ПОЛИНОМИ – ЈЕДНАКОСТИ, ЈЕДНАЧИНЕ И ПРИМЕНЕ

Велики број једнакости и једначина се доказује и решава применом особина полинома. Примери и задаци који следе су само неке од могућих илустрација примена квадрата збира и разлике, разлике квадрата и других алгебарских трансформација на доказивање једнакости и решавање једначина или и на решавање проблема у којима се све поменуто користи.

<u>*ПРИМЕР 1.*</u> *Израчунај збир:* $S = 7^{2019} + 7^{2018} + ... + 7 + 1$.

РЕШЕЊЕ: Ако у једнакост $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + ... + a^2 + a + 1)$ која је доказана у претходној теми, заменимо $a = 7$ и $n = 2019$, добија се следећа једнакост $(7 - 1)(7^{2019} + 7^{2018} + ... + 7 + 1) = 7^{2020} - 1$, тј $6S = 7^{2020} - 1$, одакле је $S = \dfrac{7^{2020} - 1}{6}$. Из добијене једнакости истовремено следи и да је број $7^{2020} - 1$ дељив са 6.

У редовној и додатној настави приликом решавања једначина и доказивања једнакости често се користи чињеница да је производ два или више чинилаца (израза) једнак нули ако и само ако је бар један од чинилаца једнак нули. Примери који следе су директна примена те чињенице.

<u>*ПРИМЕР 2.*</u> *Ако су a, b и c реални бројеви такви да је* $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc = 0$*, онда је* $a = b - c$ *или* $a = c - b$*. Докажи.*

РЕШЕЊЕ: Из једнакости $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc = 0$ добија се $a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc) = a^2 - (b - c)^2 = (a + (b - c))(a - (b - c)) = 0$. Како је производ два или више израза једнак нули ако и само ако је бар један од њих једнак нули следи да је $a + (b - c) = 0$ или $a - (b - c) = 0$, па је $a = c - b$ или $a = b - c$.

Ако је $P(x)$ полином са реалним коефицијентима, онда се једначина $P(x) = 0$ назива *полиномна једначина.* Најчешћа идеја за решавање полиномних једначина је да се полином $P(x)$ растави на чиниоце и потом сваки од чинилаца изједначи са нулом.

<u>*ПРИМЕР 3.*</u> *Реши једначину* $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

РЕШЕЊЕ: Из $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$, следи да $x^4 - 12x^2 + 36 - x^2 = (x^2 - 6)^2 - x^2 = (x^2 + x - 6)(x^2 - x - 6) = 0$. То значи да је $x^2 + x - 6 = 0$ или $x^2 - x - 6 = 0$. Даље је: $x^2 + x - 6 = x^2 + 3x - 2x - 6 = x(x + 3) - 2(x + 3) = (x + 3)(x - 2)$.

Слично је и $x^2 - x - 6 = x^2 + 2x - 3x - 6 = x(x + 2) - 3(x + 2) = (x + 2)(x - 3)$, па је $x^4 - 13x^2 + 36 = (x + 3)(x - 2)(x + 2)(x - 3) = 0$. Тада је скуп решења дате једначине $\{-3, -2, 2, 3\}$.

Изрази $x^2 + y^2$ и $x^2 - y^2$ представљају збир и разлику квадрата бројева x и y. Иразиx $x^3 + y^3$ и $x^3 - y^3$ представљају збир и разлику кубова тих бројева. Видели смо да је $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$. Може ли се и како на чиниоце раставити збир кубова?

<u>*ПРИМЕР 4.*</u> *Једнакост* $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ *важи за све реалне бројеве x и y. Докажи.*

РЕШЕЊЕ: Множењем $(x + y)$ са $(x^2 - xy + y^2)$ добија се да је њихов производ $x^3 - x^2y + xy^2 + yx^2 - xy^2 + y^3 = x^3 + y^3$ што је и требало доказати

<u>*ПРИМЕР 5.*</u> *Докажи да се број* $\underbrace{111...111}_{10}\underbrace{222...222}_{10}$ *може приказати као производ два узастопна природна броја.*

РЕШЕЊЕ: Нека је $x = \underbrace{111...111}_{10} = \dfrac{\overbrace{999...999}^{10}}{9} = \dfrac{10^{10} - 1}{9}$. Тада је

$\underbrace{111...111}_{10}\underbrace{222...222}_{10} = x\cdot 10^{10} + 2x = x(10^{10} + 2)$. Ако заменимо x добија се

$\dfrac{10^{10} - 1}{9}\cdot(10^{10} + 2) = \dfrac{10^{10} - 1}{3}\cdot\dfrac{10^{10} + 2}{3} = \underbrace{333...333}_{10}\cdot\underbrace{333...334}_{10}$, што је и требало доказати.

<u>*ПРИМЕР 6.*</u> *Ако су a, b и m цели бројеви такви да је* $a^2 + 2mb^2$ *квадрат целог броја, онда је број* $a^2 + mb^2$ *једнак збиру квадрата два цела броја. Докажи.*

РЕШЕЊЕ: Према условима задатка је $a^2 + 2mb^2 = c^2$ (c је цео број). Како је $c^2 - a^2 = 2mb^2$ паран број, то су бројеви a и c исте парности и $mb^2 = \dfrac{c^2 - a^2}{2}$.

Тада је $a^2 + mb^2 = a^2 + \dfrac{c^2 - a^2}{2} = \dfrac{2a^2 + c^2 - a^2}{2} = \dfrac{a^2 + c^2}{2}$. Следе једнакости

$\dfrac{a^2 + c^2}{2} = \dfrac{a^2 + 2ac + c^2}{4} + \dfrac{a^2 - 2ac + c^2}{4} = \left(\dfrac{a+c}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a-c}{2}\right)^2$. Како су a и c исте парности то су бројеви $(a + c)/2$ и $(a - c)/2$ цели.

ЗАДАЦИ

1. Одреди решења једначина: а) $3x^2 = 2x$; б) $x^2 + 6 = 5x$; в) $9x^3 = x^2$; г) $x^3 - 10x^2 + 9x = 0$;

2. За природне бројеве m и n важи једнакост $m^2 + 57n = 57m + n^2$. Колико парова различитих природних бројева испуњава дату једнакост?

3. Реши следеће једначине: а) $x^3 - 12x^2 + 35x = 0$; б) $x^4 + 9 = 10x^2$; в) $x^3 + x - 2 = 0$.

4. Одреди бројеве a, b, c такве да је $abc + a + b + c = ab + bc + ca + 1$.

5. Ако је $ad = bc$ онда је $(ab + cd)^2 = (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$. Докажи.

6. Растави на чиниоце изразе: а) $x^4 + 64$; б) $a^4 + 4b^4$.

7. Одреди природан број $к$, ако је $к^2 = 2^{15} + 4^5 + 8^6$.

8. Докажи да се полином $2x^2 + 2y^2$ може написати у облику збира квадрата два бинома .

9. Докажи да збир квадрата пет узастопних природних бројева не може бити квадрат ниједног природног броја.

10. Ако се производ четири узастопна цела броја увећа за 1, добиће се квадрат неког целог броја. Докажи.

11. Докажи једнакост $(x + 1)(x^{n-1} - x^{n-2} + ... - x + 1) = x^n + 1$ (n је било који непаран природан број већи од 1).

12. Докажи да је број $34^{2019} + 43^{2019}$ дељив са 77.

13. Ако је $x - 2y + 3z = 0$, онда полином $P(x, y, z) = 7xy + 11yz - 7xz - 2x^2 - 6y^2 - 3z^2 + 5$ има константну вредност. Докажи.

14. Докажи идентитете: а) $x(y - z) + y(z - x) - z(y - x) = 0$;
б) $(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$;
в) $(ad + bc)^2 + (ac - bd)^2 = (ad - bc)^2 + (ac + bd)^2$.

15. Израчунај: $(m + n + p)^2$.

16. Дати су полиноми више променљивих: $A = x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 3$, $B = 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 6xy - 8xz - 8yz$ и $C = 5x^2 + y^2 + 10z^2 + 4xy - 12xz - 6yz$. Докажи да се сваки од полинома A, B и C може написати у виду збира квадрата два или више полинома.

17. Реши једначину $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 120$.

18. Докажи да је број $2003 \cdot 2005 \cdot 2007 \cdot 2009 + 16$ потпун квадрат неког природног броја. Докажи и да је за сваки природан број n, бројевна вредност полинома $(2n - 3)(2n - 1)(2n + 1)(2n + 3) + 16$ потпун квадрат?

19. Растави на чиниоце израз $xy(x - y) - xz(x - z) + yz(y - z)$.

20. Ако је $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2 (a - b)$ различито од 0, онда су бројеви a, b и c, међусобно различити. Докажи.

21. Ако је $x + y = x^2 + y^2 = 2$ израчунај колико је $x^4 + y^4$?

22. Израчунај: $2019^2 - 2018^2 + 2017^2 - 2016^2 + ... + 3^2 - 2^2 + 1^2$.

23. Раставити на чиниоце изразе: а) $x^4 + x^2 + 1$; б) $x^5 + x + 1$.

24. Нека је $P(x) = x^{19} - 23x^{18} + 23x^{17} ... + 23x^3 - 23x^2 + 23x + 5$. Израчунај вредност полинома за $x = 22$.

25. Нека је $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ и $ac + bd = 0$. Израчунај $ab + cd$.

26. Број 1000...0001 (88 нула) је сложен број. Докажи.

27. Нека су x, y и z реални бројеви такви да је: $(y + z - 2x)^2 + (z + x - 2y)^2 + (x + y - 2z)^2 = (y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2$. Докажи да је $x = y = z$.

28. Докажи да број $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ није квадрат природног броја ни за један природан број n.

29. Докажи да се полиноми $x^2 + y^2$, $x^2 + xy + y^2$ и $x^2 - xy + y^2$ не могу приказати као производ два бинома по x и y.

30. Постоје ли 11 узастопних природних бројеви таквих да је збир квадрата првих шест бројева једнак збиру квадрата других пет бројева?

31. Нека су a, b и c реални бројеви и нека је $a^2 + b = b^2 + c = c^2 + a$. Израчунај вредност израза $a(a^2 - b^2) + b(b^2 - c^2) + c(c^2 - a^2)$.