mr.sc. Predrag Dukić
Maja Kalebić, prof.
OŠ Vidikovac Pula

Geometrija je uvijek tu

Rezime

Geometrija je opipljiv prostor, to je onaj prostor u kojem dijete diše, živi i kreće se. To je prostor koji učenik mora naučiti poznavati, istraživati i osvajati, kako bi u njemu bolje živio, disao i kretao se.

H. Freudenthal

Geometrijski pojmovi usvajaju se intuitivno još u neformalnoj fazi učenja kada dijete, ovisno o mentalnoj dobi, zna nacrtati kružnicu, igra se raznim didaktičkim kockicama, prepoznaje položaj predmeta smještenog u kutu i slično. Formalnim matematičkim obrazovanjem učenik stječe generička znanja o svojstvima dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih geometrijskih oblika, određivanju njihovih položaja i odnosa upotrebom koordinatne geometrije te primjeni geometrijskih koncepata u drugim granama matematike. U svakoj fazi učenja kod učenika valja razvijati prostorni zor za prepoznavanje geometrijskih svojstava i simetrija u objektima iz realne stvarnosti i svakodnevnog života.

Ovaj rad prikazuje primjenu geometrije u dva područja. Prvi dio odnosi se na povezivanje geometrijskih koncepata s teorijom vjerojatnosti. Kroz nekoliko životnih primjera o geometrijskoj vjerojatnosti u 8. razredu osnovne škole učenicima se na slikovit način prikazuje kako geometriju primijeniti za računanje vjerojatnosti kada je skup događaja interval brojeva. Drugi dio rada donosi primjenu geometrijskih znanja u izradi 3D modela u alatu dinamičke geometrije i njihov virtualni prikaz pomoću holograma. Taj dio pokazuje primjenu geometrije u računarstvu jer je matematičko modeliranje geometrijskim konceptima izrazito prisutno u izradi 3D modela u virtualnom okruženju. Cilj rada je pokazati kako zadaci koji povezuju više grana matematike kod učenika razvijaju kreativnost i trajna znanja.

HOLOGRAM I 3D MODELI

Geometrija je grana matematike koja proučava oblike, njihova svojstva i odnose. Osnovni su geometrijski pojmovi točka, pravac, ravnina i prostor, a ostali su geometrijski likovi, geometrijska tijela, dužina, kružnica, geometrijski odnosi.

Počeci geometrije vezani su uz praktične potrebe, poput mjerenja površine zemljišta ili volumena posuda, pa je ona više bila empirijska znanost. Prakticirala se u svim starim kulturama i civilizacijama.

Upravo zbog svoje praktične upotrebe i lakog empirijskog doživljaja pogodna je za uvođenje učenika u „matematičku" znanost. U prošlosti, geometrija kao znanost u pravom smislu postaje tek kod Grka kada se nove geometrijske spoznaje strogo dokazuju putem, recimo, Talesova ili Pitagorina poučka. S Euklidom i njegovim Elementima geometrija se zasniva aksiomatski i deduktivno.

Priliku da učenicima približimo znanstveni dokaz, najlakše je putem geometrije. Već u šestom razredu osnovne škole učenici kod učenja površine paralelograma, trapeza posežu za dokazima. Površinu paralelograma svodimo na površinu pravokutnika, dok površinu trapeza najlakše demonstriramo putem dvostruke površine pravokutnika.
Po analogiji osnovna znanja iz obujma geometrijskih tijela kao temeljni matematički koncepti, koji se uvode po novom kurikulumu u 5. razredu pomažu nam da slično kao što smo uveli znanstveni dokaz na likove, primijenimo na obujam prizme.
Ta znanja nam pomažu da ove koncepte proširimo i generaliziramo.

Da bi učenicima olakšali vizualizaciju prethodno navedenih dokaza, moguće je korištenje software za 2D i 3D modeliranje.
Upotrebnom 3D alata postiže se prostorna vizualizacija, ali i primjenjuju osnovna IKT znanja za izradu 3D predmeta.
U ovom radu prikazat ćemo kako izraditi 3D modele matematičkim znanjima o mrežama tijela te dinamički prikazati dokaz obujma prizme putem holograma.

GEOMETRIJSKA VJEROJATNOST U ŽIVOTU JEDNOG OSMAŠA

Upoznavanje učenika s pojmom vjerojatnosti počinje u osnovnoj školi. Nekoliko primjera iz stvarnog života učenicima će najbolje približiti koncept geometrijske vjerojatnosti, a osobito ako su to njima bliske životne situacije koje su ispričane u sljedećih nekoliko primjera.

Marko je učenik 8. razreda osnovne škole. Odličan je učenik, trenira plivanje i pohađa glazbenu školu. Osim toga, Marko je i izvrstan matematičar što mu često pomaže u donošenju odluka u svakodnevnim životnim situacijama.

Primjer 4.1. Zaredalo se nekoliko nastupa s orkestrom i veliko finale međuškolskog natjecanja iz plivanja i Marko ovo jutro nije čuo ni prvi ni drugi alarm svoje budilice. Probudio se tek na zvono na vratima. Bio je to djed koji živi u prizemlju njihove obiteljske kuće. Zalijevao je vrt i primijetio da Marko ne izlazi iz stana u uobičajeno vrijeme polaska u školu. Marko se odmah spremio i procijenio svoju situaciju. Ako krene pješke u školu, sigurno će zakasniti, te je zamolio djeda da ga odveze u školu. Do škole postoje tri raskrižja sa semaforima i Marko je znao da neće zakasniti ako prođu zeleni val. Bitno je da na prvom semaforu bude zeleno svjetlo. Ciklus izmjene prvog semafora je crveno 35 sekundi, žuto 5 sekundi i zeleno svjetlo 50 sekundi. Marko se zapitao kolika je vjerojatnost da danas neće zakasniti u školu?

Rješenje. Prostor elementarnih događaja je jedan ciklus izmjene svjetala na semaforu, a to je 35 s + 5 s + 50 s = 90 s. Elementarni događaj povoljan za Marka je upaljeno zeleno svjetlo koje traje 50 s i s lakoćom je izračunao vjerojatnost upaljenog zelenog svjetla: $\frac{50}{90}=\frac{5}{9}=0{,}555\ldots\approx 0{,}56$. Marko je zadovoljan jer je vjerojatnost da neće zakasniti 56%.

Primjer 4.2. Marko je stigao u školu na vrijeme, sve je teklo svojim tokom. Kako se bližio veliki odmor i marenda, Marko je bio sve gladniji.

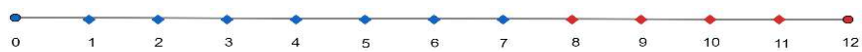
Zbog jutrošnje gužve, nije imao pripremljen sendvič u torbi i odlučio je otići u obližnju trgovinu u kupovinu. Veliki odmor u Markovoj školi traje 15 minuta. Od škole do trgovine potrebne su mu 3 minute, put natrag traje 2 minute dulje. Kako to nije prvi put, Marko je već znao da je vjerojatnost da će stići na vrijeme na sat 58%. Kako je to izračunao?

Rješenje. Odmor traje 15 minuta, put do trgovine 3 minute, pa za kupovinu i povratak ostaje

$$15 \text{ min} - 3 \text{ min} = 12 \text{ min}.$$

Za povratak je potrebno 3 min + 2 min = 5 min. Dakle, vrijeme za kupovinu je

$$12 \text{ min} - 5 \text{ min} = 7 \text{ min},$$



pa tražena vjerojatnost iznosi

$$\frac{7}{12} = 0{,}58333\ldots \approx 0{,}58.$$

Primjer 4.3. Markov najbolji prijatelj je Luka. U istom su razredu i pohađaju istu glazbenu školu. Luka je odličan matematičar, jako ga zanima informatika i sve u vezi virtualne stvarnosti. Obojica su fanovi „Pobjednikuškoli“ virtualne igre. Danas imaju aktivnosti cijeli dan i dogovor je da će u pauzi od 14 do 15 sati igrati zajedno „online“. Nemaju točno vrijeme kada će se naći, već dogovor da će jedan drugoga čekati najviše 15 minuta nakon logiranja u igricu. Kolika je vjerojatnost da će se dečki susresti u igrici?

Rješenje. Dogovoreni interval susreta je 1 sat, što je 60 minuta, a vrijeme čekanja je 15 minuta, što je $\frac{1}{4}$ sata. Uvjete zadatka možemo zapisati

- $14 \leq x \leq 15$ vrijeme Markovog ulaska u igricu,
- $14 \leq y \leq 15$ vrijeme Lukinog ulaska u igricu.

Tada je prostor elementarnih događaja Ω definiran na sljedeći način:

$$\Omega = \{(x, y) \in R^2 : 14 \leq x \leq 15, 14 \leq y \leq 15\}.$$

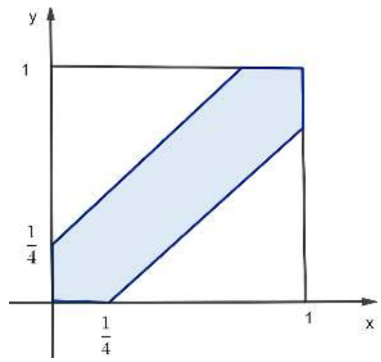
Kako će dečki čekati jedan drugog 15 minuta, srest će se uz uvjet

$$|x - y| \leq \frac{1}{4} \text{ tj. } x - \frac{1}{4} \leq y \leq x + \frac{1}{4}.$$

Ako s A označimo događaj susreta dva prijatelja u online igrici, tada ga opisujemo kao

$$A = \left\{(x, y) \in \Omega : x - \frac{1}{4} \leq y \leq x + \frac{1}{4}\right\}$$

i prikazujemo kao osjenčani dio na slici 3.

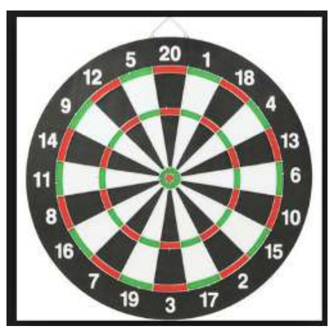


Slika 3. Grafički prikaz vjerojatnosti susreta

Vjerojatnost da će se prijatelji naći jednaka je površini osjenčanog dijela kvadrata, tj. $P(A) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} = 0,4375 \approx 44\%$.

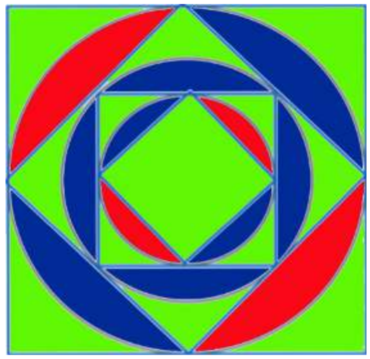
Primjer 4.4. Kako obojica prijatelja imaju tog popodneva nastavu u glazbenoj školi, dogovorili su susret u knjižnici škole, za vrijeme pauze između 16 i 17 sati. Dobili su projektni zadatak iz matematike „Pikado" u kojem će, koristeći znanja o pravilnim poligonima i površini pravilnih poligona, izraditi geometrijski motiv i koristiti se bojama za polja. Zadatak je izračunati vjerojatnost pogađanja lopticom određenog geometrijskog lika kao i vjerojatnost gađanja lopticom polja određene boje na motivu (slika 4).

*Rješenje.*Standardni pikado sastoji se od kruga podijeljenog na 20 sukladnih kružnih isječaka u dvije boje koje alterniraju.



Slika 4. Standardna ploča za pikado

Dečki su odlučili u motivu kombinirati kvadrate i krugove. Počeli su s kvadratom stranice 50 cm i nastavili s upisivanjem krugova i kvadrata. Motiv koji su dobili prikazan je na slici. Vidljive dijelove svih kvadrata obojali su zelenom bojom, a krugova plavom i crvenom bojom (slika 5).



Slika 5. Markov i Lukin geometrijski motiv u igri „Pikado“

Osnovni lik je kvadrat duljine stranice 50cm. U njega su upisana tri kvadrata i tri kruga. Stranice upisanih kvadrata su redom od većeg ka manjem duljine $25\sqrt{2}$ cm, 25 cm i $12{,}5\sqrt{2}$ cm, dok su radijusi kružnica od veće ka manjoj 25 cm, $12{,}5\sqrt{2}$ cm i $12{,}5$ cm.

Površina cijelog pikada je 2 500 cm^2. Površina svih kružnih odsječaka je

$$P_o = 25^2\pi - (25\sqrt{2})^2 + (12{,}5\sqrt{2})^2\pi - 25^2 + 12{,}5^2\pi - (12{,}5\sqrt{2})^2 \approx 1248{,}617 .$$

Vjerojatnost da će biti pogođen dio kruga je $P(krug) \approx \dfrac{1248{,}617}{2500} \approx 0{,}49945 \approx 50\%$.

Kako je na motivu samo još jedna vrsta lika, a to je kvadrat, dečki su zaključili da je vjerojatnost da će biti pogođen dio kvadrata također približno 50%.

Kolika je vjerojatnost da će biti pogođeno crveno polje? Četiri kružna odsječka su crvene boje, a njihova površina je

$$P_c = \frac{1}{2}\left(25^2\pi - (25\sqrt{2})^2 + 12{,}5^2\pi - (12{,}5\sqrt{2})^2\right) \approx 445{,}9346 .$$

Vjerojatnost pogotka crvenog polja je $P(crveno) \approx \dfrac{445{,}9346}{2500} \approx 0{,}17837 \approx 18\%$. Kako su sva ostala polja plave boje također kružni odsječci, vjerojatnost pogotka plavog polja je $50\% - 18\% = 32\%$, a 50% je vjerojatnost pogotka zelenog polja jer su to polja kvadrata na motivu.

Dečki su bili zadovoljni svojim rješenjem zadatka. Bilo je puno crtanja, računanja, diskutiranja i cijelo vrijeme su pričali matematičkim jezikom. Nakon završenog posla, izašli su iz knjižnice i obojica su imala istu misao: „Matematika je moćna!“