ДОДАТНА НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ ЗА УЧЕНИКЕ ОСНОВНЕ ШКОЛЕ
7. РАЗРЕД

ОДАБРАНИ ЛОГИЧКО-КОМБИНАТОРНИ ЗАДАЦИ

Избор логичко-комбинаторних задатака који је пред нама је направљен на принципима разноликог приказа више класа проблема и метода за њихово решавање. Материјал је коришћен за предавање на семинару за наставнике математике на тему места и третмана логичко-комбинаторних задатака у настави математике. Може се користити и за додатну наставу математике у старијим разредима основне и првом разреду средње школе.

Већина приказаних задатака углавном потиче са такмичења младих математичара или репрезентативних материјала за учење у овој области.

I Пребројавања

1. Колико има шестоцифрних природних бројева у чијем запису је бар једна цифра парна?

Решење. У овом задатку илуструјемо примену једног важног принципа пребројавања у комбинаторици, тзв. принципа разлике. Када од укупног броја шестоцифрених природних бројева одузмимо број оних чије су све цифре непарне добијамо број оних природних бројева чија је бар једна цифра парна. Таквих бројева има $9 \cdot 10^5 - 5^6$.

2. Палиндром је број који се чита слева у десно једнако како се чита здесна у лево (на пример, такав је број 13531). Да ли је више непарних троцифрених бројева који су палиндроми или је више парних четвороцифрених бројева који су палиндроми?

Решење. Приметимо да троцифрених природних палиндрома $\overline{aba}$, као и четво-роцифрених природних палиндрома $\overline{abba}$ има колико и двоцифрених природних бројева $\overline{ab}$ јер су у оба сличаја цифре после прве две одређене на јединствен начин. Сада, имајући у виду да код парних четвороцифрених прву цифру можемо одабрати на 4, а код непарних троцифрених на 5 начина, док се друга у оба случаја може одабрати на 10 начина, закључујемо да је више непарних троцифрених палиндрома.

3. Нека је S скуп свих петоцифрених природних бројева $\overline{abcde}$ за које важи $b = ac$ и $d = c + e$. Одредити број елемената скупа S.

Решење. Цифре a, c и e јединствено одређују цифре b и d . За цифре a, c и e можемо изабрати било које цифре које задовољавају услове: $a \neq 0$, $ac < 10$, $c + e < 10$. Следећа таблица илуструје број свих могућности.

вредност цифре c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
број избора за a	9	9	4	3	2	1	1	1	1	1
број избора за e	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
укупно бројева	90	81	32	21	12	5	4	3	2	1

Дакле, таквих бројева има 251.

4. Прва три потеза у шаховској партији одиграна су скакачима (два потеза белог и један потез црног играча). На колико начина је то могуће?

Решење. Први потез белог изграча, као и први (и једини) потез црног играча могу се одиграти на по 4 начина. Уочити да други потез белог играча зависи од места одигравања свог првог потеза и разликовати одговарајуће случајеве.
Укупан број начина за такав почетак шаховске партије је 96.

5. Постоји тачно тринаест троуглова таквих да су мерни бројеви дужина страница цели, мањи од природног броја x и да никоја два од тих троуглова нису подударни. Одреди број x?

Решење. $\boldsymbol{x = 5}$**.** У пребројавању троуглова уочити да су једини троуглови са целобројним дужинама страница, када су те дужине из скупа $\{1,2,3,4\}$, управо: **1,1,1; 1,2,2; 2,2,2; 1,3,3; 2,2,3; 2,3,3; 1,4,4; 2,3,4; 3,3,3; 2,4,4; 3,3,4; 3,4,4; 4,4,4.** Дакле, таквих троуглова је тачно 13.

6. На колико начина је могуће обојити све једноцифрене природне бројеве користећи плаву, белу и црвену боју, а да притом било која два броја чији је збир непаран не буду обојена истом бојом?

Решење 1. Како бројеви чији је збир непаран не могу бити обојени истом бојом, следи да никоја два броја различите парности из скупа $\{1,2,\ldots,9\}$ не могу бити обојена истом бојом.
Разликујемо случајеве:
1 - парни обојени једном бојом и непарни обојени једном бојом. Таквих бојења има укупно $3 \cdot 2 = 6$;
2 - парни обојени једном бојом, а непарни обојени са две боје. Таквих бојења има укупно $3 \cdot (2^5 - 2) = 90$;
3 - непарни обојени једном бојом, а парни обојени са две боје. Таквих бојења има укупно $3 \cdot (2^4 - 2) = 42$.
Дакле, таквих бојења има укупно $6 + 90 + 43 = 138$.

Решење 2. Бојења у којима су сви парни бројеви обојени једном бојом, а непарни са преостале две боје има 3 · 2^5. Бојења у којима су сви непарни бројеви обојени једном бојом, а парни са преостале две боје има $3 \cdot 2^4$. Међутим, у ова два случаја дупло су рачуната она бојења која се односе на ситуације када су сви парни бројеви обојени једном бојом и сви непарни бројеви обојени једном бојом. Таквих бојења је укупно 6, па могућих начина за бојење једноцифрених бројева има укупно

$$3 \cdot 2^5 + 3 \cdot 2^4 - 6 = 138.$$

II Логичко-комбинаторни задаци

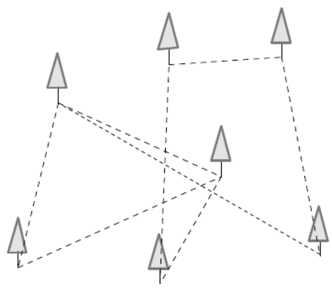
1. Грађани града A увек говоре истину, грађани града B увек лажу, а сваки грађанин из града C наизменично говори истину и лаж. Дежурни ватрогасац је телефоном примио поруку из једног од ових градова: „*Код нас је пожар!*“ јавио је један грађанин. „*Где?*“- питао је дежурни ватрогасац. „*У граду C*“ - одговорио је исти грађанин. У који град треба да оде ватрогасна екипа?

Решење. Илуструјмо примену методе искључивања претпоставки. Ако је звао грађанин из града A, с обзиром да увек говори истину, он не би дао два контра-дикторна исказа. Такође, позив није могао бити ни из града C, јер становници наизменично говоре истину и лажу, а оба одговора сугеришу да је пожар баш у граду C. Закључујемо да је позив био из града B, јер њихови становници увек лажу, па су обе тврдње нетачне и ватрогасну екипу треба упутити у град A.

2. Шестокраке, седмокраке и осмокраке хоботнице служе подводном краљу. Оне које имају 7 кракова увек лажу, док оне са 6 или 8 кракова увек говоре истину. Једног дана среле су се 4 хоботнице. Плава је рекла: „Заједно имамо 28 кракова", зелена: „Заједно имамо 27 кракова", жута: „Заједно имамо 26 кракова" и црвена: „Заједно имамо 25 кракова". Које боје је хоботница која говори истину?

Решење. Пошто постоје четири различите изјаве, то је или једна од њих тачна или ниједна. Ако ниједна изјава није тачна, следи да су све хоботнице седмокраке и да је укупно 28 кракова, па би истину говорила плава хоботница, што је супротно нашој претпоставци. Дакле, међу ове четири хоботнице једна говори истину, а преостале три лажу. Оне које лажу имају укупно 21 крак, док она хоботница која говори истину може имати 6 или 8 кракова. Зато би укупан број кракова био 27 или 29. Пошто, по претпоставкама задатка, не може бити 29 кракова у збиру, то закључујемо да све хоботнице имају заједно 27 кракова, а да је истину рекла зелена хоботница.

3. На једном пољу у снегу су забележени трагови зеца који се кретао од дрвета до дрвета (претпоставимо и да је сваким од уочених трагова прошао само једном). Да ли се на основу тих трагова може тврдити испод ког дрвета се он сада налази?



Решење. Није могуће са сигурношћу одредити испод ког дрвета је зец. Могуће је само тврдити да се налази испод једног од дрвета које повезује непаран број (3) путева са осталим дрветима.

4. Доказати да се табла 8×8 не може прекрити са 15 тетромина облика T и једним квадратом 2×2.

Решење. Обојимо дату таблу шаховски. Тако на њој постоји 32 бела и 32 црна поља. Квадрат 2×2 покрива 2 бела и 2 црна поља. Преосталих 30 белих и 30 црних поља треба прекрити са 15 тетромина, тако да буде исти број оних који прекривају 3 бела и 1 црно поље као број оних који прекривају 3 црна и 1 бело поље. Међутим, то није могуће, с обзиром да их је 15 – непаран број.

5. Квадрат величине 5×5 подељен је на 25 поља која су обојена „шаховски” (поље у доњем левом углу је црне боје). На сваком пољу постављен је по један жетон. Један потез се састоји у премештању било која два жетона, сваког од њих на суседно поље по вертикали или хоризонтали. Уочимо неко бело поље. Да ли се могу, након извесног броја потеза, сви жетони наћи на уоченом пољу?

Решење. Таква табла обојена на „шаховски начин“ има 12 белих и 13 црних поља. Како се жетон једним потезом помери на поље друге боје може се догодити један од три случаја:

- број жетона на белим пољима се смањи за два, а на црним увећа за 2;
- број жетона на црним пољима се смањи за 2, а на белим увећа за два;
- број жетона на црним и белим пољима остане непромењен.

Усваком случају парност броја жетона на белим, као и на црним пољима се не мења, па заључујемо да се не могу сви жетони померити на уочено бело поље, с обзиром да их је непаран број на црним пољима.

6. Дата је трансформација тројке бројева (a, b, c):

$$(a, b, c) \rightarrow (5a - 4b, 5b - 4c, 5c - 4a)$$

Може ли се од тројке (1, 3, 5) кочаним бројем примена оваквих трансформација добити:

а) тројка $(7, 9, 11)$; б) тројка $(2, 3, 4)$?

Решење. Уочимо да се овом трансформацијом из тројке (a, b, c) прелази у тројку $(5a - 4b, 5b - 4c, 5c - 4a)$ код које се не мења збир координата у односу на полазну тројку, а такође ни парност компоненти. Та својства називамо инваријантама трансформације.
С обзиром на то, није могуће извршити трансформацију под а), а ни под б) јер се непарне компоненте тројке (1, 3, 5) датом трансформацијом не могу превести у парне компоненте тројке (2, 3, 4), иако је збир компоненти исти.

7. У два суседна поља (димензија 1×1) квадратне табле 10×10 налази се благо. Перица треба да погоди која су то поља. Једним потезом он може да изабере неко поље табле и да добије информацију да ли се у њему налази благо или не. Одредити минимални број потеза који је, уз одговарајућу стратегију, увек довољан да Перица са сигурношћу одреди поља у којима се благо налази.

Решење. Покажимо да је Перици потребно бар 50 потеза да би са сигурношћу открио поља са благом. Поделимо дату табелу најпре на 50 „хоризонталних“ правоугаоника 2×1. Било који број потеза мањи од 50 значио би да Перица није проверио ниједно поље бар једног таквог правоугаоника. Слично важи ако се дата табела подели и на 50 хоризонталних правоугаоника.
Докажимо да је 50 и довољан број потеза. Обојимо дату таблу ,,шаховски“. Јасно је да је једно поље са благом бело, а друго црно.
Анализирајмо три врсте поља:
1) централна у квадрату 8x8, 2) 4 угаона поља и 3) преостала рубна поља.
Поља у овим групама се разликују по броју суседа друге боје, и за црно поље по томе што свако има у 1) групи четири, у 2) два, а у 3) три бела суседна поља. Аналогно важи и за бела поља у односу на црна.

У оптималној стратегији Перица најпре проверава сва црна централна поља. Ако међу њима пронађе поље са благом онда му је довољно да провери још 3 од његова 4 бела суседа (јер се благо сигурно налази на једном од њих). Дакле, у овом случају је извео највише 35 потеза.
Ако Перица не пронађе благо у централном делу онда проверава црна ивична поља. Ако међу њима пронађе поље са благом онда проверава још 2 од 3 бела суседна поља.
И у овом случају укупан број изведених потеза је највише 32+16+2=50.
Ако благо не пронађе ни на ивичним пољима преостаје да тестира угаона поља. Међу четири угаона поља тачно 2 су црна. Довољно је да провери једно од њих, а затим и једно од њему суседних белих поља. Ако не пронађе благо на првом провераваном црном угаоном пољу, онда је благо сигурно у другом од њих и потребно је да провери још једно од његова 2 суседна бела поља. Број изведених потеза је и у овом случају 50, што значи да је то и довољан број.

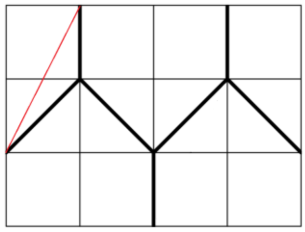
8. Колико је најмање боја потребно да се обоје све тачке са целобројним координатама у Декартовом правоуглом координатном систему, тако да сваке две тачке чије је достојање једнако 5 буду обојене различитом бојом.

Решење. Све тачке у координатном систему на одстојању 5, од неке уочене тачке (x, y), имају координате $(x \pm 5, y)$, $(x, y \pm 5)$, $(x \pm 3, y \pm 4)$, $(x \pm 4, y \pm 3)$. Има их укупно 12. Приметимо да се у односу на координате уочене тачке (x, y) код сваке такче која је од ње на одстојању 5, збир координата разлијује за непаран број у односу на збиур координата тачке (x, y). Дакле, могуће је све тачке обојити са 2 боје, тако што све тачке чији је збир координата паран обојима једном, а оне чији је збир координата непаран другом бојом. Тако ће бити постигнуто да сваке две тачке на одстојању 5 буду обојене различитим бојама.

III Дирихлеов принцип

1. У унутрашњости правоугаоника чије су странице 3 cm и 4 cm дато је 6 тачака. Доказати да међу њима постоје две које су на одстојању мањем од $\sqrt{5}$ cm.

Решење. Поделимо дати правоугаоник на делове, као на следећој слици:



Уочавамо да је у свакој од уочених фигура у подели највеће растојање управо једнако $\sqrt{5}$. Како је 6 тачака, а пет фигура, то по ДП бар две припадају унутрашњости једне од њих, па важи дато тврђење.

2. Доказати да међу $n+1$ различитих елемената скупа $\{1,2,\dots,2n\}$ постоје два која су узајамно проста.

Решење. Поделимо тај скуп на n дисјунктних подскупова узастопних парова природних бројева:

$$\{1,2\},\{3,4\},\dots,\{2n-1,2n\}.$$

По ДП међу $n+1$ датих бројева постоје два која се налазе у једном од ових n скупова. Како су узастопни природни бројеви узајамно прости, то следи тврђење задатка.

3. Нека је М скуп који се састоји од $2n+1$ реалних бројева из интервала $(1,2^n)$. Доказати да постоје три елемента скупа M која могу бити мерни бројеви дужина страница неког троугла.

Решење. Поделимо тај интервал на дисјунктне интервале:

$$(1,2),[2,2^2),[2^2,2^3),\dots,[2^{n-1},2^n).$$

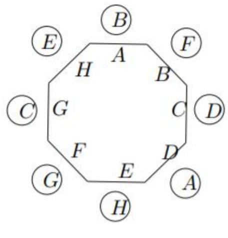
По ДП од датих $2n+1$ реалних бројева скупа M постоје бар 3 која су у једном од интервала $[2^{k-1},2^k)$. Означино их са m,n и p. За њих важи:

$$m+n \geq 2\cdot 2^k > p; \quad m+p \geq 2\cdot 2^k > n; \quad n+p \geq 2\cdot 2^k > m.$$

Дакле, та три броја могу бити дужине страница троугла.

4. За столом који је облика правилног осмоугла смештено је осам учесника једне конференције. На сваком месту означено је по једно до њихових имена, међутим они су сели насумично и нико није на свом месту. Доказати да се и при таквом произвољном размештају, столице могу заротирати у једну од два могућа смера око стола, тако да најмање двоје људи дођу на место које је означено њиховим именом.

Решење. Посматрајмо један такав случајан распоред људи за столом.



Izbrojmo колико је сваки од њих удаљен од места са његовим именом, бројећи у смеру кретања казаљке на часовнику. Тако добијамо да је удаљеност сваког од осам учесника конференције од њихових места једнака неком броју из скупа $\{1,2,\ldots,7\}$. С обзиром да је њих 8, а могућих удаљености је седам то постоје двојица на једнакој удаљености од места са њиховим именом. Ротирањем столица у смере кретања казаљке на часовнику за уочени број који се појавио бар два пута, добија се да бар двоје људи седе на месту означеном њиховим именом.

5. У кругу полупречника 1 повучено је неколико тетива. Збир дужина свих повучених тетива већи је од 7π. Доказати да неки пречник тог круга сече бар 8 од тих повучених тетива.

Решење. За сваку од датих тетива уочимо два лука: краћи од два одређена њоме и њему централно симетрични лук. Пречник са крајем на једном од та два лука сече ту тетиву. Пошто је дужина сваког лука већа од дужине одговарајуће тетиве, дужина свих лукова је већа од $2\cdot 7\pi = 14\pi$. Одатле следи да је нека тачка на кружници покривена са бар 8 лукова. Дакле, пречник са крајем у тој тачки сече 8 тетива.

6. Шахиста се 77 дана припремао за турнир и сваког дана је одиграо бар по једну партију, али не више од 132 партије укупно. Доказати да постојио низ од неколико узастопних дана у којима је одиграо тачно 21 партију.

Решење. Нека је x_i број партија које је он одиграо у i −том по реду дану. Тада је:
$1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_{77} \leq 132$. Одатле следи да је
$22 \leq x_1 + 21 < x_2 + 21 <\ldots< x_{77} + 21 \leq 153.$

С обзиром на то, следи да међу 154 броја: $x_1,\ x_2, \ldots x_{77}, x_1+21, x_2+21, \ldots, x_{77}+21$ постоји бар два међусобно једнака. Тј. постоје два индекса i и j таква да је $x_i = x_j + 21$. Одатле следи закључак.

7. Означено је 15 поља шаховске табле. Посматрају се све дужи са крајевима у центрима означених поља. Доказати да међу тим дужима постоје четири једнаке дужине.

Решење. Број посматраних дужи је $\frac{15\cdot 14}{2} = 105$. Одредимо број могућих различитих дужина тих дужи. Све могуће дужине дужи на табли остварују се посматрано од центра доњег левог поља до центра неког од поља на главној дијагонали (одређеној тим пољем и горњим десним пољем) и поља испод ње.
Број таквих поља је $2 + 3 + \ldots + 8 = 35$, па не постоји више могућих дужина од 35. Међутим, уочимо да се дужине 5 и $\sqrt{50}$ постижу на више од једног начина.

Одстојање 5 се постиже преко $5^2 = 3^2 + 4^2$ или преко хоризонталног одстојања до поља које је одаљено за 5, а за $\sqrt{50}$ имамо $(\sqrt{50})^2 = 5^2 + 5^2 = 7^2 + 1^2$. Дакле, број могућих дужина је 33, па како је $33 \cdot 3 = 99 < 105$ то по ДП следи тврђење задатка.

Вељко Ћировић
cirovic@gmail.com