пример 14.
Из $35 = 11 \cdot 3 + 2$ следи $35 \equiv 2 \pmod{11}$, из $-51 = (-7) \cdot 8 + 5 = 7 \cdot (-8) + 5$ следи $-51 \equiv 5 \pmod{7}$. ■

Основне теореме Т.Бр.

Теорема 7. **(Ојлерова теорема).**

Ако је $(a, m) = 1$, онда је

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Основне теореме Т.Бр.

Теорема 8. **(мала Фермаова теорема).**

Ако је p прост број и a цео број који није дељив са p, онда је

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Основне теореме Т.Бр.

Теорема 9. **(Вилсонова теорема).**
Конгруенција

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

важи ако и само ако је p прост број.

Основне теореме Т.Бр.

Теорема 10. (Кинеска теорема о остацима).
$m_1, m_2, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$, $(m_i, m_j) = 1$ за $i \neq j$ и $b_1, b_2, \ldots, b_r \in \mathbb{Z}$. Тада систем конгруенција

$$\left.\begin{array}{ccll} x & \equiv & b_1 & \pmod{m_1} \\ x & \equiv & b_2 & \pmod{m_2} \\ & \vdots & & \\ x & \equiv & b_r & \pmod{m_r} \end{array}\right\}$$

има тачно једно решење x_0 по модулу $m = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_r$.

Задаци

1. школско за *VII*, 1988.

Доказати да збир 4 узастопна природна броја није дељив са 4.
Доказати да је збир 4 узастопна парна броја дељив са 4.
Доказати да је збир 4 узастопна непарна броја увек дељив са 8.

1. школско за *VII*, 1988.

Доказати да збир 4 узастопна природна броја није дељив са 4.

$$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) = 4n + 6$$

1. школско за *VII*, 1988.

Доказати да збир 4 узастопна природна броја није дељив са 4. ✓

$$
\begin{aligned}
n+(n+1)+(n+2)+(n+3) &= 4n+6 \\
&= 4\cdot(n+1)+2.
\end{aligned}
$$

1. школско за VII, 1988.

Доказати да је збир 4 узастопна парна броја дељив са 4.

$$2k + (2k + 2) + (2k + 4) + (2k + 6) = 8k + 12$$

1. школско за VII, 1988.

Доказати да је збир 4 узастопна парна броја дељив са 4. ✓

$$2k + (2k+2) + (2k+4) + (2k+6) = 8k + 12$$
$$= 4 \cdot (2k+3).$$

1. школско за VII, 1988.

Доказати да је збир 4 узастопна непарна броја увек дељив са 8. ✓

$$2k-3+(2k-1)+(2k+1)+(2k+3)=8\cdot k.$$

2. *5. Пријемни за информатичка одељења 2019.*
Петар је написао програм у коме се реч

ИНФОРМАТИКА

исписује 2019 пута без размака.

А) Колико слова је на овај начин исписано?

Б) Колики је остатак при дељењу 2019 са 11?

В) Које слово је на 2019. месту (слева)?

2. *5. Пријемни за информатичка одељења 2019.*

Петар је написао програм у коме се реч

ИНФОРМАТИКА

исписује 2019 пута без размака.

А) Колико слова је на овај начин исписано?

$2019 \cdot 11 = 22\,209$.

Б) Колики је остатак при дељењу 2019 са 11?

В) Које слово је на 2019. месту (слева)?

А) Колико слова је на овај начин исписано?

$2019 \cdot 11 = 22\,209.$

Б) Колики је остатак при дељењу 2019 са 11?

$$
\begin{array}{l}
2019 : 11 = 183 \ (\text{количник}) \\
\underline{-11} \\
91 \\
\underline{-88} \\
39 \\
\underline{-33} \\
6 \ (\text{остатак})
\end{array}
$$

2. *5. Пријемни за информатичка одељења 2019.*

Петар је написао програм у коме се реч

ИНФОРМАТИКА

исписује 2019 пута без размака.

А) Колико слова је на овај начин исписано?

$2019 \cdot 11 = 22\,209$.

Б) Колики је остатак при дељењу 2019 са 11?

$m = 9 - 1 + 0 - 2 = 6 \Rightarrow$ и остатак при дељењу $n = 2019$ са 11 је 6.

В) Које слово је на 2019. месту (слева)?

2. *5. Пријемни за информатичка одељења 2019.*

Петар је написао програм у коме се реч

$$\underbrace{\ldots\text{ИНФОРМАТИКА}}_{\times 183}\text{ИНФОРМАТИКА}\ldots$$

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11$$

исписује 2019 пута без размака.

А) Колико слова је на овај начин исписано?

$2019 \cdot 11 = 22\,209$.

Б) Колики је остатак при дељењу 2019 са 11?

$m = 9 - 1 + 0 - 2 = 6 \Rightarrow$ и остатак при дељењу $n = 2019$ са 11 је 6.

В) Које слово је на 2019. месту (слева)? М

3. *I, Мислиша 2013.*

Одредите најмањи природан број који је дељив са 36, а записује се само са 0 и 1.
Колико је 1 у запису тог броја?

(А) 4 **(Б)** 6 **(Ц)** 8 **(Д)** 9 **(Е)** 10

3. *I, Мислиша 2013.*

Одредите најмањи природан број који је дељив са 36, а записује се само са 0 и 1.
Колико је 1 у запису тог броја?

(А) 4 **(Б)** 6 **(Ц)** 8 **(Д)** 9 **(Е)** 10

$36 = 4 \cdot 9$
Број је дељив са 4 $\Rightarrow$ завршава се бар са 00.

3. *I, Мислиша 2013.*

Одредите најмањи природан број који је дељив са 36, а записује се само са 0 и 1.
Колико је 1 у запису тог броја?

(А) 4 **(Б)** 6 **(Ц)** 8 **(Д)** 9 **(Е)** 10

$36 = 4 \cdot 9$

Број је дељив са 4 $\Rightarrow$ завршава се бар са 00.

Број је дељив са 9 $\Rightarrow$ збир цифара му је дељив са 9, па има бар 9 јединица.

Број је $\underbrace{11\,111\,111\,1}_{9}00$.

4. *II, Мислиша 2013.*

Постоје ли природни бројеви x и y такви да је $x^2 + 5y = 2013$?

(А) Постоје
(Б) Не постоје
(Ц) То су бројеви облика k или $2k + 1$
(Д) Морају оба бити непарна
(Е) Не може се утврдити

4. *II, Мислиша 2013.*

Постоје ли природни бројеви x и y такви да је $x^2 + 5y = 2013$?

(А) Постоје
(Б) Не постоје
(Ц) То су бројеви облика k или $2k + 1$
(Д) Морају оба бити непарна
(Е) Не може се утврдити

Који су остаци при дељењу броја x^2 са 5?

4. *II, Мислиша 2013.*

Постоје ли природни бројеви x и y такви да је $x^2 + 5y = 2013$?

(А) Постоје
(Б) Не постоје
(Ц) То су бројеви облика k или $2k+1$
(Д) Морају оба бити непарна
(Е) Не може се утврдити

Који су остаци при дељењу броја x^2 са 5?

$$\begin{aligned}
(5k)^2 &= 25k^2 &&\equiv 0 \pmod 5\\
(5k\pm 1)^2 &= 25k^2 \pm 10k + 1 &&\equiv 1 \pmod 5\\
(5k\pm 2)^2 &= 25k^2 \pm 10k + 4 &&\equiv 4 \pmod 5
\end{aligned}$$

4. *II, Мислиша 2013.*

Постоје ли природни бројеви x и y такви да је $x^2 + 5y = 2013$?

(Б) Не постоје

Који су остаци при дељењу броја x^2 са 5?

$$\begin{aligned}(5k)^2 &= 25k^2 &&\equiv 0 \pmod 5\\ (5k\pm 1)^2 &= 25k^2 \pm 10k + 1 &&\equiv 1 \pmod 5\\ (5k\pm 2)^2 &= 25k^2 \pm 10k + 4 &&\equiv 4 \pmod 5\end{aligned}$$

Лева страна, $x^2 + 5y$, даје остатке 0, 1 или 4, а десна, 2013, даје остатак 3 (при дељењу са 5).

5. *републичко за VII, 1991.*
Дато је 1991 узастопних непарних природних бројева. Доказати да је њихова сума дељива са 1991.

5. *републичко за VII, 1991.*
Дато је 1991 узастопних непарних природних бројева. Доказати да је њихова сума дељива са 1991.

$2k+1$ први од тих непарних бројева

5. *републичко за VII, 1991.*
Дато је 1991 узастопних непарних природних бројева. Доказати да је њихова сума дељива са 1991.

$2k+1$ први од тих непарних бројева

$2k+3$ други од тих непарних бројева

5. *републичко за VII, 1991.*

Дато је 1991 узастопних непарних природних бројева. Доказати да је њихова сума дељива са 1991.

$2k+1$ први од тих непарних бројева

$2k+3$ други од тих непарних бројева

$2k+5$ трећи од тих непарних бројева

5. *републичко за VII, 1991.*

Дато је 1991 узастопних непарних природних бројева. Доказати да је њихова сума дељива са 1991.

$2k+1$ први од тих непарних бројева

$2k+3$ други од тих непарних бројева

$2k+5$ трећи од тих непарних бројева

$$\vdots$$

$2k+1+2\cdot(1991-1)=2k+3981$ последњи

5. *републичко за VII, 1991.*

Дато је 1991 узастопних непарних природних бројева. Доказати да је њихова сума дељива са 1991.

$2k+1$ први од тих непарних бројева

$2k+3$ други од тих непарних бројева

$2k+5$ трећи од тих непарних бројева

$\vdots$

$2k+1+2\cdot(1991-1)=2k+3981$ последњи

$$S=(2k+1)+(2k+3)+(2k+5)+\ldots+(2k+3981)$$

5. *републичко за VII, 1991.*

Дато је 1991 узастопних непарних природних бројева. Доказати да је њихова сума дељива са 1991.

$$S = (2k + 1) + (2k + 3) + (2k + 5) + \ldots + (2k + 3981)$$

$$S = 1991 \cdot 2k + (1 + 3 + 5 + \ldots + 3981)$$

5. *републичко за VII, 1991.*

Дато је 1991 узастопних непарних природних бројева. Доказати да је њихова сума дељива са 1991.

$$S = (2k+1)+(2k+3)+(2k+5)+\ldots+(2k+3981)$$

$$S = 1991 \cdot 2k + (1+3+5+\ldots+3981)$$

У „званичном решењу“ кажу:

$1+3+5+\ldots+3981 = 1991^2$ (доказати)

5. *републичко за VII, 1991.*

Дато je 1991 узастопних непарних природних бројева. Доказати да je њихова сума дељива са 1991.

$$S = (2k+1)+(2k+3)+(2k+5)+\ldots+(2k+3981)$$

$$S = 1991 \cdot 2k + (1+3+5+\ldots+3981)$$

То можемо избећи:

$$\begin{array}{ccccccccccc} T & = & 1 & + & 3 & + & 5 & + & \ldots & + & 3981 \\ T & = & 3981 & + & 3979 & + & 3977 & + & \ldots & + & 1 \end{array}$$

5. *републичко за VII, 1991.*

Дато је 1991 узастопних непарних природних бројева. Доказати да је њихова сума дељива са 1991.

$$S = (2k+1) + (2k+3) + (2k+5) + \ldots + (2k+3981)$$

$$S = 1991 \cdot 2k + (1 + 3 + 5 + \ldots + 3981)$$

То можемо избећи:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
T & = & 1 & + & 3 & + & 5 & + & \ldots & + & 3981 \\
T & = & 3981 & + & 3979 & + & 3977 & + & \ldots & + & 1 \\
\hline
2T & = & 3982 & + & 3982 & + & 3982 & + & \ldots & + & 3982
\end{array}$$

5. *републичко за VII, 1991.*

Дато је 1991 узастопних непарних природних бројева. Доказати да је њихова сума дељива са 1991. ✓

$$S = (2k+1) + (2k+3) + (2k+5) + \ldots + (2k+3981)$$

$$S = 1991 \cdot 2k + (1 + 3 + 5 + \ldots + 3981)$$

То можемо избећи:

$$\begin{array}{cccccccccc}
T & = & 1 & + & 3 & + & 5 & + & \ldots & + & 3981 \\
T & = & 3981 & + & 3979 & + & 3977 & + & \ldots & + & 1 \\
\hline
2T & = & 3982 & + & 3982 & + & 3982 & + & \ldots & + & 3982 \\
2T & = & 3982 \cdot 1991 & & & & & & & &
\end{array}$$

6. *окружно за VII, 1999.*

Доказати да међу 26 различитих непарних бројева мањих од 100 постоје бар два чији је збир једнак 100.

6. *окружно за VII, 1999.*

Доказати да међу 26 различитих непарних бројева мањих од 100 постоје бар два чији је збир једнак 100.

Поделимо 50 непарних бројева прве стотине у 25 парова са збиром 100:

$\{1, 99\}, \{3, 97\}, \ldots, \{47, 53\}, \{49, 51\}$.

6. *окружно за VII, 1999.*

Доказати да међу 26 различитих непарних бројева мањих од 100 постоје бар два чији је збир једнак 100.

Поделимо 50 непарних бројева прве стотине у 25 парова са збиром 100:

$\{1, 99\}, \{3, 97\}, \ldots, \{47, 53\}, \{49, 51\}.$

Како има 26 $\neq$ бројева, по Дирихлеовом принципу су бар 2 броја у истом скупу и њихов збир је 100. $\checkmark$

7. *школско за VI, 1994.*

Колико има природних бројева дељивих са 4 који су написани парним цифрама, а мањи су од 1000?

7. *школско за VI, 1994.*

Колико има природних бројева дељивих са 4 који су написани парним цифрама, а мањи су од 1000?

Природни бројеви мањи од 1000 су једноцифрени, двоцифрени или троцифрени.

7. *школско за VI, 1994.*

Колико има природних бројева дељивих са 4 који су написани парним цифрама, а мањи су од 1000?

Природни бројеви мањи од 1000 су једноцифрени, двоцифрени или троцифрени.

$$7 \rightsquigarrow 007 \qquad\qquad 69 \rightsquigarrow 069$$

$$\overline{\text{I}}\ \ \overline{\text{II}}\ \ \overline{\text{III}}$$

7. *школско за VI, 1994.*

Колико има природних бројева дељивих са 4 који су написани парним цифрама, а мањи су од 1000?

Природни бројеви мањи од 1000 су једноцифрени, двоцифрени или троцифрени.

$$7 \rightsquigarrow 007 \qquad 69 \rightsquigarrow 069$$

$$\overline{\mathrm{I}}\ \overline{\mathrm{II}}\ \overline{\mathrm{III}}$$

I,II$\in \{0,2,4,6,8\}$, $\qquad 5\cdot 5\cdot 3 = 75$

III$\in \{0,4,8\}$

7. *школско за VI, 1994.*

Колико има природних бројева дељивих са 4 који су написани парним цифрама, а мањи су од 1000?

Природни бројеви мањи од 1000 су једноцифрени, двоцифрени или троцифрени.

$7 \rightsquigarrow 007 \qquad 69 \rightsquigarrow 069$

$$\overline{\mathrm{I}}\ \overline{\mathrm{II}}\ \overline{\mathrm{III}}$$

I,II$\in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $\qquad 5 \cdot 5 \cdot 3 = 75$

III$\in \{0, 4, 8\}$ $\qquad 000 \notin \mathbb{N}$

7. *школско за VI, 1994.*

Колико има природних бројева дељивих са 4 који су написани парним цифрама, а мањи су од 1000?

Природни бројеви мањи од 1000 су једноцифрени, двоцифрени или троцифрени.

$$7 \rightsquigarrow 007 \qquad 69 \rightsquigarrow 069$$

$$\overline{\mathrm{I}}\ \ \overline{\mathrm{II}}\ \ \overline{\mathrm{III}}$$

I,II$\in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $\qquad 5 \cdot 5 \cdot 3 = 75$

III$\in \{0, 4, 8\}$ $\qquad 000 \notin \mathbb{N}$

Тражених бројева има $5 \cdot 5 \cdot 3 - 1 = 74$.

8. *међуопштинско за VIII, 1990.*
Доказати да једначина $x^2 + y^2 = 1990$ нема решења у скупу природних бројева.

8. *међуопштинско за VIII, 1990.*

Доказати да једначина $x^2 + y^2 = 1990$ нема решења у скупу природних бројева.

1990 је паран број $\Rightarrow$ x^2 и y^2 исте парности

8. *међуопштинско за VIII, 1990.*

Доказати да једначина $x^2 + y^2 = 1990$ нема решења у скупу природних бројева.

1990 је паран број $\Rightarrow$ x^2 и y^2 исте парности

$\Rightarrow$ x и y исте парности

8. *међуопштинско за VIII, 1990.*

Доказати да једначина $x^2 + y^2 = 1990$ нема решења у скупу природних бројева.

1990 је парaн број $\Rightarrow$ x^2 и y^2 исте парности

$\Rightarrow$ x и y исте парности

1° $x = 2k,\ y = 2\ell$:

$$x^2 + y^2 = 4k^2 + 4\ell^2 = 1990, \text{ тј. } \underbrace{2(k^2+\ell^2)}_{\text{паран}} = \underbrace{995}_{\text{непаран}} \ \lightning$$

8. *међуопштинско за VIII, 1990.*

Доказати да једначина $x^2 + y^2 = 1990$ нема решења у скупу природних бројева.

1990 је паран број $\Rightarrow$ x и y исте парности

1° $x = 2k,\ y = 2\ell$:

$$x^2 + y^2 = 4k^2 + 4\ell^2 = 1990, \text{ тј. } \underbrace{2(k^2 + \ell^2)}_{\text{паран}} = \underbrace{995}_{\text{непаран}} \ \lightning$$

2° $x = 2k+1,\ y = 2\ell+1$:

$$x^2 + y^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4\ell^2 + 4\ell + 1 = 1990,$$

$$4(k^2+k+\ell^2+\ell) = 1988, \qquad \underbrace{k^2+k}_{\text{паран}}+\underbrace{\ell^2+\ell}_{\text{паран}} = \underbrace{497}_{\text{непаран}} \ \lightning$$

9. *школско за VI, 2003.*

Наћи просте бројеве p и q, за које важи $p = q^2 - 1$.

9. *школско за VI, 2003.*

Наћи просте бројеве p и q, за које важи $p = q^2 - 1$.

Довољно пронаћи ЈЕДНО РЕШЕЊЕ!!!

9. *школско за VI, 2003.*

Наћи све просте бројеве p и q, за које важи $p = q^2 - 1$.

9. *школско за VI, 2003.*

Наћи све просте бројеве p и q, за које важи $p = q^2 - 1$.

I начин:

$q = 2 \Rightarrow p = 3$ ✓

9. *школско за VI, 2003.*

Наћи све просте бројеве p и q, за које важи $p = q^2 - 1$.

I начин:

$q = 2 \Rightarrow p = 3$ $\checkmark$

$q \geqslant 3$ прост $\Rightarrow p$ паран, $p \geqslant 8 \Rightarrow p$ сложен ↯

9. *школско за VI, 2003.*

Наћи све просте бројеве p и q, за које важи $p = q^2 - 1$.

I начин:

$q = 2 \Rightarrow p = 3$ $\checkmark$

$q \geqslant 3$ прост $\Rightarrow$ p паран, $p \geqslant 8 \Rightarrow p$ сложен $\lightning$

Једино решење је: $\quad p = 3, \quad q = 2.$

9. *школско за VI, 2003.*

Наћи све просте бројеве p и q, за које важи $p = q^2 - 1$.

II начин:

$p = q^2 - 1 = (q - 1) \cdot (q + 1)$

p прост и $q + 1 > 1 \ \Rightarrow q - 1 = 1 \Rightarrow q = 2$, $p = 3$

Једино решење је: $p = 3$, $q = 2$.

9. *школско за VI, 2003.*

Наћи све просте бројеве p и q, за које важи $p = q^2 - 1$.

II начин:

$$p = q^2 - 1 = (q - 1) \cdot (q + 1)$$

p прост и $q + 1 > 1 \;\Rightarrow\; q - 1 = 1 \Rightarrow q = 2$, $p = 3$

Једино решење је: $\quad p = 3, \quad q = 2.$

сличан – општинско за IV Б кат, 2013.

Одредити све просте бројеве p за које једначина $x^4 + 4 = p$ има решења у скупу природних бројева.

10. *сличан – општинско за IV Б кат, 2013.*

Одредити све просте бројеве p за које једначина $x^4 + 4 = p$ има решења у скупу природних бројева.

$$p = x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2$$

$$= (x^2+2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 2).$$

10. *сличан – општинско за IV Б кат, 2013.*

Одредити све просте бројеве p за које једначина $x^4 + 4 = p$ има решења у скупу природних бројева.

$$p = x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2$$

$$= (x^2+2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 2).$$

p прост и $x^2 + 2x + 2 > 1$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 1 \Rightarrow x = 1,\ p = 5.$$

11. *Пар–непар 419; окружно за VI, 1999.*
Збир 1999 различитих простих природних бројева је паран број.
а) Да ли је производ тих 1999 простих бројева паран или непаран број?
б) Доказати да међу њима постоји 1998 бројева чији је збир паран број.
в) Доказати да међу њима постоји 1998 бројева чији је збир непаран.

11. *Пар–непар 419; окружно за VI, 1999.*
Збир 1999 различитих простих природних бројева је паран број.
а) Да ли је производ тих 1999 простих бројева паран или непаран број?
паран.
б) Доказати да међу њима постоји 1998 бројева чији је збир паран број.
Избацимо 2.
в) Доказати да међу њима постоји 1998 бројева чији је збир непаран.
Избацимо било који непаран.

12. *окружно за V, 2000.*

Одредити просте бројеве p и q, ако је $2 \cdot p + 3 \cdot q = 100$.

12. *окружно за V, 2000.*

Одредити просте бројеве p и q, ако је $2 \cdot p + 3 \cdot q = 100$.

паран паран

12. *окружно за V, 2000.*

Одредити просте бројеве p и q, ако је $2 \cdot p + 3 \cdot q = 100$.

паран паран

$\Rightarrow 3 \cdot q$ паран $\Rightarrow$ прост q паран $\Rightarrow q = 2$.

12. *окружно за V, 2000.*

Одредити просте бројеве p и q, ако је $2 \cdot p + 3 \cdot q = 100$.

паран паран

$\Rightarrow 3 \cdot q$ паран $\Rightarrow$ прост q паран $\Rightarrow q = 2$.

$2 \cdot p + 6 = 100 \Rightarrow p = 47$, што је прост.

13. *школско за VI, 1999.*

Производ три узастопна парна природна броја је $13\,728$. Одредити те бројеве.

13. *школско за VI, 1999.*

Производ три узастопна парна природна броја је 13 728. Одредити те бројеве.

$$13\,728 = 2^5 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13$$

13. *школско за VI, 1999.*

Производ три узастопна парна природна броја је 13 728. Одредити те бројеве.

$13\,728 = 2^5 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13 = 22 \cdot 24 \cdot 26.$

14. *савезно за VII, 2001.*

Постоје ли природни бројеви a, b и c, такви да важи једнакост $(a+b)(b+c)(c+a) = 340$?

14. *савезно за VII, 2001.*

Постоје ли природни бројеви a, b и c, такви да важи једнакост $(a+b)(b+c)(c+a)=340$?

сличан – окружно за I А кат, 2011.

Да ли постоје природни бројеви a, b и c, такви да је $2010=(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)$?

14. *савезно за VII, 2001.*

Постоје ли природни бројеви a, b и c, такви да важи једнакост $(a+b)(b+c)(c+a) = 340$?

$340 = 2^2 \cdot 5 \cdot 17.$

14. *савезно за VII, 2001.*

Постоје ли природни бројеви a, b и c, такви да важи једнакост $(a+b)(b+c)(c+a) = 340$?

$340 = 2^2 \cdot 5 \cdot 17.$

Сви чиниоци $a+b, b+c, c+a \geqslant 2 \qquad (a, b, c \in \mathbb{N})$

14. *савезно за VII, 2001.*

Постоје ли природни бројеви a, b и c, такви да важи једнакост $(a+b)(b+c)(c+a) = 340$?

$340 = 2^2 \cdot 5 \cdot 17$.

Сви чиниоци $a+b, b+c, c+a \geqslant 2 \qquad (a, b, c \in \mathbb{N})$

Нису сва 3 парни, јер би тада $2^3 \mid 340$.

14. *савезно за VII, 2001.*

Постоје ли природни бројеви a, b и c, такви да важи једнакост $(a+b)(b+c)(c+a) = 340$?

$340 = 2^2 \cdot 5 \cdot 17.$

Сви чиниоци $a+b, b+c, c+a \geqslant 2 \qquad (a, b, c \in \mathbb{N})$

Нису сва 3 парни, јер би тада $2^3 \mid 340$.

Нису тачно 2 парни, нпр. $a+b$ и $b+c$, јер би тада $\Rightarrow a+b+b+c = a+c+2b$ био паран.

14. *савезно за VII, 2001.*

Постоје ли природни бројеви a, b и c, такви да важи једнакост $(a+b)(b+c)(c+a)=340$?

$340=2^2\cdot 5\cdot 17$.

Сви чиниоци $a+b, b+c, c+a \geqslant 2 \qquad (a,b,c\in\mathbb{N})$

Нису сва 3 парни, јер би тада $2^3 \mid 340$.

Нису тачно 2 парни, нпр. $a+b$ и $b+c$, јер би тада $\Rightarrow a+b+b+c=a+c+2b$ био паран.

$\Rightarrow$ 1 паран, 2 непарна,

тј. $a+b=2^2$, $b+c=5$, $c+a=17$

14. *савезно за VII, 2001.*

Постоје ли природни бројеви a, b и c, такви да важи једнакост $(a+b)(b+c)(c+a)=340$?

$340 = 2^2 \cdot 5 \cdot 17.$

Сви чиниоци $a+b, b+c, c+a \geqslant 2 \qquad (a,b,c \in \mathbb{N})$

Нису сва 3 парни, јер би тада $2^3 \mid 340$.

Нису тачно 2 парни, нпр. $a+b$ и $b+c$, јер би тада $\Rightarrow a+b+b+c=a+c+2b$ био паран.

$\Rightarrow$ 1 паран, 2 непарна,

тј. $a+b=2^2$, $b+c=5$, $c+a=17$

$a+c+2b=a+b+b+c=9<c+a=17 \quad \lightning$

15. *републичко за VII, 1989.*

Доказати да је производ $101 \cdot 102 \cdot \ldots \cdot 200$ дељив са 2^{100}.

15. *републичко за VII, 1989.*

Доказати да је производ $P = 101 \cdot 102 \cdot \ldots \cdot 200$ дељив са 2^{100}.

$$P = \frac{(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100) \cdot (101 \cdot 102 \cdot \ldots \cdot 200)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100}$$

15. *републичко за VII, 1989.*

Доказати да је производ $P = 101 \cdot 102 \cdot \ldots \cdot 200$ дељив са 2^{100}.

$$P = \frac{(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100) \cdot (101 \cdot 102 \cdot \ldots \cdot 200)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100}$$

$$= \frac{(1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 199) \cdot (2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 200)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100}$$

15. *републичко за VII, 1989.*

Доказати да је производ $P = 101 \cdot 102 \cdot \ldots \cdot 200$ дељив са 2^{100}.

$$P = \frac{(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100) \cdot (101 \cdot 102 \cdot \ldots \cdot 200)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100}$$

$$= \frac{(1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 199) \cdot (2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 200)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100}$$

$$= \frac{(1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 199) \cdot 2^{100} \cdot (1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100}$$

15. *републичко за VII, 1989.*

Доказати да је производ $P = 101 \cdot 102 \cdot \ldots \cdot 200$ дељив са 2^{100}. ✓

$$P = \frac{(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100) \cdot (101 \cdot 102 \cdot \ldots \cdot 200)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100}$$
$$= \frac{(1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 199) \cdot (2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 200)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100}$$
$$= \frac{(1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 199) \cdot 2^{100} \cdot (1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100}$$
$$= (1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 199) \cdot 2^{100}.$$

15. *републичко за VII, 1989.*

Доказати да је производ $P = 101 \cdot 102 \cdot \ldots \cdot 200$ дељив са 2^{100}. $\checkmark$

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100) \cdot (101 \cdot 102 \cdot \ldots \cdot 200)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100} \\
&= \frac{(1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 199) \cdot (2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 200)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100} \\
&= \frac{(1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 199) \cdot 2^{100} \cdot (1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100} \\
&= (1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 199) \cdot 2^{100}.
\end{aligned}
$$

Могли смо да нађемо највећи степен двојке који дели $100!$ и $200!$.

15. *републичко за VII, 1989.*

Доказати да је производ $P = 101 \cdot 102 \cdot \ldots \cdot 200$ дељив са 2^{100}. ✓

$$P = \frac{(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100) \cdot (101 \cdot 102 \cdot \ldots \cdot 200)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100}$$

$$= \frac{(1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 199) \cdot (2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 200)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100}$$

$$= \frac{(1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 199) \cdot 2^{100} \cdot (1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100}$$

$$= (1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 199) \cdot 2^{100}.$$

Највећи степен петице који дели $n!$ служи да нађемо број нула у $n!$.

16. 4. Окружно I, Б

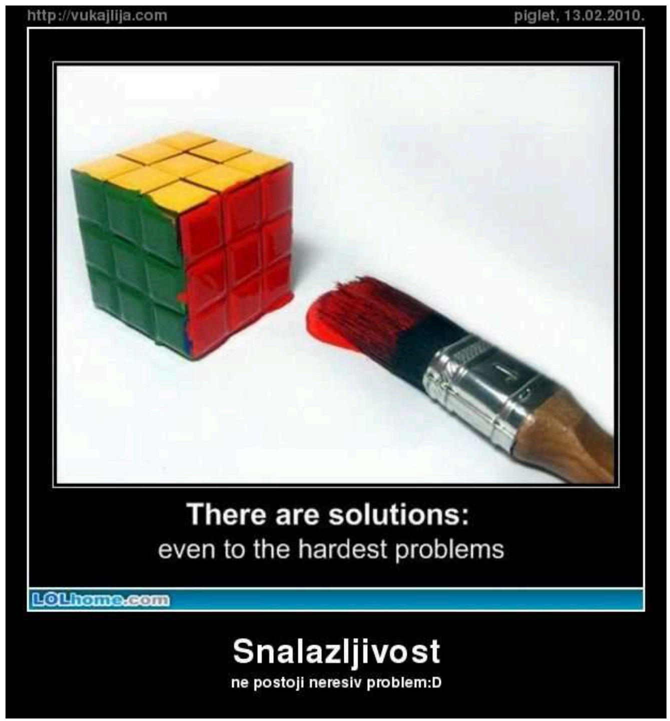
Могу ли се броју 2020 здесна дописати још три цифре тако да се добије седмоцифрен број који је дељив сваким од бројева 8, 9 и 11? Одредити сва решења.

Ако је број дељив и са 8 и са 9 и са 11, онда је дељив и са $8 \cdot 9 \cdot 11 = 792$.

Када 2020 допишемо троцифрени број $x = \overline{abc}$ добијамо број $\overline{2\,020\,abc}$, тј. $2\,020\,000 + x$.

Остатак при дељењу $2\,020\,000$ са 792 је 400, па треба $400 + x$ да буде дељиво са 792, што је испуњено само за $x = 392$.

KRAJ


http://vukajlija.com
piglet, 13.02.2010.
There are solutions:
even to the hardest problems
LOLhome.com
Snalazljivost
ne postoji neresiv problem:D