ПРАВИЛНИ МНОГОУГАО

Претходна тема је посвећена многоуглу и разним проблемима везаним за многоугао. Међутим, у скупу свих многоуглова посебно место заузимају правилни многоуглови, чије конструкције и особине представљају право математичко богатство.

Конструкције правилних многоуглова са 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48 ... страница (уопште $3 \cdot 2^{\kappa}$ страна ($\kappa \in No$)) су елементарне и о њиховим конструкцијама ће се говорити углавном описно, јер се оне своде на поделу углова од 60° и 90° и њихових подељених делова (30°, 15°, 45°, $22{,}5^{\circ}$ ...) на два једнака дела. Конструкције многоуглова са 5, 7, 9, 10 ... страница су веома озбиљан математичка садржај[1] који захтева значајно више математичких знања и апаратуре[2].

Проблеми који следе су везани за занимљиве појединачне и опште особине правилних многоуглова и биће од користи у комплетирању математичких знања.

Пре сваке приче о правилним многоугловима важно је напоменути (а може се лако и доказати) да сваки правилан n-тоугао има централни угао једнак $360^{\circ}/n$ и да сваки правилни многоугао има описану и уписану кружницу. Ове три особине ће се најчешће и користити при решавању проблема везаних за правилне многоуглове.

<u>*ПРИМЕР 1.*</u> *Конструисати правилни осмоугао и правилни дванаестоугао ако је полупречник круга описаног око ових многоуглова једнак 4.*

РЕШЕЊЕ: Како је централни угао правилног осмоугла $360^{\circ} : 8 = 45^{\circ}$, то се поделом централног угла, најпре на четири угла од 90°, потом њиховим половљењем, на описаној кружници се добија 8 тачака које представљају темена правилног осмоугла.
Слично, централни угао правилног дванаестоугла је $360^{\circ} : 12 = 30^{\circ}$, па се познатом поделом кружнице на шест једнаких делова добија 6 углова од 60°, а потом њиховим половљењем 12 углова од 30°. Коначно на кружници описаној око многоугла се добија 12 тачака које представљају темена правилног дванаестоугла.

---

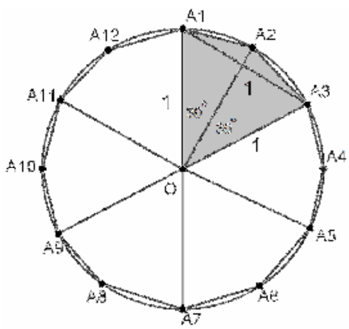
1 Корисницима наше књиге искрено препоручујемо књигу: Ђура Паунић - Правилни полигони – Друштво математичара Србије, Београд 2006.

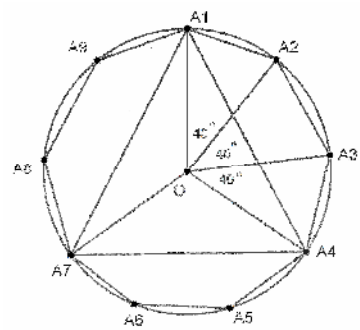
2 У наредној књизи за 8. разред једна тема ће бити посвећена примени сличности на конструкције правилних многоуглова.

<u>*ПРИМЕР 2.*</u> *Полупречник круга описаног око правилног дванаестоугла једнак је 1. Докажи да је површина тог дванаестоугла једнака 3.*

РЕШЕЊЕ: Нека је $A_1A_2 \ldots A_{11}A_{12}$ дати правилни многоугао уписан у круг са центром O и полупречником 1. Онда је четвороугао $A_1A_2A_3O$ делтоид чије су странице $A_1O = A_3$O једнаке 1 (као полупречници описаног куга) и угао између њих $30^o + 30^o = 60^o$.

Дијагонале делтоида су тада $A_1A_3 = 1$ (јер је троугао A_1OA_2 једнакостранични) и $A_2O = 1$ (као полупречник описаног круга). Површина делтоида је $P_1 = \dfrac{1 \cdot 1}{2} = \dfrac{1}{2}$. Како правилни дванаестоугао садржи 6 таквих делтоида, његова површина је $6 \cdot 0,5 = 3$.





<u>*ПРИМЕР 3.*</u> *Дат је правилни деветоугао $A_1A_2 \ldots A_8A_9$. Колико има једнакостраничних троуглова чија су темена – темена датог деветоугла*?

РЕШЕЊЕ: Централни угао правилног деветоугла је $360^o : 9 = 40^o$. Како је $40^o \cdot 3 = 120^o$ то су троуглови A_1OA_4, A_4OA_7 и A_7OA_1 подударни (јер су једнакокраки са крацима једнаким полупречницима круга описаног око деветоугла и углом од 120^o између кракова). Из подударности се закључује једнакост дужи: $A_1A_4 = A_4A_7 = A_7A_1$, па је троугао $A_1A_4A_7$ једнакостраничан. На идентичан начин се доказује да су и троуглови $A_2A_5A_8$ и $A_3A_6A_9$ једнакостранични, па следи да таквих троуглова има укупно три.

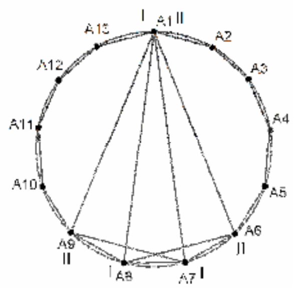
<u>*ПРИМЕР 4.*</u> *Колико има правилних многоуглова чији су сви унутрашњи углови изражени природним бројем степена*?

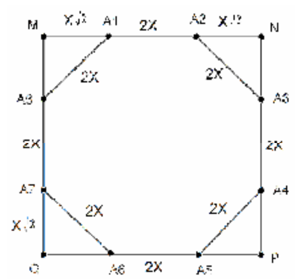
РЕШЕЊЕ: Ако је унутрашњи угао правилног многоугла x, онда је спољашњи угао $180^o - x$, па ако је унутрашњи угао изражен природним бројем степени, онда ће исту особину имати и спољашњи угао многоула. Како је збир спољашњих углова n-тоугла 360^o, то је спољашњи угао правилног многоугла једнак $360^o / n$.

Да би $360^o / n$ био природан број, n мора бити делилац броја 360. Како је $360 = 10 \cdot 36 = 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 9 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, то број 360 има $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ делиоца. Познато је да не постоји n-тоугао са 1 и 2 странице, па постоји 22 правилна многоугла чији су углови изражени природним бројем степени. Најмањи (по броју страница) има 3 странице и унутрашње углове од 60^o, а највећи (по броју страница) има 360 страница и спољашње углове од 1^o, тј. унутрашње углове једнаке 179^o.

<u>*ПРИМЕР 5.*</u> *Темена правилног тринаестоугла A_1A_2 ... $A_{12}A_{13}$ обојена су плавом или црвеном бојом. Докажи да при ма каквом бојењу темена тог тринастоугла постоји једнакокраки троугао чија су темена - темена тринаестоугла и сва три темена су исте боје.*

РЕШЕЊЕ: Нека су темена обојена бојама I и II. Како многоугао има 13 темена по Дирихлеовом принципу бар 7 су исте боје. То значи и да су бар два суседна темена исте боје (зашто?). Нека су то темена A_7 и A_8, која су I боје. Ако је теме A_6 I боје задатак је решен, јер је тада једнакокраки $\Delta A_6A_7A_8$ тражени (сва три темена су боје I). Зато, нека је теме A_6 боје II. Слично, ако је теме A_9 I боје задатак је решен, јер је тада једнакокраки $\Delta A_7A_8A_9$ тражени (сва три темена су боје I). Зато, нека је теме A_9 боје II. Сада је остало да се посматра теме A_1 и једнакокраки троуглове $\Delta A_1A_7A_8$ и $\Delta A_1A_6A_9$. Ако је теме A_1 I боје тражени троугао је $\Delta A_1A_7A_8$ (темена су боје I). Ако је теме A_1 боје II тражени троугао је $\Delta A_1A_6A_9$ (темена су боје II).





<u>*ПРИМЕР 6.*</u> *У квадрат странице 8 уписан је правилни осмоугао тако да се на свакој страници квадрата налазе по два темена тог осмоугла. Израчунај обим и површину таквог осмоугла.*

РЕШЕЊЕ: Нека је страница осмоугла A_1A_2 ... A_7A_8 једнака $2x$. Како је ΔA_1MA_8 једнакокрако правоугли, то је $MA_1 = MA_8 = x\sqrt{2}$. Сада је јасно да је страница квадрата $MN = x\sqrt{2} + 2x + x\sqrt{2} = 2x\sqrt{2} + 2x = 8$.

Како је $x(\sqrt{2}+1)=4$, то је $x=4(\sqrt{2}-1)$, па је страница правилног осмоугла $2x=8(\sqrt{2}-1)$. Обим осмоугла је $O = 8 \cdot 2x = 64(\sqrt{2}-1)$.

Површина осмоугла се добија када се од површине квадрата одбије површина четири једнакокрако-правоугла троугла у угловима. То значи да је $P = 64 - 4x^2 = 64 - (8(\sqrt{2}-1))^2 = 64 - 128 + 128\sqrt{2} - 64 = 128(\sqrt{2}-1)$.

ЗАДАЦИ

1. Све странице датог n-тоугла су једнаке. Да ли је тај n-тоугао правилан? Скицирај један петоугао и један шестоугао чије су све странице једнаке, а многоуглови нису правилни.

2. Сви углови датог n-тоугла су једнаки. Да ли је тај n-тоугао правилан? Скицирај један четвороугао и један шестоугао чији су сви углови једнаки, а многоуглови нису правилни.

3. Докажи да је спољашњи угао правилног мноугла једнак централном углу тог многоугла.

4. Унутрашњи угао правилног многоугла који има n страница једнак је $\dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$. Докажи.

5. Постоји ли правилни многоугао чији унутрашњи угао је једнак: а) 144°; б) 128°?

6. Да ли постоји правилни многоугао чији спољашњи угао је једнак: а) 18° ; б) 11°?

7. У правилном n-тоуглу $A_1A_2\ldots A_n$ угао $\angle A_3A_1A_4 = 6^\circ$. Колико дијагонала има тај многоугао?

8. Површина правилног шестоугла је $150\sqrt{3}$. Колики је његов обим?

9. Полупречник круга уписаног у правилни шестоугао је 6. Израчунај обим и површину тог шестоугла.

10. Површина правилног осмоугла је $100 + 200\sqrt{2}$. Колики је обим тог осмоугла?

11. Полупречник круга описаног око правилног осмоугла је 8 cm. Израчунај површину тог осмоугла.

12. Израчунај површину правилног дванаестоугла, ако је полупречник круга описаног око многоугла једнак 12 cm.

13. Средишта страница правилног многоугла чине правилни многоугао. Докажи.

14. Унутрашњи углови два правилна многоугла односе се као 5 : 4. Колико страница имају ти правилни многоуглови?

15. Најмања дијагонала правилног дванаестоугла је $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ cm. Израчунај површину тог дванаестоугла.

16. Докажи да је сваки правилни многоугао конвексан.

17. Дат је правилни деветоугао $A_1A_2 \ldots A_8A_9$. Докажи да је страница деветоугла једнака разлици највеће и најмање дијагонале.

18. Дат је правилни деветоугао $A_1A_2 \ldots A_8A_9$. Колико има једнакокраких троуглова (рачунајући и једнакостраничне) чија су темена – темена правилног деветоугла?

19. У правилном дванаестоуглу $A_1A_2 \ldots A_{11}A_{12}$ постоје три дијагонале d_1, d_2 и d_3 такве да је $d_1 = d_2 + d_3$. Докажи.

20. Правилни шеснаестоугао $A_1A_2 \ldots A_{15}A_{16}$ има површину P. Колика је површина четвороугла $A_1A_4A_5A_6$?

21. Страница правилног многоугла је a, а површина P. Докажи да збир растојања од било које тачке M у таквом многоуглу до страница многоугла не зависи од положаја тачке M, већ је увек константан. Одреди ту константу.