АЛГЕБАРСКИ РАЗЛОМЦИ

Садржаји везани за алгебарске разломке нису присутни у редовној настави. Зато је циљ ове наставне теме да се нешто детаљније упознају основни проблеми везаним за алгебарске разломке као што су: дефинисаност алгебарских разломка, проширивање и скраћивање разломака, одређивање целобројних вредности разломака ...

Шта су алгебарски разломци?

Алгебарски разломци су константе 3, - 6, 1/2 ..., променљиве *a*, *b, c ... x, y ... A, B, C* ..., изрази који се добијају сабирањем, одузимањем, можењем и дељењем константи, променљивих, изрази који се добијају сабирањем, одузимање, множењем и дељењем већ поменутих алгебарских израза. При свему томе код конструкције алгебарских израза дељењем два израза мора се водити рачуна да делилац (именилац) не буде нула, јер дељење са нулом нема смисла. Дакле, ако су A и B алгебарски разломци, онда су и $A + B$, $A - B$, $A \cdot B$, $A : B = A / B$ ($B \neq 0$), алгебарски разломци.

<u>ПРИМЕР 1.</u> Одреди вредност разломка $\dfrac{A \cdot R \cdot H \cdot I \cdot M \cdot E \cdot D}{E \cdot U \cdot K \cdot L \cdot I \cdot D}$ *ако једнаким словима одговарају једнаке цифре и различитим словима различите цифре.*

РЕШЕЊЕ: Пребројавањем слова утврђује се да су заступљена слова: *A, R, H, I, M, E, D, U, K, L*. Како слова, а и цифара има тачно 10, то значи да је један од тражених бројева и 0. Како нула не може бити у имениоцу, то је она у бројиоцу разломка, што повлачи да је вредност разломка (без обзира на распоред осталих цифара у бројиоцу и имениоцу разломка) једнака 0.

<u>ПРИМЕР 2.</u> Дат је алгебарски разломак $\dfrac{x^3-4x^2+4x}{x^3-4x}$. *Одеди за које вредности променљиве x је дати разломак дефинисан. Може ли се дати разломак скратити*?

<u>РЕШЕЊЕ:</u> Из $\dfrac{x^3-4x^2+4x}{x^3-4x} = \dfrac{x(x^2-4x+4)}{x(x^2-4)} = \dfrac{x(x-2)^2}{x(x-2)(x+2)} = \dfrac{x-2}{x+2}$

следи да је дати разломак дефинисан само ако је његов именилац различит од нуле. То значи да је $x(x-2)(x+2) \neq 0$, тј. x различито од 0, 2 и –2. Тада, тј. ако је x различито од 0, 2 и –2, је дозвољено и извршено скраћивање датог разломка.

<u>*ПРИМЕР 3.*</u> *Одреди решења једначине:* $\dfrac{x^3-9x}{x^2-9x+18}=0$.

<u>РЕШЕЊЕ:</u> Алгебарски разломак је једнак нули ако му је бројилац једнак нули и именилац различит од нуле. Како је $\dfrac{x^3-9x}{x^2-9x+18}=\dfrac{x(x^2-9)}{x^2-6x-3x+18}$ $=\dfrac{x(x-3)(x+3)}{x(x-6)-3(x-6)}=\dfrac{x(x-3)(x+3)}{(x-6)(x-3)}=0$, то је дата једначина дефинисана ако је $x \neq 3$ и $x \neq 6$. Како су нуле бројиоца $x = 0$, $x = 3$ и $x = -3$, решења дате једначине су само $x = 0$ и $x = -3$, јер је $x \neq 3$.

<u>*ПРИМЕР 4.*</u> *Одреди све целобројне вредности разломка* $\dfrac{n+1}{n-2}$ $(n \in Z)$.

<u>РЕШЕЊЕ:</u> Дати разломак је дефинисан ако је $n-2 \neq 0$, тј. $n \neq 2$. Како је $n+1 = n-2+3$, то се дати разломак може трансформисати на следећи начин $\dfrac{n+1}{n-2}=\dfrac{n-2+3}{n-2}=\dfrac{n-2}{n-2}+\dfrac{3}{n-2}=1+\dfrac{3}{n-2}$. Добијени разломак је цео број, ако је $\dfrac{3}{n-2}$ цео број, тј. ако се $n-2$ садржи у 3. Цели бројеви - делиоци броја 3 су 1, –1, 3 и – 3, па је $(n-2) \in \{1, -1, 3, -3\}$ и $n \in \{3, 1, 5, -1\}$. За ове вредности броја n разломак $\dfrac{n+1}{n-2}$ узима целобројне вредности 4, –2, 2, 0.

<u>*ПРИМЕР 5.*</u> *Докажи да се разломак* $\dfrac{5n+7}{2n+3}$ *не може скратити ни за једну целобројну вредност n.*

<u>РЕШЕЊЕ:</u> Проблем се своди на доказ да су за сваки цео број n бројилац $5n+7$ и именилац $2n+3$ немају заједничких делилаца, тј. да су узајамно прости бројеви. Ако је d НЗД бројева $5n+7$ и $2n+3$,онда је $5n+7=ad$ и $2n+3=bd$ (a и b су узајмно прости природни бројеви). Тада је $10n+14 = 2ad$ и $10n+15=5bd$. Ако се од друге једнакости одузме прва добије се да је $10n+15-10n-14=1=5bd-2ad=d(5b-2a)$. Како је $d(5b-2a)=1$, значи да је $d=1$, чиме је доказано да су бројеви $5n+7$ и $2n+3$ узајамно прости.

ПРИМЕР 6. *Ако је* $a+\dfrac{1}{a}$ *цео број (а није цео број), онда је и* $a^2+\dfrac{1}{a^2}$ *такође цео број. Докажи.*

РЕШЕЊЕ: Нека је $a+\dfrac{1}{a}=\kappa$ (κ је цео број). Квадрирањем преходне једнакости добија се $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2=a^2+2a\cdot\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a^2}=a^2+2+\dfrac{1}{a^2}=\kappa^2$.

Следи да је $a^2+\dfrac{1}{a^2}=\kappa^2-2$. Како су κ^2 и 2 цели бројеви то је и њихова разлика цео број, што је и требало доказати.

ЗАДАЦИ

1. Одреди услове под којима се могу скратити, а затим и скрати разломке: *а*) $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1}$; *б*) $\dfrac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac}$: *в*) $\dfrac{x^4+4}{x^3-2x^2+2x}$

2. За које вредности целог броја n су следећи разломци такође целобројни: *а*) $\dfrac{2n+6}{n^2-9}$ *б*) $\dfrac{n-11}{n-3}$ *в*) $\dfrac{n^2-5n+6}{n^2-4}$

3. Докажи да се ни за једно n из скупа целих бројева не могу скратити разломци: *а*) $\dfrac{n+1}{n}$ ($n\geq 2$) *б*) $\dfrac{2n+1}{n+1}$ *в*) $\dfrac{12n^2+18n+3}{18n^2+27n+5}$.

4. За које целе бројеве n се може скратити разломак $\dfrac{3n+5}{7n+9}$.

5. Дати су разломци 35/396 и 28/297. Одреди најмањи од свих позитивних рационалних бројева који је дељив са датим разломцима.

6. Дати су разломци 8/15 и 12/35. Одреди највећи рационалан број који се у оба дата разломка садржи цео број пута.

7. Ако је $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=0$ и $x^2+y^2=2$, израчунај $x+x^{2019}+y^{2019}+y$ и $7x^3+x^{2020}-y^{2020}+7y^3$.

8. Може ли се полином $P(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)$ $(x\neq 1)$ приказати као количник два бинома?

9. Познато је да је $a + \frac{b^2}{a} = b + \frac{a^2}{b}$. Да ли је $a = b$?

10. Постоје ли различити природни бројеви *a, b,* и *c* такви да је вредност израза $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right)$ такође природан број?

11. За природне бројеве *a, b, c* и *d* важи једнакост $\frac{a-b}{c-d} = \frac{a+b}{c+d}$. Да ли је могућа једнакост $abcd = 2025$? Ако је могућа, одреди бар једно од могућих решења.

12. Ако је $a + \frac{1}{a}$ цео број (*a* није цео број), онда су и бројеви $a^3 + \frac{1}{a^3}$ и $a^4 + \frac{1}{a^4}$ такође цели бројеви.

13. Ако је $a + \frac{1}{a} = 2$, онда је $a^2 + \frac{1}{a^2} = a^3 + \frac{1}{a^3} = a^{2020} + \frac{1}{a^{2020}} = 2$. Докажи.

14. Ако је $a + \frac{1}{a} = 1$ израчунај: $a^2 + \frac{1}{a^2}$, $a^3 + \frac{1}{a^3}$ и $a^{2019} + \frac{1}{a^{2019}}$.

15. Ако је $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ онда је $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$ $(b \neq 0, c \neq 0)$. Докажи.

16. Једанаест девојчица и *n* дечака су набрали $n^2 + 8n + 7$ гајбица са малином, при чему је свако од њих набрао једнак број гајбица. Колико је било дечака? Колико гајбица је набрао свако од њих?

17. Нека су *a*, *b*, *c* и *x*, *y*, *z* реални бројеви. Ако је $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ $(x, y, z \neq 0)$. онда је $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2$. Докажи.

18. Одреди све целе бројеве *a* за које је разломак $\frac{a^2+1}{a-1}$ $(a \neq 1)$ такође цео број.

19. Разломак $\frac{2n-3}{n^2-3n+2}$ се не може скратити ни за један природан број *n* који је већи од 2. Докажи.

20. За реалне бројеве *a, b, c* и *d* различите од нуле, важи једнакост: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$. Одреди знак производа *ac*.

21. Докажи неједнакост: $\left(1+\frac{1}{1\cdot 3}\right)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4}\right)\left(1+\frac{1}{3\cdot 5}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)<2$, где је n неки природан број.

22. Ако је a позитиван рационалан број који је различит од 1, онда број $a+\frac{1}{a}$ није цео број. Докажи.