ПОЛИНОМИ – НЕЈЕДНАКОСТИ, НЕЈЕДНАЧИНЕ И ПРИМЕНЕ

Ова тема има за циљ а прикаже примену садржаја везаних за полиноме на неједнакости и неједначине и прикаже примере који ову материју значајно проширују и допуњују. Посебна пажња посвећена је решавању неједначина и дат је један од могућих приступа њиховом решавању.

Основна замисао код решавања полиномних неједначина слична је оној која је коришћења код једначина. Дакле, идеја је да се једна страна неједнакости трансформише у производ линеарних чинилаца, а на другој остане само нула. Потом се анализира знак сваког од чинилаца и добије резултатни знак који се посматра у зависности од тражене релације ($>$, $<$, $\leq$, $\geq$). Овај поступак је мало осетљивија, али се опет своди на посматрање када је добијени производ већи, мањи или једнак нули.

Пре него што се пређе на конкретне неједнакости и неједначине треба се подсетити неких договора и ознака, везаних за појам бројевног интервала. Ознака (a, b) подразумева оворени интервал тј. скуп свих реалних бројева x за које је $a < x < b$. Симбол $[a, b]$ најављује затворени интервал и подразумева све реалне бројеве x такве да је $a \leq x \leq b$. Полуотворени (или полузатворени) интервали имају ознаке $(a, b]$ и $[a, b)$ које подразумевају све реалне бројеве x такве да је $a < x \leq b$, односно $a \leq x < b$.

<u>ПРИМЕР 1.</u> *Одреди све реалне бројеве x такве да је* $x^3 \geq 5x^2$.

РЕШЕЊЕ: Дата неједначина се трансформише у облик $x^3 - 5x^2 \geq 0$, односно $x^2(x - 5) \geq 0$. Као помоћно средство за анализу добијене неједначине користе се бројевне осе, тако што се на једној бројевној оси приказује знак израза x^2, а на другој знак израза $x - 5$. Познато је да је израз x^2 увек позитиван (или једнак 0) и то ће се означити тако што ће се прва бројевна оса прекрити знаковима (+).

x^2	+++++++++++++++ 0 ++++++++++++++++
$x - 5$	– 5 +++++++
$x^2 (x - 5)$	– – – – – – – – – – – – – 0 – – – – – – – 5 +++++++

Израз $x - 5$ је негативан тамо где је $x < 5$, па ће се тај део друге праве обележити знаком (–) и позитиван тамо где је $x > 5$ и тај део праве је обележен знаком (+).

Трећа бројевна права је резултујућа, јер се на њу, према правилима знака производа ((+) · (+) > 0, (–) · (–) > 0 и (+) · (–) < 0), наносити знак израза $x^2(x-5)$. У неједначини се тражи да израз буде ≥ 0. Тај услов испуњавају бројеви $x = 0$ и $5 \leq x$, па је решење неједначине скуп бројева: $[0, 0] \cup [5,\infty) = \{ 0 \} \cup [5,\infty)$.

Метод коришћења више паралелних бројевних правих може бити замењен и разликовањањем могућих случајева. Међутим, то у ситуацијама са три и више чинилаца може бити компликовано, јер $к$ чинилаца повлачи $2^к$ могућих случајева, што разматрање чини нерационалним.

ПРИМЕР 2. *Решити неједначину* $4x - x^3 \leq 0$.

РЕШЕЊЕ: Растављањем израза добија се $x(4 - x^2) = x(2 + x)(2 - x) \leq 0$. Сада имају три чиниоца, па ће бити и три бројевне праве за знакове уочених чинилаца и четврта права за резултујући знак.
На првој и другој правој је све јасно јер је десно од 0, односно (-2) знак (+), јер су изрази x и $(x + 2)$ већи од нуле за $x > 0$, односно $x > -2$. Како је $2 - x > 0$, за $x < 2$, то ће на трећој правој знак (+) бити лево од 2, а десно ће бити знак (–).

x	– – – – – – – – – – – – 0 +++++++++++++++++
$2 + x$	– – – – – – – (–2) +++ 0 +++++++++++++++++
$2 - x$	++++++++++++++++ 0 ++++ 2 – – – – – – – – –
$x(2 + x)(2 - x)$	+++++++++ (–2) – – –0 ++++ 2 – – — – – – – –

Читајући резултујући знак види се да је тражени производ непозитиван ако је $-2 \leq x \leq 0$ и $x > 2$, па се скуп решења неједначине може у облику интервала записати као: $[-2, 0] \cup [2, \infty)$.

ПРИМЕР 3. *Растави на чиниоце израз* $2y^2 - 5y + 2$ *и одреди све оне вредности реалног броја y за које је дати израз негативан.*

РЕШЕЊЕ: Како је $2y^2 - 5y + 2 = 2y^2 - 4y - y + 2 = 2y(y - 2) - (y - 2) = (y - 2)(2y - 1)$, то је $2y^2 - 5y + 2 < 0$, ако је $(y - 2)(2y - 1) < 0$. Производ два израза је негативан само ако су ти изрази различитог знака па имамо две могућности: 1^o $y - 2 < 0$ и $2y - 1 > 0$ или 2^o $y - 2 > 0$ и $2y - 1 < 0$. У првом случају се добија $\frac{1}{2} < y < 2$, а у другом случају нема решења, јер не постоји релан број y такав да је истовремено мањи од $\frac{1}{2}$ и већи од 2.

ПРИМЕР 4. *Докажи да је за ма коју вредност реалних бројева x, y и z, израз* $11x^2 + 3y^2 + 7z^2 - 2xy - 6xz - 4yz$ ненегативан.

РЕШЕЊЕ: Основна идеја доказа је да се дати полином прикаже као збир квадрата неких израза. Тако се израз $11x^2 + 3y^2 + 7z^2 - 2xy - 6xz - 4yz$ груписањем и растављањем монома који га чине може трансформисати у $11x^2 + 3y^2 + 7z^2 - 2xy - 6xz - 4yz = x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 4yz + 4z^2 + z^2 - 6xz + 9x^2 + x^2 + y^2 + 2z^2 = (x - y)^2 + (y - 2z)^2 + (z - 3x)^2 + x^2 + y^2 + 2z^2$. Добијени израз је збир квадрата и као такав је увек ненегативан. Добијени израз је једнак нули, у случају када је сваки од сабирака једнак нули, дакле за $x - y = y - 2z = z - 3x = x = y = z = 0$, а то значи када је $x = y = z = 0$.

ПРИМЕР 5. *Бројевна вредност полинома* $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ *је увек позитивна. Докажи.*

РЕШЕЊЕ 1: Разликују се три случаја: $x < 1$, $x = 1$ и $x > 1$.

Ако је $x < 1$, онда је $1 - x > 0$ и $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = x^6 + x^4(1 - x) + x^2(1 - x) + 1 - x = x^6 + (1 - x)(x^4 + x^2 + 1)$. Како су изрази $1 - x$ и $x^4 + x^2 + 1$ позитивни, то је и њихов производ позитиван. Израз x^6 је увек ненегативан, па је $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = x^6 + (1 - x)(x^4 + x^2 + 1) > 0$.

Ако је $x = 1$, онда је $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 1 > 0$.

Ако је $x > 1$, онда је $x - 1 > 0$ и $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = x^5(x - 1) + x^3(x - 1) + x(x - 1) + 1 = (x - 1)(x^5 + x^3 + x) + 1 > 0$.

РЕШЕЊЕ 2: Дати проблем се може много једноставније решити применом једнакости коју смо доказали у претходном поглављу. Наиме видели смо да је за $x = 1$, $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 1 > 0$. Ако је $x \neq 1$, онда се множењем израза са $(x - 1)$ добија $(x - 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) = x^7 - 1$. Следи да је $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = \dfrac{x^7 - 1}{x - 1}$. Како су изрази $x - 1$ и $x^7 - 1$ увек истог знака, њихов количник је увек позитиван.

ПРИМЕР 6. а) *Докажи да је* $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$

б) *Ако су x и y реални бројеви онда је* $x^2 + xy + y^2 \geq 0$.

в) *Ако су x и y реални бројеви, онда је* $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$.

Једнакост $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ се је добија директноим директним множењем $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3 = x^3 - y^3$.

Како је увек $x^2 \geq 0$, $y^2 \geq 0$ и $(x + y)^2 \geq 0$, то је и $x^2 + y^2 + (x + y)^2 \geq 0$, па се после квадрирања и сабирања добија $2x^2 + 2xy + 2y^2 \geq 0$. тј. $x^2 + xy + y^2 \geq 0$.

Изрази $(x – y)$ и $x^3 – y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ су увек истога знака, па је за било које реалне бројеве x и y испуњена неједнакост $(x - y)(x^3 - y^3) \geq 0$. Директним множењем добија се неједнакост $x^4 – xy^3 - yx^3 + y^4 \geq 0$, одакле непосредно следи и тражена неједнакост $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$.

ЗАДАЦИ

1. Реши неједначине: а) $x^2 - 6x + 8 < 0$; б) $3x^2 + 10x > 8$; в) $x^3 + 15x \leq 8x^2$.

2. Упореди реалне бројеве a и b, ако је $5(a – 1) = b + a^2$.

3. Реши неједначине: а) $x^4 – x^3 + 4x^2 – 4x > 0$; б) $x^4 – x^2 – 12 < 0$.

4. Ако је x реалан број, онда је $x^4 – x^2 + 1 > 0$. Докажи.

5. Нека је x позитиван реалан број и $x > 7$. Докажи да тада важи и неједнакост $x^2 – 11x + 28 > 0$.

6. Дат је полином $P = x^2 + y^2 + z^2 – xy – yz – zx$. За које вредности x, y и z дати полином није позитиван.

7. Ако је $\text{A} = x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 3$, онда је за ма коју вредност реалних бројева x и y израз А ненегативан. Докажи.

8. Ако је збир два броја константан, докажи да је њихов производ највећи ако су ова два броја једнака међу собом.

9. Докажи да је израз $x^{12} – x^9 + x^4 - x + 1$ позитиван за све реалне вредности броја x.

10. Ако је $x > y$, онда је $3x^3 – 4y^3 > 3x^2y – 4xy^2$. Докажи.

11. Одреди најмању вредност израза $a^4 – a^2 – 2a$.

12. Одреди све реалне бројеве x и y тако да је $(x^4 + 1)(y^4 + 1) = 4x^2y^2$.

13. Ако је $a^5 – a^3 = 24$ (a је реалан број), онда је да је $a^6 > 57$. Докажи.

14. Докажи да за сваки реалан број x важи неједнакост: $x^4 + 13x^2 + 4 \geq 6x^3 + 12x$. За које вредности реалног броја x важи једнакост?

15. Нека су a, b, c – реални бројеви и нека је $a + b + c = 0$. Докажи да је тада $ab + ac + bc \leq 0$.

16. Докажи да је вредност израза $2x^2 + 10y^2 + 17z^2 - 6xy - 2xz + 8yz + 5$ увек позитивна.

17. Дат је полином $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 10$. Одреди реалан број a тако да је за сваки реалан број x, $P(x) \geq a$.

18. Нека су x и y позитивни реални бројеви и нека је $x + y = 6$. Докажи неједнакости: а) $x^2 + y^2 \geq 18$; б) $x^3 + y^3 \geq 54$; в) $x^4 + y^4 \geq 162$.

19. Реални бројеви a, b, c, d испуњавају неједнакости: $0 < a \leq b \leq c \leq d$ и $a + b + c + d \geq 1$. Докажи да је $a^2 + 3b^2 + 5c^2 + 7d^2 \geq 1$.

20. Одреди све целе бројеве a, b и c који задовољавају неједнакост $a^2 + b^2 + c^2 + 3 < ab + 3b + 2c$.

21. Нека су a, b, c и x, y, z позитивни реални бројеви такви да важе једнакости: $a + x = b + y = c + z = 1$. Докажи да је $bx + cy + az < 1$.