ПРИМЕНА ПОЛИНОМА НА ДЕЉИВОСТ

Елементарна теорија бројева и проблеми везани за дељивост, просте и сложене бројеве ... имају значајну потпору у алгебарским трансформација полинома. Примери који следе илуструју неке од могућих примена полинома у елементарној теорији бројева или доказују неко од, раније, без ваљаног доказа, прихваћених и коришћених тврђења (на пример критеријуми дељивости уопште, а посебно са 3, 9, 11 ...). Сигурно је да ће изложена материја бити и занимљива и корисна.

<u>ПРИМЕР 1.</u> Ако је p прост број већи од 3, онда је $p^2 - 1$ дељиво са 24. Докажи.

РЕШЕЊЕ: Ако је p прост број већи од 3, онда је p непаран број, па су бројеви $p - 1$ и $p + 1$ узастопни парни бројеви, што значи да је један од њих дељив са 2, а други дељив са 4. Бројеви $p - 1$, p и $p + 1$ су три узастопна природна броја, што значи да је један од њих дељив са 3. Како то није број p, јер у том случају p не би био прост, то је један од бројева $p - 1$ или $p + 1$. Како је $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$, то је дати израз дељив са 2, 4 и 3, дакле и са $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$.

<u>ПРИМЕР 2.</u> Ако је а цео број који није дељив ни са 2 ни са 3, онда је број $4a^2 + 3a + 5$ дељив са 6. Докажи.

РЕШЕЊЕ: Ако је a цео број онда a има облик: $6к - 1$, $6к$, $6к + 1$, $6к + 2$, $6к + 3$, $6к + 4$ ($к \in Z$). Једино бројеви облика $6к - 1$ и $6к + 1$ нису дељиви ни са 2 ни са 3.

Ако је $a = 6к - 1$, онда је $4a^2 + 3a + 5 = 4(6к - 1)^2 + 3(6к - 1) + 5 = 4(36к^2 - 12к + 1) + 18к - 3 + 5 = 144к^2 - 48к + 4 + 18к - 3 + 5 = 144к^2 - 30к + 6 = 6(24к^2 - 5к + 1)$, што је очигледно дељиво са 6.

Ако је $a = 6к + 1$, онда је $4a^2 + 3a + 5 = 4(6к + 1)^2 + 3(6к + 1) + 5 = 4(36к^2 + 12к + 1) + 18к + 3 + 5 = 144к^2 + 48к + 4 + 18к + 3 + 5 = 144к^2 + 66к + 12 = 6(24к^2 + 11к + 2)$, што је такође дељиво са 6.

<u>ПРИМЕР 3.</u> Докажи да је број $8^n + 252n - 1$ дељив са 7 за сваки природан број n.

РЕШЕЊЕ: Како је $8^n + 252n - 1 = 8^n - 1 + 7 \cdot 36n = (8 - 1)(8^{n-1} + 8^{n-2} + ... + 8^2 + 8 + 1) + 7 \cdot 36n$, добија се да је $8^n + 252n - 1 = 7A + 7B = 7(A + B)$, где је $A = 8^{n-1} + ... + 8 + 1$ и $B = 36n$, чиме је дељивост датог броја са 7 доказана.

<u>*ПРИМЕР 4.*</u> *Одреди за које вредности природног броја n је број $n^4 + 4$ прост.*

Ако је $n = 1$, онда је $n^4 + 4 = 1 + 4 = 5$, па је $n = 1$, једно решење.

Из $n^4 + 4 = n^4 + 4 + 4n^2 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$ следи да је $n^4 + 4 = \left((n+1)^2 + 1\right)\left((n-1)^2 + 1\right)$. Јасно је да су, за $n \geq 2$ оба чиниоца већи од 1, па је добијени број сложен. Дакле, дати број $n^4 + 4$ је прост само за $n = 1$.

<u>*ПРИМЕР 5.*</u> *Ако се са $S(n)$ означи збир цифара природног броја n, онда је $n - S(n)$ увек дељиво са 9. Докажи.*

РЕШЕЊЕ: Нека је $\overline{a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_o}$ декадни запис природног броја n. Тада је полиномијални запис броја $n = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_o$ и тада је збир циафра броја n једнак $a_n + a_n + ... + a_2 + a_1 + a_o$. Следи да је $n - S(n) = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_o - (a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_o) = a_n \cdot (10^n - 1) + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + ... + a_2 \cdot (10^2 - 1) + a_1 \cdot (10 - 1)$. Како је сваки од израза $10^к - 1$ дељив са 9, то је тврђење доказано.

Дакле, природан број n и његов збир цифара $S(n)$ при дељењу са 9 имају једнаке остатке.

Из свега претходно реченог проистичу и критеријуми дељивости природног броја n са 3 и 9, јер када је остатак при дељењу природног броја n са 9 једнак 0, онда је и остатак при дељењу $S(n)$, такође 0 (и обрнуто), па су и n и $S(n)$ у том случају дељиви са 9, а самим тим и са 3.

<u>*ПРИМЕР 6.*</u> *Природан број m је дељив са 11 ако је разлика његовог збира цифара на парним и збира цифара на непарним позицијама дељива са 11. Докажи.*

РЕШЕЊЕ: Нека је $\overline{a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_o}$ декадни запис природног броја m. Тада је $m = a_o + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_n \cdot 10^n$. Трансформацијом полиномијалног облика броја n добија се $a_o + a_1 \cdot (10 + 1) - a_1 + a_2 \cdot (10 - 1) + a_2 + a_3 \cdot (10^3 + 1) - a_3 + a_4 \cdot (10^4 - 1) + a_4 + ... = m$. Јасно је да су бројеви $10^к - 1 = 999...999$ дељиви са 11 за свако парно $к$ и да су бројеви $10^к + 1$ дељиви са $10 + 1 = 11$ за свако непарно $к$. Следи да је број m дељив са 11 ако је број $a_o - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 \; ... = (a_o + a_2 + a_4 + \; ...) - (a_1 + a_3 + a_5 + \; ...)$ дељив са 11 и тиме је тврђење доказано.

У задацима који следе растављањем полинома на чиниоце и другим трансформацијама решавају се занимљиви проблеми дељивости.

ЗАДАЦИ

1. Ако је n природан број онда је: а) $n^3 + 5n$ дељиво са 6; б) $n^5 - n$ дељиво са 30; с) $n^7 - 7n^5 + 13n^3 - 19n$ дељиво са 6.

2. Постоје ли различити природни бројеви a, b и c такви да је њихов збир дељив са сваким од сабирака? Постоје ли четири таква природна броја?

3. Ако је n паран природан број онда је израз $n^3 + 20n$ дељив са 48. Докажи.

4. Постоји ли природан број n такав да је број $n^2 + n + 2$ дељив са 49?

5. Може ли се сума од 25000 динара исплатити са десет новчаних купона који имају вредност 1000, 3000 или 5000 динара?

6. Одреди све природне бројеве a и b такве да је њихов најмањи заједнички садржалац за 12 већи од њиховог највећег заједничког делиоца.

7. Одреди све природне бројеве a и b такве да је њихов најмањи заједнички садржалац 20 пута већи од њиховог највећег заједничког делиоца.

8. Ако је x цео број онда је $(x^2 + 5x)(x^2 + 5x + 10) + 24$ дељиво са 24. Докажи.

9. Ако су p и q прости бројеви већи од 3, тада је $p^4 - q^4$ дељиво са 48. Докажи.

10. Одреди све просте бројеве p за које је $2^p + p^2$ такође прост број.

11. Дат је полином $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$. Ако је q прост број већи од 3, онда је $P(q)$ дељиво са 24. Докажи. Одреди најмањи прост број q такав да је $P(q)$ дељиво са 1560.

12. Докажи да је збир кубова три узастопна природна броја дељив са 9.

13. Докажи да је број $2007^{2005} - 2007$ дељив са 90.

14. Да ли постоји природан број n такав да је $n^3 - n + 2^n$ дељив са 2019?

15. Ако су m и n различити природни бројеви, онда је $m^4 + 4n^4$ сложен број. Докажи.

16. Да ли у низу 11, 111, 1111, 11111, ... има потпуних квадрата?

17. Постоји ли природан број n такав да се при дељењу броја n са његовим збиром цифара добије количник 13 и остатак 13.

18. Одреди све природне бројеве n такве да је $n + S(n) = 100$.

19. Докажи да је број $7^{25} - 25^7$ дељив са 6.

20. Да ли је број $7^{777} - 7$ дељив са 420?

21. Нека је $x^4 - 3x + 2019 = (x - 1)A(x) + B$. Колико је $A(x)$? Колико је B?

22. Ако природан број n нема простих делилаца мањих или једнаких $\sqrt{n}$, онда је n прост број. Докажи.

23. Нека су x и y цели бројеви такви да је $14x + 13y$ дељив са 11. Докажи да је тада и израз $19x + 9y$ дељив са 11.

24. Нека је $к$ природан број такав да су $4к + 5$ и $9к + 4$ потпуни квадрати. Докажи да је тада и број $7к + 1$ потпун квадрат.

25. Колико има двоцифрених природних бројева n таквих да је израз $2^n - n^2$ дељив са 7?

26. Докажи да се квадрат природног броја не може завршавати са две непарне цифре.

27. Нека је $x = 44 \ldots 44$ (11 четворки). Докажи да је број $x^2 - x - 2$ дељив са 270.

28. Збир два природна броја је 123. Докажи да њихов производ није дељив са 123.

29. Нека су a и b природни бројеви и нека је $a^2 + b^2$ дељиво са ab. Докажи да је $a = b$.

30. Одреди све природне бројеве n такве да је: а) $n + \mathrm{S}(n) = 2019$; б) $n + S(n) + S(S(n)) = 2019$.

31. Нека је $P(x)$ полином чији су коефицијенти цели бројеви. Познато је да је $P(1) = 1$. Одреди природан број n, ако се зна да је $P(n) = 0$.

32. Познато је да је $P(x)$ полином чији су коефицијенти цели бројеви, Познато је да је $P(1) = 11$, $P(11) = 1$ и $P(к) = к$. Одреди цео број $к$.