МНОГОУГАО

И у досадашњем бављењу математиком било је речи о троугловима и четвороугловима, а понекад и о другим многоугловима: петоугловима, шестоугловима... Циљ ове теме је да се детаљније позабави многоугловима и материјом везаном за странице, дијагонале, углове ... многоуглова, њихову подударност, али и израчунавање њиховог обима и површине. Ради лакше комуникације, у наредним разматрањима, за многоугао који има n страница најчешће ће се користити термин *n-тоугао*.

<u>*ПРИМЕР 1.*</u> *Колико највише оштрих углова може имати конвексан многоугао*?

РЕШЕЊЕ 1. Познато је да је збир спољашњих углова многоугла 360^o. Ако би у многоуглу било $к$ оштрих углова, онда би многоугао имао исто толико и спољашњих тупих углова. Како је туп угао већи од 90^o, то је $к \cdot 90^o < 360^o$, па је $к < 4$, што значи да у једном многоуглу може бити највише три оштра угла.

РЕШЕЊЕ 2: Посматра се општи случај, тј. многоугао који има n страница и n углова. Нека је број оштрих углова у n-тоуглу једнак $к$. Тада многоугао има $n - к$ углова који су прави или тупи. Ако је $S_о$ збир оштрих углова многоугла, онда је $S_о < к \cdot 90^o$. Слично, ако је $S_т$ збир свих правих и тупих углова многоугла онда је $S_т < (n - к)\cdot 180^o$. Како је збир свих углова многоугла једнак $(n - 2) \cdot 180^o$ то је $(n - 2) \cdot 180^o = S_о + S_т < к\cdot 90^o + (n - к)\cdot 180^o$. Из ове релације се дељењем са 90^o добија неједнакост $2(n - 2) < к + 2(n - к)$, тј $2n - 4 < к + 2n - 2к$, одакле је $к < 4$.

<u>*ПРИМЕР 2.*</u> *Конвексан n-тоугао* ($n > 3$) *се дели на m троуглова све док сви добијени троуглови не буду једнакокраки. Докажи да је* $2 \le m \le 4(n - 2)$.

РЕШЕЊЕ: Сваки конвексни n-тоугао се може коришћењем његових дијагонала из једног темена поделити на $n - 2$ троуглова. Сваки од $n - 2$ троуглова се својом висином конструисаном из темена највећег угла може поделити на $2(n - 2)$ правоугла троугла. Како се сваки правоугли троугао хипотенузином тежишном дужи дели на два једнакокрака троугла, на тај начин се добија $4(n - 2)$ једнакокраких троуглова. Лева страна неједнакости је могућа када се ромб својом дијагоналом подели на два троугла.

<u>*ПРИМЕР 3.*</u> *Постоји ли многоугао чији је збир унутрашњих углова једнак* $234\ 567\ 890^o$?

РЕШЕЊЕ: Збир унутрашњих углова многоугла је дељив са 180. Како број 234 567 890 није дељив ни са 9 ни са 20, то такав многоугао не постоји.

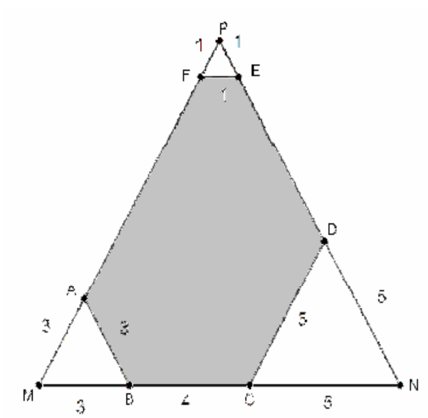
<u>*ПРИМЕР 4.*</u> *Постоји ли многоугао који има* 123 456 *дијагонала*?

РЕШЕЊЕ: Ако тражени многоугао има n страница, онда је број његових дијагонала $\frac{n(n-3)}{2} = 123456$. Тада је $n(n-3) = 246912$. Производ бројева $n(n-3)$ се увек завршава цифрама $0 \cdot 7$, $1 \cdot 8$, $2 \cdot 9$, $3 \cdot 0$, $4 \cdot 1$, $5 \cdot 2$, $6 \cdot 3$, $7 \cdot 4$, $8 \cdot 5$, $9 \cdot 6$, тј. цифрама 0, 4 и 8 и никада не зваршава цифама 2 и 6, па добијена једнакост није могућа.

<u>*ПРИМЕР 5.*</u> *Многоугао M има 12 дијагонала више од многоугла N. Колико страница има многоугао M, а колико многоугао N*?

РЕШЕЊЕ: Ако многоуглови M и N имају m, односно n страница, онда је $\frac{m(m-3)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} = 12$. Тада је $m^2 - 3m - n^2 + 3n = 24$. Ако се ова једнакост напише као $(m+n)(m-n) - 3(m-n) = (m-n)(m+n-3) = 24$, онда се види да чиниоци морају бити различите парности. То значи да имају само две могућности: $m - n = 1$, $m + n - 3 = 24$; $m - n = 3$, $m + n - 3 = 8$. Добија се да је $m - n = 1$, $m + n = 27$ и $m - n = 3$, $m + n = 11$, па се добијају два решења: $m = 14$, $n = 13$ и $m = 7$, $n = 4$.

<u>*ПРИМЕР 6.*</u> *У конвексном шестоуглу ABCDEF сви углови су једнаки. Одреди дужине страница DE и FA, ако је AB = 3, BC = 4, CD = 5 и EF = 1.*



РЕШЕЊЕ: Како је збир углова у шестоуглу $4 \cdot 180^{\circ}$ и како су сви унутрашњи углови једнаки, то су унутрашњи углови многоугла по 120°, а спољашњи, по 60°. Ако се над страницама $AB = 3$, $CD = 5$, $EF = 1$, као основицама уоче једнакостранични троуглови ABM, CDN и EFP, добија се једнакостранични троугао MNP чија је страница $MN = MB + BC + CN = 3 + 4 + 5 = 12$. Следи да су дужине страница шестоугла: $DE = 12 - 5 - 1 = 6$ и $AF = 12 - 1 - 3 = 8$.

ЗАДАЦИ

1. Постоји ли конвексан четвороугао такав да га свака од његових дијагонала дели на два оштроугла троугла?

2. Колики је збир свих унутрашњих конвексних и неконвексних углова било које звезде: а) петокраке звезде; б) n-токраке звезде?

3. Колико страница има конвексни многоугао који има 65 дијагонала?

4. Збир броја страница и броја дијагонала конвексног многоугла је 190. Колики је збир углова тог многоугла?

5. Постоји ли n-тоугао код кога је: а) број дијагонала једнак броју страница? б) број дијагонала је седам пута већи од броја страница?

6. Ако се број страница конвексног многоугла повећа за 6, онда се број дијагонала повећа за 33. Колико страница и дијагонала имају први и други многоугао?

7. Ако се број страница конвексног многоугла повећа за 3, онда други конвексни многоугао има три пута више дијагонала од првог. Колико дијагонала има први, а колико други многоугао?

8. Када се број који представља збир углова у многоуглу помножи са бројем дијагонала тог многоугла добије се број 21600. Колико страница има тај многоугао?

9. Докажи да у конвексном седмоуглу постоји бар један угао који је већи од 128°.

10. Постоји ли петоугао чије су дужине страница 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm и 11 cm?

11. Над страницама квадрата *ABCD* странице $a = 10$ cm са спољне стране су конструисани једнакостранични троуглови *ABE, BCF, CDG DAH*. Одреди обим и површину тако добијеног осмоугла *AEBFCGDH*. Одреди и површину четвороугла *EFGH*.

12. Над страницама једнакостраничног троугла *MNP* странице $a = 12$ cm са спољне стране конструисани су квадрати *ABPN, CDMP* и *EFNM*. Одреди обим и површину шестоугла *ABCDEF*.

13. Ако се број страница конвексног многоугла повећа два пута, онда се број његових дијагонала повећа за 165. Колики је збир углова у том многоуглу?

14. Један угао конвексног дванестоугла је 44^o. Докажи да је бар један угао тог многоугла већи од 150^o.

15. Многоугао има 777 страница. Могу ли сви његови углови имати цео број степени?

16. Сви унутрашњи углови многоугла су мањи од 179^o. Колико највише страница може имати тај многоугао?

17. Одреди број страница конвексног многоугла, ако сви његови углови нису мањи од 143^o и нису већи од 146^o.

18. Постоји ли конвексан петоугао чији углови су a^o, b^o, c^o, d^o, e^o такав да се од ма које три дужи дужине a cm, b cm, c cm , d cm, e cm увек може конструисати троугао (a, b, c, d, e су различити природни бројеви)?

19. Докажи да у сваком конвекном петоуглу постоје три дијагонале од којих се може конструисати троугао.

20. Ако је O обим петоугла, а D збир дужина његових дијагонала, онда важи неједнакост $O/2 < D < 2O$. Докажи.

21. Колико страница има многоугао, ако је збир његових тупих углова једнак 1260^o?

22. Све странице петоугла $ABCDE$ су једнаке, а $\angle BAE = 2\angle CAD$. Одреди $\angle$ABE.

23. Над страницама правоуглог троугла, чије су катете a и b, конструисани су са спољне стране квадрати. Израчунај површину шестоугла чија су темена, слободна темена добијених квадрата, тј. темена која не припадају троуглу.

24. Докажи да у сваком конвексном десетоуглу постоје бар две дијагонале које се секу под углом мањим од 6^o. (Напомена: Ако су две дијагонале паралелне сматра се да заклапају угао од 0^o)